4

Prueba de hipótesis

En el presente capítulo se desarrollan procesos de inferencia estadística centrados en la prueba de hipótesis, los cuales involucran uno o más parámetros desconocidos; se inicia con algunos conceptos básicos asociados al tema de hipótesis y luego se plantea un algoritmo que posibilita llevar a cabo diversos procedimientos de inferencia estadística básica, entre ellos, la prueba de hipótesis para la media y la proporción poblacionales, la diferencia de medias y de proporciones poblacionales, la varianza y el cociente de varianzas. Al final del capítulo se indica la forma de calcular algunos tamaños de la muestra para casos específicos.

4.1. Conceptos básicos sobre prueba de hipótesis

Algunos de los aspectos teóricos relacionados con el tema de prueba de hipótesis son asumidos o adaptados de los conceptos expuestos al respecto por diversos autores, entre ellos: Bickel & Doksum (1977), Canavos (1988), Devore (2008), Freund y Miller (2000), Gutiérrez *et al.* (2008), Hettmansperger (1984), Kandu *et al.* (2008), Lindgren (1993), Macchi *et al.* (2014), Mayorga (2003) y Walpole, Myers, Myers & Ye (2007). Enseguida se presentan algunos conceptos necesarios para desarrollar procesos de prueba de hipótesis.

4.1.1 Conceptos sobre hipótesis

Una hipótesis es una proposición, afirmación o conjetura sobre algo; puede ser verdadera o falsa, y se debe probar.

Una hipótesis estadística es una afirmación acerca de los parámetros poblacionales, para determinar si el parámetro ha cambiado o se mantiene en un valor fijo.

4.1.2 Clases de hipótesis

Los procesos de inferencia estadística suelen involucrar dos clases de hipótesis, denominadas hipótesis nula e hipótesis alternativa; generalmente, la primera se simboliza con H_0, y la segunda, con H_1.

La hipótesis nula (Ho) se formula como una afirmación que indica que un determinado parámetro se mantiene en un valor; esta hipótesis es aquella que se acepta o se rechaza (González, 2003; Krueger, 2001).

La hipótesis alternativa (H_1) se plantea en términos de que el parámetro ha cambiado (aumentado o disminuido); esta es la hipótesis de investigación, la cual se prueba utilizando los datos de una muestra aleatoria.

Ejemplo 4.1. Enseguida se plantean tres parejas de hipótesis relacionadas con el parámetro media poblacional asociado con el ingreso mensual (en pesos) de los trabajadores de la empresa M&T; sin embargo, en un proceso de inferencia estadística básica solamente se ha de plantear una pareja de hipótesis.

i) Ho: $\mu = 700\,000$

H_1: $\mu > 700\,000$

ii) Ho: $\mu = 700\,000$

H_1: $\mu < 700\,000$

iii) Ho: $\mu = 700\,000$

H_1: $\mu \neq 700\,000$

La primera pareja establece como hipótesis nula que el ingreso mensual promedio (en pesos) de los trabajadores de la empresa M&T es de 700 000; en cambio, la hipótesis alternativa indica que el ingreso mensual promedio (en pesos) de los trabajadores de la empresa M&T es mayor a 700 000. De modo similar, han de interpretarse la segunda y la tercera pareja de hipótesis, donde la alternativa indica que el promedio es inferior o diferente, respectivamente.

Ejemplo 4.2. A continuación se plantean tres parejas de hipótesis asociadas con el porcentaje poblacional de fumadores en la Universidad TRT; no obstante, en un proceso de inferencia estadística básica solo una de las tres parejas de hipótesis se ha de plantear.

i) Ho: $p = 24\ \%$
H_1: $p > 24\ \%$

ii) Ho: $p = 24\ \%$
H_1: $p < 24\ \%$

iii) Ho: $p = 24\ \%$
H_1: $p \neq 24\ \%$

La segunda pareja establece como hipótesis nula que el porcentaje poblacional de fumadores en la Universidad TRT es del 24 %, contra la hipótesis alternativa de que el porcentaje poblacional de fumadores en la Universidad TRT es inferior al 24 %. De forma similar, han de interpretarse la primera y la tercera pareja de hipótesis, considerando el porcentaje mayor o diferente al 24 % en la hipótesis alternativa.

4.1.3 Tipos de errores

En general, se suelen cometer dos tipos de errores al aceptar o rechazar la hipótesis nula: el error tipo I y el error tipo II.

El *error tipo I* consiste en rechazar la hipótesis nula Ho, dado que es verdadera (cierta). La probabilidad de rechazar la hipótesis nula, siendo verdadera, se denomina nivel de significancia de la prueba y se denota con α ; de aquí se desprende que $1 - \alpha$ sea la probabilidad de no rechazar (aceptar) Ho, dado que esta es verdadera (Krueger, 2001).

El *error tipo II* consiste en aceptar la hipótesis nula Ho, dado que es falsa. La probabilidad de aceptar la hipótesis nula, siendo falsa, se denota con β ; de aquí se sigue que $1 - \beta$ sea la probabilidad de rechazar Ho dado que esta es falsa (Krueger, 2001).

4.1.4 Algoritmo para desarrollar un proceso de prueba de hipótesis

1. Plantear las hipótesis Ho y H_1
2. Establecer el nivel de significación $\alpha \leq 0.05$
3. Determinar la dirección de la prueba: unilateral izquierda, unilateral derecha o bilateral
4. Determinar la estadística de prueba: "Z", "t", "X^2", "F" y calcularla

5. Comparar el valor de la estadística de prueba con el valor en la distribución teórica
6. Tomar una decisión: aceptar Ho o, en caso contrario, rechazar Ho
7. Escribir una conclusión

El anterior algoritmo guarda una estrecha relación con los pasos del método científico: observación (tomar muestras), planteamiento de hipótesis, comprobación (prueba) y conclusión.

Ejemplo 4.3. De forma general, si θ es el parámetro involucrado en una prueba de hipótesis simples, y θ_0 es un valor particular de este parámetro, entonces se ha de plantear una de las tres parejas de hipótesis:

i) Ho: $\theta = \theta_0$
H$_1$: $\theta > \theta_0$

ii) Ho: $\theta = \theta_0$
H$_1$: $\theta < \theta_0$

iii) Ho: $\theta = \theta_0$
H$_1$: $\theta \neq \theta_0$

En este contexto, las hipótesis contempladas en *i)* generan una prueba unilateral derecha; en esta, el nivel de significancia α ha de ubicarse en la cola derecha de la curva correspondiente a la función de densidad de probabilidad (modelo teórico para los datos) y genera una región de rechazo de la hipótesis nula, simbolizada con RH_0 (Ares, 1999), y una región de aceptación de la hipótesis nula, denotada con AH_0 (ver Figura 4.1).

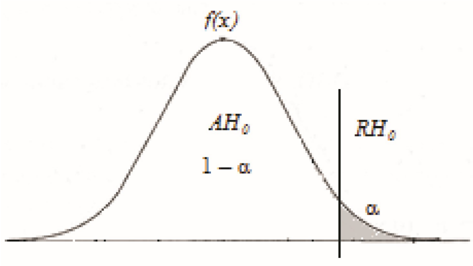

Figura 4.1 Prueba unilateral derecha

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

Las hipótesis consideradas en *ii)* generan una prueba unilateral izquierda; ahora, el nivel de significancia α ha de ubicarse en la cola izquierda y genera una región de rechazo de la hipótesis nula (RH_0) y una región de aceptación de la hipótesis nula (AH_0) (ver Figura 4.2).

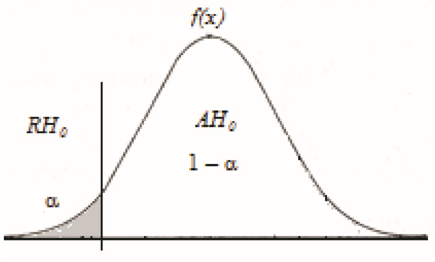

Figura 4.2 Prueba unilateral izquierda

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

Las hipótesis consideradas en *iii)* generan una prueba bilateral; ahora, la mitad del nivel de significancia α se ubicará en la cola izquierda, y la otra mitad, en la cola derecha; esto genera dos regiones de rechazo de la hipótesis nula (RH_0) y una región de aceptación de la hipótesis nula (AH_0) (ver Figura 4.3).

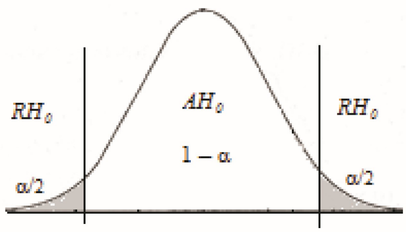

Figura 4.3 Prueba bilateral

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4.2 Prueba de hipótesis sobre la media poblacional

El proceso de inferencia estadística para la prueba de hipótesis asociadas con la media poblacional involucra los siguientes pasos (algoritmo):

1. Planteamiento de hipótesis

i) Ho: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu > \mu_0$

ii) Ho: $\mu = \mu_0$

H_1: $\mu < \mu_0$

iii) Ho: $\mu = \mu_0$

H$_1$: $\mu \neq \mu_0$

2. Fijación del nivel de significancia α con un valor inferior o igual al 5 %
3. Dirección de la prueba en concordancia con una de las parejas de hipótesis: unilateral derecha, unilateral izquierda o bilateral
4. Estadística de prueba. Se presentan cuatro casos, a saber:

Caso 1. Si se conoce la desviación estándar poblacional, bajo la hipótesis nula, se usa:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Caso 2. Si no se conoce la desviación estándar poblacional, para muestras inferiores a 30 se utiliza una estadística de prueba asociada con la distribución *t-student* con *n -1* grados de libertad, bajo la hipótesis nula, resulta:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}}$$

Caso 3. Si se conoce la desviación estándar poblacional y se muestrea de una población finita de tamaño *N*, entonces, bajo la hipótesis nula, se usa la estadística de prueba siguiente:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)}$$

Caso 4. Si no se conoce la desviación estándar poblacional y se muestrea de una población normal finita de tamaño *N*, entonces, bajo la hipótesis nula, se usa la estadística de prueba siguiente:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)}$$

5. Comparar el valor de la estadística de prueba con el valor en la distribución teórica

6. Tomar una decisión: aceptar Ho si la estadística de prueba cae en la región *AHo* o, en caso contrario, rechazar Ho

7. Conclusión

Ejemplo 4.4. Un productor de computadores afirma que sus teclados duran 20 000 horas en promedio. Un distribuidor potencial de teclados quiere verificar la afirmación del productor; para esto, somete 100 teclados a prueba y encuentra una duración media de 19 320 horas; si la experiencia pasada indica que los teclados producidos tienen una desviación estándar poblacional de 2000 horas, probar la afirmación del productor usando un nivel de significación del 2.5 %.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho: $\mu = 20\,000$
H_1: $\mu < 20\,000$

2. Nivel de significación $\alpha = 0.025$
3. La dirección de la prueba y la región crítica se observan en la Figura 4.4.

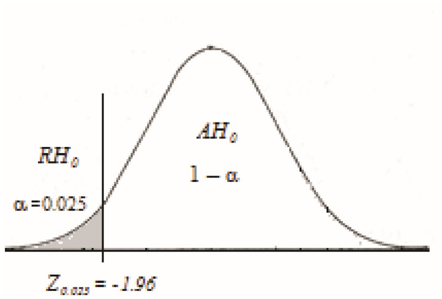

Figura 4.4 Prueba unilateral izquierda para la media poblacional
Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba, se utiliza la siguiente información:

$$\bar{X} = 19320 \qquad \sigma = 2000 \qquad n = 100$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{19320 - 20000}{\frac{2000}{\sqrt{100}}} = \frac{-680}{200} = -3.4$$

5. Como la estadística de prueba se ubica en la región *Rho,* dado que el valor -3.4 es inferior al valor teórico -1.96, entonces se rechaza la hipótesis Ho: μ=20 000; es decir, no hay evidencias suficientes para aceptarla. De otro modo, el valor-P correspondiente a la estadística Z=-3.4 de prueba es 0.0003; este valor es menor que el nivel de significancia del 2.5 % = 0.025, esto también indica que se rechaza la hipótesis nula.

6. Decisión: rechazar Ho: μ= 20 000

7. Finalmente, con un nivel de significancia del 2.5 % (confiabilidad del 97.5%) se concluye que la duración promedio de los teclados no es 20 000 horas, es inferior a este valor; luego hay evidencias suficientes para rechazar la afirmación del productor. En consecuencia, el distribuidor tiene la razón.

Ejemplo 4.5. Un distribuidor de artículos eléctricos afirma que las lámparas que expende duran, en promedio, 15 000 horas. Un usuario difiere de esa afirmación y decide seleccionar una muestra aleatoria de 21 lámparas, y encuentra una duración media de 14 800 horas, con una desviación estándar de 1500 horas; probar la afirmación del distribuidor usando un nivel de significación del 5 %.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho:μ = 15 000

H_1: $\mu \neq$ 15 000

2. Nivel de significación $\alpha =$ 0.05, $\frac{\alpha}{2}$ =0.025

3. Se trata de una prueba bilateral, la región crítica se observa en la Figura 4.5. En esa se han de ubicar los valores:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025,20} = -2.086 \qquad t_{1-\frac{\alpha}{2}} = t_{0.975,20} = 2.086$$

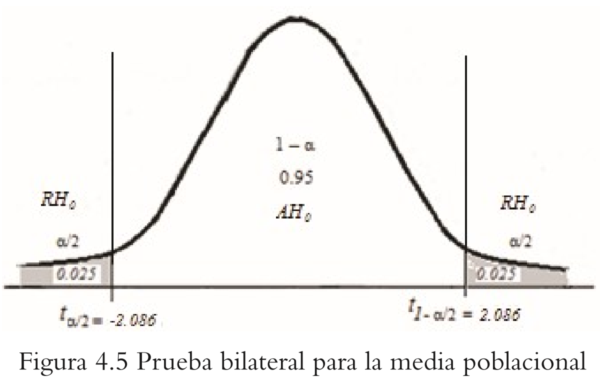

Figura 4.5 Prueba bilateral para la media poblacional

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba, se usa la siguiente información:

$$\bar{X} = 14\,800 \qquad S = 1500 \qquad n = 21$$

Además, se requiere determinar la desviación estándar corregida a fin de aplicar una estadística asociada con una *t-student*:

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1}S^2 = \frac{21}{20}(1500)^2) = 2362500 \rightarrow \hat{S} = \sqrt{2362500} = 1537.04$$

Luego

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}} = \frac{14800 - 15000}{\frac{1537.04}{\sqrt{21}}} = \frac{-200}{335.41} = -0.5962$$

5. Como la estadística de prueba se ubica en la región *AHo,* dado que el valor -0.5962 se encuentra entre los valores -2.086 y 2.086 de la distribución teórica, entonces se acepta la hipótesis Ho:μ=15 000; es decir, no hay evidencias suficientes para rechazarla.

6. Decisión: aceptar Ho: μ= 15 000

7. Finalmente, con un nivel de significancia del 5 % se concluye que la duración promedio de las lámparas es igual a 15 000 horas, luego hay evidencias suficientes para aceptar la afirmación hecha por el productor, quien sí tiene la razón.

Ejemplo 4.6. Tomando como referencia un lote conformado por 1000 latas de atún que presenta una desviación estándar poblacional de 5 g, un funcionario de control de pesas y medidas afirma que esas latas no presentan un peso promedio de 184 g, como se anuncia en la etiqueta del producto; por el contrario, el productor sostiene que efectivamente las latas que produce sí tienen ese peso promedio. El funcionario toma una muestra aleatoria de 25 latas y encuentra un peso promedio de 182 g. Usar un nivel de significancia del 4 % para aceptar o rechazar la afirmación del productor.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho:μ= 184

H_1: $\mu \neq 184$

2. Nivel de significación α = 0.04; $\frac{\alpha}{2} = 0.02$

3. En este ejemplo se tiene una prueba bilateral y la región crítica se observa en la Figura 4.6.

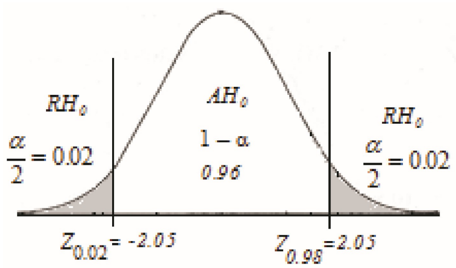

Figura 4.6 Prueba bilateral para la media poblacional

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Para la estadística de prueba, se utiliza la siguiente información:

$$\bar{X} = 182 \quad \sigma = 5 \quad n = 25 \quad N = 1000$$

La estadística de prueba es:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{182 - 184}{\frac{5}{\sqrt{25}}\sqrt{\frac{1000-25}{1000-1}}} = \frac{-2}{\sqrt{\frac{975}{999}}} = \frac{-2}{\sqrt{0.9759}} = \frac{-2}{0.9878} = -2.024$$

5. Como la estadística de prueba se ubica en la región AH_0, entonces, se acepta la hipótesis Ho:μ=184; es decir, no hay evidencias suficientes para rechazarla.

6. Decisión: aceptar Ho: μ=184

7. Finalmente, con un nivel de significancia del 4 % se concluye que el peso promedio de las latas de atún en la población (lote) es de 184 g; luego el productor tiene la razón.

4.3 Prueba de hipótesis para la proporción poblacional

El proceso de inferencia estadística para realizar una prueba de hipótesis asociadas con la proporción o porcentaje poblacional incluye un algoritmo con los siguientes pasos:

1. Planteamiento de hipótesis

i) Ho: $p = p_0$

H$_1$: $p > p_0$

ii) Ho: $p = p_0$

H$_1$: $p < p_0$

iii) Ho: $p = p_0$

H$_1$: $p \neq p_0$

2. Fijación del nivel de significancia α

3. Dirección de la prueba. Se especifica en correspondencia con cada una de las parejas de hipótesis: para la pareja *i)* se usa una prueba unilateral derecha, como en la Figura 4.1; el caso *ii)* corresponde a una prueba unilateral izquierda, como se observa en la Figura 4.2, y para la pareja *iii)* se utiliza una prueba bilateral, como se ilustra en la Figura 4.3.

4. Estadística de prueba

Se presentan dos casos, a saber:

Caso 1. Si se tiene una poblacional infinita y un tamaño de muestra *n* grande, entonces, bajo la hipótesis nula, se usa la siguiente estadística de prueba:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$$

En este caso, se ha de tener presente que $q_0 = 1 - p_0$.

Caso 2. Si se tiene una poblacional finita de tamaño *N* y un tamaño de muestra *n* grande, entonces, bajo la hipótesis nula, se utiliza la estadística de prueba que se indica a continuación:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}}$$

5. Comparación del valor de la estadística de prueba con el valor en la distribución teórica

6. Decisión: aceptar Ho, en caso contrario, rechazar Ho.

7. Conclusión

Ejemplo 4.7. Un distribuidor de gas en el departamento de Boyacá, Colombia, afirma que el 40 % de los hogares boyacenses adquieren el gas domiciliario en su compañía; un competidor duda de esa afirmación y selecciona una muestra aleatoria de 400 hogares boyacenses, y encuentra que 180, efectivamente, le compran el gas al citado distribuidor; probar la afirmación hecha por el distribuidor de gas usando un nivel de significancia del 3 %.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho: $p = 0.4$

H_1: $p < 0.4$

2. Nivel de significancia $\alpha = 0.03$

3. Dirección de la prueba. Se trata de una prueba unilateral izquierda, la región crítica se observa en la Figura 4.7

4. Estadística de prueba
Se tienen los siguientes datos provenientes de la muestra:

$$n = 400 \quad x = 180 \quad \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{180}{400} = 0.45$$

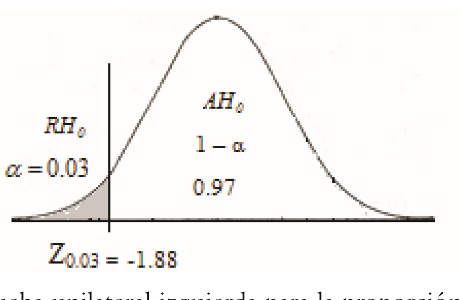

Figura 4.7 Prueba unilateral izquierda para la proporción poblacional

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

La estadística de prueba por utilizar es:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.45 - 0.4}{\sqrt{\frac{(0.4)(0.6)}{400}}} = \frac{0.05}{\sqrt{0.0006}} = \frac{0.05}{0.024494} \cong 2.041$$

En este caso, se ha tenido en cuenta que $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0.4 = 0.6$.

5. El valor de la estadística de prueba, 2.041, cae en la región AH_0, de aceptación de la hipótesis nula H_0, dado que es mayor que el valor de Z=-1.88 en la distribución teórica normal estándar.

6. Decisión: aceptar Ho: $p = 0.4$

7. Finalmente, con un nivel de significancia del 3 % se concluye que la afirmación hecha por el distribuidor, de que el 40 % de los hogares boyacenses le compra el gas domiciliario a su compañía es cierta; no hay evidencias suficientes para rechazar tal afirmación.

Ejemplo 4.8. Un importador de peras considera que en un lote conformado por 5000, que acaba de adquirir, solamente el 90 % ha llegado en condiciones óptimas y la fruta no se perderá; el vendedor quiere probarle al importador que un porcentaje mayor de peras ha llegado en óptimas condiciones; para esto selecciona una muestra aleatoria de 200 peras y encuentra que 184 están en óptimas condiciones. Probar la hipótesis del importador usando un nivel de significancia del 5 %.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho: $p = 0.9$

H_1: $p > 0.9$

2. Nivel de significancia $\alpha = 0.05$

3. Dirección de la prueba. Se trata de una prueba unilateral derecha; la región crítica se observa en la Figura 4.8.

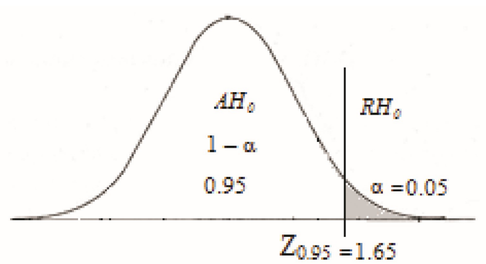

Figura 4.8 Prueba unilateral derecha para la proporción poblacional

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba

Se tienen los siguientes datos provenientes de la muestra:

$$n = 200 \quad x = 184 \quad \hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{184}{200} = 0.92$$

La estadística de prueba por utilizar para un tamaño de la población *N*=5000 es:

$$Z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}} = \frac{0.92 - 0.9}{\sqrt{\frac{(0.9)(0.1)}{200}}\sqrt{\frac{5000-200}{5000-1}}} = \frac{0.02}{(0,02121)(0.97989)} = \frac{0.02}{0.02078} \cong 0.9624$$

En este caso, se ha tenido en cuenta que $q_0 = 1 - p_0 = 1 - 0.9 = 0.1$.

5. El valor de la estadística de prueba, 0.9624, cae en la región AH_0 de aceptación de la hipótesis nula H_0, puesto que es menor que el valor de Z=1.65 en la distribución teórica normal estándar.

6. Decisión: aceptar Ho: $p = 0.9$

7. En consecuencia, con un nivel de significancia del 5 % se concluye que la afirmación hecha por el importador de que solamente el 90 % de las peras del lote que acababa de adquirir han llegado en condiciones óptimas es cierta; no hay evidencias suficientes para rechazar tal afirmación. El importador tiene la razón.

4.4 Prueba de hipótesis para la diferencia de proporciones poblacionales

Un proceso de inferencia estadística para efectuar una prueba de hipótesis relacionada con la diferencia de proporciones poblacional se desarrolla a través de un algoritmo con los siguientes pasos:

1. Planteamiento de hipótesis

i) Ho: $p_1 - p_2 = 0$

H_1: $p_1 - p_2 > 0$

ii) Ho: $p_1 - p_2 = 0$

H_1: $p_1 - p_2 < 0$

iii) Ho: $p_1 - p_2 = 0$

H_1: $p_1 - p_2 \neq 0$

Estas tres parejas de hipótesis también se escriben de la siguiente manera:

i) Ho: $p_1 = p_2$

H$_1$: $p_1 > p_2$

ii) Ho: $p_1 = p_2$

H$_1$: $p_1 < p_2$

iii) Ho: $p_1 = p_2$

H$_1$: $p_1 \neq p_2$

2. Fijación del nivel de significancia α

3. Dirección de la prueba. Se determina en concordancia con cada una de las parejas de hipótesis: para la pareja *i)* se usa una prueba unilateral derecha, como en la Figura 4.1; el caso *ii)* corresponde a una prueba unilateral izquierda, como se observa en la Figura 4.2, y para la pareja *iii)* se utiliza una prueba bilateral, como se ilustra en la Figura 4.3.

4. Estadística de prueba

De la expresión 2.6 se tiene que:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

La anterior expresión, bajo la hipótesis nula H$_0$: $p_1 = p_2$, se simplifica y escribe de la siguiente forma:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{p_1 q_1 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

Sin embargo, es imposible calcular la cantidad $p_1 q_1$, debido a que los parámetros p_1 y q_1 son desconocidos; con el propósito de obtener un valor para la estadística de prueba Z se utiliza la siguiente estimación:

$$p = p_1 = p_2$$

Donde el valor de p se obtiene de la siguiente manera:

$$p = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$$

En este contexto, la estadística de prueba por utilizar es:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Con $q = 1 - p$

5. Comparación del valor de la estadística de prueba con el valor de la distribución teórica; esta corresponde a una distribución normal estándar.
6. Decisión: aceptar Ho o, en caso contrario, rechazar Ho.
7. Conclusión

Ejemplo 4.9. El gobierno nacional afirma que el porcentaje de desempleo en la ciudad de Medellín (Antioquia) y en la ciudad de Bogotá es igual; un periodista difiere de esa afirmación y decide tomar una muestra aleatoria de 1500 ciudadanos en Medellín, encontrando que el 11 % de ellos está desempleado, y selecciona otra muestra de 2000 ciudadanos en Bogotá, que revela un 9 % de desempleo; utilizar un nivel de significancia del 3 % para aceptar o rechazar la afirmación del gobierno.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho: $p_1 = p_2$

H_1: $p_1 \neq p_2$

2. Nivel de significancia $\alpha = 0.03$; $\frac{\alpha}{2} = 0.015$

3. Dirección de la prueba. Se trata de una prueba bilateral; la región crítica se observa en la Figura 4.9, donde se presenta una curva normal estándar.

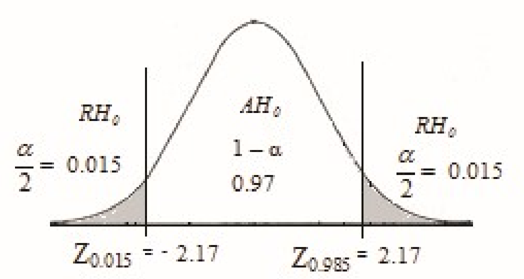

Figura 4.9 Prueba bilateral para la diferencia de proporciones poblacionales

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba

En este ejemplo se tiene que:

Medellín	Bogotá
$n_1 = 1500$	$n_2 = 2000$
$\hat{p}_1 = 0.11$	$\hat{p}_2 = 0.09$
$\hat{q}_1 = 1 - 0.11 = 0.89$	$\hat{q}_2 = 1 - 0.09 = 0.91$

La estadística de prueba por utilizar es:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

En primera instancia, se realiza el cálculo siguiente:

$$p = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2} = \frac{1500(0.11) + 2000(0.09)}{1500 + 2000} = \frac{345}{3500} = 0.09857$$

Luego, se determina el valor $q = 1 - p = 1 - 0.09857 = 0.90143$

Reemplazando los valores en la estadística de prueba, resulta:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.11 - 0.09}{\sqrt{(0.09857)(0.90143)\left(\frac{1}{1500} + \frac{1}{2000}\right)}} = \frac{0.02}{\sqrt{0.0001036}} = \frac{0.02}{0.01017} = 1.966$$

5. El valor de la estadística de prueba, 1.966, cae en la región AH_0, de aceptación de la hipótesis nula H_0, puesto que se encuentra entre Z=-2.17 y Z=2.17 de la distribución teórica normal estándar.

6. Decisión: aceptar Ho: $p_1 = p_2$

7. Luego, con un nivel de significancia del 3 %, se concluye que la afirmación hecha por el gobierno de que el porcentaje de desempleo es igual en las ciudades de Medellín y Bogotá es cierta; no hay evidencias suficientes para rechazar tal afirmación. En consecuencia, el gobierno tiene la razón.

4.5 Prueba de hipótesis para la diferencia de medias poblacionales

En esta sección se indica el proceso de inferencia estadística para la prueba de hipótesis asociadas con la diferencia de medias poblacionales, el cual ha de desarrollarse a través de los siguientes pasos:

1. Planteamiento de hipótesis

i) Ho: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
H$_1$: $\mu_1 - \mu_2 > 0$

ii) Ho: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
H$_1$: $\mu_1 - \mu_2 < 0$

iii) Ho: $\mu_1 - \mu_2 = 0$
H$_1$: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Estas tres parejas de hipótesis se expresan de forma equivalente, así:

i) Ho: $\mu_1 = \mu_2$
H$_1$: $\mu_1 > \mu_2$

ii) Ho: $\mu_1 = \mu_2$
H$_1$: $\mu_1 < \mu_2$

iii) Ho: $\mu_1 = \mu_2$
H$_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$

2. Fijación del nivel de significancia α

3. Dirección de la prueba. Se determina en concordancia con cada una de las parejas de hipótesis: para la pareja *i)* se usa una prueba unilateral derecha, como en la Figura 4.1; el caso *ii)* corresponde a una prueba unilateral izquierda, como

se puede observar en la Figura 4.2, y para la pareja *iii)* se utiliza una prueba bilateral, como se ilustra en la Figura 4.3. Ahora, la curva trazada corresponde a una distribución *t-student* o a una distribución normal estándar.

4. Estadística de prueba. Se presentan cuatro casos, a saber:

Caso 1. Si se conocen las desviaciones estándar poblacionales, en concordancia con la expresión 2.7 se ha de utilizar:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Sin embargo, bajo la hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2$ la anterior expresión se simplifica y reduce a la siguiente estadística de prueba:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Caso 2. Si las desviaciones estándar poblacionales son desconocidas, pero se suponen iguales, para muestras inferiores a 30 se utiliza una estadística de prueba asociada con la distribución t-student presentada a través de la expresión 2.8:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Nuevamente, bajo la hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2$ la anterior expresión se simplifica y reduce a la siguiente estadística de prueba:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

Donde S_p se obtiene por medio de la expresión:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Caso 3. Si las desviaciones estándar poblacionales son desconocidas, pero se suponen distintas, para muestras inferiores a 30 se utiliza una estadística de prueba asociada con la distribución t-student con *g* grados de libertad presentada a través de la expresión 2.9.

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}}$$

Otra vez, bajo la hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2$ la anterior expresión se simplifica y reduce a la siguiente estadística de prueba:

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}}$$

Caso 4. Si las desviaciones estándar poblacionales son desconocidas, pero las muestras tienen tamaños superiores a 30, se utiliza una estadística de prueba asociada con la distribución normal estándar dada en la expresión 2.10.

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}}$$

Bajo la hipótesis nula H_0: $\mu_1 = \mu_2$ la anterior expresión se simplifica; luego se usa la siguiente estadística de prueba:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}}$$

5. Comparar el valor de la estadística de prueba con el valor en la distribución teórica.

6. Tomar una decisión: aceptar Ho, en caso contrario, rechazar Ho.

7. Conclusión

Ejemplo 4.10. El gerente de la empresa S&T quiere determinar si los salarios por hora para los trabajadores de esa empresa en la ciudad A y la ciudad B son iguales; para ello toma una muestra aleatoria de 40 trabajadores en la primera ciudad y encuentra que el salario medio es de 6000 pesos por hora, con una desviación estándar de 200 pesos; luego, selecciona una muestra aleatoria de 54 trabajadores en la segunda ciudad y obtiene un salario promedio de 5940 por hora, con una desviación estándar de 180 pesos.

1. Planteamiento de hipótesis:

Ho: $\mu_1 = \mu_2$

H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

2. Nivel de significancia $\alpha = 0.05$; $\frac{\alpha}{2} = 0.025$

3. Dirección de la prueba. Se trata de una prueba bilateral; la región crítica se observa en la Figura 4.10, donde se presenta una curva normal estándar.

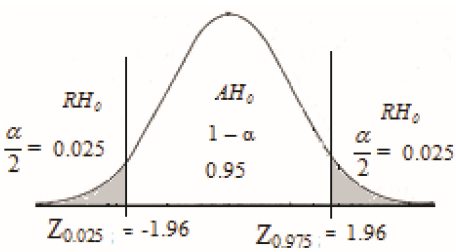

Figura 4.10 Prueba bilateral para la diferencia de medias poblacionales

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba

En este ejemplo los datos muestrales son:

Ciudad A	Ciudad B
$n_1 = 40$	$n_2 = 54$
$\bar{X}_1 = 6000$	$\bar{X}_2 = 5940$
$S_1 = 200$	$S_2 = 180$

Por tratarse de muestras mayores a 30 y desviaciones estándar desconocidas, la estadística de prueba que se ha de usar en la prueba de hipótesis es:

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}}$$

No obstante, para calcular el valor de la estadística se requiere determinar las varianzas corregidas o cuasivarianzas, tarea que se desarrolla a continuación:

$$\hat{S}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2 = \frac{40}{39}(200)^2 = 41025.64$$

$$\hat{S}_2^2 = \frac{n_2}{n_2 - 1} S_2^2 = \frac{54}{53}(180)^2 = 33011.32$$

Reemplazando los valores en la estadística de prueba, resulta:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\hat{S}_1^2}{n_1} + \frac{\hat{S}_2^2}{n_2}}} = \frac{6000 - 5940}{\sqrt{\frac{41025.64}{40} + \frac{33011.32}{54}}} = \frac{60}{\sqrt{1025.64 + 611.32}} = \frac{60}{40.459} = 1.4829$$

5. El valor de la estadística de prueba, 1.4829, cae en la región AH_0, de aceptación de la hipótesis nula H_0, puesto que se encuentra en Z=-1.96 y Z=1.96 en la distribución teórica normal estándar.

6. Decisión: aceptar Ho: $\mu_1 = \mu_2$

7. Conclusión, con un nivel de significancia del 5 % se concluye que los salarios promedio por hora para los trabajadores de la empresa S&T no difieren significativamente en las ciudades A y B; es decir, los salarios promedio por hora para tales trabajadores en las dos ciudades son iguales.

4.6 Prueba de hipótesis para la varianza poblacional

El proceso de inferencia estadística para realizar una prueba de hipótesis asociadas con la varianza poblacional incluye el siguiente algoritmo:
1. Planteamiento de hipótesis

i) Ho: $\sigma^2 = \sigma_0^2$
H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$

ii) Ho: $\sigma^2 = \sigma_0^2$
H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$

iii) Ho: $\sigma^2 = \sigma_0^2$
H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$

2. Fijación del nivel de significancia α

3. Dirección de la prueba. Se especifica en concordancia con cada pareja de hipótesis; en el primer caso, la región de rechazo se ubica en la cola derecha de una curva asimétrica correspondiente a la distribución *chi-cuadrado*, en el segundo, sobre la cola izquierda, y en el tercero sobre las dos colas; es decir, las zonas de rechazo se establecen de manera similar a las indicadas en las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3, solamente que ahora se trabaja sobre una curva asimétrica.

4. Estadística de prueba

La estadística de prueba está asociada con una distribución *chi-cuadrado* con *n -1* grados de libertad; esta, bajo la hipótesis nula, es:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2}$$

5. Comparación del valor de la estadística de prueba con el valor en la distribución teórica

6. Decisión: aceptar Ho o, en caso contrario, rechazar Ho.

7. Conclusión

Ejemplo 4.11. El espesor de una muestra aleatoria de 21 barras de chocolate es una variable aleatoria con desviación estándar corregida de 0.8 milésimas de pulgada; el proceso de fabricado de las barras de chocolate se encuentra bajo absoluto control si la varianza es de 0.38, y fuera de control si es mayor; un grupo de inspectores afirma que el proceso actualmente está fuera de control; probar esta hipótesis con un nivel de significancia del 5 %.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho: $\sigma^2 = 0.38$

H_1: $\sigma^2 > 0.38$

2. Nivel de significancia $\alpha = 0.05$

3. Dirección de la prueba. Se trata de una prueba unilateral derecha; la región crítica se observa en la Figura 4.11, donde se presenta una curva asimétrica correspondiente a una distribución chi-cuadrado.

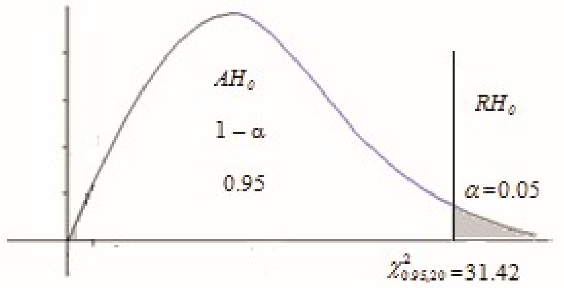

Figura 4.11 Prueba unilateral derecha para la varianza poblacional
Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba

En este ejemplo los datos muestrales son:

$$n = 21$$
$$\hat{S} = 0.8$$

Reemplazando los valores en la estadística de prueba, resulta:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(21-1)(0.8)^2}{0.38} = \frac{(20)(0.64)}{0.38} = \frac{12.8}{0.38} = 33.68$$

5. El valor de la estadística de prueba, 33.68, cae en la región RH_0, de rechazo de la hipótesis nula H_0, puesto que es mayor al valor teórico, 31.42, en la distribución chi- cuadrado con $n-1 = 21 - 1 = 20$ grados de libertad.

6. Decisión: rechazar Ho: $\sigma^2 = 0.38$; en consecuencia, se acepta que la varianza es mayor que 0.38.

7. Así, entonces, con un nivel de significancia del 5 % se concluye que el proceso de fabricación de las barras de chocolate está fuera de control; es decir, la afirmación hecha por el grupo de inspectores es cierta; no hay suficiente evidencia para rechazarla.

Ejemplo 4.12. En una muestra aleatoria proveniente de una población normal se obtuvo una desviación estándar corregida de 3 minutos para la cantidad de tiempo que tardaron 16 mujeres en terminar una prueba escrita para acceder a un puesto de trabajo nocturno; usar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis de que la desviación estándar poblacional es de 2.8 minutos contra la alternativa de que es inferior a este valor.

1. Planteamiento de hipótesis

$Ho: \sigma^2 = (2.8)^2$

$H_1: \sigma^2 < (2.8)^2$

2. Nivel de significancia $\alpha = 0.05$

3. Dirección de la prueba. Se trata de una prueba unilateral izquierda; la región crítica se observa en la Figura 4.12, donde se presenta una curva asimétrica correspondiente a una distribución chi-cuadrado.

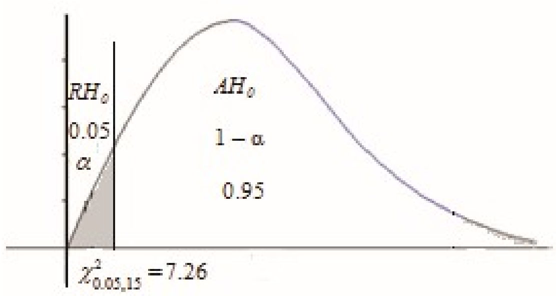

Figura 4.12 Prueba unilateral izquierda para la varianza poblacional

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba

En este ejemplo los datos muestrales son:

$$n = 16$$

$$\hat{S} = 3$$

Reemplazando los valores en la estadística de prueba, resulta:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} = \frac{(16-1)(3)^2}{(2.8)^2} = \frac{(15)(9)}{7.84} = \frac{135}{7.8} = 17.30$$

5. El valor de la estadística de prueba, 17.30, cae en la región AH_0, de aceptación de la hipótesis nula H_0, puesto que es mayor al valor teórico, 7.26, en la distribución *chi- cuadrado* con *n -1* = 16 – 1 = 15 grados de libertad.

6. Decisión: aceptar Ho: $\sigma^2 = (2.8)^2$, por lo tanto, se acepta que la desviación estándar poblacional es de 2.8 minutos.

7. Por consiguiente, con un nivel de significancia del 5 % se concluye que la desviación estándar poblacional es de 2.8 minutos; no hay evidencias suficientes para rechazarla.

Por otro lado, es conveniente indicar que la prueba *chi-cuadrado* también se utiliza para probar hipótesis referidas a la asociación de variables cualitativas (Fernández & Díaz, 2004).

4.7 Prueba de hipótesis para el cociente de varianzas poblacionales

En esta sección se indica un proceso de inferencia estadística para realizar una prueba de hipótesis asociadas con el cociente de varianzas poblacionales; este involucra los siguientes pasos:

1. Planteamiento de hipótesis

i) Ho: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

ii) Ho: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$

iii) Ho: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$

H_1: $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

Estas tres parejas de hipótesis también se escriben de la siguiente manera:

i) Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

ii) Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
H_1: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

iii) Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H$_1$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. Fijación del nivel de significancia α

3. Dirección de la prueba. Se especifica en correspondencia con cada una de las parejas de hipótesis por medio de curvas asimétricas asociadas con una distribución *F* de *Fisher;* se establecen zonas de rechazo de manera similar a las indicadas en las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3.

4. Estadística de prueba

La estadística de prueba está asociada con una distribución *F* de Fisher con n_1-1 grados de libertad para el numerador y n_2-1 grados de libertad para el denominador, como se indica enseguida:

$$F = \frac{\hat{S}_1^2 \sigma_2^2}{\hat{S}_2^2 \sigma_1^2}$$

Bajo la hipótesis nula H$_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, la anterior expresión se simplifica al cancelar las varianzas poblacionales; luego se usa la siguiente estadística de prueba:

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2}$$

5. Comparación del valor de la estadística de prueba con el valor en la distribución teórica

6. Decisión: aceptar o rechazar la hipótesis nula Ho

7. Conclusión

Ejemplo 4.13. Al comparar la resistencia a la tracción de las clases A y B de acero estructural, el diseño experimental permitió establecer los siguientes resultados: una varianza corregida de 19.7 en la primera muestra aleatoria de 11 unidades y una varianza corregida de 3.8 en la segunda muestra aleatoria de 9 unidades, donde las unidades de medición están dadas en miles de libras por pulgada cuadrada. Se supone que los datos de las muestras provienen de poblaciones normales independientes; probar la hipótesis de que las varianzas de tal resistencia difieren usando un nivel de significancia del 2 %.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. Nivel de significancia $\alpha = 0.02 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.01$

3. Dirección de la prueba. Se trata de una prueba bilateral; la región crítica se observa en la Figura 4.13, donde se presenta una curva asimétrica correspondiente a una distribución *F* de Fisher.

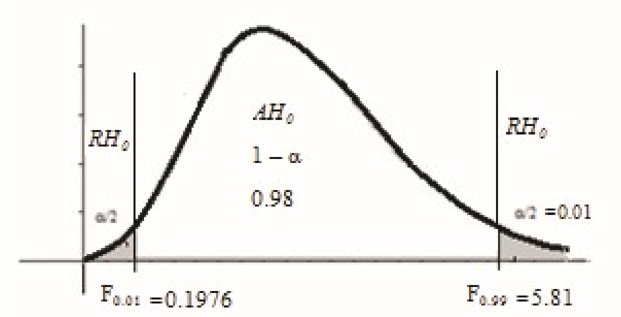

Figura 4.13 Prueba bilateral para la igualdad de varianzas poblacionales

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba

En este caso los datos muestrales son:

Acero clase A	Acero clase B
$n_1 = 11$	$n_2 = 9$
$\hat{S}_1^2 = 19.7$	$\hat{S}_2^2 = 3.8$

Reemplazando los valores en la estadística de prueba, resulta:

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{19.7}{3.8} = 5.1842$$

5. El valor de la estadística de prueba, 5.1842, cae en la región AH_0, de aceptación de la hipótesis nula H_0, puesto que este valor está entre los valores teóricos 0.1976 y 5.81 en la distribución *F* de Fisher n_1-1=11-1=10 grados de libertad para el numerador y n_2 -1 = 9 -1 = 8 grados de libertad para el denominador.

6. Decisión: aceptar Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, implica que se acepta que las varianzas poblacionales son iguales.

7. Por lo tanto, con un nivel de significancia del 2 % se concluye que las varianzas poblacionales correspondientes a las dos clases de acero estructural son iguales; no hay evidencias suficientes para afirmar que sean distintas.
Ejemplo 4.14. Para comparar la variabilidad en la duración de dos clases de bombillos etiquetados como W y T se tomaron dos muestras aleatorias; la primera, de 8 unidades, proporcionó una desviación estándar de 36 horas, y la segunda, de 7 unidades, generó una desviación estándar corregida de 26.7 horas; bajo el supuesto de que las muestras provienen de poblaciones normales independientes, probar la hipótesis de que la varianza de la clase de bombillos W es superior a la varianza de los tipo T usando un nivel de significancia del 5 %.

1. Planteamiento de hipótesis

Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

2. Nivel de significancia $\alpha = 0.05$

3. Dirección de la prueba. Se trata de una prueba unilateral derecha; la región crítica se observa en la Figura 4.14, donde se presenta una curva asimétrica correspondiente a una distribución *F* de Fisher.

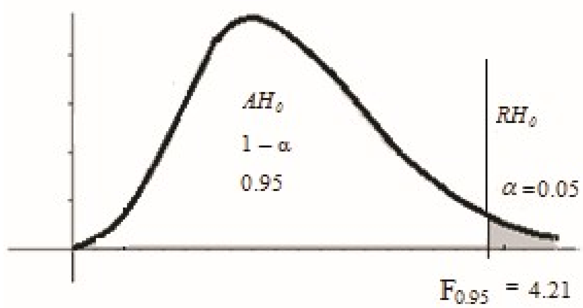

Figura 4.14 Prueba unilateral derecha para la igualdad de varianzas poblacionales
Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

4. Estadística de prueba

En este otro caso los datos de la muestra son:

Bombillos W	Bombillos T
$n_1 = 8$	$n_2 = 7$
$S_1 = 36$	$\hat{S}_2 = 26.7$

En primera instancia, conviene calcular la desviación estándar corregida correspondiente a los datos de la primera muestra:

$$\hat{S}_1^2 = \frac{n_1}{n_1 - 1} S_1^2 = \frac{8}{7}(36)^2 = 1481.14$$

Reemplazando estos resultados en la estadística de prueba, se tiene:

$$F = \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} = \frac{1481.14}{(26.7)^2} = \frac{1481.14}{712.89} = 2.0776$$

5. El valor de la estadística de prueba, 2.0776, cae en la región AH_0, de aceptación de la hipótesis nula H_0, puesto que es menor que el valor teórico 4.21 en la distribución *F* de Fisher n_1 -1=8-1=7 grados de libertad para el numerador, y n_2-1=7-1=6 grados de libertad para el denominador.

6. Decisión: aceptar Ho: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, lo cual implica que se acepta que las varianzas poblacionales son iguales.

7. Finalmente, con un nivel de significancia del 5 % se concluye que la varianza de la duración de la clase de bombillos W es igual a la varianza (poblacional) de la duración de los bombillos tipo T; no hay evidencias suficientes para afirmar que las varianzas poblacionales sean distintas estadísticamente.

4.8 Algunos tamaños de muestra

En esta sección se aborda la manera de obtener algunos tamaños de la muestra; la primera, asociada con una variable de tipo cualitativo, y la segunda, cuando el interés principal recae en una variable cuantitativa.

Si el interés principal recae en una característica de tipo cualitativo, entonces, la proporción muestral es una variable aleatoria pertinente para estudiar tal característica, y su distribución de probabilidad, de acuerdo con la expresión 2.5, es:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0,1)$$

Si la diferencia entre el estimador y el parámetro se denomina "*e*: error absoluto", para un determinado nivel de confianza 1- α, se tiene la siguiente igualdad:

$$Z = \frac{e}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \rightarrow Z\sqrt{\frac{pq}{n}} = e$$

De la anterior expresión se despeja *n*, que representa el tamaño de la muestra:

$$Z^2 \frac{pq}{n} = e^2 \rightarrow Z^2 pq = ne^2$$

De aquí se deduce que el tamaño de la muestra proveniente de una población infinta es:

$$n = \frac{Z^2 pq}{e^2} \tag{4.1}$$

El error absoluto y el nivel de confianza son aportados por el investigador y determinados con base en su experiencia. Si de estudios anteriores se conocen los parámetros *p* y *q,* entonces se usa directamente la expresión 4.1; en caso contrario, se trabaja bajo total incertidumbre, es decir, asignando el valor 0.5 tanto a *p* como a *q*, de la forma como se indica en la expresión 4.2; otra posibilidad consiste en seleccionar una muestra piloto y de allí obtener los estimadores de *p* y *q*, como se indica en la expresión 4.3.

$$n = \frac{Z^2 (0.5)(0.5)}{e^2} \rightarrow n = \frac{Z^2}{4e^2} \tag{4.2}$$

$$n = \frac{Z^2 \hat{p}\hat{q}}{e^2} \tag{4.3}$$

Ahora, si se muestrea de una población finita de tamaño *N,* entonces, la distribución para la proporción muestral es una normal estándar, dada por:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

Nuevamente, haciendo *e* igual a la diferencia entre el estimador y el parámetro, se realizan los procesos algebraicos pertinentes y se despeja *n* para obtener la expresión 4.4.

$$n = \frac{NZ^2 pq}{(N-1)e^2 + Z^2 pq} \tag{4.4}$$

Si de estudios anteriores se conocen los parámetros *p* y *q,* entonces se usa directamente la expresión 4.4; en caso contrario se trabaja bajo total incertidumbre y se asigna el valor 0.5 tanto a *p* como a *q,* de la manera como se indica en la expresión 4.5; otra posibilidad consiste en seleccionar una muestra piloto y, de allí, obtener los estimadores de *p* y *q,* como se indica en la expresión 4.6.

$$n = \frac{NZ^2 (0.5)(0.5)}{(N-1)e^2 + Z^2 (0.5)(0.5)} \tag{4.5}$$

$$n = \frac{NZ^2 \hat{p}\hat{q}}{(N-1)e^2 + Z^2 \hat{p}\hat{q}} \tag{4.6}$$

Por otro lado, si el interés principal recae en una característica de tipo cuantitativo, entonces el promedio muestral es una variable aleatoria adecuada para estudiar tal característica; cuando los datos sean relativamente homogéneos, su distribución de probabilidad, de acuerdo con la expresión 2.1, es la siguiente, cuando la desviación estándar es conocida:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Nuevamente, si llamamos error absoluto (*e*) a la diferencia entre el estimador y el parámetro, para un determinado nivel de confianza 1- α, se tiene la siguiente igualdad:

$$Z = \frac{e}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \rightarrow \quad Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = e$$

De la anterior expresión se despeja *n*,

$$\frac{Z^2\sigma^2}{n} = e^2 \quad \rightarrow \quad Z^2\sigma^2 = ne^2$$

De aquí se deduce que el tamaño de la muestra proveniente de una población infinta es:

$$n = \frac{Z^2\sigma^2}{e^2} \tag{4.7}$$

El error absoluto y el nivel de confianza son aportados por el investigador y determinados con base en su experiencia. Si de estudios anteriores se conoce la varianza poblacional, entonces se usa directamente la expresión 4.7; en caso contrario se selecciona una muestra piloto y de allí se obtiene el estimador insesgado de la varianza y se conforma la expresión 4.8.

$$n = \frac{Z^2\hat{S}^2}{e^2} \tag{4.8}$$

Ahora, si se muestrea de una población finita de tamaño *N,* entonces, la distribución para la media muestral es una normal estándar, dada por:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}}$$

Otra vez, haciendo *e* igual a la diferencia entre el estimador y el parámetro, se realizan los procesos algebraicos pertinentes y se despeja *n* para obtener la expresión 4.9,

$$n = \frac{NZ^2\sigma^2}{(N-1)e^2 + Z^2\sigma^2} \tag{4.9}$$

Si de estudios anteriores se conoce el parámetro varianza poblacional, entonces se usa directamente la expresión 4.4; en caso contrario, se selecciona una muestra piloto y de allí se obtiene el estimador insesgado para la varianza, con esto resulta la expresión 4.10.

$$n = \frac{NZ^2\hat{S}^2}{(N-1)e^2 + Z^2\hat{S}^2} \tag{4.10}$$

Ejemplo 4.15. Se requiere estudiar el grado de escolaridad (años promedio de estudio) de los individuos cabeza de familia residentes en el casco urbano de la ciudad M; los archivos del DANE en Colombia registran 51 000 núcleos familiares en el citado casco urbano; se necesita calcular el tamaño de la muestra para estimar el promedio de los años de estudio, admitiendo un error absoluto de medio año y utilizando un nivel de confianza del 95 %. De una muestra piloto se ha obtenido una desviación estándar corregida de 5 años.

En el ejemplo que nos ocupa, los datos son:

$$1-\alpha=0.95$$
$$\alpha=0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025$$
$$N=51000$$
$$\hat{S}=5$$
$$e=0.5$$

En este caso conviene utilizar la expresión 4.10; sin embargo, hace falta el valor de Z, que se obtiene de una distribución normal estándar para una probabilidad acumulada del 0.975, obteniéndose un valor de 1.96, como se observa en la Figura 4.15

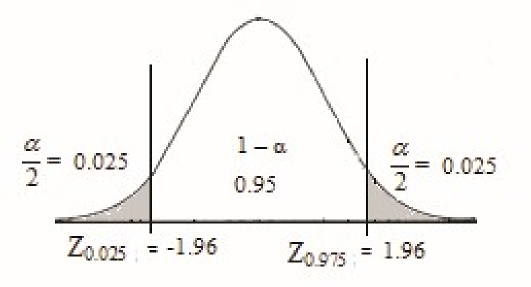

Figura 4.15 Valor de Z para un nivel de confianza del 95%
Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

Reemplazando los valores, resulta:

$$n=\frac{NZ^2\hat{S}^2}{(N-1)e^2+Z^2\hat{S}^2}=\frac{51000(1.96)^2(5)^2}{50999(0.5)^2+(1.96)^2(5)^2}=\frac{51000(3.8416)(25)}{50999(0.25)+(3.8416)(25)}$$

$$n=\frac{4898040}{12749.75+96.04}=\frac{4898040}{12845.79}\cong 381.29$$

En el contexto anterior, el tamaño de la muestra para estimar el promedio de los años de estudio, admitiendo un error absoluto de medio año y utilizando un nivel de confianza del 95 %, es de 381 individuos que sean cabeza de familia.

Esta cantidad de individuos se han de seleccionar apropiadamente, usando algunos de los métodos de muestreo descritos en el primer capítulo de este texto u otros.

Ejemplo 4.16. Se pretende investigar el mercado para el producto A; se sabe que el 30 % de los hogares de la ciudad H poseen este producto (han manifestado en algún momento que les ha gustado tal producto); calcular el tamaño de la muestra si se desea que el error máximo absoluto sea del 5 % con un nivel de confianza del 96 %.

En este caso, se tiene que:

$$1-\alpha = 0.96$$
$$\alpha = 0.04 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.02$$
$$e = 0.05$$
$$p = 0.3$$

En estas circunstancias, se recomienda utilizar la expresión 4.1; el valor de Z=2.055 se obtiene de una distribución normal estándar para una probabilidad acumulada del 0.98, como se indica en la Figura 4.16.

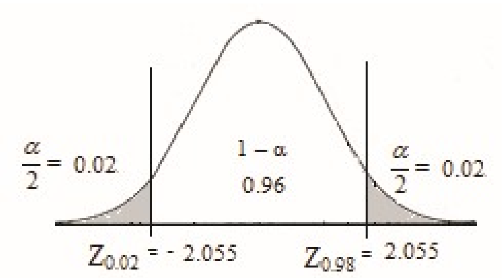

Figura 4.16 Valor de Z para un nivel de confianza del 96%

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

Reemplazando los valores, resulta:

$$n = \frac{Z^2 pq}{e^2} = \frac{(2.055)^2(0.3)(0.7)}{(0.05)^2} = \frac{(4.223)(0.21)}{0.0025} = \frac{0.88683}{0.0025} \cong 354.73$$

En estas circunstancias, el tamaño de la muestra para investigar el mercado del producto A, en la ciudad H, es de 354 individuos, admitiendo un error del 5 % y un nivel de confianza del 96 %. Este número de individuos se han de seleccionar de forma pertinente, utilizando un método de muestreo apropiado.

Ejemplo 4.17. Una población de 20 000 estudiantes de la universidad B está interesada en elegir al rector de esa institución; el candidato JA aspira a esa rectoría porque siente el apoyo del sector estudiantil; se quiere establecer el tamaño de la muestra para estimar el porcentaje de estudiantes que potencialmente apoyan a este candidato; usar un nivel de confianza del 99 % y asumir un error máximo del 2 %.

En esta situación se ha de trabajar bajo total incertidumbre, los datos asociados son:

$$1-\alpha=0.99$$
$$\alpha=0.01 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.005$$
$$e=0.02$$
$$p=0.5=q$$

En este caso se recomienda utilizar la expresión 4.5; el valor de Z=2.58 se obtiene de una distribución normal estándar para una probabilidad acumulada del 0.995, como se indica en la Figura 4.17.

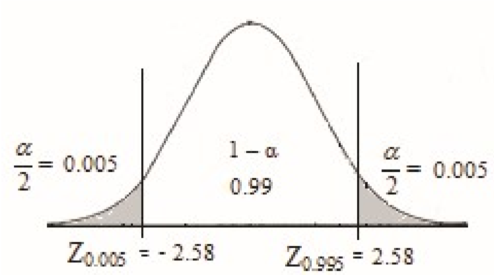

Figura 4.17 Valor de Z para un nivel de confianza del 99%

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

Reemplazando los valores, resulta:

$$n=\frac{NZ^2(0.5)(0.5)}{(N-1)e^2+Z^2(0.5)(0.5)}=\frac{20000(2.58)^2(0.5)(0.5)}{19999(0.02)^2+(2.58)^2(0.5)(0.5)}$$

$$n=\frac{20000(6.6564)(0.25)}{19999(0.0004)+(6.6564)(0.25)}=\frac{33282}{7.9996+1.6641}=\frac{33282}{9.6637}=3444.02$$

En este contexto, el tamaño de la muestra para para estimar el porcentaje de estudiantes que potencialmente apoyan al candidato JA es de 3444, admitiendo un error del 2 % y un nivel de confianza del 99 %.

Ejemplo 4.18. Se desea estudiar el salario promedio en miles de pesos por mes de una población de trabajadores del suroccidente colombiano; calcular el tamaño de la muestra con un nivel de confianza del 95 % y admitiendo un error de 600 pesos. De una muestra piloto de 20 trabajadores de esa zona del país se ha obtenido una desviación estándar de 10 000 pesos.

Los datos de que se disponen son los siguientes:

$$1-\alpha=0.95$$
$$\alpha=0.05 \rightarrow \frac{\alpha}{2}=0.025$$
$$S=10$$
$$e=0.6$$

Se ha de tener presente que los datos queden expresados en miles de pesos, tanto la desviación estándar como el error máximo. En este caso conviene utilizar la expresión 4.8; no obstante, hace falta calcular la desviación estándar corregida y el valor de Z; este valor se obtiene de una distribución normal estándar para una probabilidad acumulada del 0.975, el cual es 1.96, como se observa en la Figura 4.18.

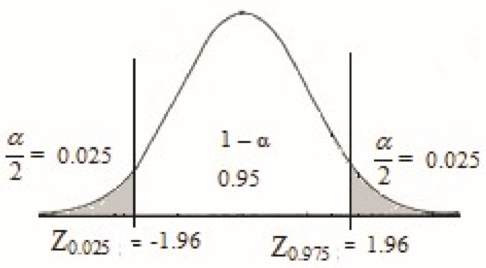

Figura 4.18 Valor de Z para un nivel de confianza del 95 %

Fuente: los autores con la ayuda del *software* libre R.

El valor de la desviación estándar corregida se obtiene así:

$$\hat{S}^2=\frac{n}{n-1}S^2=\frac{20}{19}(10)^2=1.0526(100)=105.26$$

Reemplazando los valores, resulta:

$$n=\frac{Z^2\hat{S}^2}{e^2}=\frac{(1.96)^2(105.26)}{(0.6)^2}=\frac{(3.8416)(105.26)}{(0.36)}=\frac{404.3668}{0.36}=1123.24$$

Finalmente, el tamaño para estudiar el salario promedio en miles de pesos por mes de una población de trabajadores del suroccidente colombiano es de 1123 trabajadores, con un nivel de confianza del 95 % y un error máximo de 600 pesos. Esta cantidad de trabajadores se han de seleccionar usando métodos de muestreo apropiados.

Actividades para el estudio independiente Capítulo 4

4.1 Un fabricante de llantas afirma que sus cauchos duran, en promedio, 21 000 km. Un distribuidor potencial de llantas considera que duran menos; por eso quiere verificar la afirmación del fabricante, y de un lote de 200 llantas selecciona 11 de manera aleatoria y las pone a rodar, encontrando un promedio de 20 500 kilómetros; si el fabricante informa que las llantas que ha producido tienen una desviación estándar poblacional de 1000 kilómetros, probar la afirmación del fabricante usando un nivel de significación del 2.5 %.

4.2 Un representante estudiantil afirma que al 10 % de los estudiantes de la universidad B les sirven el almuerzo casi frio; los administradores del restaurante en esta universidad reconocen que algunas veces eso ha sucedido, sin embargo, consideran que el porcentaje es muy inferior al 10 %. En el intento de desvirtuar la afirmación del representante se toma una muestra aleatoria de 150 estudiantes de esta universidad, y el 12 de ellos responden que alguna vez han recibido el almuerzo casi frio; probar la afirmación hecha por el representante, usando un nivel de significancia del 3 %.

4.3 Un estudio sobre el gusto por la práctica deportiva en hombres y mujeres reveló que en una muestra aleatoria de 380 hombres, a 171 de ellos les gusta esta práctica, y que en una muestra aleatoria de 350 mujeres, a 168 de ellas les gusta la práctica deportiva; estos resultados se constituyen en suficiente evidencia para afirmar que el porcentaje de gusto por la práctica deportiva de los hombres difiere del de las mujeres; usar un nivel de significancia del 3 % para realizar la prueba de hipótesis.

4.4 El Director general de Cámaras de Comercio en Colombia desea determinar al 5 % de significancia si las utilidades en millones por mes de las pequeñas empresas en Cali y Bucaramanga son iguales. Para esto toma en Cali una muestra aleatoria de 20 empresas pequeñas, y en Bucaramanga, una de 17 empresas, y encuentra que la utilidad promedio en la primera es de 8 millones de pesos por mes, con una desviación estándar de 500 mil pesos, y en la segunda, de 7.5 millones de pesos por mes, con una desviación estándar de 400 mil pesos.

4.5 El diámetro en una muestra aleatoria de 10 varillas de hierro de media pulgada es una variable aleatoria con desviación estándar corregida de 0.2 milésimas de pulgada; el proceso de fabricado de las varillas de hierro se encuentra bajo absoluto control si la varianza es de 0.09, y fuera de control si es mayor; un empleado que lleva el control de calidad sobre el diámetro de las varillas producidas considera que el proceso actualmente está fuera de control; probar esta hipótesis con un nivel de significancia del 5 %.

4.6 Para comparar la variabilidad en la duración de dos clases de calzado, A y B, se tomaron dos muestras aleatorias; la primera, de 6 pares, proporcionó una desviación estándar de 3 meses, y la segunda, de 5 pares, generó una desviación estándar corregida de 2.5 meses; bajo el supuesto de que las muestras provienen de poblaciones normales independientes, probar la hipótesis de que la varianza de la clase de calzado A es superior a la varianza de la clase de calzado B, usando un nivel de significancia del 5 %.

4.7 Se tiene una población finita de 600 personas; se seleccionó una muestra piloto del 2 % de la población total y se obtuvo una media muestral de 300 dólares para el salario promedio mensual; también se obtuvo de la muestra piloto una desviación estándar corregida de 50 dólares; si se admite un error del 3 % de la media muestral, calcular el tamaño muestral al nivel de confianza del 95 %.

4.8 Se requiere indagar el mercado para el producto H; se sabe que el 60 % de los individuos de la ciudad A utiliza diariamente este producto; calcular el tamaño de la muestra si se desea que el error máximo absoluto sea del 4 %, con un nivel de confianza del 96 %.

Ejercicios para el capítulo 4

4.1 Consultar sobre la forma como se realiza una prueba de hipótesis para muestras pareadas, también llamadas muestras relacionadas; asimismo, proporcionar un ejemplo de prueba de hipótesis.

4.2 Los siguientes datos corresponden a los ingresos por día de unos trabajadores independientes, en miles de pesos: 50, 30, 15, 20, 55, 35. Si se asume un error del 8 % de la media muestral, determinar el tamaño de una muestra con un $\alpha = 5$ %.

4.3 La muestra piloto para estimar la proporción y establecer el porcentaje de personas que tienen ingresos mensuales inferiores a 800 000 pesos mensuales en una población de tamaño $N = 200$ está dada por: 2 500 000, 2 090 000, 2 190 000, 750 000, 1 250 000, 700 000, 790 000 y 790 000. Asumir un error del 10 % y un $\alpha = 5$ % para determinar el tamaño de la muestra.

4.4 Un estudio sobre el gusto por el producto A en hombres y mujeres reveló que, en una muestra aleatoria de 600 hombres, a 480 de ellos les gusta este producto, y en una muestra aleatoria de 1000 mujeres, a 800 de ellas les gusta este producto; probar la hipótesis de que el porcentaje de gusto por el producto A de los hombres difiere del de las mujeres; usar un nivel de significancia del 5 % para realizar la prueba de hipótesis.

4.5 El Director general de Cámaras de Comercio en Colombia quiere determinar, al 5 % de significancia, si las utilidades en millones por mes de las pequeñas empresas en Medellín y Barranquilla son iguales. Para esto toma una muestra aleatoria de 24 pequeñas empresas en Medellín, y encuentra que la utilidad promedio es de 10 millones de pesos por mes, con una desviación estándar de 600 mil pesos, y selecciona una muestra aleatoria de 18 pequeñas empresas en Barranquilla, y obtiene una utilidad promedio de 9.5 millones de pesos por mes, con una desviación estándar de 550 mil pesos. Realizar la prueba de hipótesis considerando varianzas poblacionales diferentes.

4.6 Los siguientes datos corresponden a la variable calificación en estadística inferencial, en la universidad B, en una muestra piloto: 3.5, 4.5, 3.5, 4.0, 5.0, 2.0, 1.0, 4.5. Si el error es del 10 % de la calificación promedio y se trabaja con un nivel de confianza del 99 %, calcular el tamaño muestral si en toda la universidad han cursado 800 estudiantes la mencionada asignatura.

4.7 En un centro de distribución de computadores portátiles se venden dos marcas diferentes en un periodo de tiempo específico; en una semana se venden

300 portátiles, de un total de 450, de la marca A, y 280, de un total de 400, de la marca B. El administrador considera que los porcentajes poblacionales de venta de las dos marcas son diferentes; probar la hipótesis del administrador usando un nivel de significancia del 4 %.