5

INFORMACIÓN DE RETORNO SOBRE LAS ACTIVIDADES DE ESTUDIO INDEPENDIENTE

En este capítulo se desarrollan procesos de cálculo y se proporcionan las respuestas a las preguntas que se formulan en las actividades para el estudio independiente, que el estudiante o el lector debía haber resuelto una vez haya realizado una lectura comprensiva de los temas y revisado los ejemplos indicados a través de cada capítulo. Con el propósito de aclarar algunas dudas, se desarrollan completamente los ejercicios que se propusieron en las mencionadas actividades.

Capítulo 1

1.1
a) Espacio muestral
b) Experimento aleatorio
c) Evento
d) Continuo.
e) $\sigma -$ *álgebra de Borel*
f) Un espacio de probabilidad sobre Ω
g) Laplaciano

1.2 Clasificar cada uno de los siguientes espacios muestrales:

a) Espacio muestral discreto (finito)
b) Espacio muestral discreto (infinito contable)
c) Espacio muestral continuo (infinito no contable)
d) Espacio muestral discreto (finito)

1.3 De acuerdo con cada uno de los siguientes espacios muestrales, responder las preguntas correspondientes.

Si $\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$ y considerando las colecciones de subconjuntos de Ω siguientes:

$\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$

$\Im_2 = \{\phi, \{cc\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$

$\Im_3 = \{\phi, \{cc, cs\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$

$\Im_4 = \{\phi, \{cc, cs, sc\}, \{ss\}\}$

a) Sigma álgebra trivial

b) $\{sc, ss\}^c = \{cc, cs\} \notin \Im_2$

c) Sigma álgebra

d) $\Omega \notin \Im_4$

1.4 Asumiendo que todos los puntos del espacio muestral Ω tienen la misma probabilidad de ocurrir y dados los siguientes eventos:

$$E = \{cs, sc, ss\}$$

$$F = \{ss\}$$

e) $P(E) = \dfrac{3}{4}$

f) $P(F) = \dfrac{1}{4}$

g) $P(E \cup F) = \dfrac{3}{4}$

h) $P(E \cap F) = \dfrac{1}{4}$

i) $P(E^c) = \dfrac{1}{4}$

j) $P(E - F) = \dfrac{2}{4}$

1.5. Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω y sean F, E eventos en $\Im$ tales que $P(E) = p$, $P(F) = q$, $P(E \cup F) = r$, probar que:

a) $P(E \cap F) = p + q - r$.

Puesto que, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ resulta:

$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F)$.

Sustituyendo $P(E) = p$, $P(F) = q$, $P(E \cup F) = r$

en la anterior expresión se obtiene: $P(E \cap F) = p + q - r$.

b) $P(E - F) = r - q$.

Los eventos $E - F$ y F son eventos mutuamente excluyentes, tales que

$(E - F) \cup F = E \cup F$

$P(E - F) + P(F) = P(E \cup F)$

$P(E - F) = P(E \cup F) - P(F)$,

y reemplazando, $P(F) = q$, $P(E \cup F) = r$

en la anterior expresión resulta: $P(E - F) = r - q$.

c) $P(E^c \cap F^c) = 1 - r$.

Usando las leyes de Morgan, es posible escribir,

$P(E^c \cap F^c) = P((E \cup F)^c) = 1 - P(E \cup F) = 1 - r$.

d) $P(E \cup F^c) = p - r + 1$.

Usando las leyes de Morgan,

$P(E \cup F^c) = P((E^c \cap F)^c) = 1 - P(E^c \cap F)$

Pero $P(E^c \cap F) = P(F - E) = P(E \cup F) - P(E) = r - p$, sustituyendo en la expresión anterior se tiene,

$P(E \cup F^c) = P((E^c \cap F)^c) = 1-(r-p) = p-r+1$.

1.6. Comprobar la ley de probabilidad total.

Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una partición de Ω entonces

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F \cap E_n)\,, \quad F \in \Im$$

En efecto, debido a que $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una partición de Ω, entonces los elementos de la partición son disjuntos dos a dos y se tiene que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$F = F \cap \Omega = F / \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(F / \; E_n \right)$$

$$P(F) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(F / \; E_n \right) \right)$$

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(F / \; E_n \right) \qquad (*)$$

Puesto que,

$$P(F / E_n) = \frac{P\left(F / \; E_n \right)}{P(E_n)}$$

la anterior expresión se puede escribir como:

$$P(F / E_n) P(E_n) = P \;\; F / \; E_n \big)$$

Reemplazando en (*) se tiene:

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F / E_n) P(E_n) \qquad (**)$$

Mostrar que si $E_1, E_2, \ldots$ es una partición de Ω con $P(E_n) > 0$ para todo *n,* entonces para todo F evento de $\Im$ tal que $P(F) > 0$ se cumple que,

$$P(E_n\ /\ F)=\frac{P(F/E_n)P(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(F/E_n)P(E_n)}.$$

Ya que,

$$P(F/E_n)=\frac{P\left(F\ /\ E_n\right)}{P(E_n)}$$

Implica que

$$P(F/E_n)P(E_n)=P\left(F\ /\ E_n\right)$$

Además,

$$P(E_n/F)=\frac{P\left(E_n\ /\ F\right)}{P(F)}$$

Se puede escribir así:

$$P(E_n/F)=\frac{P(F/E_n)P(E_n)}{P(F)}.$$

Sustituyendo (**) en la anterior expresión resulta:

$$P(E_n/F)=\frac{P(F/E_n)P(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty}P(F/E_n)P(E_n)}.$$

1.7 Se tienen 3 cajas con artículos dispuestos de la siguiente forma: la primera caja tiene 20 artículos, de los cuales 8 son defectuosos; la segunda tiene 16 artículos, de los cuales 6 son defectuosos; y la tercera tiene 10 artículos, de los cuales 2 son defectuosos. Si se escoge una caja al azar y se extrae un artículo al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?
b) Si el artículo escogido resultó defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la segunda caja?

Se definen los siguientes eventos:

E : la unidad del artículo extraído al azar resulta defectuosa
A: la primera caja es seleccionada
B : la segunda caja es seleccionada
C : la tercera caja es seleccionada

a) $P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)$

$$P(E) = \left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{6}{16}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$P(E) = 0.1333 + 0.125 + 0.0667 \cong 0.325.$$

La probabilidad de que si se escoge una caja al azar y se extrae un artículo al azar, el artículo sea defectuoso, es de 32.5%.

b) $P(B/\ E) = \dfrac{P(E/B)P(B)}{P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)}$

$$P(B/\ E) = \frac{\left(\frac{6}{16}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{0.325} = \frac{0.125}{0.325} = 0.3846$$

Si el artículo escogido resultó defectuoso, la probabilidad de que provenga de la segunda caja es del 38.46%.

1.8 Una fábrica productora del artículo WW tiene tres puntos de producción A, B, C, donde el 70% de las unidades del artículo WW se producen en el punto A, el 20% en el punto B y el 10% en el punto C. Por circunstancias de mantenimiento de sus máquinas se están produciendo algunas unidades del artículo WW defectuosas. Sin embargo, el 90% de las unidades del producto que provienen de A es de buena calidad, el 80% de las que provienen de B es de buena calidad y el 85% de las que provienen de C es de buena calidad, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo WW resulte de buena calidad? Determinar la probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C.

Se definen los siguientes eventos:

E: la unidad del artículo WW seleccionada aleatoriamente resultará de buena calidad
A: unidades del artículo WW producidas en el punto A
B: unidades del artículo WW producidas en el punto B
C: unidades del artículo WW producidas en el punto C

$$P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)$$

$$P(E) = (0.9)(0.7) + (0.8)(0.2) + (0.85)(0.1) \;\; P(E) = 0.63 + 0.16 + 0.085 = 0.875$$

La probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo WW resulte de buena calidad es de 0.875 o del 87.5%.

$$P(C/\ E) = \frac{P(E/C)P(C)}{P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)}$$

$$P(C/\ E) = \frac{(0.85)(0.1)}{0.875} = 0.097$$

La probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C es de 0.097 o del 9.7%.

1.9 ξ: se lanza una moneda una vez, sin que ella pueda caer de filo.

$$\Omega = \{c, s\}\text{; donde } c \text{ :cara, } s \text{ :sello.}$$

Si se toma como base el sigma álgebra dada por $\Im = \{\phi, \{c\}, \{s\}, \{c, s\}\}$, y definiendo siguiente *medida de probabilidad:*

$$P : \Im \rightarrow R\,.$$

Tal que

$$P(\{c\}) = p_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad P(\{s\}) = p_2 \geq 0$$

con

$$\Omega = \{c, s\}$$

Entonces se debe cumplir que:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$, es decir que $p_1 + p_2 = 1$.

¿Cuáles valores son posibles para p_1, p_2?

Solamente si se sabe con toda seguridad que la moneda que se lanza no está cargada, se puede asumir que $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$; en este caso se estará trabajando bajo equiprobabilidad.

Para los demás casos, se tiene que $p_1 \neq p_2$, pudiéndose tener por ejemplo que:

$$p_1 = \frac{1}{3} \text{ y } p_2 = \frac{2}{3}$$

$$p_1 = \frac{1}{5} \text{ y } p_2 = \frac{4}{5}$$

En otro caso, puede suceder por ejemplo que $p_1 = 3p_2$ con lo cual resulta que:

$$3p_2 + p_2 = 1$$

Entonces,

$$p_1 = \frac{3}{4} \ y \ p_2 = \frac{1}{4}$$

Y así se pueden presentar muchos casos más.

Es decir, que si no se trabaja bajo total incertidumbre, hay infinidad de valores que pueden asumir p_1, p_2 de tal forma que $p_1 + p_2 = 1$.

1.10 Sea $\Omega = \{1,2,3,...\}$ y se define la siguiente función,

$$P(\{n\}) = p_n = \frac{2}{3^n}, \quad n = 1,2,3,...$$

Verificar si la anterior función define una medida de probabilidad. De ser así, calcular la probabilidad de los siguientes eventos: $E = \{1,3,5,...\}$, $F = \{2,4,6,...\}$, $H = \{1,3,5,7\}$

Por la definición de *P* se tiene que,

$$i)\ p_n \geq 0$$

Ahora comprobaremos si la suma siguiente es igual a 1.

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2\left(1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) = 2\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) = 2\left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 2\left(-1 + \frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Para el evento $E = \{1,3,5,...\}$ su probabilidad de ocurrencia es:

$$P(E) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup ,...)$$

$$P(E) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) + ...$$

$$P(E) = \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^5} + ...$$

$$P(E) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{-1}}\right)\frac{1}{3^{2n}} = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$$

$$P(E) = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = 6\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1\right) = 6\left(\frac{1}{\frac{8}{9}} - 1\right) = 6\left(\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{6}{8} = \tfrac{3}{4} = 0.75 \text{ .}$$

Para el evento $F = \{2,4,6,...\}$ su probabilidad de ocurrencia se calcula de la siguiente manera:

$$F = \{2,4,6,...\} = E^c \text{ .}$$

Luego,

$$P(F) = P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 0.75 = 0.25$$

Para el evento finito $H = \{1,3,5,7\}$ su probabilidad de ocurrencia es,

$$P(E) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup ,\{7\})$$

$$P(E) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) + P(\{7\})$$

$$P(E) = \frac{1458 + 162 + 18 + 2}{3^7} = \frac{1640}{2187} = \cong 0.7498$$

Capítulo 2

2.1 Para el espacio muestral constituido por los siguientes resultados: $n =$ no, $s =$ sí, como la posible respuesta que podría dar una persona escogida aleatoriamente a la pregunta, ¿es usted un trabajador del sector público?

$$\Omega = \{s, n\}$$

Se define la siguiente variable aleatoria:

$$X : \Omega \rightarrow R$$
$$n \rightarrow 0$$
$$s \rightarrow 1 .$$

Determinar *a)* el rango de la variables *b)* la función de probabilidad, *c)* la distribución de probabilidad, *d)* el valor esperado, *e)* la varianza, *f)* la desviación estándar de la variable aleatoria y *g)* calcular la probabilidad: $P(X < 1)$, $P(X > 0)$, $P(X = 1)$.

a) En este caso se tiene que $X(n) = 0$ y $X(s) = 1$, X es una variable aleatoria cuyo rango es un conjunto finito dado por $R_X = \{0,1\}$. En este contexto R_X denota el rango de la variable aleatoria mencionada.

b) Bajo el supuesto de que los resultados del espacio muestral fueran equiprobables, para determinar la función de probabilidad, se procede de la siguiente manera:

$$f(x_1) = f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$f(x_2) = f(1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Cada $f(x_i) > 0$

$$\sum_{i=1}^{2} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1 .$$

La función de probabilidad está dada en la Tabla 5.1:

Tabla 5.1. Función de probabilidad

X	0	1	Suma
$f(x) = P(X = x)$	1/2	1/2	1

c) La distribución de probabilidad se presenta en la Tabla 5.2:

Tabla 5.2. Distribución de probabilidad

X	0	1
$F(x) = P(X \leq x)$	1/2	2/2

d) El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula utilizando la expresión siguiente:

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

e) Para determinar la varianza, inicialmente se calcula:

$$E(X^2) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 P(X = x_i)$$

$$E(X^2) = 0^2\left(\frac{1}{2}\right) + 1^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Como

$$Var(X) = E\left(X\right)^2 - \left(E(X)\right)^2$$

$$Var(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

f) La desviación estándar es:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

g) Para calcular las probabilidades siguientes se utilizan los valores que se presentan en las tablas 5.1 y 5.2.

$$P\left(X < 1\right) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P\left(X > 0\right) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

2.2 Se seleccionan aleatoriamente dos artículos de un proceso productivo para analizar si son defectuosos o no defectuosos y se obtiene el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \left\{dd, dn, nd, nn\right\}$$

Donde d: artículo defectuoso y n: artículo no defectuoso, se define la siguiente variable aleatoria:

$$X : \Omega \rightarrow R$$

X : número de artículos defectuosos en cada resultado de Ω.

Determinar *a)* la función de probabilidad, *b)* la distribución de probabilidad, *c)* el valor esperado, *d)* la varianza, *e)* la desviación estándar de la variable aleatoria y *f)* calcular las siguientes probabilidades: $P(X \leq 1)$, $P(X > 0)$, $P(X = 1)$.

a) Inicialmente se determina el rango de la variable,

$$X(dd) = 2$$

$$X(dn) = 1 = X(nd)$$

$$X(nn) = 0$$

La variable X es una variable aleatoria discreta que toma los valores enteros 0, 1, 2, es decir,

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

El rango de la variable es $R_X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2\}$

Ahora,

$$f(x_1) = f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$f(x_2) = f(1) = P(X = 1) = \frac{2}{4}$$

$$f(x_3) = f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Cada $f(x_i) > 0$.

$$\sum_{i=1}^{3} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

La función de probabilidad está dada en la Tabla 5.3:

Tabla 5.3. Función de probabilidad

X	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	1/4	2/4	1/4

b) La distribución de probabilidad se presenta en la Tabla 5.4:

Tabla 5.4. Distribución de probabilidad

X	0	1	2
$F(x) = P(X \leq x)$	¼	¾	1

c) El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula utilizando la expresión siguiente:

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{2}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1$$

d) Para determinar la varianza, inicialmente se calcula:

$$E(X^2) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 P(X = x_i)$$

$$E(X^2) = 0^2\left(\frac{1}{4}\right) + 1^2\left(\frac{2}{4}\right) + 2^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{4} = 1.5$$

Como

$$Var(X) = E\left(X\right)^2 - \left(E(X)\right)^2$$

$$Var(X) = 1.5 - \left(1\right)^2 = 0.5$$

e) La desviación estándar es:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.5} = 0.7071$$

f) Para calcular las probabilidades siguientes se utilizan los valores que se presentan en las tablas 5.3 y 5.4.

$$P\left(X \leq 1\right) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\left(X > 0\right) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P\left(X = 1\right) = \frac{2}{4}$$

2.3 Dada la función,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si\ x \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$$

a) Analizar si es una función de densidad para la variable aleatoria *X*.

En efecto, para valores de x fuera del intervalo [0,2] la función vale cero y para valores de x en el intervalo [0,2] se trabaja con

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

En la Tabla 5.5 se presentan algunos valores de la función $f(x)$ y en la Figura 4.1 se muestra la representación gráfica de la mencionada función.

Tabla 5.5. Valores de la función *f(x)*

x	0	1	2	1.4	3	-1
$f(x)$	0	0.5	1	0.7	0	0

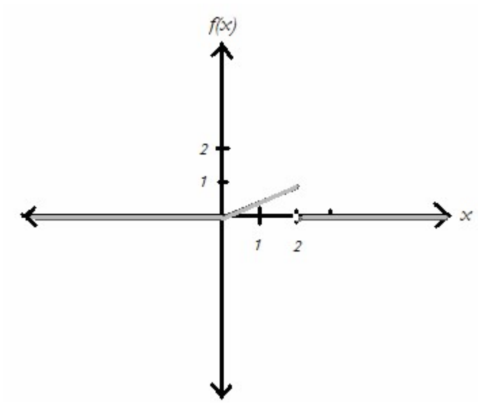

Figura 5.1. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X*

De la Figura 5.1 se ve que $f(x) \geq 0$, además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}xdx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4} = 1$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

En conclusión, $f(x)$ cumple con las condiciones de una función de densidad, por ello $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para X .

b) La función de distribución para X está dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & si\ 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función de distribución se observa en la Figura 5.2

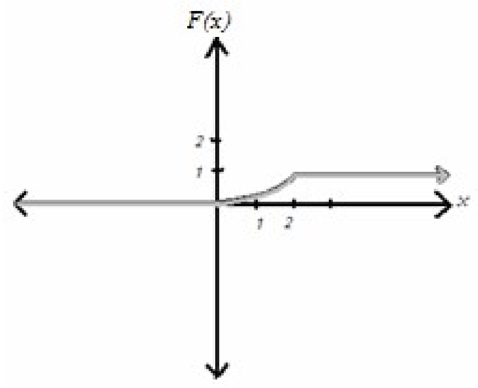

Figura 5.1. Función de distribución para la variable aleatoria *X*

c) El valor esperado de la variable aleatoria X es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Entonces,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx+\int_{0}^{2} xf(x)dx+\int_{2}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0} x(0)dx+\int_{0}^{2} x\frac{1}{2}xdx+\int_{2}^{\infty} x(0)dx$$

$$E(X)=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right)$$

$$\mu=E(X)=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\left[\frac{2^3}{6}-\frac{0^3}{6}\right]=\frac{4}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2f(x)dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx+\int_{0}^{2} x^2\frac{1}{2}xdx+\int_{2}^{\infty} x^2(0)dx$$

$$E(X^2)=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}x^3dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right)=\frac{x^4}{8}\Big|_0^2=\left[\frac{2^4}{8}-\frac{0^4}{8}\right]=2$$

La varianza de X está dada por:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-\left[\frac{4}{3}\right]^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$$

La desviación estándar de X es:

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{2}{9}}=0.4714$$

d) Las probabilidades pedidas se determinan de la siguiente forma:

$$P(0\le X\le 1.5)=\int_{0}^{1.5} f(x)dx=\int_{0}^{1.5}\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^{1.5}=\frac{1}{4}(1.5)^2-\frac{1}{4}(0)^2$$

$$P(0\le X\le 1.5)=\frac{2.25}{4}=0.5625$$

$$P(-3 \le X \le 0.5) = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{0.5} f(x)dx = \int_{-3}^{0} 0dx + \int_{0}^{0.5} \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{4}\left(x^2\Big|_0^{0.5}\right)$$

$$P(-3 \le X \le 0.5) = \frac{1}{4}(0.5)^2 - \frac{1}{4}(0)^2 = \frac{0.25}{4} = 0.0625$$

2.4 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \le x \le b \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Determinar *a)* el valor esperado, *b)* la varianza de la variable aleatoria X.

El valor esperado de la variable aleatoria X es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Entonces,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_{a}^{b} xf(x)dx + \int_{b}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{a} x(0)dx + \int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{\infty} x(0)dx$$

$$E(X) = \int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$E(X) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x^2(0)dx + \int_{a}^{b} x^2\frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{\infty} x^2(0)dx$$

$$E(X^2) = \int_{a}^{b} x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{x^3}{3(b-a)} - \frac{a^3}{3(b-a)}$$

$$E(X^2)=\frac{b^3}{3(b-a)}-\frac{a^3}{3(b-a)}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{3(b-a)}$$

$$E(X^2)=\frac{b^2+ba+a^2}{3}$$

La varianza de X está dada por:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2$$

$$Var(X)=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)$$

$$Var(X)=\frac{4b^2+4ba+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Desviación estándar de X es:

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Capítulo 3

3.1 El equipo de fútbol CC tiene una probabilidad de 0.75 de ganar cada vez que juega, si aún le quedan por jugar 8 partidos *a)* ¿cuál es la probabilidad de que gane tres partidos? *b)* ¿cuál es la probabilidad de que no gane los restantes partidos? *c)* ¿cuál es la probabilidad de que gane por lo menos cuatro partidos?, determinar el número de partidos que espera ganar el equipo CC y la varianza.

Se define la variable aleatoria como X: número de partidos ganados en los 8 partidos que aún le quedan por jugar al equipo CC.

Los posibles valores de la variable X son: 0, 1, 2,…,8.

a) Aplicando el modelo Binomial con $n=8$ y $p=0.75$ resulta,

$$f(3)=P(X=3)=\binom{8}{3}(0.75)^3(1-0.75)^{8-3}$$

$$P(X=3)=\frac{8!}{3!(8-3)!}(0.421875)(0.25)^5$$

$$P(X=3)=56(0.421875)(0.0009765)\cong 0.023$$

La probabilidad de que el equipo CC gane tres partidos de los ocho que aún le quedan por jugar es de 0.023 o del 2.3%.

b) $f(0)=P(X=0)=\binom{8}{0}(0.75)^0(1-0.75)^{8-0}$

$$P(X=0)=\frac{8!}{0!(10-0)!}(1)(0.25)^8=1(1)(0.000015)\cong 0.000015$$

La probabilidad de que el equipo CC no gane los restantes 8 partidos que aún le quedan por jugar es de 0.000015 o del 0.0015%.

c) Se debe calcular,

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)+...+P(X=8)$$

O equivalentemente usando la probabilidad del evento complementario se puede calcular la siguiente probabilidad :

$$P(X\geq 4)=1-\{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\}$$

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X=3)$ y $P(X=0)$, solamente restan calcularse $P(X=1)$ y $P(X=2)$ y reemplazar en la anterior expresión.

$$f(1)=P(X=1)=\binom{8}{1}(0.75)^1(1-0.75)^{8-1}$$

$$P(X=1)=\frac{8!}{1!(8-1)!}(0.75)(0.25)^7=8(0.75)(0.000061)\cong 0.000366\,.$$

$$f(2)=P(X=2)=\binom{8}{2}(0.75)^2(1-0.75)^{8-2}$$

$$P(X=2)=\frac{8!}{2!(8-2)!}(0.5625)(0.25)^6$$

$$P(X=2)=28(0.5625)(0.000244)\cong 0.003843$$

Luego,

$$P(X \geq 4) = 1 - \{0.000015 + 0.000366 + 0.03843 + 0.023\}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - 0.02722 = 0.97278$$

La probabilidad de que el equipo CC gane por lo menos cuatro partidos de los ocho que aún le quedan por jugar es de 0.97278 o del 97.278%

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente manera:

$$E(X) = np = 8(0.75) = 6$$

El número de partidos que se espera que gane el equipo CC es 6.

$$Var(X) = np(1-p) = 8(0.75)(0.25) = 1.5$$

3.2 La probabilidad de que las vacas de la granja A estén produciendo leche en cualquier época del año es de 0.6, se toma una muestra aleatoria de 6 vacas de la granja A, *a)* ¿cuál es la probabilidad de que una vaca de la muestra esté produciendo leche? *b)* ¿cuál es la probabilidad de que dos vacas de la muestra estén produciendo leche? *c)* ¿cuál es la probabilidad de que a lo más dos vacas de la muestra estén produciendo leche? *d)* ¿cuál es la probabilidad de que todas las vacas de la muestra estén produciendo leche? *e)* determinar el valor esperado e interpretarlo.

Se define la variable aleatoria como,

X : número de vacas en la muestra de seis que están produciendo leche en la granja A en cualquier época del año.

Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,6.

a) Aplicando el modelo Binomial con $n = 6$ y $p = 0.6$ resulta,

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{6}{1}(0.6)^1(1-0.6)^{6-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{6!}{1!(6-1)!}(0.6)(0.4)^5 = 6(0.6)(0.01024) \cong 0.03686$$

La probabilidad de que una vaca de la muestra aleatoria esté produciendo leche es de 0.03686 o del 3.686%.

b) $f(2) = P(X = 2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} (0.6)^2 (1 - 0.6)^{6-2}$

$$P(X = 2) = \frac{6!}{2!(6-2)!}(0.36)(0.4)^4 = 15(0.36)(0.0256) \cong 0.1382$$

La probabilidad de que dos vacas de la muestra aleatoria esté produciendo leche es de 0.1382 o del 13.82%.

c) Se debe calcular, $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$.

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X = 1)$ y $P(X = 2)$, solamente resta calcular $P(X = 0)$ y reemplazar en la anterior expresión.

$$f(0) = P(X = 0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} (0.6)^0 (1 - 0.6)^{6-0}$$

$$P(X = 0) = \frac{6!}{0!(6-0)!}(1)(0.4)^6 = 1(1)(0.004096) \cong 0.004096$$

Luego,

$$P(X \leq 2) = 0.004096 + 0.03686 + 0.1382 = 0.1791$$

La probabilidad de que a lo más dos vacas de la muestra aleatoria esté produciendo leche es de 0.1791 o del 17.91%.

d) $f(6) = P(X = 6) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} (0.6)^6 (1 - 0.6)^{6-6}$

$$P(X = 6) = \frac{6!}{6!(6-6)!}(0.6)^6 (0.4)^0 = 1(0.04665)(1) \cong 0.04665$$

La probabilidad de que todas las vacas de la muestra aleatoria estén produciendo leche es de 0.04665 o del 4.665%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente forma,

$$E(X) = np = 6(0.6) = 3.6 \cong 4$$

Se esperaría que en la muestra aleatoria 4 vacas estén produciendo leche.

$$Var(X) = np(1-p) = 6(0.6)(0.4) = 1.44$$

3.3 Una máquina produce artículos del tipo RRR, la probabilidad de que cualquier artículo producido por la máquina resulte defectuoso es 0.05, si se escoge una muestra aleatoria de 10 artículos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos resulten defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno resulte defectuoso?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos tres resulten defectuosos?
Se define la variable aleatoria como X: número de artículos defectuosos del tipo RRR en la muestra de 10. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,10.

a) Aplicando el modelo Binomial con $n = 10$ y $p = 0.05$ resulta,

$$f(2) = P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.05)^2(1-0.05)^{10-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{10!}{2!(10-2)!}(0.0025)(0.95)^8 = 45(0.0025)(0.66342)$$

$$P(X = 2) \cong 0.0746$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria resulten dos artículos defectuosos del tipo RRR es de 0.0746 o del 7.46%.

b)

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.05)^0(1-0.05)^{10-0}$$

$$P(X = 0) = \frac{10!}{0!(10-0)!}(1)(0.95)^{10} = 1(1)(0.5987) \cong 0.5987$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria ninguno de los artículos resulte defectuoso es de 0.5987 o del 59.87%.

c) Se debe calcular

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + ... + P(X = 10)$$

O de forma equivalente se usa la probabilidad del evento complementario y se calculara la siguiente probabilidad:

$$P(X \geq 3) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\}$$

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X = 2)$ y $P(X = 0)$, solamente resta calcular $P(X = 1)$ y reemplazar los resultados en la anterior expresión,

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.05)^1(1 - 0.05)^{10-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{10!}{1!(10-1)!}(0.05)(0.95)^9 = 10(0.05)(0.63024) \cong 0.3151$$

Luego,

$$P(X \geq 3) = 1 - \{0.5987 + 0.3151 + 0.0746\} = 1 - 0.9884 = 0.0116$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria por lo menos tres artículos resulten defectuosos es de 0.0116 ó del 1.16%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente manera,

$$E(X) = np = 10(0.05) = 0.5$$

$$Var(X) = np(1 - p) = 10(0.05)(0.95) = 0.475$$

3.4 En un curso de probabilidad 10 estudiantes de matemáticas y 15 estudiantes de otras carreras, se decide escoger aleatoriamente un grupo de 6 estudiantes del curso de probabilidad para que hagan una disertación sobre espacios de probabilidad en el salón de clase, *a)* ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan dos estudiantes matemáticas?, *b)* ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un estudiante de matemáticas?, *c)* ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los estudiantes sean de otras carreras?, *d)*¿cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres estudiantes de matemáticas? y *e)* determinar el valor esperado.

Se define la variable aleatoria como X : número de estudiantes de matemáticas que resulten conformando el grupo de los seis estudiantes que harán la disertación mencionada. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Para este caso, se aplica el modelo hipergeométrico con $N = 25$, $M = 10$, $N - M = 15$, $n = 6$.

a)

$$P(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{15}{6-2}}{\binom{25}{6}} = \frac{\left(\frac{10!}{2!(10-2)!}\right)\left(\frac{15!}{4!(15-4)!}\right)}{\frac{25!}{6!(25-6)!}} = \frac{45(1365)}{177100} \cong 0.3468.$$

La probabilidad de que en el grupo haya dos estudiantes de matemáticas es de 0.3468 o del 34.68%.

b)

$$P(X = 1) = \frac{\binom{10}{1}\binom{15}{6-1}}{\binom{25}{6}} = \frac{\left(\frac{10!}{1!(10-1)!}\right)\left(\frac{15!}{5!(15-5)!}\right)}{\frac{25!}{6!(25-6)!}} = \frac{10(3003)}{177100} \cong 0.1695.$$

La probabilidad de que en el grupo haya un solo estudiante de matemáticas es de 0.1695 o del 16.95%.

c) Que en el grupo todos los estudiantes sean de otras carreras, significa que cero estudiantes de matemáticas estarán en el grupo de los seis que harán la disertación.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{15}{6-0}}{\binom{25}{6}} = \frac{\left(\frac{10!}{0!(10-0)!}\right)\left(\frac{15!}{6!(15-6)!}\right)}{\frac{25!}{6!(25-6)!}} = \frac{1(5005)}{177100}$$

$$f(0) = P(X = 0) \cong 0.02826$$

La probabilidad de que en el grupo todos los estudiantes sean de otras carreras es de 0.02826 o del 2.826%.

d) Se debe calcular $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$.

Aquí se puede usar la probabilidad del evento complementario y calcular la probabilidad,

$$P(X \geq 3) = 1 - \{0.02826 + 0.1695 + 0.3468\} = 1 - 0.54456 = 0.45544.$$

La probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres estudiantes de matemáticas es 0.45544 o del 45.544%.

El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula de la siguiente manera:

$$E(X) = n\frac{M}{N} = 6\left(\frac{10}{20}\right) = \frac{60}{20} = 3$$

Se esperaría que tres estudiantes de matemáticas estuvieran en el grupo de seis estudiantes que harán la disertación sobre espacios de probabilidad.

3.5 En una granja hay unos vacunos de los cuales 8 son de la raza pardosuizo y 12 de la raza romosinuano, si se decide escoger aleatoriamente un grupo de cinco de los mencionados vacunos para exhibirlos en la feria regional ganadera,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos vacunos de la raza pardosuizo?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un vacuno de la raza pardosuizo?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los vacunos resulten de la raza romosinuano?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres vacunos de la raza pardosuizo?

Se define la variable aleatoria como X: número de vacunos de la raza pardo-suizo que resulten conformando el grupo de cinco que se llevarán a la feria regional. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Para este caso, se aplica el modelo hipergeométrico con:

$$N = 20,\ M = 8,\ N - M = 12,\ n = 5.$$

a) Que dos vacunos de la raza pardosuizo resulten en el grupo de cinco.

$$P(X=2)=\frac{\binom{8}{2}\binom{12}{5-2}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{8!}{2!(8-2)!}\,\frac{12!}{3!(12-3)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{28(220)}{15504}\cong 0.3973$$

La probabilidad de que en el grupo resulten dos vacunos de la raza pardosuizo es de 0.3973 o del 39.73%.

b) Que un solo vacuno de la raza pardosuizo resulte en el grupo de cinco.

$$P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{12}{5-1}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{8!}{1!(8-1)!}\,\frac{12!}{4!(12-4)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{8(495)}{15504}\cong 0.2554$$

La probabilidad de que en el grupo resulte un solo vacuno de la raza pardosuizo es de 0.2554 ó del 25.54%.

c) Que en el grupo todos los vacunos resulten de la raza romosinuano significa que cero vacunos de la raza pardosuizo estarán en el grupo de cinco.

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{8}{0}\binom{12}{5-0}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{8!}{0!(8-0)!}\,\frac{12!}{5!(12-5)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{1(792)}{15504}\cong 0.0511$$

La probabilidad de que en el grupo todos los vacunos resulten de la raza romosinuano es de 0.0511 ó del 5.11%.

d) Se debe calcular $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

Aquí se puede usar la probabilidad del evento complementario y calcular la probabilidad,

$$P(X\geq 3)=1-\{0.0511+0.2554+0.3973\}=1-0.7038=0.2962$$

La probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres vacunos de la raza pardosuizo es 0.2962 o del 29.62%.

El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula de la siguiente manera:

$$E(X) = n\frac{M}{N} = 5\left(\frac{8}{20}\right) = \frac{40}{20} = 2$$

Se esperaría que dos vacunos de la raza pardosuizo estuvieran en el grupo de cinco vacunos que se llevará a la feria regional.

3.6 El promedio de inyecciones del medicamento AA que no surten efecto en los cachorros de la región B es de 2 en las jornadas de vacunación que se han realizado,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro inyecciones del medicamento AA no surtan efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más una inyección del medicamento AA no surta efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento?

Se define la variable aleatoria como X: número de inyecciones del medicamento AA que no surtirán efecto en los cachorros de la región B la próxima vez que se apliquen. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…

a) Aplicando el modelo Poisson con $\lambda = 2$ resulta,

$$f(4) = P(X = 4) = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{16}{24}(0.1353) \cong 0.0902$$

La probabilidad de que cuatro inyecciones del medicamento AA no surtan efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento en la región B es de 0.0902 o del 9.02%.

b) Se debe calcular $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} \cong 0.1353$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 2(0.1353) \cong 0.2706$$

Luego,

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.1353 + 0.2706 = 0.4059$$

La probabilidad de que a lo más una inyección del medicamento AA no surta efecto en los cachorros de la región B la próxima vez que se apliquen es de 0.4059 ó del 40.59%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se obtienen directamente,

$$E(X) = \lambda = 2$$

$$Var(X) = \lambda = 2$$

3.7 El promedio de caninos infestados de pulgas en la región BB en las últimas visitas realizadas por los inspectores de salud animal es 5, *a)* ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente visita los inspectores de salud animal encuentren tres caninos infestados de pulgas en la región BB? *b)* ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente visita los inspectores de salud animal encuentren a lo más dos caninos infestados de pulgas en la región BB? y *c)* determinar el valor esperado y la varianza.

Se define la variable aleatoria como X : número de caninos que los inspectores de salud animal encuentren infestados de pulgas en la región BB. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…

a) Aplicando el modelo Poisson con $\lambda = 5$ resulta

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} = \frac{125}{6}\left(0.006737\right) = 0.1403$$

La probabilidad de que en la siguiente visita los inspectores de salud animal encuentren tres caninos infestados de pulgas en la región BB es de 0.1403 o del 14.03%.

b) Se debe calcular $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{5^0}{0!} e^{-5} = 0.006737$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{5^1}{1!} e^{-5} = 0.03368$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{5^2}{2!} e^{-5} = 0.08421$$

Luego,

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = 0.006737 + 0.03368 + 0 - 08421 = 0.1246$$

La probabilidad de que en la siguiente visita los inspectores de salud animal encuentren a lo más dos caninos infestados de pulgas en la región BB es de 0.1246 o del 12.46%.

c) El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se obtienen directamente,

$$E(X) = \lambda = 5$$

$$Var(X) = \lambda = 5$$

3.8 Graficar y determinar las siguientes probabilidades utilizando la distribución normal estándar a) $P(Z \leq -1.35)$, b) $P(Z \geq 1.3)$ c) $P(0.31 \leq Z \leq 2.5)$

$a)\ P(Z \leq -1.35) = \Phi(-1.35) = 0.0885 \cong 8.85\%$

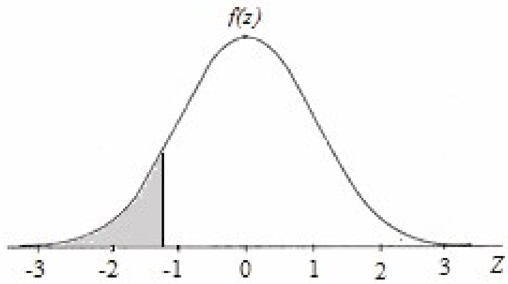

Figura 5.3. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \leq -1.35)$

La Figura 5.3 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$b)\ P(Z \geq 1.3) = 1 - P(Z \leq 1.3) = 1 - 0.9032 = 0.0968 \cong 9.68\%$

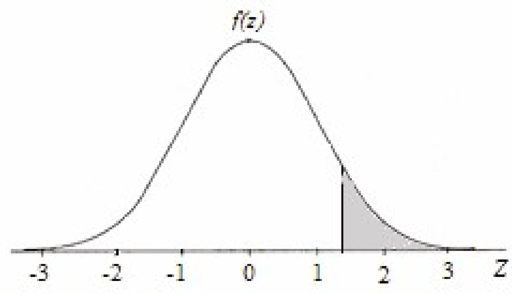

Figura 5.4. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \geq 1.3)$

La Figura 5.4 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$c)$ $P(0.31 \leq Z \leq 2.5) = P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq 0.31)$

$P(0.31 \leq Z \leq 2.5) = 0.9938 - 0.6217 = 0.3721 \cong 37.21\%$

La Figura 5.5 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad.

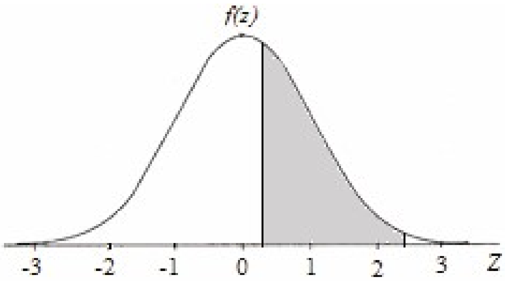

Figura 5.5. Área bajo la curva normal estándar $P(0.31 \leq Z \leq 2.5)$

3.9 Una fábrica produce bombillos, la duración de los bombillos tiene una distribución normal con media de 800 horas y desviación estándar de 50 horas. Si se toma al azar un bombillo de la producción,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dure máximo 840 horas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que dure por lo menos 720 horas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que dure entre 780 y 920 horas?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 1000 horas?

$\mu = 800$ horas, $\sigma = 50$ horas

X: duración en horas de un bombillo producidos por la fábrica y escogido aleatoriamente.

a) $P(X \leq 840) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{840-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{840-800}{50}\right)$

$$P(X \leq 480) = P\left(Z \leq \frac{40}{50}\right) = P(Z \leq 0.8) = 0.7881 \cong 78.81\%$$

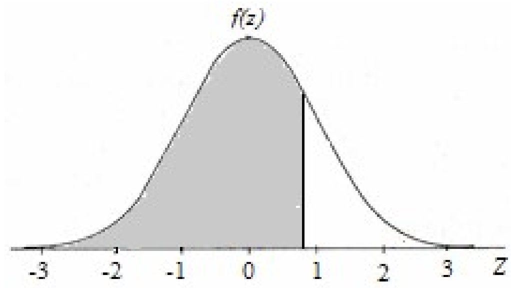

Figura 5.6. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \leq 0.8)$

La probabilidad de que un bombillo escogido al azar dure máximo 840 horas es del 78.81%.

Una representación de la situación se tiene en la Figura 5.6.

b) $P(X \geq 720) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{720-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{720-800}{50}\right)$

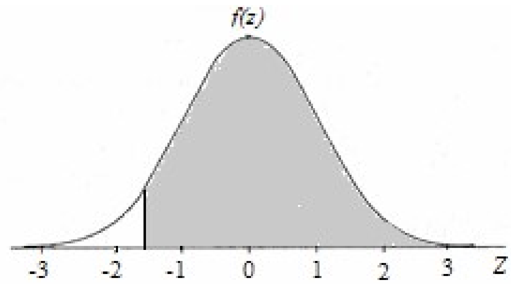

Figura 5.7. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \geq -1.6)$

$$P(X \geq 720) = P(Z \geq -1.6) = 1 - P(Z \leq -1.6) = 1 - 0.0548 = 0.9452$$

$$P(X \geq 720) = 0.9452 \cong 94.52\%$$

La probabilidad de que un bombillo escogido al azar dure por lo menos 720 horas es del 94.52%. Una representación de la situación anterior se tiene en la Figura 5.7.

c) $P(780 \leq X \leq 920) = P\left(\frac{780-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{920-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(780 \leq X \leq 920) = P\left(\frac{780-800}{50} \leq Z \leq \frac{920-800}{50}\right) = P(-0.4 \leq Z \leq 2.4)$$

$$P(780 \leq X \leq 920) = 0.9918 - 0.3446 = 0.6472 \cong 64.72\%$$

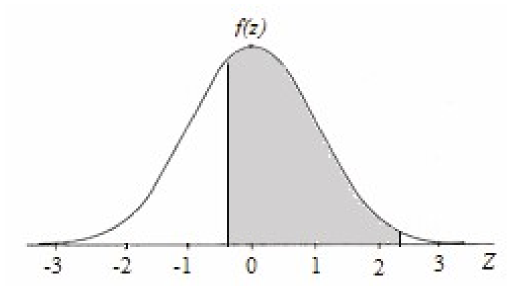

Figura 5.8. Área bajo la curva normal estándar $P(\leq -0.4Z \leq 2.4)$

La probabilidad de que un bombillo escogido al azar dure entre 780 y 920 horas es de 64.72%. Ver Figura 5.8.

d) $P(X \geq 1000) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1000-800}{50}\right) = P\left(Z \geq 4\right) \cong 0$

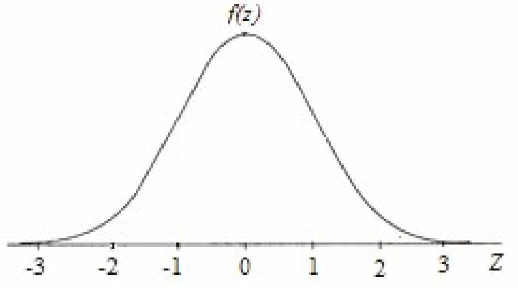

Figura 5.9. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \geq 4)$

La probabilidad de que un bombillo escogido al azar dure más de mil horas es del 0%. Ver Figura 5.9.

3.10 El peso en una clase de unos roedores silvestres es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media $\mu = 500$ gramos, y una desviación estándar $\sigma = 30$ gramos. Si se escoge aleatoriamente un roedor de esa clase,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de por lo menos 480 gramos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea a lo más de 470 gramos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté entre 465 y 575 gramos?

$\mu = 500$ gramos, $\sigma = 30$ gramos.

X : peso de un roedor silvestre escogido aleatoriamente.

a) $P(X \geq 480) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{480 - 500}{30}\right)$

$$P(X \geq 480) = P(Z \geq -0.6) = 1 - P(Z \leq -0.6) = 1 - 0.2743 = 0.7257 \cong 72.57\%$$

La probabilidad de que el peso de un roedor escogido aleatoriamente sea de por menos 480 gramos es de 72.57%. Obsérvese la Figura 5.10.

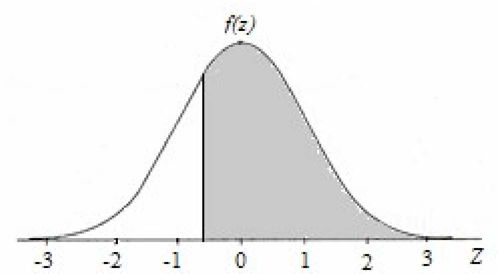

Figura 5.10. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \geq -0.6)$

$$b)\ P(X \leq 470) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{470 - 500}{30}\right) = P(Z \leq -1) = 0.1587 \cong 15.87\%$$

La probabilidad de que el peso de un roedor escogido aleatoriamente sea de máximo 470 gramos es de 15.87%. Ver Figura 5.11.

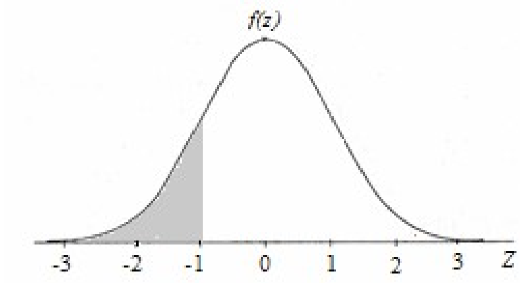

Figura 5.11. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \leq -1)$

c) $P(465 \leq X \leq 575) = P\left(\frac{465-500}{30} \leq Z \leq \frac{575-500}{30}\right)$

$$P(465 \leq X \leq 575) = P(-1.16 \leq Z \leq 2.5) = P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq -1.16)$$

$$P(465 \leq X \leq 575) = 0.9938 - 0.1230 = 0.8708 \cong 87.08\%$$

La situación anterior se puede observar en la Figura 5.12.

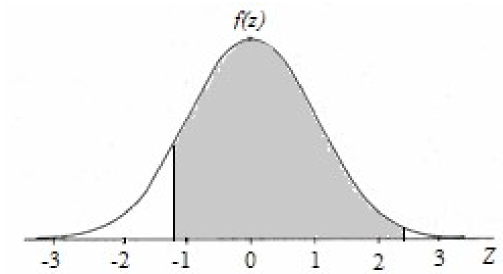

Figura 5.12. Área bajo la curva normal estándar $P(-1.16 \leq Z \leq 2.5)$

La probabilidad de que el peso de un roedor escogido aleatoriamente esté entre 465 y 575 gramos es del 87.08%

Capítulo 4

4.1 Con base en la información de la Tabla 4.1, determinar *a)* $P(X_1 \leq 2, X_2 > 1)$,

b) $F_{\bar{X}}(1,2)$, $f(1,0)$, *c)* $f_{X_1}(0)$, d) $f_{X_2}(2)$, e) $f_{X_2/X_1}(2/0)$, f) $E(X_2/X_1 = 2)$.

Solución

$$a)\ P(X_1 \le 2, X_2 > 1) = f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,2) + f_{\overline{X}}(2,2) = \frac{1}{36} + 0 + 0 = \frac{1}{36}$$

$$b)\ F_{\overline{X}}(1,2) = P(X_1 \le 1, X_2 \le 2) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(1,1) + f_{\overline{X}}(1,2)$$

$$F_{\overline{X}}(1,2) = P(X_1 \le 1, X_2 \le 2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} + \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{33}{36}$$

Ahora,

$$f(1,0) = \frac{12}{36}$$

$$c)\ f_{X_1}(0) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(0, x_2) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(0,2)$$

$$f_{X_1}(0) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(1, x_2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$$

$$d)\ f_{X_2}(2) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 2) = f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,2) + f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$f_{X_2}(2) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 2) = \frac{6}{36} + 0 + 0 = \frac{6}{36}$$

$$e)\ f_{X_2/X_1}(2/0) = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 2)}{P(X_1 = 0)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{1}{15}$$

$$f)\ E(X_2/X_1 = 2) = \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1 = 2) = \sum_{R_{X2}} x_2 \frac{f_{\overline{X}}(2, x_2)}{f_{X_1}(2)}$$

Luego,

$$E(X_2/X_1 = 2) = 0\frac{f_{\overline{X}}(2,0)}{f_{X_1}(2)} + 1\frac{f_{\overline{X}}(2,1)}{f_{X_1}(2)} + 2\frac{f_{\overline{X}}(2,2)}{f_{X_1}(2)}$$

Pero,

$$f_{X_1}(2) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(2, x_2) = f_{\overline{X}}(2,0) + f_{\overline{X}}(2,1) + f_{\overline{X}}(2,2) = \frac{3}{36} + 0 + 0 = \frac{3}{36}$$

Por lo tanto,

$$E(X_2/X_1=2)=0\left(\frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{36}}\right)+1(0)+2(0)=0$$

$R_{X_2}\backslash R_{X_1}$	0	1	2	Marginales
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{21}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
Marginales	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$	

4.2 Dada la siguiente función de densidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X}=(X_1,X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\begin{cases}24x_1x_2 \ \ si \ \ 0<x_1<1;\ x_2>0;\ x_1+x_2<1\\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad en\ otro\ caso\end{cases}$$

Calcular $a)\ P(X_1\leq 0.6, X_2<0.2)$, *b)* $f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)$ *c)* determinar la esperanza matemática de X_1 dada $X_2=0.4$.

Solución

$$a)\ P(X_1\leq 0.6, X_2<0.2)=\int_0^{0.6}\left(\int_0^{0.2}24x_1x_2dx_2\right)dx_1$$

$$P(X_1\leq 0.6, X_2<0.2)=\int_0^{0.6}24x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.2}dx_1$$

$$P(X_1\leq 0.6, X_2<0.2)=\int_0^{0.6}12x_1\left(0.04\right)dx_1=\int_0^{0.6}0.48x_1dx_1$$

$$P(X_1 \leq 0.6, X_2 < 0.2) = \int_0^{0.6} 0.48x_1 dx_1 = \left(0.24x_1^2\right)\Big|_0^{0.6} = 0.24(0.6)^2 = 0.0864$$

b) Inicialmente se tiene que,

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 12x_2\left(1 - x_2\right)^2 & si\ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \begin{cases} \dfrac{24x_1x_2}{12x_2\left(1 - x_2\right)^2} & si\ 0 < x_2 < 1;\ 0 < x_1 < 1 - x_2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

c) Como,

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 12x_2\left(1 - x_2\right)^2 & si\ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx_1 = \int_0^{1-x_2} x_1 \frac{24x_1x_2}{12x_2\left(1 - x_2\right)^2} dx_1$$

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \int_0^{1-x_2} x_1 \frac{24x_1x_2}{12x_2\left(1 - x_2\right)^2} dx_1 = \left.\frac{2x_2\left(\frac{x_1^3}{3}\right)}{x_2\left(1 - x_2\right)^2}\right|_0^{1-x_2} = \frac{2x_2\left(1 - x_2\right)^3}{3x_2\left(1 - x_2\right)^2}$$

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \frac{2\left(1 - x_2\right)}{3}$$

Finalmente,

$$E(X_1/X_2 = 0.4) = \frac{2\left(1 - 0.4\right)}{3} = 0.4$$