4

VECTORES ALEATORIOS

En los capítulos anteriores se ha establecido el concepto de variable aleatoria como una función medible, para la cual fue posible determinar su función y distribución de probabilidad, el valor esperado y la varianza, entre otros. En este capítulo se hará una extensión de estos conceptos hacia los denominados vectores aleatorios; específicamente se definen y ejemplifican la función de probabilidad o de densidad, la distribución de probabilidad, las marginales, la función de probabilidad condicional, la esperanza matemática y la matriz de covarianzas para vectores aleatorios tanto discretos como continuos. Algunos de los aspectos teóricos incluidos en este capítulo se soportan en los conceptos expuestos por autores como Lindgren (1993), Papoulis (1991), Ross (1998), Jacod y Protter (2000), Muñoz y Blanco (2002), Hernández (2003), Blanco (2004), por citar algunos.

4.1 Concepto de vector aleatorio

Dado un espacio de probabilidad $\Omega, \Im, P$ y el espacio medible (R^k, β_k) donde β_k es el sigma álgebra de Borel en R^k, un vector aleatorio real $\overline{X}$ es una función medible definida de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
\overline{X} : \Omega &\to \mathrm{R}^k \\
\omega &\to \overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_k(\omega))
\end{aligned}
$$

Tal que cada X_i para $i = 1, 2, \ldots, k$ es una variable aleatoria real y para todo evento E en β_k se tiene que
$\overline{X}^{-1}(E) \in \Im$.

Ahora si X_i para $i = 1, 2, \ldots, k$ son variables aleatorias reales, entonces se puede conformar un vector aleatorio con k componentes, así:

$$\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$$

Ejemplo 4.1 Si X_1 y X_2 son variables aleatorias reales, entonces $\overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$ es un vector aleatorio bidimensional, el cual suele denotarse con $\overline{X} = (X_1, X_2)$ si no hay lugar a confusiones; Si X_1, X_2 y X_3 son variables aleatoria reales entonces $\overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega))$ es un vector aleatorio tridimensional que puede denotarse con $\overline{X}_3 = (X_1, X_2, X_3)$, y así sucesivamente.

Por otro lado si X_1, X_2, …, X_k son variables aleatorias discretas, es decir sus correspondientes rangos $R_{X_1}, R_{X_2}, ..., R_{X_k}$ son conjuntos finitos o numerables entonces el vector

$$\overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_k(\omega))$$

es un vector aleatorio discreto.

Además, si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son variables aleatorias continuas, es decir sus correspondientes rangos $R_{X_1}, R_{X_2}, ..., R_{X_k}$, son conjuntos no numerables entonces el vector,

$$\overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_k(\omega))$$

es un vector aleatorio continuo.

Ahora, si algunas de las X_i para $i = 1, 2, ..., k$ son variables aleatorias discretas y las demás son variables aleatorias continuas, entonces $\overline{X}$ es vector aleatorio mixto.

4.2 Función de probabilidad conjunta

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio discreto en R^k, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k, la función

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = \begin{cases} P(\overline{X} = \overline{x}) & si\ \overline{x} \in R_{\overline{X}} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La cual también se puede expresar como

$$f_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)=\begin{cases}P((X_1=x_1)\ \cap(X_2=x_2)\ \cap...\cap(X_k=x_k)) \\ 0 \qquad\qquad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

Con $R_{\overline{X}}=(R_{X_1},R_{X_2},...,R_{X_k})$, la función $f_{\overline{X}}$ es una función de probabilidad para el vector aleatorio discreto $\overline{X}$ si cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)\geq 0$.

ii) $\sum\limits_{R_{X_1}}\sum\limits_{R_{X_2}}...\sum\limits_{R_{X_k}} f_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)=1$.

En la anterior definición, se ha de tener presente los siguientes eventos:

$$(X_1=x_1)=\{\omega\in\Omega: X_1(\omega)=x_1\}$$

$$(X_2=x_2)=\{\omega\in\Omega: X_2(\omega)=x_2\}$$

Sucesivamente,

$$(X_k=x_k)=\{\omega\in\Omega: X_k(\omega)=x_k\}$$

Ejemplo 4.2 Considerando el espacio de probabilidad $(\Omega,\Im,P)$ y el espacio medible (R^2,β_2), $\overline{X}=(X_1,X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\overline{x}=(x_1,x_2)$ un vector en R^2, la función

$$f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\begin{cases}P(\overline{X}=\overline{x}) \quad si\ \overline{x}\in R_{\overline{X}} \\ 0 \qquad\quad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

La cual también se puede expresar como

$$f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\begin{cases}P((X_1=x_1)\ \cap(X_2=x_2)) \\ 0 \qquad\qquad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

O también por

$$f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\begin{cases}P(X_1=x_1,X_2=x_2) \\ 0 \qquad \textit{en otro caso}\end{cases}$$

Con $R_{\overline{X}}=(R_{X_1},R_{X_2})$, se denomina función de probabilidad bi-variada del vector aleatorio discreto $\overline{X}$ si $f_{\overline{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1,x_2)\geq 0$.

ii) $\sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = 1$

En el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^3, β_3) $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio discreto en R^3, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector en R^3, la función,

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap (X_3 = x_3)) \\ 0 \qquad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

La cual también se puede expresar como

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) \\ 0 \qquad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Con $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2}, R_{X_3})$, se llama función de probabilidad trivariada del vector aleatorio discreto $\overline{X}$ si $f_{\overline{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) \geq 0$

ii) $\sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} \sum_{R_{X_3}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) = 1$

4.3 Función de densidad multivariada

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio continuo en R^k, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k, la función real,

$$f_{\overline{X}} : R^k \to R$$

es una función de densidad de probabilidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X}$ si $f_{\overline{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) dx_1 dx_2 ... dx_k = 1$

Ejemplo 4.3 En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, la función real

$$f_{\overline{X}} : R^2 \to R$$

es una función de densidad de probabilidad bivariada para el vector aleatorio continuo $\overline{X}$ si $f_{\overline{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 1$

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^3, β_3), $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio continuo en R^3, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector en R^3, la función real

$$f_{\overline{X}} : R^3 \to R$$

es una función de densidad de probabilidad trivariada para el vector aleatorio continuo $\overline{X}$ si $f_{\overline{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 = 1$

4.4 Función de distribución multivariada

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio continuo en R^k, $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k, la función de distribución de probabilidad del vector aleatorio $\overline{X}$ se define de la siguiente manera:

$$F_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_k \leq x_k)$$

También se puede expresar de la siguiente forma,

$$F_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = P((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap ... \cap (X_k \leq x_k))$$

Si no hay lugar a confusiones, la función de distribución del vector aleatorio $\overline{X}$ se denota simplemente con F. Además, los eventos involucrados en la definición se pueden escribir de la siguiente forma:

$(X_1 \leq x_1) = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1\}$

$(X_2 \leq x_2) = \{\omega \in \Omega : X_2(\omega) \leq x_2\}$

Sucesivamente,

$(X_k \leq x_k) = \{\omega \in \Omega : X_k(\omega) \leq x_k\}$

Ahora, si el vector aleatorio $\overline{X}$ es continuo, entonces su función de distribución de probabilidad conjunta se puede expresar así

$$F_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} ... \int_{-\infty}^{x_k} f_{\overline{X}}(t_1, t_2, ..., t_k) dt_1 dt_2 ... dt_k$$

Aquí es conveniente considerar que para un evento $E \in \beta_k$ entonces,

$$P(\overline{X} \in E) = \iint_E ... \int f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) dx_1 dx_2 ... dx_k$$

Donde la anterior es una integral de Lebesgue sobre *E*.

Ejemplo 4.4 En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, para el evento $E = [a,b] \times [c,d] \in \beta_2$ se tiene

$$P(\overline{X} \in E) = P(\overline{X} \in [a,b] \times [c,d]) = \int_{[a,b]} \int_{[c,d]} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) dx_2 dx_1$$

4.5 Funciones de probabilidad marginales

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2 y $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2})$, la función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_1 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_2 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2}(x_2) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$$

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^3, β_3), $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio discreto en R^3, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector en R^3, y $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2}, R_{X_3})$, la función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_1 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{R_{X_2}} \sum_{R_{X_3}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_2 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2}(x_2) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_3}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_3}(x_3) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a las variables aleatorias X_2 y X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2, X_3}(x_2, x_3) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a las variables aleatorias X_1 y X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1, X_3}(x_1, x_3) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

En general en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio continuo en R^k, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k y $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2}, ..., R_{X_k})$, la función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_i que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_i}(x_i) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} \cdots \sum_{R_{X_{i-1}}} \sum_{R_{X_{i+1}}} \cdots \sum_{R_{X_k}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, la función de densidad de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_1 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) dx_2$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_2 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) dx_1$$

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^3, β_3), $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio continuo en R^3, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector en R^3, la función de densidad de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_1 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_2 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_3$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_3}(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$$

La función de probabilidad marginal con respecto a las variables aleatorias X_2 y X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2,x_3)dx_1$$

La función de probabilidad marginal con respecto a las variables aleatorias X_1 y X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2,x_3)dx_2$$

En general en un espacio de probabilidad $(\Omega,\Im,P)$ y el espacio medible (R^k,β_k), $\overline{X}=(X_1,X_2,...,X_k)$ un vector aleatorio continuo en R^k, $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_k)$ un vector en R^k, la función de densidad de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_i que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_k$$

Ejemplo 4.5. El siguiente ejemplo es adaptado de Freund y Miller (2000). En un salón de la universidad A se encuentran reunidos dos estudiantes de matemáticas, tres estudiantes de ingeniería, y cuatro de economía; se escogen aleatoriamente dos estudiantes para aplicarles una encuesta a cerca de la calidad de la educación superior.

A continuación se definen las variables aleatorias,

X_1 : número de estudiantes de ingeniería entre dos seleccionados.

X_2 : número de estudiantes de matemáticas entre los dos seleccionados.

Se desea encontrar las probabilidades asociadas con todos los pares posibles de valores para las variables aleatorias X_1 y X_2, la función de probabilidad conjunta $f_{\overline{X}}(x_1,x_2)$ y $F_{\overline{X}}(0,2)$.

Los valores que puede tomar la variable X_1 son $x_1=0,1,2$ y la variable X_2 toma los valores $x_2=0,1,2$. Así, $R_{X_1}=\{0,1,2\}$ y $R_{X_2}=\{0,1,2\}$

Los posibles pares de valores son: $(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (1,1),\ (2,0)$.

Como en total hay 9 estudiantes, el total de muestras de tamaño dos es 36, que se obtiene de la siguiente forma:

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9*8*7!}{2*7!} = 36$$

Para obtener la probabilidad asociada con del par (x_1, x_2) se determina el evento de obtener x_1 de los tres estudiantes de ingeniería, x_2 de los dos estudiantes de matemáticas y $2 - x_1 - x_2$ de los estudiantes de economía, el número de resultados igualmente probables del evento está dado por:

$$\binom{3}{x_1}\binom{2}{x_2}\binom{4}{2-x_1-x_2}$$

La función de probabilidad conjunta es

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\binom{3}{x_1}\binom{2}{x_2}\binom{4}{2-x_1-x_2}}{\binom{9}{2}} & si\ x_1 = 0,1,2;\ x_2 = 0,1,2;\ 0 \le x_1 + x_2 \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La probabilidad para el par $(0,1)$ es

$$f_{\overline{X}}(0,1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{2-0-1}}{\binom{9}{2}} = \frac{8}{36}$$

Siguiendo un procedimiento similar se obtienen

$f(0,0) = \frac{6}{36}$, $f(0,2) = \frac{1}{36}$, $f(1,0) = \frac{12}{36}$, $f(1,1) = \frac{6}{36}$, $f(2,0) = \frac{3}{36}$

$f(1,2) = 0$, $f(2,1) = 0$, $f(2,2) = 0$

Los anteriores valores para la función de densidad conjunta se presentan en el cuerpo de la Tabla 4.1.

El valor de $F(0,2)$ usando la Tabla 4.1, se calcula de la siguiente forma,

$$F_{\overline{X}}(0,2) = P(X_1 \le 0, X_2 \le 2) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(0,2)$$

$$F(0,2) = F_{\overline{X}}(0,2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$$

Tabla 4.1 Función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2

$R_{X_2} \backslash R_{X_1}$	0	1	2	Marginales
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{21}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
Marginales	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$	

Pero cabe preguntarse, ¿los valores de la Tabla 4.1 definen una función de probabilidad conjunta?

En efecto,

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2) \geq 0$, debido a que cada uno de los valores de la Tabla 4.1 es mayor o igual que cero.

$$ii)\ \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(1,1)$$
$$+ f_{\overline{X}}(1,2) + f_{\overline{X}}(2,0) + f_{\overline{X}}(2,1) + f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$\sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} + \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 + \frac{3}{36} + 0 + 0 = \frac{36}{36} = 1$$

Del cumplimiento de las dos condiciones anteriores, se deduce que $f_{\overline{X}}$ sí es una función de probabilidad para el vector aleatorio en consideración.

A continuación se calculan *a)* $P(X_1 \leq 1, X_2 > 1)$, *b)* $P(X_1 \geq 1, X_2 \geq 1)$, *c)* el valor de $F_{\overline{X}}(1,1)$

$$a)\ P(X_1 \le 1, X_2 > 1) = f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,2) = \frac{1}{36} + 0 = \frac{1}{36}$$

$$b)\ P(X_1 \ge 1, X_2 \ge 1) = f_{\overline{X}}(1,1) + f_{\overline{X}}(1,2) + f_{\overline{X}}(2,1) + f_{\overline{X}}(2,2) = \frac{6}{36} + 0 + 0 + 0 + 0 = \frac{6}{36}$$

$$c)\ F_{\overline{X}}(1,1) = P(X_1 \le 1, X_2 \le 1) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(1,1)$$

$$F_{\overline{X}}(1,1) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{12}{36} + \frac{6}{36} = \frac{32}{36}$$

En seguida se presentan algunos valores para las distribuciones marginales:

$$f_{X_1}(1) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(1, x_2) = f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(1,1) + f_{\overline{X}}(1,2)$$

$$f_{X_1}(1) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(1, x_2) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{18}{36}$$

$$f_{X_2}(0) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 0) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(2,0)$$

$$f_{X_2}(0) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 0) = \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{3}{36} = \frac{21}{36}$$

Ejemplo 4.6 A continuación se proporciona un ejemplo en el cual se trabaja con un vector aleatorio continuo bidimensional.

Analizar si la siguiente función corresponde a una función de densidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 24x_1x_2 \ \ si \ \ 0 < x_1 < 1;\ x_2 > 0;\ x_1 + x_2 < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2) \ge 0$, por definición de la función dada.

$$ii)\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1\left(\int_0^{1-x_1} x_2dx_2\right)dx_1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 24x_1 \left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 12x_1(1-x_1)^2\,dx_1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(12x_1 - 24x_1^2 + 12x_1^3\right)dx_1 = \left(6x_1^2 - 8x_1^3 + 3x_1^4\right)\Big|_0^1 = 6 - 8 + 3 = 1$$

Del cumplimiento de las dos condiciones anteriores, se deduce que $f_{\overline{X}}$ si es una función de densidad de probabilidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$.

En seguida se calcula *a)* $P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2)$, *b)* se determinan las funciones de densidad marginales.

$$a)\ P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \int_{0.5}^{0.8}\left(\int_0^{0.2} 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 + \int_{0.8}^{1}\left(\int_0^{1-x_1} 24x_1x_2dx_2\right)dx_1$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \int_{0.5}^{0.8} 24x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.2} dx_1 + \int_{0.8}^{1} 24x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \int_{0.5}^{0.8} 12x_1\left(0.04\right)dx_1 + \int_{0.8}^{1} 12x_1\left(1 - x_1\right)^2 dx_1$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \int_{0.5}^{0.8} 0.48x_1dx_1 + \int_{0.8}^{1}\left(12x_1 - 24x_1^2 + 12x_1^3\right)dx_1$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \left(0.24x_1^2\right)\Big|_{0.5}^{0.8} - \left(6x_1^2 - 8x_1^3 + 3x_1^4\right)\Big|_{0.8}^{1}$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \left(0.24(0.8)^2\right) - \left(0.24(0.5)^2\right) + \left(6(1)^2 - 8(1)^3 + 3(1)^4\right) - \left(6(0.8)^2 - 8(0.8)^3 + 3(0.8)^4\right)$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = 0.1536 - 0.06 + 1 - 3.84 + 4.96 - 1.2288 \cong 0.1208$$

b) A continuación se determinan las funciones de densidad marginales.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{0} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_2 + \int_0^{1-x_1} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_2 + \int_{1-x_1}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_2$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 24x_1x_2dx_2 = 24x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} = 12x_1\left(1 - x_1\right)^2$$

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 12x_1\left(1 - x_1\right)^2 & si\ 0 < x_1 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1 = \int_{-\infty}^{0} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1 + \int_0^{1-x_2} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1 + \int_{1-x_2}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^{1-x_2} 24x_1x_2dx_1 = 24x_2 \left.\left(\frac{x_1^2}{2}\right)\right|_0^{1-x_2} = 12x_2\left(1-x_2\right)^2$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 12x_2\left(1-x_2\right)^2 & si\ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

4.6 Valor esperado y matriz de covarianzas

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, entonces el valor esperado del vector aleatorio $\overline{X}$ es otro vector conformado por los valores esperados de cada variable aleatoria que compone dicho vector,

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(X_1, X_2\right) = \left(E(X_1), E(X_2)\right)$$

Donde,

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$$

En general, para un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio discreto en R^k, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k, el valor esperado del vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$E\left(\overline{X}\right) = \left(E(X_1), E(X_2), ..., E(X_k)\right)$$

Donde,

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}...\sum_{R_{X_k}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}...\sum_{R_{X_k}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

Así, sucesivamente,

$$E(X_k) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}...\sum_{R_{X_k}} x_k f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

Adicionalmente,

$$E(X_i X_j) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} \ldots \sum_{R_{X_k}} x_i x_j f_{\overline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

Ahora si $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ es un vector aleatorio continuo en R^k, entonces,

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_k) dx_1 dx_2 \ldots dx_k$$

$$E(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_k) dx_1 dx_2 \ldots dx_k$$

Así sucesivamente,

$$E(X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_k) dx_1 dx_2 \ldots dx_k$$

Además,

$$E(X_i X_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f_{\overline{X}}(x_1, x_2, \ldots, x_k) dx_1 dx_2 \ldots dx_k$$

De manera general, $E(X_i) < \infty$ y $E(X_j) < \infty$, $i, j = 1, 2 \ldots, k$, entonces se define la covarianza entre X_i y X_j de la siguiente forma:

$$Cov\left(X_i, X_j\right) = E\left((X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))\right) = Cov\left(X_j, X_i\right)$$

$$Cov\left(X_i, X_j\right) = E\left(X_i X_j\right) - E\left(X_i\right) E\left(X_j\right)$$

Como caso particular resulta,

$$Cov\left(X_i, X_i\right) = E\left((X_i - E(X_i))(X_i - E(X_i))\right) = E\left(X_i - E(X_i)\right)^2 = Var\left(X_i\right)$$

Como consecuencia, se tiene

$$Cov\left(X_i, X_i\right) = E\left(X_i X_i\right) - E\left(X_i\right) E\left(X_i\right) = E\left(X_i\right)^2 - \left(E\left(X_i\right)\right)^2 = Var\left(X_i\right)$$

La matriz de covarianzas asociada correspondiente al vector aleatorio $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ se denota y define de la siguiente manera:

$$\sum = \begin{pmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) & ... & Cov(X_1, X_k) \\ Cov(X_2, X_1) & Cov(X_2, X_2) & ... & Cov(X_2, X_k) \\ . & . & ... & . \\ Cov(X_k, X_1) & Cov(X_k, X_2) & ... & Cov(X_k, X_k) \end{pmatrix}$$

El coeficiente de correlación lineal entre las variables X_i y X_j se denota y define de la siguiente manera:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i)}\sqrt{Var(X_j)}}$$

El coeficiente de correlación indica una relación lineal entre las variables X_i y X_j

$$Var\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Var(X_i) + 2\sum\sum_{i<j} Cov\left(X_i, X_j\right)$$

Solamente en el caso en que las variables $X_1, X_2, ..., X_k$ sean independientes, entonces,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} Var(X_i)$$

Es decir,

$$Var\left(X_1 + X_2 + ... + X_k\right) = Var\left(X_1\right) + Var\left(X_2\right) + ... + Var\left(X_k\right)$$

Ejemplo 4.7. Se sabe que la función $f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$ del ejemplo 4.6 es una función de densidad de probabilidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 24x_1x_2 \ \ si \ \ 0 < x_1 < 1; \ x_2 > 0; \ x_1 + x_2 < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Determinar *a)* el valor esperado de $\overline{X}$, *b)* la matriz de covarianza y *c)* la matriz de correlaciones.

$$a)\ E\left(\overline{X}\right) = \left(E(X_1), E(X_2)\right)$$

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_2} x_1 24 x_1 x_2 dx_2\right) dx_1 = \int_0^1 24x_1^2 \left(\int_0^{1-x_1} x_2 dx_2\right) dx_1$$

$$E(X_1) = \int_0^1 24x_1^2 \left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 12x_1^2 \left(1 - x_1\right)^2 dx_1 = \int_0^1 \left(12x_1^2 - 24x_1^3 + 12x_1^4\right) dx_1$$

$$E(X_1) = \left(4x_1^3 - 6x_1^4 + \frac{12}{5}x_1^5\right)\Bigg|_0^1 = 4 - 6 + \frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

$$E(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{\bar{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} x_2 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1\left(\int_0^{1-x_1} x_2^2dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_2) = \int_0^1 24x_1\left(\frac{x_2^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 8x_1(1-x_1)^3 dx_1 = \int_0^1 \left(8x_1 - 24x_1^2 + 24x_1^3 - 8x_1^4\right)dx_1$$

$$E(X_2) = \left(4x_1^2 - 8x_1^3 + 6x_1^4 - \frac{8}{5}x_1^5\right)\Bigg|_0^1 = 4 - 8 + 6 - \frac{8}{5} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto,

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(X_1, X_2\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Por otro lado,

$$E(X_1^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_{\bar{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} x_1^2 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1^3\left(\int_0^{1-x_1} x_2dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_1^2) = \int_0^1 24x_1^3\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 12x_1^3(1-x_1)^2 dx_1 = \int_0^1 \left(12x_1^3 - 24x_1^4 + 12x_1^5\right)dx_1$$

En consecuencia,

$$E(X_1^2) = \left(3x_1^4 - \frac{24}{5}x_1^5 + 2x_1^6\right)\Bigg|_0^1 = 3 - \frac{24}{5} + 2 = \frac{1}{5}$$

Así,

$$Cov\left(X_1, X_1\right) = Var\left(X_1\right) = E\left(X_1\right)^2 - \left(E\left(X_1\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}$$

$$E(X_2^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 f_{\bar{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} x_2^2 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1\left(\int_0^{1-x_1} x_2^3dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_2^2) = \int_0^1 24x_1\left(\frac{x_2^4}{4}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 6x_1(1-x_1)^4 dx_1 = \int_0^1 \left(6x_1 - 24x_1^2 + 36x_1^3 - 24x_1^4 + 6x_1^5\right)dx_1$$

$$E(X_2^2) = \left(3x_1^2 - 8x_1^3 + 9x_1^4 - \frac{24}{5}x_1^5 + x_1^6\right)\Bigg|_0^1 = 3 - 8 + 9 - \frac{24}{5} + 1 = 5 - \frac{24}{5} = \frac{1}{5}$$

Por consiguiente,

$$Cov\left(X_2,X_2\right)=Var\left(X_2\right)=E\left(X_2\right)^2-\left(E\left(X_2\right)\right)^2=\left(\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{1}{5}-\frac{4}{25}=\frac{1}{25}$$

$$E(X_1X_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_0^1\left(\int_0^{1-x_2}x_1^2\,24x_1x_2dx_2\right)dx_1=\int_0^1 24x_1^2\left(\int_0^{1-x_1}x_2^2dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_1X_2)=\int_0^1 24x_1^2\left(\frac{x_2^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x_1}dx_1=\int_0^1 8x_1^2\left(1-x_1\right)^3dx_1=\int_0^1\left(8x_1^2-24x_1^3+24x_1^4-8x_1^5\right)dx_1$$

$$E(X_1X_2)=\left(\frac{8}{3}x_1^3-6x_1^4+\frac{24}{5}x_1^5-\frac{8}{6}x_1^6\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}-6+\frac{24}{5}-\frac{8}{6}=\frac{2}{15}$$

Por lo tanto,

$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)=\frac{2}{15}-\left(\frac{2}{15}\right)\left(\frac{2}{15}\right)=-\frac{2}{75}=Cov(X_2,X_1)$$

b) La matriz de covarianzas es la siguiente,

$$\sum=\begin{pmatrix}Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2)\\ Cov(X_2,X_1) & Cov(X_2,X_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{25} & \frac{-2}{75}\\ \frac{-2}{75} & \frac{1}{25}\end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de correlaciones, inicialmente se calculan los siguientes coeficientes de correlación,

$$\rho_{1,1}=\frac{Cov(X_1,X_1)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_1)}}=\frac{\frac{1}{25}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{1}{25}}}=1$$

$$\rho_{2,2}=\frac{Cov(X_2,X_2)}{\sqrt{Var(X_2)}\sqrt{Var(X_2)}}=\frac{\frac{1}{25}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{1}{25}}}=1$$

$$\rho_{1,2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}}=\frac{\frac{-2}{75}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{1}{25}}}=\frac{\frac{-2}{75}}{\frac{1}{25}}=\frac{-50}{75}=\frac{-2}{3}=\rho_{2,1}$$

Así, la matriz de correlaciones es

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.8 Con la información del ejemplo 4.5, determinar *a)* el valor esperado del vector aleatorio discreto $\overline{X}$, *b)* la matriz de covarianza y *c)* la matriz de correlaciones.

$$a)\ E\left(\overline{X}\right) = \left(E(X_1), E(X_2)\right)$$

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1,x_2) = 0f_{\overline{X}}(0,0) + 0f_{\overline{X}}(0,1) + 0f_{\overline{X}}(0,2) + 1f_{\overline{X}}(1,0) + 1f_{\overline{X}}(1,1)$$
$$+1f_{\overline{X}}(1,2) + 2f_{\overline{X}}(2,0) + 2f_{\overline{X}}(2,1) + 2f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1,x_2) = 0*\frac{6}{36} + 0*\frac{8}{36} + 0*\frac{1}{36} + 1*\frac{12}{36} + 1*\frac{6}{36} + 1*0 + 2*\frac{3}{36} + 2*0 + 2*0$$

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1,x_2) = \frac{24}{36}$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2) = 0f_{\overline{X}}(0,0) + 0f_{\overline{X}}(1,0) + 0f_{\overline{X}}(2,0) + 1f_{\overline{X}}(0,1) + 1f_{\overline{X}}(1,1)$$
$$+1f_{\overline{X}}(2,1) + 2f_{\overline{X}}(0,2) + 2f_{\overline{X}}(1,2) + 2f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2) = 0*\frac{6}{36} + 0*\frac{12}{36} + 0*\frac{3}{36} + 1*\frac{8}{36} + 1*\frac{6}{36} + 1*0 + 2*\frac{1}{36} + 2*0 + 2*0$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2) = \frac{16}{36}$$

Por lo tanto,

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(X_1, X_2\right) = \left(\frac{24}{36}, \frac{16}{36}\right)$$

$$E(X_1X_2) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1x_2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2) = 0*0f_{\overline{X}}(0,0) + 0*1f_{\overline{X}}(0,1) + 0*2f_{\overline{X}}(0,2) + 1*0f_{\overline{X}}(1,0)$$
$$+1*1f_{\overline{X}}(1,1) + 1*2f_{\overline{X}}(1,2) + 2*0f_{\overline{X}}(2,0) + 2*1f_{\overline{X}}(2,1) + 2*2f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_1X_2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}x_1x_2f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=0*0\frac{6}{36}+0*1\frac{8}{36}+0*2\frac{1}{36}+1*0\frac{12}{36}$$

$$+1*1\frac{6}{36}+1*2*0+2*0\frac{3}{36}+2*1*0+2*2*0$$

Por consiguiente,

$$E(X_1X_2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}x_1x_2f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\frac{6}{36}$$

A continuación,

$$Cov\left(X_1,X_2\right)=E\left(X_1X_2\right)-E\left(X_1\right)E(X_2)=\left(\frac{6}{36}\right)-\left(\frac{24}{36}\right)\left(\frac{16}{36}\right)=\frac{1}{6}-\frac{8}{27}=\frac{-7}{54}$$

$$Cov\left(X_2,X_1\right)=\frac{-7}{54}$$

Además,

$$E(X_1^2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}x_1^2f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=0^2f_{\overline{X}}(0,0)+0^2f_{\overline{X}}(0,1)+0^2f_{\overline{X}}(0,2)+1^2f_{\overline{X}}(1,0)+1^2f_{\overline{X}}(1,1)$$

$$+1^2f_{\overline{X}}(1,2)+2^2f_{\overline{X}}(2,0)+2^2f_{\overline{X}}(2,1)+2^2f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_1^2)=0^2*\frac{6}{36}+0^2*\frac{8}{36}+0^2*\frac{1}{36}+1^2*\frac{12}{36}+1^2*\frac{6}{36}+1^2*0+2^2*\frac{3}{36}+2^2*0+2^2*0$$

$$E(X_1^2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}x_1^2f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\frac{30}{36}$$

Ahora,

$$Cov\left(X_1,X_1\right)=Var\left(X_1\right)=E\left(X_1\right)^2-\left(E\left(X_1\right)\right)^2=\left(\frac{30}{36}\right)-\left(\frac{24}{36}\right)^2=\frac{5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{14}{36}$$

$$E(X_2^2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}x_2^2f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=0^2f_{\overline{X}}(0,0)+0^2f_{\overline{X}}(1,0)+0^2f_{\overline{X}}(2,0)+1^2f_{\overline{X}}(0,1)+1^2f_{\overline{X}}(1,1)$$

$$+1^2f_{\overline{X}}(2,1)+2^2f_{\overline{X}}(0,2)+2^2f_{\overline{X}}(1,2)+2^2f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_2^2)=0^2*\frac{6}{36}+0^2*\frac{12}{36}+0^2*\frac{3}{36}+1^2*\frac{8}{36}+1^2*\frac{6}{36}+1^2*0+2^2*\frac{1}{36}+2^2*0+2^2*0$$

$$E(X_2^2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}x_2^2f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\frac{18}{36}$$

Pero,

$$Cov(X_2,X_2)=Var(X_2)=E(X_2)^2-(E(X_2))^2=\left(\frac{18}{36}\right)-\left(\frac{16}{36}\right)^2=\frac{3}{6}-\frac{16}{81}=\frac{49}{162}$$

b) La matriz de covarianzas es,

$$\sum=\begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & Cov(X_2,X_2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{14}{36} & \frac{-7}{54} \\ \frac{-7}{54} & \frac{49}{162} \end{pmatrix}$$

A continuación se calculan los siguientes coeficientes de correlación,

$$\rho_{1,1}=\frac{Cov(X_1,X_1)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_1)}}=\frac{\frac{14}{36}}{\sqrt{\frac{14}{36}}\sqrt{\frac{14}{36}}}=1$$

$$\rho_{2,2}=\frac{Cov(X_2,X_2)}{\sqrt{Var(X_2)}\sqrt{Var(X_2)}}=\frac{\frac{49}{162}}{\sqrt{\frac{49}{162}}\sqrt{\frac{49}{162}}}=1$$

$$\rho_{1,2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}}=\frac{\frac{-7}{54}}{\sqrt{\frac{14}{36}}\sqrt{\frac{49}{162}}}=\frac{\frac{-7}{54}}{\frac{7}{6}\frac{\sqrt{7}}{9}}=\frac{-1}{\sqrt{7}}=\rho_{2,1}$$

Así, la matriz de correlaciones es,

$$\rho=\begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1}{\sqrt{7}} & 1 \end{pmatrix}$$

4.7 Función de probabilidad condicional

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega,\Im,P)$ y el espacio medible (R^2,β_2), $\bar{X}=(X_1,X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\bar{x}=(x_1,x_2)$ un vector en R^2, entonces la función de probabilidad condicional de X_1 dada X_2 se denota y se define de la siguiente forma:

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Con $f_{X_2}(x_2) > 0$

La función de probabilidad condicional de X_2 dada X_1 se denota y se define de la siguiente forma:

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{P(X_2 = x_1, X_1 = x_1)}{P(X_1 = x_1)} = \frac{f_{\overline{X}}(x_2, x_1)}{f_{X_1}(x_1)}$$

Con $f_{X_1}(x_1) > 0$

Ejemplo 4.9 Con la información del ejemplo 4.5, determinar la probabilidad condicional de $X_1 = 1$ dada $X_2 = 0$.

Uno de los resultados del ejemplo 5.5 permitió establecer que

$$f_{X_2}(0) = P(X_2 = 0) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 0) = \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{3}{36} = \frac{21}{36}$$

En consecuencia

$$f_{X_1/X_2}(1/0) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0)}{P(X_2 = 0)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{21}{36}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el spacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, entonces la función de densidad de probabilidad condicional de X_1 dada X_2 se denota y se define de la siguiente forma

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Con $f_{X_2}(x_2) > 0$

La función de densidad de probabilidad condicional de X_2 dada X_1 se denota y se define de la siguiente forma:

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

Con $f_{X_1}(x_1) > 0$

Ejemplo 4.10 Con la función de densidad bivariada del ejemplo 4.6, determinar la función de densidad de probabilidad condicional de X_2 dada X_1.

Uno de los resultados del ejemplo 4.6 permitió obtener,

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 12x_1(1-x_1)^2 & si\ 0 < x_1 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \begin{cases} \dfrac{24x_1x_2}{12x_1(1-x_1)^2} & si\ 0 < x_1 < 1;\ 0 < x_2 < 1 - x_1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

4.8 Esperanza matemática condicional

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, entonces la esperanza matemática de X_1 dada X_2 se denota y se define de la siguiente forma:

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \sum_{R_{X_1}} x_1 f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \sum_{R_{X_1}} x_1 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

La esperanza matemática de X_2 dada X_1 se denota y se define de la siguiente forma:

$$E(X_2/X_1 = x_1) = \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \sum_{R_{X2}} x_2 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

Ejemplo 4.11 Con la información del ejemplo 5.5, determinar la esperanza matemática de X_2 dada $X_1 = 1$.

En principio,

$$E(X_2/X_1 = 1) = \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1 = 1) = \sum_{R_{X2}} x_2 \frac{f_{\overline{X}}(1, x_2)}{f_{X_1}(1)}$$

Luego,

$$E(X_2/X_1 = 1) = 0\frac{f_{\overline{X}}(1,0)}{f_{X_1}(1)} + 1\frac{f_{\overline{X}}(1,1)}{f_{X_1}(1)} + 2\frac{f_{\overline{X}}(1,2)}{f_{X_1}(1)}$$

Adicionalmente, usando la información de la Tabla 4.1 y uno de los resultados del ejemplo 4.5 que establece que

$$f_{X_1}(1) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(1, x_2) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{18}{36}$$

Reemplazando, se tiene:

$$E(X_2/X_1 = 1) = 0\left(\frac{\frac{12}{36}}{\frac{18}{36}}\right) + 1\left(\frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}}\right) + 2(0) = \frac{1}{3}$$

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, entonces la esperanza matemática de X_1 dada X_2 se denota y se define de la siguiente forma:

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)\,dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}\,dx_1$$

La esperanza matemática de X_2 dada X_1 se denota y se define de la siguiente forma:

$$E(X_2/X_1 = x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}\,dx_2$$

Ejemplo 4.12 Con la información del ejemplo 4.6, determinar la esperanza matemática de X_2 dada $X_1 = 0.5$

Usando el resultado del ejemplo 4.10, se tiene que

$$E(X_2/X_1=x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)\,dx_2=\int_{-\infty}^{\infty}x_2\,\frac{24x_1x_2}{12x_1\left(1-x_1\right)^2}\,dx_2$$

$$E(X_2/X_1=x_1)=\int_0^{1-x_1}x_2\,\frac{24x_1x_2}{12x_1\left(1-x_1\right)^2}\,dx_2=\left.\frac{2x_1\left(\frac{x_2^3}{3}\right)}{x_1\left(1-x_1\right)^2}\right|_0^{1-x_1}=\frac{2x_1\left(1-x_1\right)^3}{3x_1\left(1-x_1\right)^2}$$

$$E(X_2/X_1=x_1)=\frac{2\left(1-x_1\right)}{3}$$

Finalmente,

$$E(X_2/X_1=0.5)=\frac{2\left(1-0.5\right)}{3}=\frac{1}{3}$$

Actividades para el estudio independiente capítulo 4

4.1 Con base en la información de la Tabla 4.1, determinar *a*) $P(X_1 \leq 2, X_2 > 1)$,

b) $F_{\overline{X}}(1,2)$, $f(1,0)$, *c)* $f_{X_1}(0)$, *d)* $f_{X_2}(2)$, *e)* $f_{X_2/X_1}(2/0)$, *f)* $E(X_2/X_1 = 2)$.

4.2 Dada la siguiente función de densidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 24x_1x_2 \ \ si \ \ 0 < x_1 < 1; \ x_2 > 0; \ x_1 + x_2 < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad en \ otro \ caso \end{cases}$$

Calcular *a*) $P(X_1 \leq 0.6, X_2 < 0.2)$, *b)* $f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)$ *c)* determinar la esperanza matemática de X_1 dada $X_2 = 0.4$.

Ejercicios para el capítulo 4

4.1 Con base en la información de la Tabla 4.2, determinar $a)$ $P(X_1 \leq 2, X_2 > 1)$, *b)* $F_{\overline{X}}(1,2)$, $f(1,3)$, *c)* $f_{X_1}(2)$, *d)* $f_{X_2}(1)$, *e)* $f_{X_2/X_1}(2/3)$, *f)* $E(X_2/X_1 = 2)$, *g)* Obtener el valor esperado para el vector aleatorio discreto $\overline{X} = (X_1, X_2)$, *h)* obtener la matriz de varianza y la matriz de correlación para el vector aleatorio $\overline{X}$.

Tabla 4.2 Función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2

$R_{X_2} \backslash R_{X_1}$	1	2	3	Marginales
1	0.1	0	0.13	0.23
2	0	0.25	0.07	0.32
3	0.3	0.15	0	0.45
Marginales	0.4	0.4	0.2	

4.2 Analizar si la siguiente función corresponde a una función de densidad de probabilidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 \ \ si \ \ 0 < x_1 < 1; \ 0 < x_2 < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad en \ otro \ caso \end{cases}$$

De resultar función de densidad, calcular: $a)$ $P(X_1 \leq 0.8, X_2 > 0.2)$, *b)* $f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)$ *c)* determinar la esperanza matemática de X_1 dada $X_2 = 0.7$ *d)* obtener el valor esperado para el vector aleatorio $\overline{X} = (X_1, X_2)$, *e)* obtener la matriz de varianza y la matriz de correlación para el vector aleatorio $\overline{X}$.