3

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

En este capítulo se presentan las distribuciones de probabilidad para variables aleatorias tanto discretas como continuas más frecuentes; asimismo, se proporcionan ejemplos de aplicación del modelo binomial, hipergeométrico, de Poisson y normal, entre otros; se indican el valor esperado o media de la variable aleatoria y la varianza para cada distribución y se proponen algunos ejercicios a fin de que el lector utilice los modelos de probabilidad estudiados.

3.1 Distribuciones de probabilidad de tipo discreto

En esta sección se explicitan los modelos de Bernoulli, binomial, hipergeométrico y de Poisson. Algunos de los aspectos teóricos considerados están soportados en los conceptos expuestos por autores como Bickel (1977), Papoulis (1991), Ross (1998), Freund y Miller (2000), y Marshall y Olkin (2007), entre otros.

3.1.1 *Distribución de Bernoulli*

Una variable aleatoria X tiene distribución de Bernoulli de parámetro p si su función de probabilidad es,

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

Al parámetro p se le denomina probabilidad de éxito en una prueba de Bernoulli.

3.1.1.1 Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, entonces:

i) $E(X) = p$.

ii) $Var(X) = p(1-p)$.

Los anteriores valores fueron obtenidos en el capítulo anterior mediante la función generadora de momentos.

3.1.2 *Distribución Binomial*

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p si su función de probabilidad es

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & si\ x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Al parámetro p se le denomina probabilidad de éxito en cada una de las n pruebas de Bernoulli independientes que se han de involucrar en la definición de la variable aleatoria X, la cual corresponde al número de éxitos en las n pruebas.

3.1.2.1 Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución binomial, entonces su valor esperado o media de la variable aleatoria y su varianza están dados por,

i) $E(X) = np$.

ii) $Var(X) = np(1-p)$.

Los anteriores valores fueron obtenidos en el capítulo anterior mediante la función generadora de momentos.

3.1.2.2 Aplicaciones

Ejemplo 3.1 Una máquina produce piezas del tipo T para una clase de mueble, la probabilidad de que cualquier pieza del tipo T producida por la máquina resulte de buena calidad es 0.95, si se escoge una muestra aleatoria de 10 de dicha piezas para someterlas a control de calidad,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocho resulten de buena calidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que todas resulte de buena calidad?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos ocho resulten de buena calidad?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más siete resulten de buena calidad?

e) Determinar el valor esperado y la varianza del número de piezas del tipo T de buena calidad en la muestra.

Se define la variable aleatoria como X : número de piezas del tipo T de buena calidad en la muestra de 10, los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,10.

a) Aplicando el modelo binomial con $n = 10$ y $p = 0.95$ resulta,

$$f(8) = P(X = 8) = \binom{10}{8}(0.95)^8(1-0.95)^{10-8}$$

$$P(X = 8) = \frac{10!}{8!(10-2)!}(0.0.6634)(0.05)^2 = 45(0.66342)(0.0025)$$

$$P(X = 8) \cong 0.07463$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria resulten ocho piezas del tipo T de buena calidad es de 0.07463 o del 7.46% aproximadamente.

b)

$$f(10) = P(X = 10) = \binom{10}{10}(0.95)^{10}(1-0.95)^{10-10}$$

$$P(X = 10) = \frac{10!}{10!(10-10)!}(1)(0.95)^{10}(1) = 1(0.5987)(1) \cong 0.5987$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria todas las piezas del tipo T resulten de buena calidad es de 0.5987 o del 59.87%.

c) Se ha de calcular,

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X = 8)$ y $P(X = 10)$, solamente resta calcular $P(X = 9)$ y reemplazar los resultados en la anterior expresión,

$$f(9) = P(X = 9) = \binom{10}{9}(0.95)^9(1-0.95)^{10-9}$$

$$P(X = 9) = \frac{10!}{9!(10-9)!}(0.95)^9(0.05) = 10(0.63024)(0.05) \cong 0.3151$$

Luego,

$$P(X \geq 8) = 0.0746 + 0.3151 + 0.5987 = 0.9884$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria por lo menos ocho piezas del tipo T resulten de buena calidad es de 0.9884 o del 98.84%.

d) Se debe calcular,

$$P(X \leq 7) = P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = 7)$$

O de forma equivalente se usa la probabilidad del evento complementario y se calculará la siguiente probabilidad:

$$P(X \leq 7) = 1 - \{P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)\}$$

$$P(X \leq 7) = 1 - \{0.0746 + 0.3151 + 0.5987\} = 1 - 0.9884 = 0.0116$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria a lo más siete de las piezas del tipo T resulten de buena calidad es de 0.0116 o del 1.16%.

e) El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente manera:

$$E(X) = np = 10(0.95) = 9.5$$

$$Var(X) = np(1 - p) = 10(0.95)(0.05) = 0.475$$

Ejemplo 3.2 La probabilidad de que cualquier pollo de la granja G esté bajo de peso después de ser alimentado con una ración alimentaria específica hasta la segunda semana es de 0.4, si se toma una muestra aleatoria de 15 pollos de dicha granja,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pollo de la muestra resulte bajo de peso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los pollos de la muestra resulte bajo de peso?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos pollos resulten con bajo peso?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los pollos de la muestra resulten con bajo peso?

Se define la variable aleatoria como X: número de porcinos de la granja A que pueden presentar bajo peso en la muestra de 15. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,15.

a) Aplicando el modelo binomial con $n = 15$ y $p = 0.4$ resulta,

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{15}{1}(0.4)^1(1-0.4)^{15-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{15!}{1!(15-1)!}(0.4)(0.6)^{14} = 15(0.4)(0.0007836) \cong 0.0047$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria resulte un pollo bajo de peso es de 0.0047 o del 0.47%.

b)

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{15}{0}(0.4)^0(1-0.4)^{15-0}$$

$$P(X = 0) = \frac{15!}{0!(15-0)!}(1)(0.6)^{15} = 1(1)(0.00047) \cong 0.00047$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria ninguno de los pollos resulte bajo de peso es de 0.00047 o del 0.047%.

c) Se debe calcular,

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X = 1)$ y $P(X = 0)$, solamente resta calcular $P(X = 2)$ y reemplazar los resultados en la anterior expresión,

$$f(2) = P(X = 2) = \binom{15}{2}(0.4)^2(1-0.4)^{15-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{15!}{2!(15-2)!}(0.16)(0.6)^{13} = 105(0.16)(0.0013) \cong 0.0219$$

Luego,

$$P(X \leq 2) = 0.0047 + 0.00047 + 0.0219 = 0.0693$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria a lo más dos pollos presenten bajo peso es de 0.0693 o del 6.93%.

d)

$$f(15) = P(X = 15) = \binom{15}{15}(0.4)^{15}(1-0.4)^{15-15}$$

$$P(X=15)=\frac{15!}{15!(15-15)!}(0.4)^{15}(0.6)^{0}=1(0.000001)(1)\cong 0.000001$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria todos los pollos resulten con bajo peso es de 0.000001 o del 0.0001%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente manera:

$$E(X)=np=15(0.4)=6$$

Se esperaría que en la muestra aleatoria 6 pollos resulten con bajo peso.

$$Var(X)=np(1-p)=15(0.4)(0.6)=3.6$$

3.1.3. *Distribución hipergeométrica*

Una variable aleatoria X tiene distribución hipergeométrica de parámetros n, M y N si su función de probabilidad es,

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\dbinom{M}{x}\dbinom{N-M}{n-x}}{\dbinom{N}{n}} & si\ x=0,1,\ldots,n\\[2ex] 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

En este modelo se define la variable aleatoria como X: Número de éxitos en la muestra

3.1.3.1. Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, entonces:

i) $E(X)=n\dfrac{M}{N}$

ii) $Var(X)=n\dfrac{M}{N}\dfrac{N-M}{N}\dfrac{N-n}{N-1}$

3.1.3.2 Aplicaciones

Ejemplo 3.3 En un curso de estadística hay 20 estudiantes de los cuales 8 son de la carrera de administración y 12 de la carrera de economía, si se decide escoger aleatoriamente un grupo de cinco del mencionado curso para realizar una prueba diagnóstica sobre conocimientos previos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos estudiantes de la carrera de administración?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un estudiante de la carrera de administración?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los estudiantes resulten de la carrera de economía?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres estudiantes de la carrera de administración?

e) Obtener el valor esperado e interpretar.

Se define la variable aleatoria como *X:* número de estudiantes de la carrera de administración que resultarán conformando el grupo de cinco para realizar la prueba diagnóstica sobre conocimientos previos. Los posibles valores que puede asumir la variable son: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

En este este caso, es posible aplicar el modelo hipergeométrico con:

$$N = 20\,,\ M = 8\,,\ N - M = 12\,,\ n = 5$$

a) La probabilidad de que dos estudiantes de la carrera de administración resulten en el grupo de cinco, se calcula de la siguiente forma,

$$P(X=2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{5-2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{8!}{2!(8-2)!}\,\frac{12!}{3!(12-3)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}} = \frac{28(220)}{15504} \cong 0.3973$$

La probabilidad de que en el grupo de cinco resulten dos estudiantes de la carrera de administración es de 0.3973 o del 39.73%.

b) Ahora, la probabilidad de que un solo estudiante de la carrera de administración resulte en el grupo de cinco, se obtiene de la siguiente manera,

$$P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{12}{5-1}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{8!}{1!(8-1)!}\,\frac{12!}{4!(12-4)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{8(495)}{15504}\cong 0.2554$$

La probabilidad de que en el grupo de cinco resulte un solo estudiante de la carrera de administración es de 0.2554 o del 25.54%.

c) Que en el grupo todos los estudiantes resulten de la carrera de economía significa que cero estudiantes de la carrera de administración conformarán el grupo de cinco, luego,

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{8}{0}\binom{12}{5-0}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{8!}{0!(8-0)!}\,\frac{12!}{5!(12-5)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{1(792)}{15504}\cong 0.0511$$

La probabilidad de que en el grupo de cinco todos los estudiantes resulten de la carrera de economía es de 0.0511 o del 5.11%.

d) Se ha de calcular $P(X \geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$.

En este caso también se puede usar la probabilidad del evento complementario a través de,

$$P(X\geq 3)=1-\{0.0511+0.2554+0.3973\}=1-0.7038=0.2962$$

La probabilidad de que en el grupo de cinco resulten por lo menos tres estudiantes de la carrera de administración es de 0.2962 o del 29.62%.

e) El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula de la siguiente manera:

$$E(X)=n\frac{M}{N}=5\left(\frac{8}{20}\right)=\frac{40}{20}=2$$

Se esperaría que dos estudiantes de la carrera de administración estuvieran en el grupo de cinco para presentar la prueba diagnóstica sobre conocimientos previos.

Ejemplo 3.4 La junta directiva de una empresa TB está conformada por 10 miembros, de los cuales 4 son mujeres, si se proyecta organizar un comité auditor conformado por 3 miembros de la junta directiva, *a)* ¿Cuál es la probabilidad de que el comité resulte conformado solo por mujeres?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el comité resulte conformado solo por hombres?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el comité resulte conformado por una mujer y dos hombres?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 mujeres resulten conformando el comité?

Se define la variable aleatoria como *X:* número de mujeres que resulten conformando el comité social.

Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2, 3.

Para este caso, se aplica el modelo hipergeométrico con:

$$N = 10,\ M = 4,\ N - M = 6,\ n = 3$$

a) Que todos los miembros del comité social resulten mujeres.

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{3-3}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4!}{3!(4-3)!}\,\frac{6!}{0!(6-0)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}} = \frac{4(1)}{120} \cong 0.0333$$

La probabilidad de que el comité resulte conformado solo por mujeres es de 0.0333 o del 3.33%.

b) Que todos los miembros del comité social resulten hombres significa incluir cero mujeres en el comité.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3-0}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4!}{0!(4-0)!}\,\frac{6!}{3!(6-3)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}} = \frac{1(20)}{120} \cong 0.1667$$

La probabilidad de que el comité resulte conformado solo por hombres es de 0.1667 o del 16.67%.

c) Que una mujer y dos hombres puedan conformar el comité social significa incluir una sola mujer en el comité.

$$f(1)=P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3-1}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{4!}{1!(4-1)!}\frac{6!}{2!(6-2)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}}=\frac{4(15)}{120}=0.5$$

La probabilidad de que el comité resulte conformado por una mujer y dos hombres es de 0.5 o del 50%.

d) Se debe calcular $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)$ o equivale a usar la probabilidad del evento complementario:

$$P(X\geq 2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$$

Debido a que en las partes *b)* y *c)* ya se han calculado las probabilidades $P(X=0)$ y $P(X=1)$, solamente se reemplazan en la anterior expresión,

$$P(X\geq 2)=1-\{0.1667+0.5\}=1-0.6667\cong 0.3333$$

La probabilidad de que por lo menos 2 mujeres resulten conformando el comité social es 0.3333 o del 33.33%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente forma:

$$E(X)=n\frac{M}{N}=3\left(\frac{4}{10}\right)=\frac{12}{10}=1.2$$

Se esperaría que una mujer estuviera conformando el comité auditor.

$$Var(X)=n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}=3\frac{4}{10}\frac{6}{10}\frac{7}{9}=\frac{504}{900}=0.56$$

3.1.4 *Distribución Poisson*

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda>0$ si su función de probabilidad es

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & si\ x=0,1,... \\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

X: número de eventos independientes en un lapso de tiempo o por unidad de área o de volumen. El parámetro λ es el promedio de eventos independientes en el periodo de tiempo

3.1.4.1 Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución Poisson, entonces su valor esperado o media de la variable aleatoria y su varianza son:

i) $E(X) = \lambda$

ii) $Var(X) = \lambda$

3.1.4.2 Aplicaciones

En el modelo de Poisson, la variable aleatoria X representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren con una rapidez constante en un lapso de tiempo o en un determinado espacio. El parámetro λ corresponde al promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo o de espacio.

Con la ayuda del modelo de Poisson se puede modelar fenómenos como los siguientes:

a) X : número de llamadas telefónicas que recibe una central telefónica por hora.

b) X : número de partículas alfa emitidas por segundo por una sustancia radiactiva.

c) X : número de vehículos que llegan a un parqueadero por día.

d) X : número de accidentes en una determinada vía por mes.

e) X : número de clientes que llegan a la cola de un banco por hora para realizar alguna transacción financiera.

A continuación se proporcionan algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 3.5 El promedio de autos de la marca R que llegan a una estación de gasolina por hora para abastecerse de combustible es de 4,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tres autos de la marca R lleguen a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más un auto de la marca R llegue a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos autos de la marca R lleguen a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible?

d) Obtener el valor esperado y la varianza e interpretar el valor esperado.

Se define la variable aleatoria como X: número de autos de la marca R que llegarán a estación de gasolina en la próxima hora para abastecerse de combustible. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…

a) Aplicando el modelo Poisson con $\lambda = 4$ resulta,

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{4^3}{3!} e^{-4} = \frac{64}{6}(0.0183) \cong 0.1952$$

La probabilidad de que tres autos de la marca R lleguen a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible es de 0.1952 o del 19.52% aproximadamente.

b) Se debe calcular $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} \cong 0.0183$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 4(0.0183) \cong 0.0732$$

Luego,

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.0183 + 0.0732 = 0.0915$$

La probabilidad de que a lo más un auto de la marca R llegue a la estación en la próxima hora para abastecerse de combustible es de 0.0915 o del 9.15%.

c) En este caso, se ha de calcular,

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + ...$$

De manera equivalente, se calcula la probabilidad del evento complementario,

$$P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\} = 1 - \{0.0183 + 0.0732\}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.0915 = 0.9085$$

La probabilidad de que por lo menos dos autos de la marca R lleguen a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible es de 0.9085 o del 90.85%

d) El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se obtienen directamente,

$$E(X) = \lambda = 4$$

$$Var(X) = \lambda = 4$$

Se espera que cuatro autos de la marca R lleguen a la mencionada estación en la próxima hora para abastecerse de combustible

Ejemplo 3.6 En la empresa JJ, el promedio de ausencia por mes de sus trabajadores es de 2,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente mes 2 trabajadores se ausenten de la empresa JJ?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente mes por lo menos 3 trabajadores se ausenten de la empresa JJ?

c) Obtener la media o valor esperado y la varianza.

La variable aleatoria se puede definir así X: número de trabajadores que se ausentarán el próximo mes en la empresa JJ. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…

a) Aplicando el modelo Poisson con $\lambda = 2$ resulta,

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} = \frac{4}{2}\left(0.1353\right) \cong 0.2706$$

La probabilidad de que en el siguiente mes 2 trabajadores se ausenten de la empresa JJ es de 0.2706 o del 27.06%.

b) Se ha de calcular,

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + ...$$

De manera equivalente,

$$P(X \geq 3) = 1 - \left\{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\right\}$$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} \cong 0.1353$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 2\left(0.1353\right) \cong 0.2706$$

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} = 2(0.1353) \cong 0.2706$$

Luego,

$$P(X \geq 3) = 1 - \{0.1353 + 0.2706 + 0.2706\} = 1 - 0.6766 = 0.3234$$

La probabilidad de que en el siguiente mes por lo menos 3 trabajadores se ausenten de la empresa JJ es de 0.3234 o del 32.34% aproximadamente.

c) El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se obtienen directamente,

$$E(X) = \lambda = 2$$

Se espera que el próximo mes se presenten 2 ausencias en los trabajadores de la empresa JJ.

$$Var(X) = \lambda = 2$$

Es conveniente señalar aquí que el modelo binomial se puede aproximar por el modelo de Poisson cuando n es grande, p es pequeño (inferior a 0.1) y se satisface que $1 \leq \lambda = np \leq 5$

Ejemplo 3.7 El 3% de los usuarios de la entidad financiera H tienen seguro contra robo en el cajero automático, si se escogen aleatoriamente 100 usuarios de la mencionada entidad financiera ¿cuál es la probabilidad de que más de uno tenga el seguro contra robo?

En este caso, se puede definir la variable aleatoria así X: número de usuarios de la entidad financiera H que tienen el seguro contra robo en la muestra. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…, 100. Como $\lambda = np = 0.03(100) = 3$ y se cumple las condiciones para aproximar el modelo binomial al modelo de Poisson, luego:

Se ha de calcular $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X=0) + P(X=1)\}$

$$f(0) = P(X=0) = \frac{3^0}{0!}e^{-3} \cong 0.04978$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{3^1}{1!}e^{-3} = 3(0.04978) \cong 0.14934$$

Por lo tanto,

$$P(X \geq 2) = 1 - \{0.04978 + 0.14934\} = 1 - 0.1991 = 0.8009$$

La probabilidad de que más de uno de los usuarios de la muestra tenga el seguro contra robo en el cajero automático es de 0.8009 o del 80.09%.

Ahora, si se usa el modelo binomial con $n = 100$ y $p = 0.03$ se obtiene un resultado bastante aproximado, como se verifica en seguida,

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{100}{0}(0.03)^0(1-0.03)^{100-0}$$

$$P(X=0) = \frac{100!}{0!(100-0)!}(1)(0.97)^{100} = 1(1)(0.04755) \cong 0.04755$$

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{100}{1}(0.03)^1(1-0.03)^{100-1}$$

$$P(X=1) = \frac{100!}{1!(100-1)!}(0.03)^1(0.97)^{100-1} \cong 100(0.03)(0.049)$$

$$P(X = 1) \cong 0.147$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \{0.04755 + 0.147\} = 1 - 0.19455 \cong 0.8054$$

3.1.5 *Otras distribuciones discretas*

En este apartado, se mencionan otras distribuciones discretas de probabilidad, las cuales pueden resultar de interés para el lector. Ejemplos de aplicación de algunas de estas distribuciones se pueden consultar en: Freund y Miller (2000) sección 5.5, Ross (1998) sección 4.8 y Blanco (2004) sección 3.3.

3.1.5.1 Distribución uniforme discreta

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye de manera uniforme sobre los puntos $x_1, x_2, ..., x_N$ si su función de probabilidad es,

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{para } x_i = 1, 2, ..., N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El parámetro de la distribución discreta uniforme es N .

Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución discreta uniforme, entonces su valor esperado y su varianza son:

i) $E(X)=\dfrac{N+1}{2}$

ii) $Var(X)=\dfrac{N^2-1}{12}$

3.1.5.2 Distribución geométrica o de Pascal

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución Geométrica o de Pascal de parámetro p si su función de probabilidad es,

$$f(x)=P(X=x)=p(1-p)^{x-1},\quad x=1,2,...$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución Geométrica o de Pascal, entonces:

i) $E(X)=\dfrac{1}{p}$

ii) $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

3.1.5.3 Distribución binomial negativa

Una variable aleatoria X tiene distribución binomial negativa de parámetros k y p si su función de probabilidad es,

$$f(x)=P(X=x)=\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}\quad si\ x=k,k+1,2,...\ \ k=1,2,...$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución Binomial negativa, entonces:

i) $E(X)=\dfrac{k}{p}$

ii) $Var(X)=\dfrac{k(1-p)}{p^2}$

3.2 Distribuciones de probabilidad de tipo continuo

En esta sección se indican los modelos uniforme, normal, exponencial, lognormal, logístico, de Weibull, Laplace y Beta entre otros. Algunos de los aspectos teóricos considerados están soportados en los conceptos expuestos por autores como Bickel (1977), Papoulis (1991), Ross (1998), Freund (2000) y Marshall (2007), por citar algunos.

3.2.1 *Distribución uniforme*

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye uniformemente sobre el intervalo $[a,b]$ con $a < b$ números reales si su función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

3.2.1.1 Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución uniforme en $[a,b]$ con $a < b$, entonces:

i) $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

ii) $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

En la Figura 3.1 se indica la representación gráfica de la función de densidad de la variable aleatoria X con distribución uniforme.

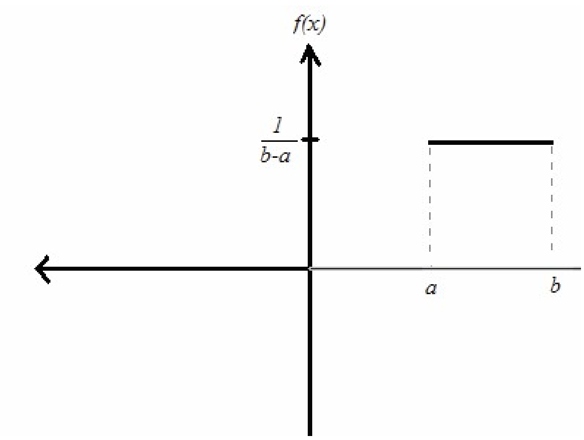

Figura 3.1. Función de densidad de la variable aleatoria *X* uniforme

Como caso particular se tiene que para $a = 0,\ b = 1$ una variable aleatoria X se distribuye uniformemente sobre el intervalo $[0,1]$ si su función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0,1]$, entonces:

i) $E(X) = \frac{1}{2}$

ii) $Var(X) = \frac{1}{12}$

3.2.2 *Distribución normal*

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución normal de parámetros μ y σ, donde μ es un número real y σ un número real positivo si su función de densidad es,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad x \in R$$

Su representación gráfica se presenta en la Figura 3.2.

La curva se denomina campana de Gauss y el área bajo la curva vale 1.

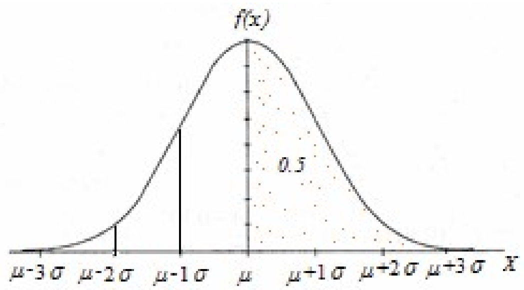

Figura 3.2. Función de densidad de la variable aleatoria *X* normal

Además se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$

3.2.2.1 Propiedades

i) $E(X) = \mu$

ii) $Var(X) = \sigma^2$

Como caso particular si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se tiene la densidad de la distribución normal estándar dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right], \quad x \in R$$

La mencionada distribución se obtiene realizando la siguiente estandarización de la variable:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$dz = \frac{1}{\sigma}dx$$

La densidad de la distribución normal estándar cumple la siguiente igualdad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = 1$$

La densidad de la distribución normal estándar para la variable aleatoria Z es,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

que sin pérdida de generalidad se puede escribir de la siguiente manera,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right], \quad x \in R$$

Donde $f(x)$ es una función de densidad para la variable aleatoria X.

La función de distribución de la variable aleatoria Z con distribución normal estándar es,

$$F(z) = P(Z \le z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}t^2\right] dt$$

En la Figura 3.3 se indica la función de densidad de la distribución normal estándar, se observa que ella es simétrica con respecto al eje vertical. El área bajo la curva es igual a 1, en la parte izquierda se ubica un área igual a 0.5=50% y en la parte derecha se tiene un área de 0.5 como resultado de la simetría. Los valores en el eje horizontal para la variable estandarizada están aproximadamente entre -3.5 y 3.5.

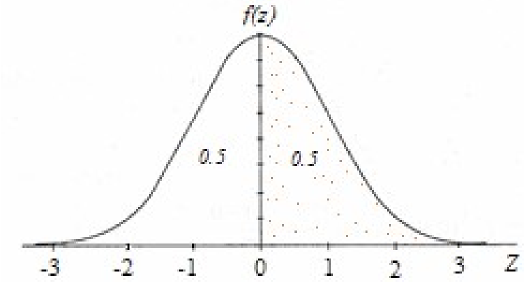

Figura 3.3. Función de densidad de la variable aleatoria *X* normal estándar

Ejemplo 3.8 La Figura 3.4 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad $P(Z \le 2.02)$, la cual se puede leer en una tabla para la distribución normal estándar.

$$F(2.02) = P(Z \le 2.02) = \Phi(2.02) = ?$$
$$F(2.02) = P(Z \le 2.02) = 0.9783 \cong 97.83\%.$$

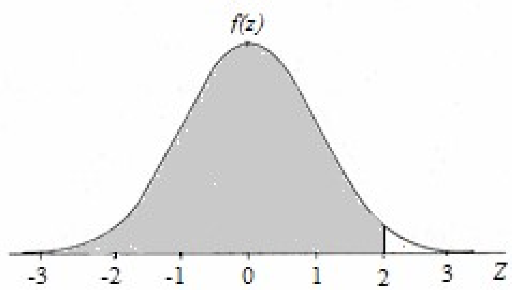

Figura 3.4. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \le 2.02)$

Ejemplo 3.9 La Figura 3.5 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$F(-1.18) = P(Z \leq -1.18) = \Phi(-1.18) = 0.119 \cong 11.9\%$

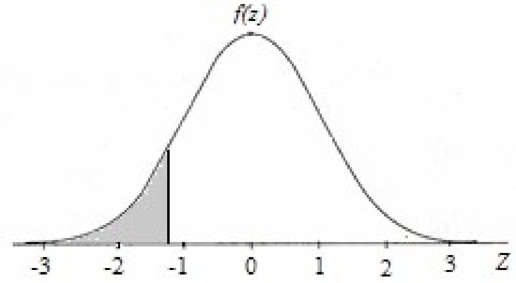

Figura 3.5. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq -1.18)$

Ejemplo 3.10 La Figura 3.6 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$P(Z \leq 0.83) = 0.7967 \cong 79.67\%$

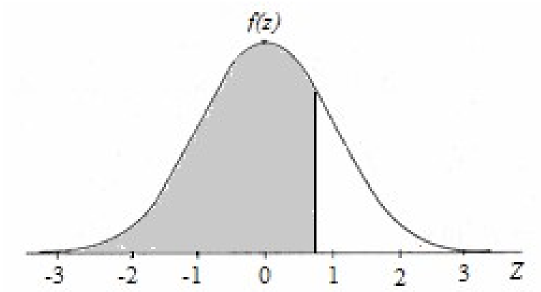

Figura 3.6. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq 0.83)$

Ejemplo 3.11 La Figura 3.7 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$P(Z \geq 1.4) = 1 - P(Z \leq 1.4) = 1 - 0.9192 = 0.0808 \cong 8.08\%$

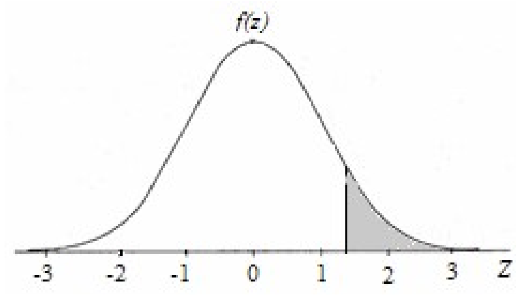

Figura 3.7. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \geq 1.4)$

Ejemplo 3.12 La Figura 3.8 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$$P(-1.4 \leq Z \leq 2.5) = P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq -1.4)$$

$$P(-0.4 \leq Z \leq 2.5) = 0.9938 - 0.0808 = 0.9130$$

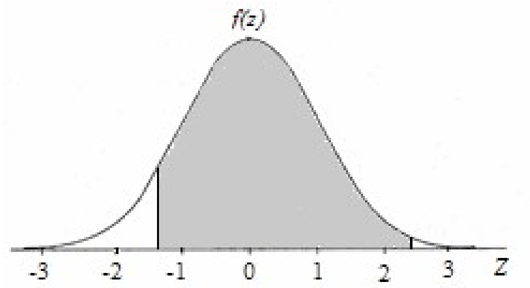

Figura 3.8. Área bajo la curva normal estándar $P(-1.4 \leq Z \leq 2.5)$

3.2.2.2 Aplicaciones

Ejemplo 3.12 La empresa LL produce lámparas cuya duración en horas se distribuye normalmente con media de 900 horas y desviación estándar de 50 horas. Si se toma al azar una lámpara de la producción,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dure máximo 940 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dure por lo menos 822 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que dure entre 880 y 1020 horas?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 1200 horas?

$\mu = 900$ horas, $\sigma = 50$ horas

X: duración en horas de una lámpara cualesquiera producida por la empresa LL.

a) $P(X \leq 940) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{940-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{940-900}{50}\right)$

$$P(X \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{40}{50}\right) = P(Z \leq 0.8) = 0.7881 \cong 78.81\%$$

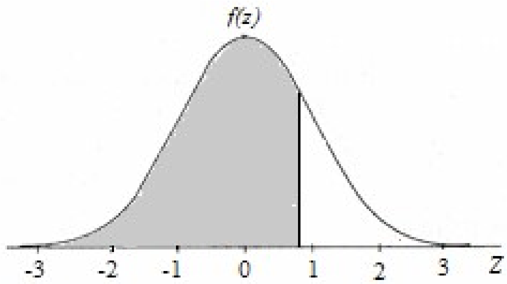

Figura 3.9. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq 0.8)$

La probabilidad de que una lámpara escogida al azar de la producción dure máximo 940 horas es del 78.81%. Una representación de la situación se tiene en la Figura 3.9.

b) $P(X \geq 822) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{822-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{822-900}{50}\right)$

$$P(X \geq 822) = P(Z \geq -1.56) = 1 - P(Z \leq -1.56) = 1 - 0.0594 = 0.9406$$

$$P(X \geq 822) = 0.9406 \cong 94.06\%$$

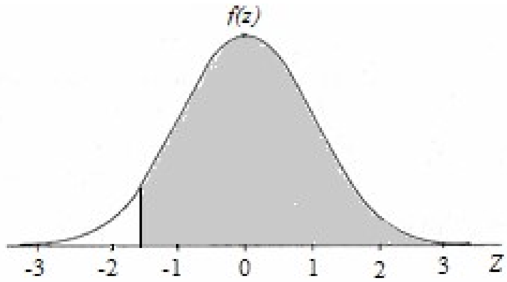

Figura 3.10. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \geq -1.56)$

La probabilidad de que una lámpara escogida al azar de la producción dure por lo menos 822 horas es del 94.06%. Una representación de la anterior situación se tiene en la Figura 3.10.

c) $P(880 \leq X \leq 1020) = P\left(\frac{880-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1020-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(880 \leq X \leq 1020) = P\left(\frac{880-900}{50} \leq Z \leq \frac{1020-900}{50}\right) = P(-0.4 \leq Z \leq 2.4)$$

$$P(880 \leq X \leq 1020) = 0.9918 - 0.3446 = 0.6472 \cong 64.72\%$$

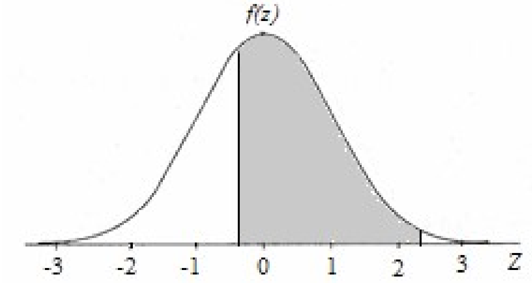

Figura 3.11. Área bajo la curva normal estándar $P(-0.4 \leq Z \leq 2.4)$

La probabilidad de que una lámpara escogida al azar de la producción dure entre 880 y 1020 horas es de 64.72%. Ver Figura 3.11.

d) $P(X \geq 1200) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1200-900}{50}\right) = P(Z \geq 6) \cong 0$

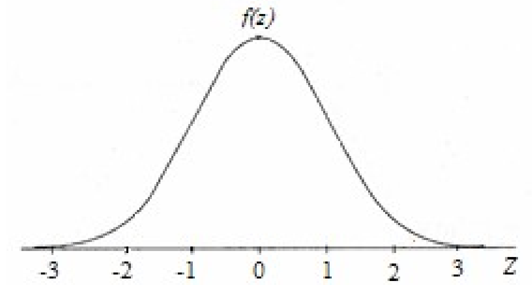

Figura 3.12. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \geq 6)$

La probabilidad de que una lámpara escogida al azar de la producción dure más de 1200 horas es del 0% aproximadamente. Ver Figura 3.12.

Ejemplo 3.13 El peso de los paquetes de azúcar empacados por la máquina R es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media $\mu = 500$ gramos, y una desviación estándar $\sigma = 20$ gramos. Si se escoge aleatoriamente un paquete de azúcar empacado por la máquina R,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de por lo menos 486 gramos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea a lo más de 480 gramos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté entre 476 y 550 gramos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de menos de 400 gramos?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de más de 440 gramos?

$\mu = 500$ gramos, $\sigma = 20$ gramos.

X : peso de un roedor silvestre escogido aleatoriamente.

a) $P(X \geq 486) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{486-500}{20}\right)$

$$P(X \geq 486) = P(Z \geq -0.7) = 1 - P(Z \leq -0.7) = 1 - 0.2420 = 0.758 \cong 75.8\%$$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente sea de por menos 486 gramos es de 75.8%. Obsérvese la Figura 3.13.

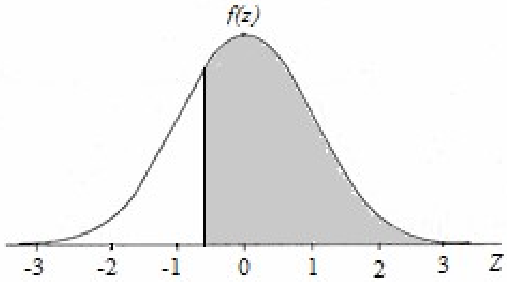

Figura 3.13. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \geq -0.7)$

b) $P(X \leq 480) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{480-500}{20}\right) = P(Z \leq -1) = 0.1587 \cong 15.87\%.$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente sea de máximo 480 gramos es de 15.87%. Ver Figura 3.14.

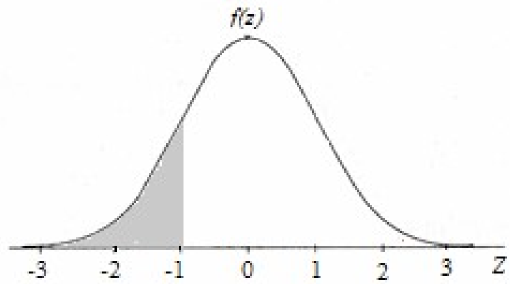

Figura 3.14. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq -1)$

c) $P(476 \leq X \leq 550) = P\left(\frac{476-500}{20} \leq Z \leq \frac{550-500}{20}\right)$

$$P(476 \leq X \leq 550) = P\left(-1.2 \leq Z \leq 2.5\right) = P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq -1.2)$$

La situación anterior se puede observar en la Figura 3.15.

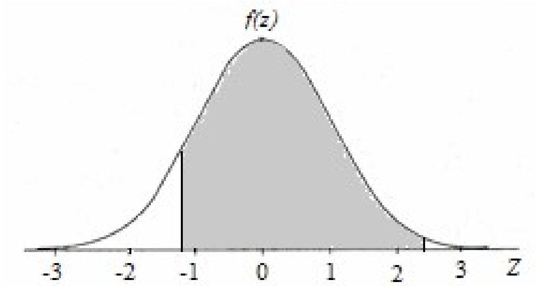

Figura 3.15. Área bajo la curva normal estándar $P(-1.2 \leq Z \leq 2.5)$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente esté entre 476 y 550 gramos es del 87.87%

d) $P(X \leq 400) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{400-500}{20}\right) = P(Z \leq -5) \cong 0\%$

Esta situación se puede observar en la Figura 3.16.

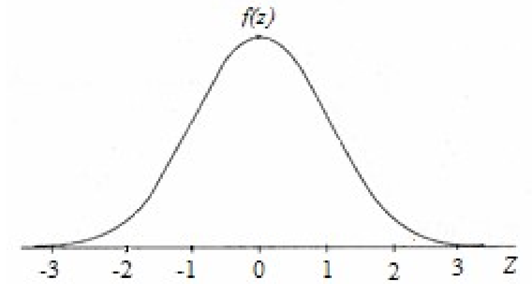

Figura 3.16. Área bajo la curva normal estándar $(P \ Z \leq -5)$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente sea de menos de 400 gramos es de 0% aproximadamente.

e) $P(X \geq 440) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{440-500}{20}\right) = P(Z \geq -3) = 1 - P(Z \leq -3)$

$$P(X \geq 440) = 1 - 0.0013 = 0.9987 \cong 99.87\%$$

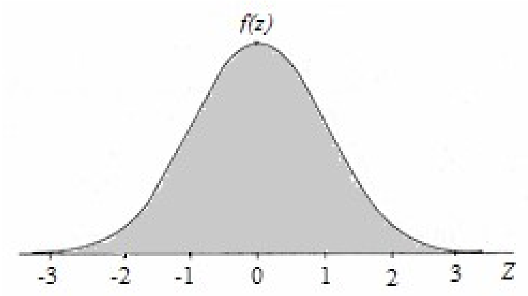

Figura 3.17. Área bajo la curva normal estándar $(P\ \ Z \geq -3)$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente sea de más de 440 gramos es de 99.87%. Obsérvese la Figura 3.17.

3.2.3 *Otras distribuciones de tipo continuo*

En este apartado se indican otras distribuciones continuas de probabilidad, las cuales pueden resultar de interés para el lector. Ejemplos de aplicación de algunas de estas distribuciones se pueden consultar en: Freund y Miller (2000) capítulo 6, Ross (1998) capítulo 5, Blanco (2004) capítulo 4, Marshall y Olkim (2007) capítulo 9, Papoulis (1991) sección 4.3 y Meeker y Escobar (1998) capítulo 4.

3.2.3.1 Distribución Gamma

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Gamma de parámetros $r > 0$ y $\lambda > 0$ si su función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} \exp(-\lambda x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Donde $\Gamma(r)$ es la función Gamma definida como se indica a continuación,

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1} \exp(-t) dt$$

Propiedades

i) $E(X)=\dfrac{r}{\lambda}$

ii) $Var(X)=\dfrac{r}{\lambda^2}$

Como un caso particular, si $r=1$, se tiene una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro $\lambda>0$. En efecto, resultaría:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{\Gamma(1)}(\lambda x)^{1-1}\exp(-\lambda x) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

Pero $\Gamma(1)=1$, ya que se trata de la función Gamma calculada en $r=1$

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty t^{1-1}\exp(-t)dt=\int_0^\infty \exp(-t)dt=\underset{b\to\infty}{Lim}\left(-\exp(-t)\right)\Big|_0^b=1$$

Finalmente, resulta la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria con distribución exponencial que se presentará en un apartado posterior.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\exp(-\lambda x) & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x\leq 0\end{cases}$$

3.2.3.2 Distribución Beta

Una variable aleatoria X tiene distribución Beta de parámetros $a>0$ y $b>0$ si su función de densidad es,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(a,b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{si } 0<x<1\\ 0 & \text{si } x\notin(0,1)\end{cases}$$

Donde $B(a,b)$ es la función Beta definida de la siguiente forma,

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\cdot$$

Propiedades

i) $E(X)=\dfrac{a}{a+b}$.

ii) $Var(X) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

3.2.3.3 Distribución Weibull

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Weibull de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} \exp\left(-\alpha x^{\beta}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades

i) $E(X) = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)$

ii) $Var(X) = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{\beta}} \left[\Gamma\left(1 + \dfrac{2}{\beta}\right) - \Gamma^{2}\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)\right]$

3.2.3.4 Distribución Cauchy

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye Cauchy de parámetros $\theta,\ \beta$, $\theta \in R,\ \beta \in R^{+}$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\pi\beta}\, \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x-\theta}{\beta}\right)^{2}}, \quad x \in R$$

Cuando $\theta = 0$ y $\beta = 1$ resulta:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{1}{(1+x^{2})}, \quad x \in R$$

3.2.3.5 Distribución de Laplace

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye Laplace o Exponencial doble de parámetros $\alpha,\ \beta$ si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x \quad \alpha|}{\beta}\right), \quad \alpha \in R \text{ y } \beta \in R^{+}$$

3.2.3.6 Distribución lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa y $Y = \ln X$, si la variable Y se distribuye normal de parámetros $\mu,\ \sigma$, entonces se dice que Y tiene distribución lognormal de parámetros $\mu,\ \sigma$. Si Y tiene distribución lognormal, entonces su función de densidad está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right], & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

3.2.3.7 Distribución logística

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución logística de parámetros $\alpha,\ \beta$, $\alpha \in R,\ \beta \in R^+$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \frac{\exp\left[-\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta} \right) \right]}{\left[1 + \exp\left[-\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta} \right) \right] \right]^2}, \quad x \in R$$

Cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ resulta:

$$f(x) = \frac{\exp(-x)}{\left[1 + \exp(-x) \right]^2}, \quad x \in R$$

3.2.3.8 Distribución exponencial

Una variable aleatoria X tiene distribución exponencial si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Propiedades

i) $\mu = E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

ii) $\sigma^2 = Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

La representación de la función de densidad se indica en la Figura 3.18.

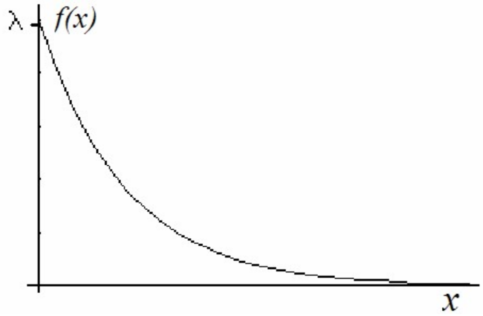

Figura 3.18. Función de densidad de una variable aleatoria exponencial

De la Figura 3.18 se observa que la función de densidad es decreciente pero el área bajo la curva es igual a 1, por ello se utiliza para el cálculo de probabilidades.

3.2.3.9 Distribución Lambda generalizada

La Distribución Lambda generalizada es una familia de distribuciones de probabilidad, que se define a través de su función percentil como sigue (Karian y Dudewics, 2000):

$$F^{-1}(y) = x = F^{-1}(y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

Con $0 \leq y \leq 1$, en la definición dada anteriormente es necesario el cumplimiento de la condición de que $\lambda_2 \neq 0$. Las constantes λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 se llaman parámetros de la Distribución Lambda Generalizada. El valor λ_1 se asocia con el parámetro de localización; el valor λ_2, con el parámetro de escala; el valor λ_3, con el momento de tercer orden, que define la asimetría de una distribución de probabilidad, y el valor λ_4, con el momento de cuarto orden, que permite definir el apuntamiento de la curva o también denominado curtosis.

Si $F(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria continua X tal que $x = F^{-1}(y)$, entonces se tiene que $y = F(x)$. Al aplicar cálculo diferencial y al derivar con respecto a x mediante el procedimiento de derivación para una función inversa se obtiene la función de densidad siguiente:

$$\frac{d}{dx}\big(F(x)\big) = f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}} \ ; \ x = F^{-1}(y)$$

Es conveniente indicar que a los cuatro parámetros antes mencionados se les pueden asignar valores específicos apropiados para que las expresiones que definen la Distribución Lambda Generalizada y la función de densidad cumplan con las dos condiciones siguientes que formalmente distinguen una función de densidad de probabilidad:

1. $f(F^{-1}(y)) = f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(F^{-1}(y))d(F^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

La primera condición indica que la curva *f(x)* debe estar por arriba del eje horizontal o sobre él, pero nunca por debajo; analíticamente implica que

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}} \geq 0$$

La segunda condición implica que el área bajo la curva es igual a 1.

Para determinar las parejas (λ_3, λ_4) , en las cuales la Distribución Lambda Generalizada resulte válida, es decir, permita definir formalmente una distribución de probabilidad, Karian y Dudewicz (2000) estudiaron las siguientes regiones:

$R_1 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 \leq -1, \lambda_4 \geq 1\}$

$R_2 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 \geq 1, \lambda_4 \leq -1\}$

$R_3 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0\}$

$R_4 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0\}$

$V_1 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 < 0,\ 0 < \lambda_4 < 1\}$

$V_2 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } 0 < \lambda_3 < 1,\ \lambda_4 < 0\}$

$V_3 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } -1 < \lambda_3 < 0,\ \lambda_4 > 1\}$

$V_4 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 > 1,\ -1 < \lambda_4 < 0\}$

Karian y Dudewicz demostraron que la Distribución Lambda Generalizada es válida en las regiones: R_1, R_2, R_3, y R_4 , pero no es válida en las regiones V_1 y V_2; además, llegaron a la conclusión de que la Distribución Lambda Generalizada es válida en las regiones V_3 y V_4 , si y solo si

$$\frac{(1-\lambda_3)^{1-\lambda_3}}{(\lambda_4-\lambda_3)^{\lambda_4-\lambda_3}}(\lambda_4-1)^{\lambda_4-1} < \frac{-\lambda_3}{\lambda_4}$$

El anterior contexto indica que la DLG no está definida para valores arbitrarios de sus cuatro parámetros. Karian y Dudewicz (2000) han propuesto una tabla que contiene una gama muy amplia de valores para los parámetros, de tal manera que con ellos sí se tiene un amplio espectro de distribuciones provenientes de la DLG; así mismo han desarrollado un algoritmo que permite cubrir una muy amplia variedad de casos de distribuciones que se pueden generar al dar valores específicos a los parámetros de la DLG, resultando distribuciones simétricas, asimétricas, platicúrticas, leptocúrticas u otras como la uniforme, normal, logística, t-student y más que puedan ser útiles en la intención de modelar un determinado conjunto de datos reales.

3.2.3.10 Distribución Birnbaum-Saunders

Una variable aleatoria X tiene distribución Birnbaum-Saunders de parámetros $\alpha > 0$, $\beta > 0$, si su función de distribución está dada por (Birnbaum & Saunders, 1969a, 1969b; Saunders, 2007):

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right) = \Phi\left(h(x)\right)$$

con

$$h(x) = z = \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

La cual se denota con $X \to BS(\alpha, \beta)$; donde $\Phi(x)$ representa la distribución normal estándar. En este caso, $z = h(x)$ corresponde al conjunto de los valores de una variable normal estándar Z. El p percentil de la distribución de la variable aleatoria $X \to BS(\alpha, \beta)$ es $x_p = F_X^{-1}(p)$ (Kandu, 2008; Díaz, 2005; Leiva, 2009; Barros, 2009); también este se puede obtener aplicando el método de la transformada inversa, a partir del cual se puede obtener la siguiente expresión,

$$x_p = \beta \left[\frac{\alpha z_p}{2} + \frac{\sqrt{(\alpha z_p)^2 + 4}}{2} \right]^2$$

Donde z_p es el p percentil de la distribución de una variable normal estándar denotada con $Z \rightarrow N(0,1)$. La mencionada expresión se puede utilizar para generar valores x deuna variable aleatoria con distribución Birnbaum-Saunders, $X \rightarrow BS(\alpha, \beta)$.

Actividades para el estudio independiente capítulo 3

3.1 El equipo de fútbol CC tiene una probabilidad de 0.75 de ganar cada vez que juega. Si aún le quedan por jugar 8 partidos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane tres partidos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no gane los restantes partidos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos cuatro partidos? Determinar el número de partidos que espera ganar el equipo CC y la varianza.

3.2 La probabilidad de que cualquiera de las vacas de la granja A esté produciendo leche en alguna época del año es de 0.6. Si se toma una muestra aleatoria de 6 vacas de la granja A,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una vaca de la muestra esté produciendo leche?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos vacas de la muestra estén produciendo leche?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos vacas de la muestra estén produciendo leche?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las vacas de la muestra estén produciendo leche?

e) Determinar el valor esperado e interpretarlo.

3.3 Una máquina produce artículos del tipo RRR, la probabilidad de que cualquier artículo producido por la máquina resulte defectuoso es 0.05, si se escoge una muestra aleatoria de 10 artículos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos resulten defectuosos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno resulte defectuoso?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos tres resulten defectuosos?

Se define la variable aleatoria como X : número de artículos defectuosos del tipo RRR en la muestra de 10. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,10.

3.4 En un curso de Probabilidad está conformado por 10 estudiantes de matemáticas y 15 estudiantes de otras carreras, si se decide escoger aleatoriamente un grupo de 6 estudiantes del curso de probabilidad para que hagan una disertación sobre espacios de probabilidad en el salón de clase, *a)* ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos estudiantes matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un estudiante de matemáticas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los estudiantes sean de otras carreras?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres estudiantes de matemáticas?

e) Determinar el valor esperado.

3.5 En una granja hay unos vacunos de los cuales 8 son de la raza pardosuizo y 12 de la raza romosinuano, si se decide escoger aleatoriamente un grupo de cinco de los mencionados vacunos para exhibirlos en la feria regional ganadera,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos vacunos de la raza pardosuizo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un vacuno de la raza pardosuizo?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los vacunos resulten de la raza romosinuano?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres vacunos de la raza pardosuizo?

3.6 El promedio de inyecciones del medicamento AA que no surten efecto en los cachorros de la región B es de 2 en las jornadas de vacunación que se han realizado,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro inyecciones del medicamento AA no surtan efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más una inyección del medicamento AA no surta efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento?

3.7 El promedio de caninos infestados de pulgas encontrados en las últimas visitas a la región BB realizadas por los inspectores de salud animal es de 5,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente visita a la región BB, los inspectores de salud animal encuentren tres caninos infestados de pulgas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente visita a la región BB, los inspectores de salud animal encuentren a lo más dos caninos infestados de pulgas?

c) Determinar el valor esperado y la varianza.

3.8 Graficar y determinar las siguientes probabilidades utilizando la distribución normal estándar a) $P(Z \leq -1.35)$, b) $P(Z \geq 1.3)$ c) $P(0.31 \leq Z \leq 2.5)$

3.9 Una fábrica produce bombillos, la duración de los bombillos tiene una distribución normal con media de 800 horas y desviación estándar de 50 horas. Si se toma al azar un bombillo de la producción,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dure máximo 840 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dure por lo menos 720 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que dure entre 780 y 920 horas?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 1000 horas?

3.10 El peso en una clase de unos roedores silvestres es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media $\mu = 500$ gramos, y una desviación estándar $\sigma = 30$ gramos. Si se escoge aleatoriamente un roedor de esa clase,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de por lo menos 480 gramos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea a lo más de 470 gramos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté entre 465 y 575 gramos?

Ejercicios para el capítulo 3

3.1 Leer en una tabla normal estándar, los siguientes valores de probabilidad:

a) $P(Z \leq 2.6)$

b) $P(Z \geq 1.32)$

c) $P(Z < -0.24)$

d) $P(Z > 2.16)$

e) $P(Z < -1.37)$

f) $P(Z = -0.24)$

3.2 El sueldo de los trabajadores de la empresa T&T se distribuye normalmente con media de 500 (en miles de pesos) y desviación estándar de 10, se escoge aleatoriamente a un trabajador de dicha empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que su salario sea superior a 493, inferior a 489, o esté entre 482 y 512?

3.3 De los estudiantes que cursan una asignatura, 15 son de economía y 25 son de otras carreras, si se escoge aleatoriamente un grupo de 10 estudiantes para que asistan a un encuentro nacional, ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo haya por lo menos tres estudiantes de economía?, ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo haya por lo menos tres estudiantes de otras carreras?

3.4 El peso de un producto de la marca P sigue una distribución normal con media 1000 gramos y desviación estándar de 6 gramos, si se escoge aleatoriamente una unidad del producto de la marca P ¿cuál es la probabilidad de que su peso sea superior a 1010 gramos?

3.5 En una fábrica, el promedio de ausencia por mes de sus trabajadores es de 3. ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente mes por lo menos 3 trabajadores se ausenten de la fábrica?

3.6 En un proceso productivo, se sabe que el 96% de los artículos de la marca M1 resultan de buena calidad, si se selecciona una muestra aleatoria de 40 unidades del artículo, ¿cuál es la probabilidad de que más de 95 artículos de esta marca resulten de buena calidad?

3.7 Una fábrica produce medicamentos del tipo A para vacunos, la probabilidad de que cualquier unidad del medicamento producido por la fábrica no resulte efectiva es del 4%, si se escoge una muestra aleatoria de 90 unidades del medicamento. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 4 no resulten efectivos?

3.8 Si la probabilidad de que una res sufra reacción por una vacuna anti-aftosa es del 1% y si se toma una muestra aleatoria de 200 reses, *a)* ¿Cuál es la probabilidad de encontrar que tres reses de la muestra sufran reacción ante la vacuna antiaftosa?, *b)* ¿Cuál es la probabilidad de encontrar que más de cinco reses de la muestra sufran reacción ante la vacuna anti-aftosa?

3.9 De un corral que contiene cerdos, se escogen 3 aleatoriamente para diagnosticar si están infectados o no lo están con un nuevo virus que ha aparecido en la región. ¿Cuál es la probabilidad de que como mínimo dos cerdos resulten infectados?

3.10 El peso de un grupo de aves sigue una distribución normal con media 1800 gramos y desviación estándar de 40 gramos. Si se escoge aleatoriamente una ave de ese grupo ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea mayor que 1850 gramos?

3.11 Una máquina produce artículos del tipo C, la probabilidad de que cualquier artículo producido por la máquina resulte de mala calidad es 0.03, si se escoge una muestra aleatoria de 20 artículos, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos tres resulten de mala calidad?

3.12 Probar que en la distribución uniforme discreta se cumple que,

i) $E(X) = \dfrac{N+1}{2}$

ii) $Var(X) = \dfrac{N^2-1}{12}$

3.13 Trazar la gráfica de una distribución Lambda generalizada de parámetros 0, 0.1975, 0.1349 y 0.1349; y de una distribución Birnbaum-Saunders de parámetros 0.3, 1