2

VARIABLES ALEATORIAS REALES

Con frecuencia hay interés por los valores numéricos que se puedan deducir de un experimento aleatorio, generalmente dichos valores corresponden a los de una variable aleatoria. El espíritu de las variables aleatorias es el de transformar los elementos de un espacio de probabilidad en números reales. En este capítulo se presentan los conceptos de variable aleatoria real, función de probabilidad, distribución de probabilidad, valor esperado, varianza, desviación estándar y momentos para variables aleatorias tanto discretas como continuas.

2.1 Concepto de variable aleatoria

En este apartado se define las variables aleatorias reales y se presentan algunos ejemplos. Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, donde Ω es el espacio muestral o conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio, $\Im$ es un $\sigma -$ álgebra o familia de subconjuntos del espacio muestral y P una medida de probabilidad definida sobre $\Im$.

Según con Shao (1999), una variable aleatoria real es una aplicación

$$X : \Omega \to R$$

Tal que para todo evento E en el $\sigma -$ álgebra de Borel se tiene que

$$X^{-1}(E) \in \Im$$

En este contexto, la variable aleatoria X es una función que tiene la propiedad de ser una función medible. En los ejemplos que se proporcionarán a lo largo del capítulo se considerará el sigma álgebra conformada por el conjunto de partes del espacio muestral.

Ejemplo 2.1 Considerar los resultados posibles al intentar establecer si el jugador R convertirá o no el lanzamiento que hará desde el punto de penalización en un partido de fútbol. El espacio muestral estará conformado por dos resultados posibles: $c =$ convierte, $n =$ no convierte; es decir,

$$\Omega = \{c, n\}.$$

Se define la siguiente variable aleatoria:

$$\begin{aligned} X &: \Omega \to R \\ c &\to 1 \\ n &\to 0 . \end{aligned}$$

En este caso se tiene que $X(n) = 0$ y $X(c) = 1$, X es una variable aleatoria cuyo rango es un conjunto finito dado por $R_X = \{0,1\}$. En este contexto R_X denota el rango de la variable aleatoria mencionada.

Ejemplo 2.2 Para el espacio muestral constituido por los siguientes resultados:

$$\Omega = \{dd, dn, nd, nn\}.$$

Donde d : artículo defectuoso, n : artículo no defectuoso, se define la siguiente variable aleatoria,

$$X : \Omega \to R .$$

X : número de artículos defectuosos en cada resultado de Ω.

$$X(dd) = 2 .$$

$$X(dn) = 1 = X(nd).$$

$$X(nn) = 0 .$$

La variable X toma los valores enteros 0, 1, 2. Es decir, $R_X = \{0,1,2\}$.

2.2 Variable aleatoria discreta

Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio muestral Ω y R_X su rango en el conjunto de los números reales R. Si R_X es un conjunto contable (discreto), entonces la variable aleatoria X se denomina variable aleatoria discreta. El rango de una variable aleatoria discreta puede ser un conjunto finito o infinito contable como se indica a continuación:

i) $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

ii) $R_X = \{x_1, x_2, ..., ..\}$.

Si $(\Omega, \Im, P)$ es el espacio muestral de referencia sobre el cual se define la variable aleatoria X y (R, β, P_X) es el espacio de probabilidad inducido por la variable aleatoria X donde β es el $\sigma -$álgebra de Borel, entonces se tiene que:

$$P_X(\{x_i\}) = P(X^{-1}\{x_i\}).$$

Sea X una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y con valores en el espacio medible (R, β, P_X). Si se define,

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \text{ con } B \in \beta$$

Entonces

$$P_X(B) = P(\{X \in B\}) \text{ para todo } B \in \beta$$

Se puede verificar que P_X satisface las condiciones que definen una medida de probabilidad.

2.2.1 *Función de probabilidad*

Sea X una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y sea R_X su rango (recorrido), para cada $x \in R$, sea

$$f(x) = P_X(\{x\})$$

Entonces a la función f se la denomina la función de probabilidad $(f.p.)$ de la variable aleatoria X.

Al conjunto $\{(x, f(x)) : x \in R\}$ se le llama la gráfica de la función de probabilidad de X, la cual se puede representar en un plano cartesiano o mediante una tabla de valores tal como se indica en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Función de probabilidad

X	x_1	x_2	...	x_n
$f(x) = P(X = x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

La función de probabilidad f cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f(x) \geq 0$.

ii) $\sum_{x_i \in R_X} f(x_i) = 1$.

2.2.2 *Función de distribución de probabilidad*

Sea X una variable aleatoria real. La función F_X definida sobre el conjunto de los números reales R por medio de

$$F_X(x) = P_X\left(\left(-\infty, x\right]\right) = P\left(X \leq x\right)$$

Se llama la función de distribución de la variable aleatoria X o distribución acumulativa de X, si no hay lugar a confusiones la función de distribución de la variable aleatoria X se denota simplemente con F.

Ejemplo 2.3 Se lanza una moneda tres veces y se observa el número de caras (c) en cada uno de los posibles resultados. Determinar la función de probabilidad y la distribución de probabilidad.

Para obtener el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio se puede utilizar un diagrama de árbol como se muestra en la Figura 2.1. En este ejemplo, el espacio muestral está conformado por 8 resultados posibles, según se indica a continuación:

$$\Omega = \{ccc,\ ccs,\ csc,\ css,\ scc,\ scs,\ ssc,\ sss\}$$

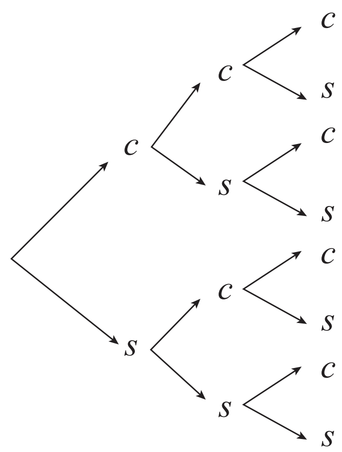

Figura 2.1. Diagrama de árbol

Si se define la variable aleatoria X como el número de caras en cada uno de los posibles resultados del espacio muestral, entonces,

X : Número de caras en cada uno de los posibles resultados

$X(ccc) = 3$

$X(ccs) = 2 = X(csc) = X(scc)$

$X(ssc) = 1 = X(scs) = X(css)$

$X(sss) = 0$

Así X es una variable aleatoria discreta porque solo toma los valores enteros 0, 1, 2, 3. Es decir,

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

El rango de la variable es $R_X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3\}$

Ahora,

$$f(x_1) = f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$f(x_2) = f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$f(x_3) = f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(x_4) = f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

Cada $f(x_i) > 0$

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

La función de probabilidad está dada en la Tabla 2.2, su representación gráfica se indica en la Figura 2.2.

Tabla 2.2. Función de probabilidad de la variable X

X	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

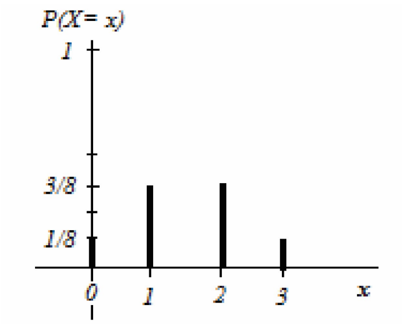

Figura 2.2. Representación gráfica de la función de probabilidad

La distribución de probabilidad se presenta en la Tabla 2.3 y su representación gráfica se indica en la Figura 2.3.

Tabla 2.3. Distribución de la variable aleatoria X

X	0	1	2	3
$F(x) = P(X \leq x)$	1/8	4/8	7/8	1

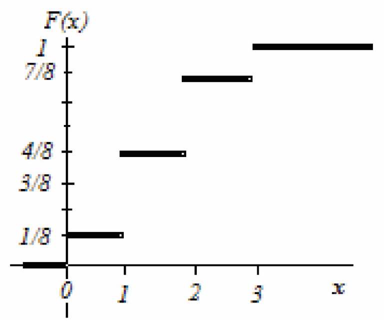

Figura 2.3. Representación gráfica de la función de distribución.

Con base en las anteriores tablas, se pueden calcular las siguientes probabilidades:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$P(X>2)=P(X=3)=\frac{1}{8}$$

$$P(X>0)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \quad \text{o}$$

$$P(X>0)=1-P(X\leq 0)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

2.3 Variable aleatoria continua

En este apartado se definen las variables aleatorias continuas y se especifican su función de densidad de probabilidad y su función de distribución. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio muestral Ω y R_X su rango en R. Si R_X es un conjunto no contable (infinito no contable), entonces la variable aleatoria X puede ser una variable aleatoria continua. Intuitivamente el rango de una variable aleatoria continua corresponde a un intervalo.

2.3.1 *Función de densidad de probabilidad*

Una función real f que satisface las dos condiciones siguientes:

i) $f(x)\geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

se denomina una función de densidad de probabilidad $(f.d.p.)$ para la variable aleatoria continua X.

Sea X una variable aleatoria tal que para todo evento $B\in\beta$ se cumple que,

$$P_X(B)=\int_B f(x)dx$$

Para alguna función de densidad f, entonces la variable aleatoria X se llama una variable aleatoria de tipo continua o una variable aleatoria continua. Es de señalar que B es un conjunto Boreliano y la integral sobre B es una integral de Lebesgue (Shao, 1999).

2.3.2 *Variable aleatoria absolutamente continua*

Sea X una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$. Se dice que X es absolutamente continua, si y solo si, existe una función real no negativa e integrable f_X, tal que para todo $x \in R$, se satisface:

$$F_X(x) = P_X\left(\left(-\infty, x\right]\right) = P\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La función f_X se denomina función de densidad de probabilidad $(f.d.p.)$ de la variable aleatoria X. A la función F_X se le llama función de distribución de la variable aleatoria X o función de distribución acumulativa de probabilidad $(f.d.c.)$.

Ejemplo 2.4. Analizar si la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

a) Es una función de densidad para la variable aleatoria X, *b)* de ser así, determinar la función de distribución para X.

Solución a) para valores de x fuera del intervalo [0,1] la función vale cero y para valores de x en el intervalo [0,1] se trabaja con,

$$f(x) = 3x^2$$

En la Tabla 2.4 se presentan algunos valores de la función $f(x)$ y en la Figura 2.4 se muestra la representación gráfica de la mencionada función.

Tabla 2.4. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X*

x	0	0.2	0.5	1	-2	-1	2	2.5
$f(x)$	0	0.12	0.75	3	0	0	0	0

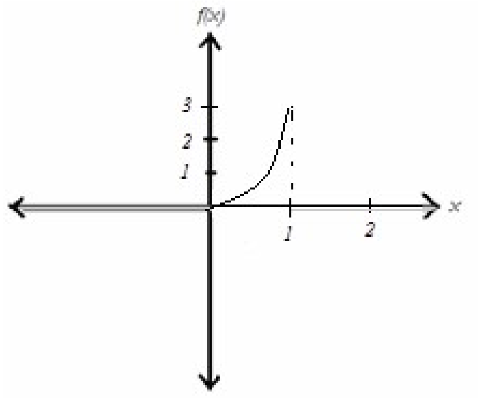

Figura 2.4. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria X

De la definición de la función y de la Figura 2.4, se ve que $f(x) \geq 0$.

Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 3x^2 dx + \int_{1}^{\infty} 0dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = x^3\Big|_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

En conclusión, $f(x)$ sí es una función de densidad para la variable aleatoria X.

b) La función de distribución para X es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x^3 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función de distribución para la variable aleatoria X se indica en la Figura 2.5.

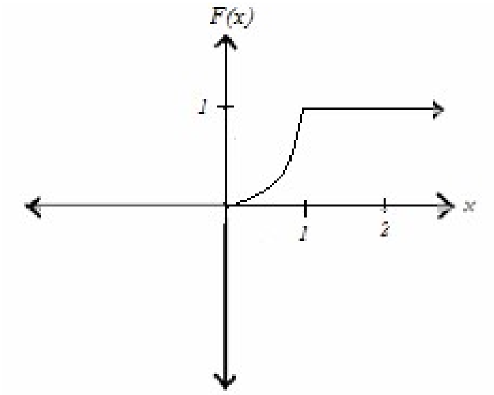

Figura 2.5. Función de distribución para la variable aleatoria *X*.

2.3.3 *Propiedades de la función de distribución de probabilidad*

Sea X una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, la función de distribución F_X satisface las siguientes condiciones:

i) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ para todo $x \in R$.

ii) Si $x_1 \leq x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

iii) $F_X(x^+) = \lim\limits_{a \to 0^+} F_X(x+a) = F_X(x)$.

iv) $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

v) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

2.4 Esperanza matemática y varianza de una variable aleatoria

Los siguientes conceptos referentes a la esperanza matemática y la varianza de una variable aleatoria son adoptados con base en lo expuesto Lindgren (1993), Shao (1999) y Burbano (2014).

Sea X una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, entonces:

i) Si X es una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y f su función de probabilidad entonces, el valor esperado de X está dado por,

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

Siempre y cuando la anterior suma exista.

ii) Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f_X entonces el valor esperado de X o media de la variable aletoria está dado por,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Siempre y cuando la anterior integral exista.

2.4.1 *Propiedades de la esperanza matemática*

Si X es una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, algunas propiedades de la esperanza matemática son:

i) Para cualquier $a \in R$, entonces $E(a) = a$.

ii) Para cualquier $a \in R$, entonces $E(aX) = aE(X)$.

iii) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Como consecuencia de la propiedad *iii),* se tiene:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Siendo X, Y variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.

Si X es una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, entonces la varianza de X se denota y define por,

$$Var(X) = E\left(X - E(X)\right)^2.$$

Siempre que el valor esperado de X exista. Al número,

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

se le llama la desviación estándar de la variable aleatoria X .

2.4.2 *Propiedades de la varianza*

Entre las propiedades de la varianza de la variable aleatoria X están:

i) Para cualquier $a \in R$, entonces $Var(a) = 0$.

ii) Para cualquier $a \in R$, entonces $Var(aX) = a^2 Var(X)$.

iii) $Var(X) \geq 0$.

iv) Para cualquier $a \in R$, entonces $Var(a + X) = Var(X)$.

v) $Var(X) = 0,$ si y sólo si, $P(X = E(X)) = 1$

vi) Si X es una variable aleatoria tal que $E(X)$ existe, entonces

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

Ejemplo 2.5 Para la variable aleatoria discreta asociada al experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces y de observar el número de caras en cada uno de los posibles resultados, como se indicó en el ejemplo *2.3.,* la función de probabilidad se indica en la Tabla *2.5.*

Tabla 2.5. Función de probabilidad

X	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Como el valor esperado de la variable aleatoria X está dado por:

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

entonces,

$$\mu = E(X) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Para determinar la varianza, inicialmente se calcula:

$$E(X^2)=\sum_{x_i\in R_X} x_i^2 f(x_i)=\sum_{x_i\in R_X} x_i^2 P(X=x_i)$$

$$E(X^2)=0^2\left(\frac{1}{8}\right)+1^2\left(\frac{3}{8}\right)+2^2\left(\frac{3}{8}\right)+3^2\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{24}{8}=3$$

Como

$$Var(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$$

$$Var(X)=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

La desviación estándar es:

$$\sigma_X=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Ejemplo 2.6. Para la variable aleatoria continua del ejemplo 2.4, se tiene que la función expresada por,

$$f(x)=\begin{cases}3x^2 & si\ x\in[0,1]\\ 0 & \text{si } x\notin[0,1]\end{cases}$$

es una función de densidad para la variable aleatoria X. Calcular su $E(X)$, $Var(X)$ y desviación estándar.

El valor esperado de la variable aleatoria X o media de la variable aleatoria es,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Entonces,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx+\int_{0}^{1} xf(x)dx+\int_{1}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0} x(0)dx+\int_{0}^{1} x(3x^2)dx+\int_{1}^{\infty} x(0)dx$$

$$E(X)=\int_{0}^{1} 3x^3dx=3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$E(X)=3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\left[3\frac{1^4}{4}-3\frac{0^4}{4}\right]=\frac{3}{4}=0.75$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{0}x^2(0)dx+\int_{0}^{1}x^2(3x^2)dx+\int_{1}^{\infty}x^2(0)dx$$

$$E(X^2)=\int_{0}^{1}3x^4dx=3\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\left[3\frac{1^5}{5}-3\frac{0^5}{5}\right]=\frac{3}{5}=0.6$$

La varianza de X está dada por:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.6-0.75^2=0.6-0.5625=0.0375$$

Desviación estándar de X es:

$$\sigma_X=\sqrt{0.0375}\cong 0.1936$$

Cuando X es una variable aleatoria continua, ella toma cualquier valor en un intervalo de números reales; es decir "su rango es un subconjunto no numerable de números reales". En la práctica algunos ejemplos de variables aleatorias reales podrían ser los siguientes:

a) X : la duración de un bombillo elegido al azar de un determinado lote, X puede tomar valores en $[0,+\infty)$.

b) X : la estatura en metros de una persona escogida al azar en el colegio A, X puede tomar valores en el intervalo [1.2, 1.9].

c) X : el peso en gramos de un objeto tomado al azar; X podría tomar valores en el intervalo [0.1, 15].

d) X : longitud en centímetros de un tallo elegido al azar en un jardín, X podría tomar valores en [20, 50].

Es conveniente señalar que si $f(x)$ es una función de densidad para la variable aleatoria X, entonces la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores en un intervalo $[a,b]$ está dada por:

$$P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx\ .$$

Ejemplo 2.7 Para la variable aleatoria continua considerada en el ejemplo 2.6., se quiere calcular las siguientes probabilidades: $P(0 \le X \le 0.5)$, $P(-3 \le X \le 0.2)$.

En efecto,

$$P(0 \le X \le 0.5) = \int_0^{0.5} f(x)dx = \int_0^{0.5} 3x^2 dx = x^3\Big|_0^{0.5} = (0.5)^3 - (0)^3 = 0.125$$

$$P(-3 \le X \le 0.2) = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_0^{0.2} f(x)dx = \int_{-3}^{0} 0dx + \int_0^{0.2} 3x^2 dx = x^3\Big|_0^{0.2}$$

$$P(-3 \le X \le 0.2) = (0.2)^3 - (0)^3 = 0.008 .$$

2.5 Momentos de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria real. El r-ésimo momento central de X alrededor de cero, se denota y define así:

$$\mu_r' = E(X^r)$$

Siempre y cuando el valor esperado exista**.**

Sea X una variable aleatoria real cuyo valor esperado existe. El r-ésimo momento central de X alrededor de $E(X)$, se denota y define así:

$$\mu_r = E((X - E(X))^r)$$

Siempre y cuando el valor esperado exista**.**

En concordancia con Burbano *et al*. (2014), para el caso discreto el r-ésimo momento central de X alrededor de su valor esperado $E(X)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mu_r = E((X - E(X))^r) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^r P(X = x)$$

Además, para el caso continuo es,

$$\mu_r = E((X - E(X))^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f_X(x)dx$$

De acuerdo con Abramowitz y Stegun (1972), el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis se definen a través de las siguientes expresiones, respectivamente,

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}} = E(X - \mu)^3 / \sigma^3$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = E(X-\mu)^4/\sigma^4$$

Ejemplo 2.8 Para la variable aleatoria X discreta considerada en el ejemplo 2.5, el coeficiente de asimetría se obtiene realizando el siguiente procedimiento,

$$E(X-\mu)^3 = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^3 f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^3 P(X=x_i)$$

$$E(X-\mu)^3 = \left(0-\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right) + \left(1-\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right) + \left(2-\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right) + \left(3-\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X-\mu)^3 = \left(\frac{-27}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X-\mu)^3 = \frac{-27}{64} - \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{27}{64} = 0$$

Como $\sigma_X = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$\alpha_3 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{4}}^{\,3}} = 0$$

El resultado anterior indica que el coeficiente de asimetría de la variable aleatoria X es igual a cero.

Ejemplo 2.9 Para la variable aleatoria X discreta considerada en el ejemplo 2.5, el coeficiente de curtosis se obtiene mediante el siguiente conjunto de pasos,

$$E(X-\mu)^4 = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^4 f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^4 P(X=x_i)$$

$$E(X-\mu)^4 = \left(0-\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{1}{8}\right) + \left(1-\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{3}{8}\right) + \left(2-\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{3}{8}\right) + \left(3-\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X-\mu)^4 = \left(\frac{81}{16}\right)\left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{81}{16}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X-\mu)^4 = \frac{81}{128} + \frac{3}{128} + \frac{3}{128} + \frac{81}{128} = \frac{168}{128}$$

Como $\sigma_X = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$\alpha_4 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\frac{168}{128}}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^4} = \frac{\frac{168}{128}}{\frac{9}{16}} = \frac{\frac{168}{128}}{\frac{72}{128}} = \frac{168}{72} \cong 2.6666$$

El resultado anterior indica que el coeficiente de curtosis de la variable aleatoria *X* es igual a 2.6666 aproximadamente.

Ejemplo 2.10 En el siguiente caso se requiere: *a)* determinar si la función dada corresponde a una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X, b)* de ser así calcular su valor esperado y su varianza, *c)* determinar su función de distribución de probabilidad, *d)* determinar las probabilidades *P(X < 2)* y *P(X > 1.5)*.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) En la Tabla 2.6 se presentan algunos valores de la función $f(x)$ y en la Figura 2.6 se muestra la representación gráfica de la mencionada función.

Tabla 2.6. Valores de la función *f(x)*

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0	1	0.367	0.1356	0.049	0.018

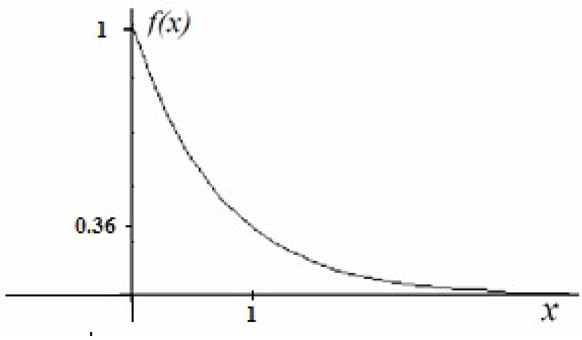

Figura 2.6. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X*

De la definición de la función y de la Figura 2.6, se ve que $f(x) \geq 0$.
Adicionalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \underset{b\to\infty}{Lim}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = \underset{b\to\infty}{Lim}\left(-e^{-b}\right) - \left(-e^{-0}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

En conclusión, $f(x)$ si es una función de densidad para la variable aleatoria X.

b) La función de distribución para X es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función de distribución para la variable aleatoria X se indica en la Figura 2.7

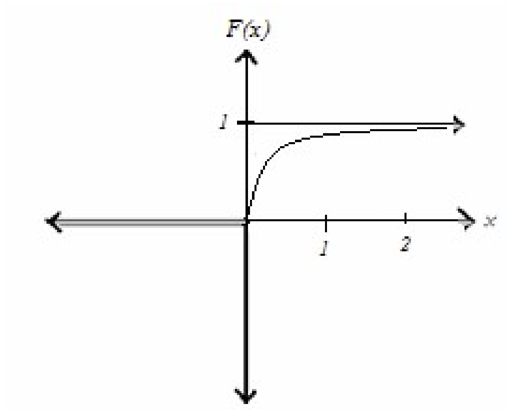

Figura 2.7. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X*

c) El valor esperado de la variable aleatoria X es,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Entonces,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} x(0)dx + \int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx$$

Ahora integrando por partes, resulta:

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(x(-e^{-x}) - e^{-x}\right)\Big|_{0}^{b}$$

$$\mu = E(X) = \lim_{b\to\infty}\left(b(-e^{-b}) - e^{-b}\right) - \left(0(-e^{-0}) - e^{-0}\right) = 1$$

Luego,

$$\mu = E(X) = 1$$

Adicionalmente,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx + \int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{0} x^2e^{-x}dx$$

Integrando dos veces por partes, se tiene,

$$E(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\left(x^2(-e^{-x}) - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right)\Big|_{0}^{b}$$

$$E(X^2) = \lim_{b\to\infty}\left(b^2(-e^{-b}) - 2be^{-b} - 2e^{-b}\right) - \left(0^2(-e^{-0}) - 2(0)e^{-0} - 2e^{-0}\right) = 2$$

La varianza de X está dada por:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - (1)^2 = 2 - 1 = 1$$

Desviación estándar de X es,

$$\sigma_X = \sqrt{1} = 1$$

d) A continuación se calcularán las probabilidades siguientes: *P(X < 2)* y *P(X > 1.5)*.

$$P(X>1.5)=\int_{1.5}^{\infty} e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_{1.5}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}\right)-\left(-e^{-1.5}\right)=e^{-1.5}$$

En consecuencia,

$$P(X>1.5)=e^{-1.5}=0.2231$$

$$P(X<2)=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$P(X<2)=\int_{-\infty}^{0}(0)dx+\int_{0}^{2} e^{-x}dx$$

$$P(X<2)=\int_{0}^{2} e^{-x}dx=\left(-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{2}=\left(-e^{-2}\right)-\left(-e^{-0}\right)=1-e^{-2}$$

Por lo tanto,

$$P(X<2)=1-e^{-2}\cong 0.8646$$

2.6 Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria tal que $E(e^{tX})$ es finito para todo $t\in(-\alpha,\alpha)$ con $\alpha\in R^{+}$. Se define la función generadora de momentos de X así (Blanco, 2004):

$$m_X(t)=E(e^{tX}) \text{ con } t\in(-\alpha,\alpha)$$

Si X es una variable aleatoria discreta tal que

i) $R_X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$

Entonces

$$m_X(t)=\sum_{i=1}^{n} e^{tx_i}P(X=x_i)$$

Si X es una variable aleatoria discreta tal que

ii) $R_X=\{x_1,x_2,...\}$

Entonces

$$m_X(t)=\sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i}P(X=x_i)$$

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f, entonces

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

La existencia de la función generadora de momentos de una variable aleatoria X garantiza la existencia de todos los momentos de orden r alrededor de cero de la variable X. Además si la función generadora de momentos existe, entonces es diferenciable en una vecindad del origen (en este caso de cero) y se cumple que:

$$\frac{d^r}{dt^r} m_X(t)\Big|_{t=0} = E(X^r)$$

Si X es una variable aleatoria cuya función generadora de momentos $m_X(.)$ existe, entonces, existe $a \in R^+$ tal que,

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X^i)\frac{t^i}{i!} \text{ para todo } t \in (-a, a)$$

Además,

$$\frac{d^r}{dt^r} m_X(t)\Big|_{t=0} = E(X^r)$$

Si X, Y son variables aleatorias cuyas funciones generadoras de momentos $m_X(.)$, $m_Y(.)$ existen y además,

$$m_X(t) = m_Y(t); \text{ para todo } t,$$

entonces X, Y tienen la misma distribución.

Ejemplo 2.11 Sea X una variable aleatoria cuyo rango es $R_X = \{0,1\}$, con función de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} p & si\ x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para este caso, se tiene que $f_X(1) = P(X=1) = p$ y $f_X(0) = P(X=0) = 1-p$ corresponden a las probabilidades de éxito y de fracaso en el modelo de Bernoulli (se tratará en un capítulo posterior).

La función generadora de momentos de X es,

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^{2} e^{tx_i} P(X = x_i)$$

$$m_X(t) = e^{t(0)}P(X=0) + e^{t(1)}P(X=1)$$

$$m_X(t) = 1 - p + pe^t$$

El valor esperado se puede obtener de la siguiente manera:

$$E(X) = \frac{d}{dt}m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(1 - p + pe^t\right)\Big|_{t=0} = \left(pe^t\right)\Big|_{t=0} = pe^0 = p$$

por lo tanto

$$E(X) = p$$

También se tiene que:

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2}m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\left(1 - p + pe^t\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(pe^t\right)\Big|_{t=0} = pe^0 = p \ .$$

Como

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

entonces,

$$Var(X) = p(1-p)$$

Ejemplo 2.12 Sea X una variable aleatoria cuyo rango es $R_X = \{0,1,2,\ldots,n\}$, $n \in Z^+$ cuya función de probabilidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1\text{-}p)^{n-x} & si\ x = 0,1,\ldots,n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para este caso, se tiene que p y $1-p$ corresponden a las probabilidades de éxito y de fracaso en el modelo de Binomial el cual se tratará en el capítulo posterior.

La función generadora de momentos de X es:

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{tx_i}P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{n} e^{t(i)}P(X = i)$$

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{t(i)}\frac{n!}{i!(n-i)!}p^i(1\text{-}p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} e^{t(i)}\binom{n}{i}p^i(1\text{-}p)^{n-i}$$

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(pe^t\right)^i(1\text{-}p)^{n-i}$$

$$m_X(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

El valor esperado se puede obtener de la siguiente forma:

$$E(X) = \frac{d}{dt} m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(pe^t + 1 - p\right)^n\Big|_{t=0} = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1}\left(pe^t\right)\Big|_{t=0}$$

$$E(X) = n\left(pe^0 + 1 - p\right)^{n-1}\left(pe^0\right)\Big|_{t=0} = n(1)pe^0 = np$$

Por lo tanto

$$E(X) = np$$

También se tiene que:

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\left(pe^t + 1 - p\right)^n\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t\Big|_{t=0}$$

$$E(X^2) = \left(n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2} pe^t pe^t + n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t\right)_{t=0}$$

$$E(X^2) = \left(n(n-1)\left(pe^0 + 1 - p\right)^{n-2} pe^0 pe^0 + n\left(pe^0 + 1 - p\right)^{n-1} pe^0\right)$$

$$E(X^2) = n(n-1)(1)p^2 + n(1)p = n^2p^2 - np^2 + np$$

Como

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

entonces,

$$Var(X) = np(1-p)$$

Ejemplo 2.13 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función generadora de momentos es

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{tx}(0)dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$m_X(t) = \int_{0}^{\infty} e^{tx}e^{-x}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x(1-t)}dx = \frac{-1}{1-t} e^{-x(1-t)}\Big|_0^{\infty}$$

$$m_X(t) = \frac{-1}{1-t} e^{-x(1-t)} \Big|_0^{\infty} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{1-t} e^{-x(1-t)} \right) \Big|_0^{b} = \frac{1}{1-t}$$

$$m_X(t) = \frac{1}{1-t} \quad \text{si } t < 1 .$$

El valor esperado se puede obtener de la siguiente forma:

$$E(X) = \frac{d}{dt} m_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) \Big|_{t=0} = \frac{1}{(1-t)^2} \Big|_{t=0} = 1$$

Por lo tanto

$$E(X) = 1$$

También se tiene que,

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{1-t} \right) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(1-t)^2} \right) \Big|_{t=0} = \frac{2}{(1-t)^3} = 2 .$$

Como

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - [1]^2 = 1$$

entonces,

$$Var(X) = 1$$

Estos resultados concuerdan con los valores de la esperanza y la varianza determinados en el ejemplo 2.10

Ejemplo 2.14 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \le x \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función generadora de momentos es:

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} e^{tx}(0)dx + \int_{a}^{b} e^{tx} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} e^{tx}(0)dx$$

$$m_X(t) = \int_{a}^{b} e^{tx} \left(\frac{1}{b-a} \right) dx = \frac{1}{(b-a)t} e^{tx} \Big|_a^b = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

$$m_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

La anterior expresión requiere que $t \neq 0$, por lo tanto la función generadora de momentos no existe.

Es necesario indicar que si X, Y son variables aleatorias independientes y $m_X(.)$, $m_Y(.)$ sus correspondientes funciones generadoras de momentos, entonces,

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t)m_Y(t), \text{ para todo t.}$$

En efecto,

$$m_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = m_X(t)m_Y(t), \text{ para todo t.}$$

2.7 Función característica

Sea X una variable aleatoria. La función característica de la variable X, se denota y se define de la siguiente forma,

$$\Psi_X : R \longrightarrow C$$

Tal que

$$\Psi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + iE(sen(tX)) \text{ para } i = \sqrt{-1}$$

Ejemplo 2.15 Sea X una variable aleatoria con rango $R_X = \{0,1\}$ y función de probabilidad dada por,

$$P(X=0) = \frac{1}{2}$$
$$P(X=1) = \frac{1}{2}$$

Entonces la función característica se obtiene del siguiente modo,

$$\Psi_X(t) = E(e^{itX}) = \frac{1}{2}(\cos(0) + \cos(t)) + \frac{1}{2}i(sen(0) + sen(t))$$

$$\Psi_X(t) = E(e^{itX}) = \frac{1}{2}(1 + \cos(t)) + \frac{1}{2}isen(t)$$

2.8 Cuantiles y mediana de una variable aleatoria

Sea $F(x) = P(X \leq x)$ una función de distribución de una variable aleatoria X y sea $q \in [0,1]$ si existe un número real $x_q \in R$ tal que,

$$F(x_q) = q$$

Entonces x_q se denomina el cuantil q de la variable aleatoria X.

Se define la mediana de X (o de F) como el punto θ para el cual se cumple que:

$$P(X \leq \theta) = P(X \geq \theta) \geq \frac{1}{2}$$

La igualdad solo se cumple cuando F es una función de distribución con densidad continua y en este caso la mediana es única.

Al conjunto de las funciones de distribución absolutamente continuas con mediana cero, se lo denota por (Hettmansperger, 1984):

$$\Omega_0 = \left\{ F : F \ \ absolutamente\ continua\ y\ F(0) = 1/2\ \acute{u}nicamente \right\}$$

Ejemplo 2.16 Sea X una variable aleatoria con rango $R_X = \{0,1\}$ y función de probabilidad dada por,

$$f(0) = f(1) = \tfrac{1}{2}$$

La función de distribución de la variable aleatoria X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Debido a que existen infinidad de valores $x_p = \theta$ que satisfacen la siguiente igualdad:

$$F_X(x_p) = P(X \leq x_p) = P(X \geq x_p) = \frac{1}{2}$$

Se concluye que hay infinidad de medianas, por ejemplo $x_p = \theta = \frac{1}{3}$, $x_p = \theta = \frac{3}{4}$ son algunas medianas de la variable X.

Ejemplo 2.17 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & si\ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de distribución de la variable aleatoria X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

El valor $x_p = \mathrm{q} = 0$ satisface la siguiente igualdad:

$$F_X(x_p) = P(X \leq x_p) = P(X \geq x_p) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $x_p = \mathrm{q} = 0$ es la mediana de la variable X

Actividades para el estudio independiente capítulo 2

2.1 Para el espacio muestral constituido por los siguientes resultados: n = no, s = sí, como la posible respuesta que podría dar una persona escogida aleatoriamente a la pregunta, ¿es usted un trabajador del sector público?

$$\Omega = \{s, n\}$$

Se define la siguiente variable aleatoria:

$$X : \Omega \to R$$

$$n \to 0$$

$$s \to 1\ .$$

Determinar *a)* el rango de la variables *b)* la función de probabilidad, *c)* la distribución de probabilidad, *d)* el valor esperado, *e)* la varianza, *f)* la desviación estándar de la variable aleatoria y *g)* calcular la probabilidad: $P(X < 1)$, $P(X > 0)$, $P(X = 1)$.

2.2 Se seleccionan aleatoriamente dos artículos de un proceso productivo para analizar si son defectuosos o no defectuosos y se obtiene el siguiente espacio muestral, $\Omega = \{dd, dn, nd, nn\}$, donde d : artículo defectuoso, n : artículo no defectuoso. Se define la siguiente variable aleatoria,

$$X : \Omega \to R$$

X : número de artículos defectuosos en cada resultado de Ω.

Determinar:
a) La función de probabilidad
b) La distribución de probabilidad
c) El valor esperado
d) La varianza
e) La desviación estándar de la variable aleatoria
f) Calcular las siguientes probabilidades: $P(X \leq 1)$ $P(X > 0)$ y $P(X = 1)$

2.3 Analizar si la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si\ x \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$$

a) Es una función de densidad para la variable aleatoria X

b) De ser así, determinar la función de distribución para X
c) Determinar su valor esperado y su varianza
d) Calcular $P(0 \leq X \leq 1.5)$, $P(-3 \leq X \leq 0.5)$.

2.4 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar:
a) El valor esperado
b) La varianza de la variable aleatoria X

Ejercicios para el capítulo 2

2.1 Para el espacio muestral conformado por los posibles resultados de lanzar una moneda tres veces, se define una variable aleatoria de la siguiente manera:

X : Número de sellos en cada uno de los posibles resultados.

a) Determinar:
   a) El rango de X.
   b) $P(X = 2)$.
   c) $P(X \geq 1)$.
   d) $P(X < 2)$.

b) Presentar la distribución de probabilidad de X.
c) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar.
d) Determinar la función de distribución $F_X(x)$.

2.2 Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{si } x \in [0,4] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,4] \end{cases}$$

a) Analizar si $f(x)$ es una función de densidad para la variable aleatoria X. De ser así, calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar.
b) Determinar la función de distribución $F_X(x)$.

2.3 Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} -2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Analizar si $f(x)$ es una función de densidad para la variable aleatoria X. De ser así, calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar.
b) Determinar la función de distribución $F_X(x)$.
c) Calcular $m_X(t)$.

2.4 Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & si \ \text{-}1 < x \leq 0 \\ 0.2 + cx & si \ 0 < x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determinar el valor de c
b) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X
c) Calcular $P(0 \leq X < 0.5)$
d) Determinar $P(X > 0.5 / X > 0.1)$
e) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar

2.5 Para una variable aleatoria X con función de probabilidad dada por,

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

a) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar.
b) Determinar la función de distribución $F_X(x)$ y construir su representación gráfica.

2.6 Sea X una variable aleatoria con función de densidad $(f.d.p.)$ dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & si\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X
b) Calcular $P(-0.5 < X < 0.5)$
c) Calcular $P(|X| > 0.4)$
d) Determinar $P(X > 0.3 / X > 0.2)$
e) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar
f) Determinar la mediana

2.7 Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por,

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ 0 < x < 1 \\ 2 - x & si\ 1 \leq x < 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X
b) Calcular $P(X < 0.7)$
c) Calcular $P(|X| > 0.6)$
d) Determinar $P(X > 0.8 / X > 0.2)$

e) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar

f) Determinar la mediana