ELEMENTOS DE PROBABILIDAD

Apoyo al estudio independiente

Víctor Miguel Ángel Burbano Pantoja
Margoth Adriana Valdivieso Miranda

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Tunja
2015

Elementos de probabilidad. Apoyo al estudio independiente / Burbano Pantoja, Víctor Miguel Ángel ; Valdivieso Miranda, Margoth Adriana. Tunja: Editorial UPTC, 2015. 190 p.

ISBN 978-958-660-226-6

1. Probabilidad. 2. Distribuciones. 3. Conocimiento probabilístico. 4. Variable aleatoria.

(Dewey 519/21).

Primera edición: 2015
200 ejemplares (papel)

Elementos de probabilidad. Apoyo al estudio independiente ISBN 978-958-660-226-6

Resultado de los procesos académico-investigativos asociados con el Grupo de Investigación Interdisciplinario en Ciencias (GICI) de la UPTC.

Libro financiado por Vicerrectoría Académica y la Dirección de Investigaciones de la UPTC.

Citación: Burbano, V. y Valdivieso, M. (2015). *Elementos de probabilidad. Apoyo al estudio independiente*. Tunja: Editorial UPTC.

Editorial UPTC
Edificio Administrativo – Piso 4
Av. Central del Norte 39-115
comite.editorial@uptc.edu.co
www.uptc.edu.co

Impresión
Grupo Imprenta y Publicaciones
UPTC - Avenida Central del Norte
Tels.: (0*8) 740 5626 - Exts. 2366 - 2367 - Fax 2408
imprenta.publicaciones@uptc.edu.co
Tunja – Boyacá – Colombia

Este trabajo lo dedicamos
a nuestras amadas hijas
Yereth y Saray

Contenido

Introducción

La probabilidad tuvo su génesis en los juegos de azar y suerte, los cuales podrían tener una antigüedad de más de 40.000 años; desde esa época primitiva, algunos pueblos como los sumerios y asirios jugaban con un hueso denominado astrágalo extraído del talón de animales mamíferos. Sin embargo, desde el punto de vista matemático, el concepto de probabilidad empieza a generarse en el siglo XVII con los trabajos de Pascal y se formaliza a inicios del siglo XIX en la concepción clásica de probabilidad debida a Laplace; concepción que con el trascurrir del tiempo se tornó poco satisfactoria para los científicos por sus escasas aplicaciones, lo que posibilitó el surgimiento de otras como la frecuencial y la subjetiva. Solamente hasta el año de 1933, Kolmogórov logra axiomatizar la teoría de la probabilidad.

La probabilidad es un campo de conocimiento que se constituyó en una de las ramas de la matemática en el siglo XX. Actualmente tiene inmensas aplicaciones y repercusiones en el campo de la investigación científica, en áreas como ingeniería, economía, finanzas, estadística, física, genética, ecología, comunicaciones, sociología, epidemiología; y también en los negocios, la industria, la política y la vida diaria de la gente. Se consolida como un campo con grandes potencialidades para impulsar el desarrollo de la ciencia y acrecentar la comprensión sobre los fenómenos aleatorios presentes en el complejo mundo en que vivimos.

Intuitivamente, la probabilidad estudia la medida de la posibilidad de que un evento ocurra. De manera formal, involucra experimentos aleatorios, espacios muestrales, eventos y medidas que, bajo ciertos axiomas, permiten calcular la probabilidad de que un determinado evento pueda ocurrir. La teoría de la probabilidad es una herramienta matemática útil para modelar una gran cantidad de fenómenos aleatorios que se presentan en una variedad de problemas de la vida real que involucran cierto nivel de incertidumbre, azar o riesgo; así mismo, se requiere en el desarrollo de procesos de simulación y de proyectos de investigación. Por su naturaleza, esta teoría presenta altos niveles de abstracción. A fin de posibilitar el acceso a ella y de contribuir con el aprendizaje inicial de este tema necesario en el curriculo escolar, se ha escrito este texto que conjuga lo intuitivo con lo formal.

Por cuanto cada día, con gran vigor, la probabilidad influye en las actividades de la vida cotidiana de la gente y se ha constituido en un elemento fundamental del método científico, es urgente desarrollar contenidos de probabilidad dentro del currículo de matemáticas desde el nivel de la educación primaria y secundaria hasta el nivel universitario, de manera que promueva la consolidación de una cultura probabilística y la construcción del conocimiento científico. En este sentido, desde finales del siglo XX, diversos organismos internacionales indicaron que la probabilidad había de considerarse como una de las "doce capacidades matemáticas esenciales que los futuros ciudadanos necesitarían para empezar el siguiente milenio" (National Council of Supervisors of Mathematics –NCSM-, 1989).

Adicionalmente, el cálculo de probabilidades es un tema de gran interés que se incluye en diversas áreas de la mayoría de las carreras universitarias y se recomienda trabajar en los cursos de matemáticas de los distintos grados de la educación primaria, secundaria y media (Ministerio de Educación Nacional –MEN-, 2003). El conocimiento probabilístico es un elemento necesario para desenvolverse en la sociedad actual; en este sentido, el propósito del presente texto es el de que un gran número de profesionales, profesores, estudiantes del nivel preuniversitario y universitario y otras personas interesadas en el tema, accedan a este tipo de conocimiento, amplíen su comprensión y realicen un mejor análisis de la compleja realidad en que vivimos, en la cual se conjuga lo aleatorio con lo determinista.

El material se ha diseñado teniendo en cuenta elementos de la llamada enseñanza estratégica (Fly, 1987; Alvermann, 1998) y del conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1987), enfoques que extrapolados al campo que nos ocupa, se constituyen en una alternativa para aprender a aprender probabilidad centrada en las actividades cognitivas en las que se comprometen docentes y estudiantes, siendo ella a la vez rol y proceso.

Las etapas de la enseñanza estratégica son: la preparación para el aprendizaje, la presentación de los contenidos que se han de aprender y la aplicación e integración de los nuevos conocimientos; dicha etapas se hacen visibles en cada capítulo. Se recomienda iniciar con la lectura comprensiva de los contenidos, revisando los ejemplos y desarrollando los ejercicios allí incluidos.

Solamente cuando el lector tenga claros los conceptos, es conveniente abordar la sección que se encuentra al final de cada capítulo titulada Actividades para el estudio independiente, cuya finalidad es la de aplicar e integrar los nuevos conocimientos. Al finalizar el texto se presenta la información de retorno de las actividades del estudio independiente, la cual se ha de utilizar para cotejar los procedimientos realizados y resultados obtenidos por el lector y en especial cuando se hayan tenido dificultades en la solución de las actividades propuestas; además, al final de cada capítulo se proponen otros ejercicios sobre las temáticas estudiadas. Con esta metodología también se espera obtener mejores resultados tanto en pruebas internas como externas (SABER) y contribuir en alguna medida con la disminución de la deserción estudiantil.

El texto, que se ha titulado *Elementos de probabilidad, apoyo al estudio independiente*, trata de forma intuitiva algunos conceptos básicos de probabilidad apoyados con ejemplos y ejercicios; luego aborda de manera formal ciertos tópicos de probabilidad, incluyendo un buen número de ejemplos y algunas demostraciones. El texto está dividido en cinco capítulos. En el primero se presentan los elementos conceptuales requeridos para definir espacios de probabilidad; además se indican las propiedades y axiomas que permiten hacer cálculo de probabilidades tanto en espacios muestrales de dimensión finita como infinita. En el segundo se definen las variables aleatorias y su distribución de probabilidad, incluyendo el valor esperado y la varianza para variables aleatorias discretas y continuas.

En el tercer capítulo se describen algunas distribuciones de probabilidad usuales y se desarrollan algunas aplicaciones con ciertos modelos de probabilidad discretos y continuos, y se hace un particular énfasis en la distribución normal. Los tres primeros capítulos del texto están dirigidos a personas que se inicien en el tema de probabilidad, tales como alumnos de la educación secundaria, los grados diez y once, profesores y estudiantes de las diversas carreras del nivel universitario. El cuarto capítulo hace referencia al tema de vectores aleatorios, incluyendo su función de probabilidad conjunta, marginal y condicional, el valor esperado, la matriz de covarianzas y de correlación, tanto para el caso continuo como para el caso discreto, y esperanza condicional, entre otros. Este capítulo puede ser útil especialmente para estudiantes de matemáticas, física e ingeniería o para aquellas personas que estén familiarizadas con vectores, matrices e integrales. En el quinto capítulo se proporciona la información de retorno a las actividades de estudio independiente propuestas en los cuatro primeros capítulos.

El presente libro se ha consolidado con el conocimiento probabilístico logrado por los autores en su actividad académica como profesores universitarios en diversas titulaciones, y de procesos de indagación y acrecentamiento de tal conocimiento requerido en el desarrollo de procesos de simulación y de proyectos de investigación en los que han participado. El libro también aporta ejemplos y ejercicios que de manera didáctica facilitan el estudio independiente de los temas propuestos. Para la comprensión de este documento, el lector debe tener conocimientos básicos de aritmética, conjuntos, cálculo diferencial e integral y algunos elementos de vectores y matrices. Es oportuno aclarar que los gráficos presentados a lo largo del escrito fueron elaborados por los autores utilizando el *software* libre R. Algunas actividades y ejercicios que se proponen al finalizar cada capítulo fueron adoptados de Valdivieso (2010). En último término, y como es admisible que este texto pueda tener errores, sería muy importante hacerlos conocer dentro de un ambiente académico y crítico que permita corregirlos oportunamente.

1
ELEMENTOS CONCEPTUALES SOBRE PROBABILIDAD

Inicialmente, el concepto de probabilidad estuvo asociado con los juegos de azar, las creencias religiosas y aspectos filosóficos que predominaron hasta el siglo XV. Luego paulatinamente se fue dando un tratamiento matemático al azar con los trabajos de Tartaglia, Cardano, Galileo, Pascal, Fermat y Huygens, relacionados con problemas de juegos y apuestas. A finales del siglo XVII y durante el siglo XVIII con la participación de matemáticos como Bernoulli, De Moivre, Bayes y Laplace se planteó la concepción clásica de probabilidad (Hacking, 1975; Belhouse, 1993, 2004). Con el trascurrir del tiempo, esta concepción se tornaría poco satisfactoria para los científicos por sus escasas aplicaciones y se plantearían otras alternativas como la concepción frecuencial ya abordada por Bernoulli en su obra *Ars Conjectandi* escrita en 1713 y luego tratada por Von Mises (1928) o la concepción subjetiva originada en los trabajos de Bayes (Vásquez, 2014).

Sin embargo, en el año de 1933, el matemático Kolmogórov axiomatizó la teoría de la probabilidad , quien decantó los trabajos de Caratheodory, Fréchet y Borel y usó la teoría de la medida para dicho propósito (Khrennikov, 2014). Hoy la probabilidad es una teoría matemática que tiene múltiples aplicaciones en distintos campos del conocimiento humano. La teoría de probabilidad se puede entender como un conjunto de axiomas que posibilitan el diseño de una o varias formas de calcular numéricamente la posibilidad de que un suceso ocurra. Para este propósito es conveniente definir experimentos aleatorios, espacios muestrales, eventos y espacios de probabilidad sobre los cuales sea posible calcular probabilidades para determinados eventos. En este capítulo se proporcionan y ejemplifican los conceptos básicos que se deben abordar en un curso inicial de probabilidad.

1.1 Conceptos usuales en probabilidad

En este apartado, se presentan los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y eventos; así mismo, se indican ejemplos alusivos a fin de orientar al lector hacia el desarrollo de las actividades de estudio independiente.

1.1.1 *Experimento aleatorio*

Un experimento aleatorio es aquel en el cual a priori o de antemano no se puede determinar el resultado del experimento (Lindgren, 1993; Blanco, 2004). En el presente texto, un experimento aleatorio se denotará con ξ.

Ejemplo 1.1 ξ: se ha extraído de manera fortuita un artículo del estante de un centro comercial a fin de comprobar si este resultará o no con el peso que se anuncia en su etiqueta; antes de pesarlo no se puede anticipar si tendrá o no el peso anunciado; es decir, no es posible anticipar cuál será el resultado exacto que se va a obtener, pero s² se podría establecer el conjunto de los posibles resultados.

Ejemplo 1.2 ξ: un partido de fútbol debe decidirse con lanzamientos desde el punto de penalización y el último jugador está listo para lanzar. Pedro considera que el jugador convertirá su lanzamiento en gol, mientras que Juan cree que no; de antemano no se puede garantizar cuál será el resultado que se va a obtener.

Ejemplo 1.3 ξ: se lanza un dado justo una vez cuyas caras están marcadas con una cantidad de puntos correspondientes a los números 1, 2, 3, 4, 5, y 6. Rosa considera que el dado mostrará cinco puntos en su cara visible hacia arriba y sus amigos creen que resultarán las otras cantidades de puntos. Una vez más, no se puede establecer en cuál cara del dado apuntará hacia arriba, pero se podría establecer el conjunto de los resultados posibles.

1.1.2 *Espacio muestral*

Sea ξ un experimento aleatorio, al conjunto de todos los posibles resultados de ξ se le denomina el espacio muestral del experimento. El espacio muestral se denota con Ω (Lindgren, 1993; Blanco, 2004).

Ejemplo 1.4 ξ: se selecciona al azar una unidad del producto A para analizar si resultará defectuosa o no. El espacio muestral estará conformado por dos resultados:

$$\Omega = \{d, n\}$$

donde *d* representa que la unidad escogida resultó defectuosa y *n* no defectuosa.

Ejemplo 1.5 ξ: se realizará una prueba psicológica a una persona escogida al azar para determinar si presentará un coeficiente intelectual bajo (*cib*), si es normal (*cin*) o si resultará con un coeficiente intelectual alto (*cia*), entonces el conjunto de posibles resultados está dado por:

$$\Omega = \{a, n, b\}$$

En este ejemplo, se ha simbolizado con *a* un coeficiente intelectual alto, con *n* en la eventualidad de que resulte normal y con *b* un coeficiente intelectual bajo.

Ejemplo 1.6 ξ: se observa el número de personas que posiblemente transiten por un puente peatonal peligroso por día en la ciudad de Bogotá. El espacio muestral es,

$$\Omega = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}$$

Ejemplo 1.7 ξ: se desea determinar el número de clientes que llegan a la cola de una entidad financiera por hora en la ciudad de Cali. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}$$

Ejemplo 1.8 ξ: duración (en tiempo continuo) de una bombilla eléctrica de la marca T. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{x \in R : x \geq 0\}$$

donde *x* es el tiempo de duración de la bombilla mencionada y *R* es el conjunto de los números reales.

Ejemplo 1.9 ξ: se seleccionan aleatoriamente tres artículos de un proceso productivo para analizar si resultarán defectuosos o no defectuosos. El correspondiente espacio muestral es:

$$\Omega = \{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

donde *d*: artículo defectuoso, *n*: artículo no defectuoso.

Con frecuencia, para obtener el espacio muestral se recurre a la elaboración de un diagrama de árbol, el cual es una representación gráfica que permite visualizar los posibles resultados del experimento aleatorio (Chernoff y Zazkis, 2011). La Figura 1.1 posibilita la determinación del espacio muestral correspondiente al experimento de seleccionar tres artículos de un proceso productivo para analizar si son defectuosos o no defectuosos.

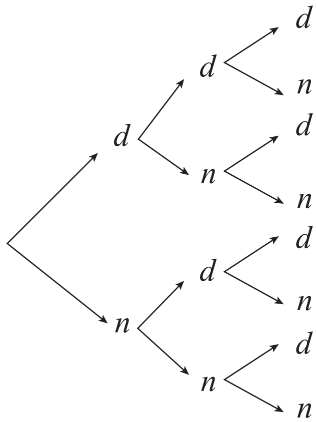

Figura 1.1 Diagrama de árbol

El anterior diagrama de árbol también puede dibujarse con las ramas hacia arriba o con las ramas hacia abajo, obteniéndose los mismos ocho resultados posibles.

Ejemplo 1.10 ξ: se lanzan dos dados justos (no cargados) simultáneamente, ¿cuántos y cuáles resultados son posibles? Hay 36 resultados posibles, el espacio muestral es el siguiente:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) & (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

Retomando los ejemplos 1.1, 1.2 y 1.3 sus correspondientes espacios muestrales son:

$\Omega = \{$*si tiene el peso anaunciado, no tiene el peso anunciado*$\} = \{s,n\}$

$\Omega = \{$*si hace gol, no hace gol*$\} = \{s,n\}$

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1.1.3 *Clases de espacios muestrales*

Sea ξ un experimento aleatorio y Ω el espacio muestral correspondiente al experimento ξ, el espacio muestral Ω se llama discreto si Ω es un conjunto finito o numerable. El espacio muestral Ω se denomina espacio muestral continuo si Ω es un conjunto infinito no numerable (Lindgren, 1993; Blanco, 2004).

Los ejemplos 1.3, 1.4, 1.5, 1.9 y 1.10 corresponden a espacios muestrales finitos y los ejemplos 1.6 y 1.7 a espacios muestrales infinito numerables o contables; en consecuencia, los mencionados ejemplos son espacios muestrales discretos. El ejemplo 1.8 corresponde a un espacio muestral continuo por tratarse de un conjunto infinito no numerable o no contable.

1.1.4 *Concepto intuitivo de evento*

Sea ξ un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral, de manera intuitiva, un subconjunto *E* de Ω para el cual se pueda asignar una *medida* numérica de su posibilidad de ocurrencia se denomina evento. Es de anotar que no todo subconjunto de un espacio muestral es un evento (Kolmogórov, 1956). Los eventos se denotan con letras mayúsculas.

Ejemplo 1.11 Utilizando el experimento aleatorio mencionado en el ejemplo 1.9, cuyo espacio muestral es:

$$\Omega = \{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

Se determinan los siguientes eventos:

E: a lo más resulte un artículo defectuoso.

$$E = \{dnn, nnd, ndn, nnn\}$$

F: como mínimo un artículo resulte no defectuoso.

$$F = \{ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

G: como máximo tres artículos resulten defectuosos.

$$G = \{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\} = \Omega$$

Cuando un evento resulta igual al espacio muestral se lo denomina evento seguro, tal como ocurre con el evento *G*.

H: como mínimo cuatro artículos resulten no defectuosos al seleccionar aleatoriamente tres artículos de un proceso productivo.

$$H = \{\ \} = \phi$$

Cuando un evento resulta vac²o se llama evento imposible, tal como ocurre con el evento *H*.

I: como mínimo tres artículos resulten defectuosos

$$I = \{ddd\}$$

Ejemplo 1.12 Utilizando el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6) \\ (3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,6)\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6) \\ (5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6) \end{Bmatrix}$$

Determinar los siguientes eventos para los cuales:

E: la primera componente resulte un número par mayor que dos

$$E = \{(4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6)\ (6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$$

F: la primera y la segunda componente de cada pareja resulten ser números pares

$$F = \{(2,2)\ (2,4)\ (2,6)\ (4,2)\ (4,4)\ (4,6)\ (6,2)\ (6,4)\ (6,6)\}$$

G: la primera y la segunda componente de cada pareja resulten ser números pares e iguales

$$G = \{(2,2)\ (4,4)\ (6,6)\}$$

H: la primera y la segunda componente de cada pareja resulten ser iguales

$$H = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6,6)\}$$

J: la primera sea igual a siete veces la segunda componente

$$J = \{\ \}$$

1.2 Concepción axiomática de probabilidad

El tratamiento axiomático de la probabilidad se inicia en la primera década del siglo XX con los aportes de Baire, Caratheodory, Lebesgue, Fréchet y Borel utilizando elementos de la teoría de la medida y la teoría de conjuntos, luego Kolmogórov escribió su libro "Fundamentos de la teoría de la probabilidad" (*Grundbegriffe der Wahrsecheinlichkeitsrechnung*) publicado en 1933, en el cual se define de manera rigurosa el concepto de probabilidad tanto para espacios de dimensión finita como infinita. A continuación, se mencionan los axiomas de la teoría de la probabilidad en el sentido de Kolmogórov (1956):

Axioma 1: los eventos forman un $\sigma -$ álgebra $\Im$; es decir, una clase cerrada respecto de las operaciones de unión, intersección y complemento de conjuntos numerables de eventos y del límite de sucesiones de eventos, o sea,

a) Si $E_j \in \Im$, $j = 1,2,...$ entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \Im$

b) Si $E_j \in \Im$, $j = 1,2,...$ entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \Im$, y $\underset{j\to\infty}{Lim} E_j \in \Im$

Axioma 2: $\Omega \in \Im$

Axioma 3: asociado a cada evento $E \in \Im$, existe un número real no negativo, $P(E)$, al que se denominará probabilidad de ocurrencia del evento E

Axioma 4: la probabilidad de que ocurra al menos uno de los eventos incluidos en el espacio muestral es igual a uno, $P(\Omega) = 1$

Axioma 5 (de aditividad): sean E_1 y E_2 eventos incompatibles, es decir, tales que no pueden presentarse en forma simultánea ($E_1 \cap E_2 = \phi$), entonces se verifica que,

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Axioma 6 (teorema de continuidad): Dada una sucesión monótona de eventos $E_i \subset E_{i+1}$, $i = 1,2,3,...$, entonces se verificará que $\underset{i\to\infty}{Lim} P(E_i) = P(\underset{i\to\infty}{Lim} E_i)$

En este apartado se desglosan y ejemplifican los elementos asociados con el concepto de probabilidad desde el enfoque axiomático, entre ellos, el concepto de sigma álgebra espacio medible y eventos, medida de probabilidad y espacio de probabilidad incluyendo algunas propiedades.

1.2.1 *El concepto de sigma álgebra*

El concepto que se indica a continuación involucra los axiomas 1 y 2 de Kolmogórov. Sea $\Omega \neq \phi$. Una familia $\Im$ de subconjuntos del espacio muestral Ω se denomina un sigma (σ) álgebra sobre Ω, si se cumplen los siguientes axiomas:

i) $\Omega \in \Im$

ii) Si $E \in \Im$ entonces $E^c \in \Im$

iii) Si $E_1, E_2, ... \in \Im$ entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i \in \Im$

Ejemplo 1.13 Sea $\Omega = \{s, n\}$ un espacio muestral, las colecciones de subconjuntos de Ω siguientes son $\sigma -$ álgebras:

$$\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$$

$$\Im_2 = \{\phi,\ \{s\},\ \{n\},\ \Omega\}$$

A la familia de subconjuntos de Ω denotada con $\Im_1$ y conformada por el evento imposible y el evento seguro se le denomina $\sigma -$ álgebra trivial.

A la colección $\Im_2$ correspondiente al conjunto de partes de Ω se le llama $\sigma -$ álgebra total y se constituye en el $\sigma -$ álgebra más grande que se puede construir sobre Ω.

La colección:

$\Im_3 = \{\phi,\ \{s\},\ \Omega\}$ no es un $\sigma -$ álgebra sobre Ω, puesto que $\{s\}^c = \{n\} \notin \Im_3$

Ejemplo 1.14 Sea $\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$ el espacio muestral conformado por todos los resultados posibles al lanzar una moneda dos veces, exceptuando que caiga de filo, donde *s: sello c: cara*. Las colecciones de subconjuntos de Ω siguientes son $\sigma -$ álgebras:

$$\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$$

$$\Im_2 = \{\phi, \{cc\}, \{cs, sc, ss\}, \Omega\}$$

$$\Im_3=\{\phi,\{cc,cs\},\{sc,ss\},\Omega\}$$

$$\Im_4=\{\phi,\{cc,cs,sc\},\{ss\},\Omega\}$$

$$\Im_5=\begin{Bmatrix}\phi,\{cc\},\{cs\},\{sc\},\{ss\},\{cc,cs\},\{cc,sc\},\{cc,ss\},\\ \{cs,sc\},\{cs,ss\},\{sc,ss\},\{cc,cs,sc\},\{cc,cs,ss\},\\ \{cc,sc,ss\},\{cs,sc,ss\},\{cc,cs,sc,ss\}\end{Bmatrix}$$

La familia de subconjuntos de Ω que se indica a continuación,

$$\Im_6=\{\phi,\{cc,cs\},\{ss\},\Omega\}$$

no corresponde a un $\sigma-$álgebra sobre Ω, puesto que

$$\{ss\}^c=\{cc,cs,sc\}\notin\Im_6$$

$$\{cc,cs\}^c=\{sc,ss\}\notin\Im_6.$$

Un $\sigma-$ álgebra muy importante para luego definir variables aleatorias reales es el $\sigma-$ álgebra de Borel, la cual corresponde a la menor $\sigma-$ álgebra definida sobre el espacio muestral $\Omega=R$ que contiene a todos los intervalos de la forma $(-\infty,x]$ con $x\in R$, se denota con β (Blanco, 2004).

1.2.2 *Espacio medible y eventos*

Sea $\Omega\neq\phi$ y $\Im$ un $\sigma-$ álgebra sobre Ω, la pareja $(\Omega, \Im)$ se denomina espacio medible. De manera formal, a los elementos del $\sigma-$ álgebra $\Im$ se les llama eventos. A continuación se mencionan algunas operaciones con eventos y se caracterizan algunos de ellos.

1.2.2.1 Operaciones con eventos

Si $\Im$ es un $\sigma-$ álgebra sobre Ω, *E y F* son eventos de $\Im$ entonces se pueden definir los siguientes eventos:

i) $E\cup F$ es un evento de $\Im$ que indica que *E* o *F*, o ambos ocurren.

ii) $E\cap F$ es un evento de $\Im$ que indica que *E* y *F* ocurren a la vez.

iii) E^c es un evento de $\Im$ que indica que no ocurre *F*.

iv) $E-F$ es un evento de $\Im$ que indica que E ocurre pero F no ocurre.

v) $E\Delta F=(E-F)\cup(F-E)$ es un evento de $\Im$ que indica que sucede E o sucede F pero no ocurren los dos a la vez.

Ejemplo 1.15 Sea el espacio muestral del ejemplo 1.11, conformado por los siguientes resultados:

$\Omega=\{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$

Sea, $\Im$ el sigma álgebra correspondiente al conjunto partes de Ω, entonces se pueden definir los siguientes eventos:

E: que a lo más resulte un artículo defectuoso.

$$E=\{dnn, nnd, ndn, nnn\}$$

Entonces,

$$E^c=\{ddd, ddn, dnd, ndd\}$$

F: que como mínimo un artículo resulte no defectuoso.

$$F=\{ddd, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

Además,

$$F^c=\{ddd\}$$

A continuación se determinan los siguientes eventos:

i) $E\cup F=\{ddd, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$

ii) $E\cap F=\{dnd, nnd, ndnn, nnn\}$

iii) $E^c=\{ddd, ddn, dnd, ndd\}$

iv) $E-F\ \{\ \}$

v) $E-F=\{ddn, dnd, ndd\}$

vi) $E\cup F^c=\{dnn, nnd, ndn, nnn, ddd\}$

vii) $E\,\Delta\,F=(E-F)\cup(F-E)=\{ddn, dnd, ndd\}$

1.2.2.2 Eventos mutuamente excluyentes

Si $\Im$ es un $\sigma -$ álgebra sobre Ω, *E y F* son eventos de $\Im$ entonces se dice que *E y F* son mutuamente excluyentes si $E \cap F = \phi$.

Ejemplo 1.16 El espacio muestral que contiene los posibles resultados de analizar si la asignatura de Estadística será aprobada o reprobada por dos estudiantes es,

$$\Omega = \{aa, ar, ra, rr\}$$

Donde *a:* aprobar la asignatura de estadística, *r*: reprobar la asignatura de estadística.

Ahora, sea, $\Im$ el sigma álgebra correspondiente al conjunto partes de Ω, se definen los eventos:

E: por lo menos los dos estudiantes aprobarán la asignatura de estadística.

F: por lo menos los dos estudiantes reprobarán la asignatura de estadística.

Los eventos anteriores están conformador por los siguientes resultados:

$$E=\{aa\}$$

$$F=\{rr\}$$

Luego, se cumple que:

$$E \cap F = \{\ \} = \phi$$

En consecuencia, se concluye que los eventos *E y F* son eventos mutuamente excluyentes.

1.2.3 *Medida de probabilidad*

El concepto que se indica en seguida involucra los axiomas 3, 4, 5 y 6 de Kolmogórov.

Sea $(\Omega, \Im)$ un espacio muestral medible y una función de conjunto,

$$P : \Im \rightarrow R$$

Tal que:

i) $P(E) \geq 0$ para todo $E \in \Im$

ii) $P(\Omega)=1$.

iii) Si $E_1, E_2, \ldots.$ es una sucesión de eventos en $\Im$ tales que $E_i \cap E_j = \phi$ para todo $i \neq j$ entonces,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

La función P se llama una medida de probabilidad sobre el espacio muestral Ω. A la tripleta ordenada (Ω, $\Im$, P) se le denomina un espacio de probabilidad sobre Ω.

1.2.3.1 Propiedades de una medida de probabilidad

Las propiedades se indican a continuación basan en lo expuesto por Lindgren (1993) y su comprobación es una versión dada por los autores del presente texto.

Sea (Ω, $\Im$, P) un espacio de probabilidad sobre Ω, entonces:

i) Para todo $E \in \Im$ se cumple que $P(E^c)=1-P(E)$.

ii) $P(\phi)=0$.

iii) Para todo $E, F \in \Im$, $P(E \cup F)=P(E)+P(F)-P(E \cap \mathrm{F})$.

iv) Si $E, F \in \Im$ y $E \subset F$ entonces $P(E) \leq P(F)$.

v) Si $P(E)=0$ entonces $P(E \cap F)=0$.

vi) $P(E)=P(E \cap F)+P(E \cap F^c)$.

v*ii)* Para $E, F \in \Im$ se cumple que, $P(E \cap F) \leq P(E \cup F) \leq P(E)+P(F)$.

viii) Si $E, F \in \Im$ y $E \subset F$ entonces $P(F-E)=P(F)-P(E)$.

ix) Si $E_1, \ldots, E_n \in \Im$ y $E_i \cap E_j = \phi$ para todo $i \neq j$ entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Es conveniente señalar que en las anteriores propiedades reposa el denominado cálculo de probabilidades.

1.2.3.2 Comprobación de propiedades

i) Para todo $E \in \Im$ se cumple que $P(E^c) = 1 - P(E)$

Como E y E^c son eventos mutuamente excluyentes, se puede escribir que:

$$\Omega = E \cup E^c$$

$$1 = P(\Omega) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

$$1 = P(E) + P(E^c) \ .$$

De la anterior expresión resulta que:

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

ii) $P(\phi) = 0$

Puesto que,

$$\phi = \Omega^c$$

aplicando la parte *i)* resulta,

$$P(\phi) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

iii) Para todo $E, F \in \Im$ se cumple que,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap \mathrm{F})$$

En efecto, como $E - F$ y $E \cap F$ son eventos mutuamente excluyentes, tales que

$$E = (E - F) \cup (E \cap F)$$

entonces,

a) $P(E) = P(E - F) + P(E \cap F)$

Implica que,

$$P(E) - P(E \cap F) = P(E - F)$$

Además $F - E$ y $E \cap F$ son eventos mutuamente excluyentes, tales que

$$F=(F-E)\cup(E\cap F)$$

Entonces,

b) $P(F)=P(F-E)+P(E\cap F)$

Implica que,

$$P(F)-P(E\cap F)=P(F-E)$$

Pero $E-F$, $F-E$ y $E\cap F$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$E\cup F=(E-F)\cup(F-E)\cup(E\cap F)$$

c) $P(E\cup F)=P(E-F)+P(F-E)+P(E\cap F)$

Utilizando los resultados de la parte derecha en *a)* y *b)* se tiene que *c)* se transforma en:

$$P(E\cup F)=P(E)-P(E\cap F)+P(F)-P(E\cap F)+P(E\cap F)$$

Finalmente, simplificando resulta,

$$P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(E\cap F)$$

iv) Si $E,F\in\Im$ y $E\subset F$ entonces $P(E)\leq P(F)$

Puesto que $E\subset F$, los eventos E y $F-E$ son mutuamente excluyentes, tales que

$$F=E\cup(F-E)$$

$$P(F)=P(E)+P(F-E)$$

Pero $P(F-E)\geq 0$, luego la igualdad anterior es equivalente con:

$$P(F)\geq P(E)$$

es decir,

$$P(E)\leq P(F)$$

v) Si $P(E)=0$ entonces $P(E\cap F)=0$

$$E\cap F\subseteq E$$

$$P(E \cap F) \leq P(E) = 0$$

pero

$$P(E \cap F) \geq 0$$

entonces,

$$0 \leq P(E \cap F) \leq 0$$

Lo anterior implica que,

$$P(E \cap F) = 0$$

vi) $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$

Como $E - F$ y $E \cap F$ son eventos mutuamente excluyentes, tales que

$$E = (E \cap F) \cup (E - F)$$

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E - F)$$

por propiedades de los conjuntos, se tiene que $E - F = E \cap F^c$ y reemplazando en la expresión anterior, resulta:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$

v*ii)* Para $E, F \in \Im$ se cumple que,

$$P(E \cap F) \leq P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$$

Puesto que,

$$(E \cap F) \subseteq (E \cup F)$$

a) $P(E \cap F) \leq P(E \cup F)$

Pero,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

como

$$P(E \cap F) \geq 0$$

$$P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$$

Sustituyendo en *a)* se obtiene:

$$P(E \cap F) \leq P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$$

viii) Si $E, F \in \Im$ y $E \subset F$ entonces $P(F - E) = P(F) - P(E)$.

Debido a que si $E \subset F$, los eventos E y $F - E$ son mutuamente excluyentes, entonces,

$$F = E \cup (F - E)$$

$$P(F) = P(E) + P(F - E)$$

$$P(F) - P(E) = P(F - E)\ .$$

ix) Si $E_1, ..., E_n \in \Im$ y $E_i \cap E_j = \phi$ para todo $i \neq j$ entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Por la propiedad *iii)* de los axiomas de medida de probabilidad, se cumple que,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

Como por hipótesis, $E_1, ..., E_n \in \Im$ y $E_i \cap E_j = \phi$ para todo $i \neq j$, considerando $E_{n+1} = \phi, E_{n+2} = \phi, ... \in \Im$ resulta,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

1.2.3.3 Ley de Probabilidad total

Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de eventos mutuamente excluyentes dos a dos, tales que la unión de ellos es igual al espacio muestral Ω entonces la mencionada sucesión se denomina una partición del espacio muestral. En este caso para el evento $F \in \Im$, la probabilidad total de que ocurra F se calcula de la siguiente manera,

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F \cap E_n)$$

1.3 Concepción clásica de probabilidad

Una primera aproximación al concepto de probabilidad se hace en el libro titulado *Ars Conjectandi*, as² (Bernoulli, 1968),

> La probabilidad de un evento es la razón del número de casos igualmente probables que lo favorecen entre el número total de casos posibles igualmente probables bajo las circunstancias.

Años más tarde, este concepto fue formalizado por el matemático De Moivre, ampliado y afinado por Laplace (1985/1814), p. 28) para luego plasmarlo en la siguiente definición, conocida como probabilidad clásica:

> La probabilidad de un suceso que puede ocurrir en un número finito de resultados es una fracción con denominador el número de todos los casos posibles y con numerador el número de casos favorables al suceso de interés.

La mencionada cita, se puede interpretar de la siguiente forma: la probabilidad de un evento o suceso que puede ocurrir solamente en número finito de modos se define como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre y cuando todos los resultados posibles sean igualmente probables o equiprobables; es decir tengan la misma verosimilitud (Alexander y Kelly, 1999). Este concepto ha presentado un reducido número de aplicaciones debido a que exige contar con un conjunto finito de resultados posibles verosímiles; es decir, el concepto de equiprobabilidad es inaplicable a espacios muestrales de dimensión infinita en la medida que la suma infinita de constantes así sean muy pequeñas no será igual a 1.

Hoy el concepto de probabilidad clásica es un caso particular de la concepción axiomática; en consecuencia es posible definir los denominados espacios de probabilidad laplacianos como se indica a continuación.
Un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ se denomina espacio de probabilidad laplaciano, si $\Omega \neq \phi$ es finito, el $\sigma -$ álgebra $\Im$ es igual al conjunto partes de Ω, es decir $\Im = \wp(\Omega)$ y $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{\#\Omega}$ para todo punto $\omega \in \Omega$

La medida de probabilidad P se llama distribución laplaciana en Ω.

Ahora, si $(\Omega, \Im, P)$ es un espacio de probabilidad laplaciano y $E \subseteq \Omega$, entonces,

$$P(E)=P\left(\bigcup_{\omega\in E}\{\omega\}\right)=\sum_{\omega\in E}\frac{1}{|\Omega|}=\frac{|E|}{|\Omega|}=\frac{Cardinal\ de\ E}{Cardinal\ de\ \Omega}$$

En este contexto, si $|E|$ representa el número de casos favorables al evento E y si $|\Omega|$ es el número de casos posibles, entonces,

$$P(E)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ E}{Número\ de\ casos\ posibles}=\frac{\#E}{\#\Omega}$$

La anterior expresión recoge la definición dada por Laplace.

Ejemplo 1.17 Se compran tres artículos, uno después de otro, los cuales pueden resultar defectuosos o no defectuosos, el espacio muestral está formado por los siguientes resultados:

$$\Omega=\{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

Ahora, sea, $\Im$ el sigma álgebra correspondiente al conjunto partes de Ω, se definen los siguientes eventos:

E: que a lo más salga un artículo defectuoso entre los tres artículos comprados.
F: que a lo más salgan dos artículos no defectuosos entre los tres artículos comprados.

Los eventos anteriores se pueden expresar de la siguiente forma:

$$E=\{dnn, ndn, nnd, nnn\}$$

$$F=\{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd\}$$

$$P(E)=\frac{número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ E}{número\ de\ casos\ posibles}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$P(F)=\frac{7}{8}$$

Otros resultados son:

$$P(E^c)=1-P(E)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(F^c)=1-P(F)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$$

Como $E \cap F = \{dnn, ndn, nnd\}$ entonces

$$P(E \cap F) = \frac{3}{8}$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = 1$$

Debido a que $E - F = \{nnn\}$ entonces,

$$P(E - F) = \frac{1}{8}$$

Puesto que $F - E = \{ddd, ddn, dnd, ndd\}$ entonces,

$$P(F - E) = \frac{4}{8}$$

Ejemplo 1.18 Si $P(E) = 0.55$, $P(F) = 0.58$ y $P(E \cap F) = 0.24$, entonces: $P(E \cup F) = ?$, $P(E^c) = ?$, $P(F^c) = ?$, $P(E - F) = ?$

Puesto que,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

$$P(E \cup F) = 0.55 + 0.58 - 0.24 = 0.89$$

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 0.55 = 0.45$$

$$P(F^c) = 1 - P(F) = 1 - 0.58 = 0.42$$

Como $P(E - F) = P(E \cap F^c)$ y usando la propiedad *vi)* de una medida de probabilidad: $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$ resulta que,

$$P(E - F) = P(E) - P(E \cap F) = 0.55 - 0.24 = 0.31$$

1.4 Probabilidad condicional

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω y sea F un evento en $\Im$ talque $P(F) > 0$, sea E un evento en $\Im$ entonces la probabilidad de E una vez ha sucedido F está dada por (Lindgren, 1993),

$$P(E / F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

A la anterior expresión se le denomina probabilidad condicional de E dado F .

Nótese que si $E \cap F = \phi$ entonces $P(E/F) = 0$. El recíproco no es cierto.

De la definición de probabilidad condicional se tiene que,

$$P(E \cap F) = P(E/F)P(F)$$

A la expresión anterior se le llama regla de multiplicación para eventos dependientes.

Ahora, si $E_1,...,E_n \in \Im$ con $P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{n-1}) > 0$ entonces

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1)P(E_2/E_1)P(E_3/E_1 \cap E_2)...P(E_n/E_1 \cap E_2 \cap ... E_{n-1})$$

En los ejemplos que se proporcionan a continuación, se asume que se está trabajando en el contexto de un espacio de probabilidad.

Ejemplo 1.19 El siguiente ejemplo se ha adaptado de Feller (1993). La licitación enviada por la compañía JJ para la construcción de un edificio en la ciudad C, será estudiada por la Junta Directiva del departamento de planeación de dicha ciudad para su revisión y posible adjudicación. La probabilidad de que la licitación sea estudiada es de 0.94, la probabilidad de que la licitación sea estudiada y adjudicada es de 0.84. ¿Cuál es la probabilidad de que la licitación será adjudicada dado que fue estudiada?

Para realizar el cálculo de dicha probabilidad, se definen los siguientes eventos:

E : la licitación será adjudicada a la compañía JJ.

F : la licitación será estudiada por la Junta Directiva, entonces $P(F) = 0.94$.

$E \cap F = F \cap E$: La licitación será estudiada y adjudicada, entonces $P(E \cap F) = 0.84$

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.84}{0.94} = 0.8936$$

La probabilidad de que la licitación presentada por la compañía JJ sea adjudicada dado que fue estudiada por la Junta Directiva del departamento de planeación de la ciudad C es de 0.8936, es decir del 89.36%.

Ejemplo 1.20 La probabilidad de que el proyecto H haya resultado bien planeado es del 0.92, la probabilidad de que dicho proyecto haya sido bien planeado y que será bien ejecutado es del 0.81, ¿cuál es la probabilidad de que ese proyecto será bien ejecutado, dato que resultó bien planeado?

A fin de lograr el cálculo de la probabilidad requerida, se definen los siguientes eventos:

E: el proyecto H será bien ejecutado.

F: el proyecto H resultó bien planeado, entonces $P(F) = 0.92$.

$E \cap F = F \cap E$: el proyecto H resultó bien planeado y será bien ejecutado, entonces $P(E \cap F) = 0.81$

Luego,

$$P(E / F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.81}{0.92} = 0.8804$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el proyecto H será bien ejecutado, dado que resultó bien planeado es de 0.8804, es decir del 88.04%.

1.5 Eventos independientes

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω y sean F, E eventos en $\Im$ tal que $P(F) > 0$, E y F son eventos (estadísticamente) independientes si

$$P(E / F) = P(E)$$

Lo anterior indica que la ocurrencia de F en nada afecta a la probabilidad de ocurrencia del evento E (Lindgren, 1993). Nótese que si $P(E) > 0$ y E y F son independientes entonces F y E son independientes.

Como en general se cumple que,

$$P(E \cap F) = P(E / F)P(F)$$

entonces reemplazando $P(E / F) = P(E)$ en la anterior igualdad resulta la denominada ley de multiplicación para eventos estadísticamente independientes.

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

La anterior expresión se denomina ley de multiplicación para eventos independientes.

1.6 Teorema de Bayes

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω y sean F, E eventos en $\Im$ tales que $P(E) > 0$, $P(F) > 0$ entonces (Canavos, 1988):

$$P(E / F) = \frac{P(F / E)P(E)}{P(F / E)P(E) + P(F / E^c)P(E^c)}$$

Utilizando el concepto de probabilidad total se puede escribir:

$$P(F) = P(F / E)P(E) + P(F / E^c)P(E^c)$$

por lo tanto,

$$P(E / F) = \frac{P(F / E)P(E)}{P(F)}$$

1.6.1 *Consecuencia del teorema de Bayes*

Sea $E_1, E_2, ...$ una partición de Ω con $P(E_i) > 0$ para todo *n*, entonces para todo F evento de $\Im$ tal que $P(F) > 0$ se cumple que,

$$P(E_i / F) = \frac{P(F / E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(F / E_i)P(E_i)}$$

Ejemplo 1.21 Una empresa productora del artículo TT tiene tres puntos de producción A, B, C, donde el 65% de las unidades del artículo TT se produce en el punto A, el 20% en el punto B y el 15% en el punto C. Por circunstancias de mantenimiento de sus máquinas se están produciendo algunas unidades del artículo TT defectuosas. Sin embargo, el 90% de las unidades del producto que provienen de A resulta de buena calidad, el 75% de las que provienen de B es de buena calidad y el 60% de las que provienen de C es de buena calidad, si se selecciona aleatoriamente una unidad del producto TT, ¿cuál es la probabilidad de que resulte de buena calidad? Determinar la probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C. ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo TT resulte de no buena calidad? Determinar la probabilidad de que si la unidad resultó de no buena calidad haya sido producida en el punto B

Se definen los siguientes eventos:

E :la unidad del artículo TT seleccionada aleatoriamente resultará de buena calidad.
A :unidades del artículo TT producidas en el punto A.
B :unidades del artículo TT producidas en el punto B.
C :unidades del artículo TT producidas en el punto C.

$$P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)$$

$$P(E) = (0.9)(0.65) + (0.75)(0.2) + (0.6)(0.15)$$

$$P(E) = 0.585 + 0.15 + 0.09 = 0.825$$

La probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo TT resulte de buena calidad es de 0.825 o del 82.5%.

$$P(C/E) = \frac{P(E/C)P(C)}{P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)}$$

$$P(C/E) = \frac{(0.6)(0.15)}{0.825} = \frac{0.09}{0.825} = 0.109$$

La probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C es de 0.109 o del 10.9%.
Ahora se define el siguiente evento:

F :la unidad del artículo TT seleccionada aleatoriamente resultará de no buena calidad.

$$P(F) = P(F/A)P(A) + P(F/B)P(B) + P(F/C)P(C)$$

$$P(F) = (0.1)(0.65) + (0.25)(0.2) + (0.4)(0.15)$$

$$P(F) = 0.065 + 0.05 + 0.06 = 0.175$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo TT resulte de no buena calidad es de 0.175 o del 17.5%.

$$P(B/\ F) = \frac{P(F/B)P(B)}{P(F/A)P(A) + P(F/B)P(B) + P(F/C)P(C)}$$

$$P(B/\ F) = \frac{(0.25)(0.2)}{0.825} = \frac{0.05}{0.175} = 0.2857$$

Luego, la probabilidad de que si la unidad resultó de no buena calidad haya sido producida en el punto B es de 0.2857 o del 28.57%.

1.7 Espacios no laplacianos

Cuando se tiene incertidumbre total frente al problema que se está estudiando, resulta razonable asignar la misma probabilidad a cada uno de los puntos muestrales de Ω, particularmente cuando el espacio muestral es finito.

Ejemplo 1.22 ξ: se hace girar una ruleta dividida en dos sectores circulares desiguales pintada con los colores amarillo y rojo. El espacio muestral asociado es,

$$\Omega = \{a,\ r\}$$

donde a :la ruleta señalará el color amarillo, r : la ruleta señalará el color rojo. Tomando como referencia el sigma álgebra dada por

$$\Im = \wp(\Omega) = \{\phi, \{a\}, \{r\}, \{a, r\}\}$$

se puede definir la siguiente *medida de probabilidad:*

$$P : \Im \to R$$

Tal que

$$P(\{a\}) = p_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad P(\{r\}) = p_2 \geq 0$$

Entonces se debe cumplir que:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$, es decir que $p_1 + p_2 = 1$

En este caso no es adecuado asumir que $p_1 = p_2 = 0.5$; aquí ya no tiene sentido trabajar bajo equiprobabilidad o total incertidumbre, puesto que se trata de un ejemplo sobre un espacio no laplaciano.

Para cada uno de los giros de la ruleta, se tendrá que $p_1 \neq p_2$, pudiéndose tener por ejemplo que:

$$p_1 = 0.3 \text{ y } p_2 = 0.7$$

$$p_1 = 0.2 \text{ y } p_2 = 0.8$$

En otro caso, puede suceder por ejemplo que $p_1 = 9p_2$ con lo cual resulta que:

$$p_1 + p_2 = 9p_2 + p_2 = 1$$

Entonces,

$$p_1 = 0.9\ y\ \ p_2 = 0.1$$

En esta misma dirección, se pueden presentar infinidad de casos dependiendo de qué tan desiguales sean los dos sectores que conforman el círculo de la ruleta. Es decir, hay infinidad de valores que pueden asumir p_1 y p_2 de tal forma que $p_1 + p_2 = 1$.

Es importante tener en cuenta que el concepto de equiprobabilidad solo puede tener sentido en espacios de probabilidad finitos.

1.8 Espacios de probabilidad discretos de dimensión infinita

En este apartado se proporcionan algunos ejemplos de espacios de probabilidad de dimensión finita e infinita, en los cuales el concepto de equiprobabilidad carece de sentido.

Si Ω es un espacio muestral discreto finito, entonces Ω puede ser expresado de la siguiente forma,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$

Donde los ω_i para $i = 1, 2, ..., n$ son eventos elementales o simplemente puntos que conforman el espacio muestral. Para construir un espacio de probabilidad sobre Ω, se puede usar el sigma álgebra total conformada por el conjunto partes de Ω, $\Im = \wp(\Omega)$ y definir una medida de probabilidad de la siguiente manera:

$$P : \Im \to R$$

tal que

$$P\left(\{\omega_i\}\right) = p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

La función anterior debe satisfacer:

i) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Aquí los p_i no necesariamente son iguales y se pueden tomar valores razonables y concordantes con algún problema real que se esté modelando.

Ejemplo 1.23 Para un evento E de Ω formado por los siguientes puntos muestrales,

$$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

$$P(E) = P\left(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\}\right) = p_1 + p_2 + p_3$$

Solamente si se trabaja bajo total incertidumbre se puede asumir que $p_1 = p_2 = p_2 = \frac{1}{3}$; en este caso se estará trabajando el concepto de equiprobabilidad.

Para los demás casos puede ocurrir que $p_1 \neq p_2$, o $p_1 \neq p_3$ o $p_2 \neq p_3$ o $p_1 \neq p_2 \neq p_3$, pudiéndose tener por ejemplo que:

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = \frac{1}{5}, \quad p_2 = \frac{2}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

En otro caso puede suceder por ejemplo que $p_1 = 3p_2$ y $p_2 = 2p_3$ con lo cual resulta que:

$$6p_3 + 2p_3 + p_3 = 1 .$$

Entonces,

$$p_1 = \frac{6}{9},\ p_2 = \frac{2}{9},\ p_3 = \frac{1}{9}$$

Y así sucesivamente.

En general, si se tiene cualquier evento E de Ω formado por los siguientes puntos muestrales,

$$E = \left\{ \omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k} \right\},\ k = 1, 2, ..., n$$

$$P(E) = P\left(\bigcup_{j=1}^{k} \left\{ \omega_{i_j} \right\} \right) = \sum_{j=1}^{k} P\left(\left\{ \omega_{i_j} \right\} \right) = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_k}$$

solo si se está trabajando bajo total incertidumbre frente al problema que se esté estudiando, resulta razonable asignar la misma probabilidad a cada uno de los puntos muestrales de Ω, lo cual implica que todos los p_i son iguales, es decir que se asume que:

$$p_i = \frac{1}{n},\ \text{ para } i = 1, 2, ..., n.$$

Bajo estas circunstancias, para el evento,

$$E = \left\{ \omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k} \right\},\ k = 1, 2, ..., n$$

$$P(E) = P\left(\bigcup_{j=1}^{k} \left\{ \omega_{i_j} \right\} \right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

A continuación, se considerará un espacio muestral Ω infinito contable, sobre el cual se ha definido un sigma álgebra de manera apropiada,

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ... \}$$

y se define una medida de probabilidad de la siguiente manera:

$$P : \Im \to R$$

Tal que
$$P\left(\{\omega_i\}\right)=p_i \geq 0, \quad i=1,2,\ldots$$
$$\Omega=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{\omega_i\}$$

La función anterior debe satisfacer:

i) $P(\Omega)=1$

ii) $ii) \ \sum_{i=1}^{\infty} p_i=1$.

Aquí los p_i no pueden ser iguales ya que no se cumpliría la anterior condición y por eso aquí la equiprobabilidad no funciona ni tiene sentido.
Para un evento E de Ω formado por los siguientes puntos muestrales,

$$E=\{\omega_1,\omega_2\}$$
$$P(E)=P\left(\{\omega_1\}\cup\{\omega_2\}\right)=p_1+p_2=1-\sum_{i=3}^{\infty} p_i \ .$$

Ejemplo 1.24 Sea $\Omega=\{1,2,3,\ldots\}$ con el sigma álgebra total, se define la siguiente función,

$$P\left(\{n\}\right)=p_n=\frac{1}{2^n}, \quad n=1,2,3,\ldots$$

Se puede verificar que la anterior función define una medida de probabilidad, ella cumple que:

i) $p_n \geq 0$

ii) $ii)\sum_{n=1}^{\infty} p_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=-1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=-1+2=1.$

Para el evento $E=\{1,3,5,\ldots\}$ su probabilidad de ocurrencia es:

$$P(E)=P\left(\{1\}\cup\{3\}\cup\{5\}\cup,\ldots\right)$$
$$P(E)=P\left(\{1\}\right)+P\left(\{3\}\right)+P\left(\{5\}\right)+\ldots.$$
$$P(E)=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -1 + 2 = 1$$

$$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{-1}}\right) \frac{1}{2^{2n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

$$P(E) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{\frac{3}{4}} - 1\right) = 2\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{2}{3}$$

Para el evento $F = \{2, 4, 6, ...\}$ su probabilidad de ocurrencia se calcula de la siguiente manera,

$F = \{2, 4, 6, ...\} = E^c$.

Luego,

$$P(F) = P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \ .$$

Para el evento finito $H = \{1, 3, 5, 7\}$ su probabilidad de ocurrencia es,

$$P(E) = P\left(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \{7\}\right)$$

$$P(E) = P\left(\{1\}\right) + P\left(\{3\}\right) + P\left(\{5\}\right) + P\left(\{7\}\right)$$

$$P(E) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}$$

$$P(E) = 0.5 + 0.125 + 0.03125 + 0.0078125 \cong 0.66406$$

Ejemplo 1.25 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ con el sigma álgebra total, se define la siguiente función,

$$P\left(\{n\}\right) = p_n = \frac{1}{e^2 - 1}\left(\frac{2^n}{n!}\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Analizar si la anterior función define una medida de probabilidad, de ser así calcular la probabilidad del evento $E = \{2, 4, 6\}$

Por la definición de la función *P* se tiene la primera condición

i) $i)\ p_n \geq 0$

Ahora,

ii) $$ii)\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2-1}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\left(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)\right)$$

Ahora la serie de Taylor de la función $f(x)=e^x$ alrededor de cero es,

$$e^x = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Luego evaluando la anterior expresión en $x=2$, resulta:

$$e^2 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots$$

$$e^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots$$

Reemplazando en *ii)* se tiene,

iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2-1}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\left(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)\right) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\left(-1+e^2\right) = 1$$

Para el evento finito $E=\{1,3,5\}$ su probabilidad de ocurrencia es,

$$P(E) = P(\{1\}\cup\{3\}\cup\{5\})$$

$$P(E) = P(\{1\})+P(\{3\})+P(\{5\})$$

$$P(E) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\frac{2^1}{1!}+\left(\frac{1}{e^2-1}\right)\frac{2^3}{3!}+\left(\frac{1}{e^2-1}\right)\frac{2^5}{5!}$$

$$P(E) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\left(2+\frac{8}{6}+\frac{32}{120}\right) = \left(\frac{1}{7.38905-1}\right)(2+1.3333+0.26666)$$

$$P(E) = (0.156517)(3.59996) \cong 0.56345$$

Actividades para el estudio independiente capítulo 1

1.1 Después de que el lector haya realizado una lectura comprensiva del capítulo 1, completar los espacios en blanco.

a) El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina ____

b) Aquel experimento en el cual a priori no se puede determinar su resultado, se llama ____________________________

c) Un subconjunto del espacio muestral para el cual sea posible asignar una medida numérica de su posibilidad de ocurrencia se denomina ______________________ ____________________________

d) El espacio muestral Ω se denomina espacio muestral ____________________ si Ω es un conjunto infinito no numerable.

e) La menor $\sigma -$ álgebra definida sobre el espacio muestral $\Omega = R$ que contiene a todos los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in R$, se denomina __________ _____________________________________

f) Si Ω denota a un espacio muestral, $\Im$ una sigma álgebra sobre Ω y P una medida de probabilidad definida sobre $\Im$, entonces la tripleta ordenada (Ω, $\Im$, P) se le denomina _____________________

g) Un espacio de probabilidad (Ω, $\Im$, P) se denomina espacio de probabilidad _________________si Ω es finito, el $\sigma -$ álgebra $\Im$ es igual al conjunto partes de Ω, es decir $\Im = \wp(\Omega)$ y $P(w) = \dfrac{1}{|\Omega|}$ para todo $w \in \Omega$.

1.2 Clasificar cada uno de los siguientes espacios muestrales:

a) ξ: Se escoge aleatoriamente una persona para verificar si fuma o no, $\Omega = \{s, n\}$; donde s :sí fuma, n : no fuma. ___________________

b) ξ: Se observa el número de vehículos que transitan por una vía importante de cierta ciudad, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. _________________

c) ξ: Duración (en tiempo continuo) de un producto de carnes frías,

$\Omega = \{x \in R : x \geq 0\}$, donde x es el tiempo de duración del producto. ________
____

d) ξ: Seleccionar aleatoriamente dos artículos de un proceso productivo para analizar si son defectuosos o no defectuosos, $\Omega = \{dd, dn, nd, nn\}$, donde d: artículo defectuoso, n: artículo no defectuoso. ____________________________
____

1.3 De acuerdo con cada uno de los siguientes espacios muestrales, responder las preguntas correspondientes.

Si $\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$ y considerando las colecciones de subconjuntos de Ω siguientes:

$\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$

$\Im_2 = \{\phi, \{cc\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$

$\Im_3 = \{\phi, \{cc, cs\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$

$\Im_4 = \{\phi, \{cc, cs, sc\}, \{ss\}\}$

a) La colección de eventos $\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$ es un sigma álgebra sobre Ω denominada
____

b) La familia de eventos $\Im_2 = \{\phi, \{cc\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$ no es un sigma algebra porque
____

c) La colección de eventos $\Im_3 = \{\phi, \{cc, cs\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$ es un ________________
____

d) La colección de eventos $\Im_4 = \{\phi, \{cc, cs, sc\}, \{ss\}\}$ no es un sigma álgebra sobre Ω debido a que _________________________________

1.4 Asumiendo que todos los puntos del espacio muestral Ω tienen la misma probabilidad de ocurrir y dados los siguientes eventos:

$E = \{cs, sc, ss\}$

$F = \{ss\}$

Calcular:

e) $P(E) = ?$

f) $P(F) = ?$

g) $P(E \cup F) = ?$

h) $P(E \cap F) = ?$

i) $P(E^c) = ?$

j) $P(E - F) = ?$

1.5 Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω, sean F y E eventos en $\Im$ tales que $P(E) = p$, $P(F) = q$, $P(E \cup F) = r$, demostrar que:

a) $P(E \cap F) = p + q - r$

b) $P(E - F) = r - q$

c) $P(E^c \cap F^c) = 1 - r$

d) $P(E \cup F^c) = p - r + 1$

1.6 Mostrar que si $E_1, E_2, \ldots$ es una partición de Ω con $P(E_n) > 0$ para todo n, entonces para todo F evento de $\Im$ tal que $P(F) > 0$ se cumple que,

$$P(E_n / F) = \frac{P(F / E_n)P(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(F / E_n)P(E_n)}$$

1.7. Se tienen 3 cajas con artículos dispuestos de la siguiente forma: la primera caja tiene 20 artículos de los cuales 8 son defectuosos, la segunda tiene 16 artículos de los cuales 6 son defectuosos y la tercera tiene 10 artículos de los cuales 2 son defectuosos.

Si se escoge una caja al azar y se extrae un artículo al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?
b) Si el artículo escogido resultó defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la segunda caja?

1.8 Una fábrica productora del artículo WW tiene tres puntos de producción A, B, C, donde el 70% de las unidades del artículo WW se produce en el punto A, el 20% en el punto B y el 10% en el punto C. Por circunstancias de mantenimiento de sus máquinas se están produciendo algunas unidades del artículo WW defectuosas. Sin embargo, el 90% de las unidades del producto que provienen de A es de buena calidad, el 80% de las que provienen de B es de buena calidad y el 85% de las que provienen de C es de buena calidad, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo WW resulte de buena calidad? Determinar la probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C.

1.9 ξ: se lanza una moneda una vez, sin que ella pueda caer de filo.

$\Omega = \{c, s\}$; donde c :cara, s :sello.

Si se toma como base el sigma álgebra dada por $\Im = \{\phi, \{c\}, \{s\}, \{c, s\}\}$, y definiendo siguiente *medida de probabilidad:*

$$P : \Im \rightarrow R$$

Tal que

$$P(\{c\}) = p_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad P(\{s\}) = p_2 \geq 0$$

con

$$\Omega = \{c, s\}$$

Entonces se debe cumplir que:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$, es decir que $p_1 + p_2 = 1$

¿Cuáles valores son posibles para p_1, p_2?

1.10 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ y se define la siguiente función,

$$P(\{n\}) = p_n = \frac{2}{3^n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Verificar si la anterior función define una medida de probabilidad. De ser así, calcular la probabilidad de los siguientes eventos: $E = \{1, 3, 5, ...\}$, $F = \{2, 4, 6, ...\}$, $H = \{1, 3, 5, 7\}$

Ejercicios para el capítulo 1

1.1 Obtener el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de lanzar una moneda y un dado a la vez.
Determinar los eventos:

E: El dado al caer muestra un número par.
F: El dado al caer muestra un número mayor que dos.

Obtener los siguientes eventos $E \cup F$, $E \cap F$, E^c, $E - F$.

Si se asume que todos los puntos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de ocurrir (trabajar bajo equiprobabilidad), calcular:

$P(E) = ?$, $P(F) = ?$, $P(E \cup F) = ?$, $P(E \cap F) = ?$, $P(E^c) = ?$, $P(E - F) = ?$.

1.2 Obtener el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de lanzar dos dados una sola vez.

Determinar los eventos:

E: que la suma de los valores por observar en los dos dados sea igual a siete.
F: que el valor en el primer dado sea inferior al valor que se espera observar en el segundo dado.

Obtener los siguientes eventos: $E \cup F$, $E \cap F$, E^c, $E - F$.

Si se asume que todos los puntos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de ocurrir (trabajar bajo equiprobabilidad), calcular:

$P(E) = ?$, $P(F) = ?$, $P(E \cup F) = ?$, $P(E \cap F) = ?$, $P(E^c) = ?$, $P(E - F) = ?$.

1.3 Expresar por comprensión el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de observar el número de pacientes que llegan a un hospital popular de la ciudad M, un día cualquiera.

1.4 Obtener el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de suponer si un estudiante aprobó o no las cuatro evaluaciones que resolvió en cierta semana.

1.5 Si $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ obtener al menos cuatro colecciones de subconjuntos de Ω que correspondan a cuatro sigma-álgebras.

1.6 Determinar el espacio muestral para los siguientes experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda tres veces bajo el supuesto de que la moneda no está cargada.
b) Los posibles resultados que el equipo de fútbol A podría obtener al jugar dos partidos seguidos.
c) El número de frutos por árbol de naranjo que puedan recogerse en época de cosecha en la finca de don Pedro.
d) Tiempo de duración de un electrodoméstico sin dañarse.
e) Género de la primera persona que entre al restaurante B el siguiente lunes.

1.7 Determinar en el punto 1.6 los espacios muestrales que resulten discretos.

1.8 Si el espacio muestral correspondiente al experimento de degustar un nuevo producto por dos personas diferentes es:
$\Omega = \{ss, sn, ns, nn\}$ donde s : sí gusto, n :no gusto

a) Determinar un $\sigma -$ álgebra sobre Ω.

b) Determinar los siguientes eventos, para los cuales:
  a) A: por lo menos a las dos personas les haya gustado.
  b) B: como máximo a las dos personas no les haya gustado.
  c) C: por lo menos a una persona le haya gustado.
  d) D: a lo más a una persona no le haya gustado.

c) Usando equiprobabilidad, calcular:
  a) $P(A)$
  b) $P(A \cup B)$
  c) $P(D^c)$
  d) $P((A-B) \cap (D \cup C))$

1.9 Un almacén de distribución de productos agropecuarios recibe sus insumos de tres diferentes proveedores así: El 60% del proveedor B1, el 30% del proveedor B2 y el 10% del proveedor B3. Si el 95% de los insumos que provienen de B1 resulta efectivo, el 80% de los que provienen de B2 resulta efectivo y el 65% de los que provienen de B3 también resulta efectivo. ¿Cuál es la probabilidad de que cualquier insumo recibido por el almacén no resulte efectivo?. Determinar la probabilidad de que un insumo que haya resultado efectivo provenga del proveedor B3.

1.10 Sean A y B eventos tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.1$.

Calcular: $P(A \cup B)$, $P(A/B)$, $P(A/B^c)$, $P(A^c / A \cup B)$ y $P(A \cap B / A \cup B)$.

1.11 Se lanza una moneda corriente tres veces.

Determinar el espacio muestral y un sigma álgebra sobre dicho espacio muestral.

Si se definen los siguientes eventos:

E : a lo más salga una cara en los tres lanzamientos de la moneda.
F : por lo menos salgan dos sellos en los tres lanzamientos de la moneda.

Determinar los siguientes eventos:

a) $E \cup F$
b) $E \cap F$
c) E^c
d) $E - F$

1.12 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ y la medida de probabilidad definida por,

$$P(\{n\}) = p_n = \frac{1}{e^2 - 1}\left(\frac{2^n}{n!}\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Calcular la probabilidad de los eventos

a) $E = \{1, 3, 5\}$

b) $E = \{1, 3, 5, 7, ...\}$

c) $E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

2

VARIABLES ALEATORIAS REALES

Con frecuencia hay interés por los valores numéricos que se puedan deducir de un experimento aleatorio, generalmente dichos valores corresponden a los de una variable aleatoria. El espíritu de las variables aleatorias es el de transformar los elementos de un espacio de probabilidad en números reales. En este capítulo se presentan los conceptos de variable aleatoria real, función de probabilidad, distribución de probabilidad, valor esperado, varianza, desviación estándar y momentos para variables aleatorias tanto discretas como continuas.

2.1 Concepto de variable aleatoria

En este apartado se define las variables aleatorias reales y se presentan algunos ejemplos. Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, donde Ω es el espacio muestral o conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio, $\Im$ es un $\sigma-$álgebra o familia de subconjuntos del espacio muestral y P una medida de probabilidad definida sobre $\Im$.

Seg¼n con Shao (1999), una variable aleatoria real es una aplicación

$$X : \Omega \rightarrow R$$

Tal que para todo evento E en el $\sigma-$álgebra de Borel se tiene que

$$X^{-1}(E) \in \Im$$

En este contexto, la variable aleatoria X es una función que tiene la propiedad de ser una función medible. En los ejemplos que se proporcionarán a lo largo del capítulo se considerará el sigma álgebra conformada por el conjunto de partes del espacio muestral.

Ejemplo 2.1 Considerar los resultados posibles al intentar establecer si el jugador R convertirá o no el lanzamiento que hará desde el punto de penalización en un partido de fútbol. El espacio muestral estará conformado por dos resultados posibles: $c =$ convierte, $n =$ no convierte; es decir,

$$\Omega = \{c, n\}.$$

Se define la siguiente variable aleatoria:

$$\begin{aligned} X &: \Omega \to R \\ c &\to 1 \\ n &\to 0 . \end{aligned}$$

En este caso se tiene que $X(n) = 0$ y $X(c) = 1$, X es una variable aleatoria cuyo rango es un conjunto finito dado por $R_X = \{0,1\}$. En este contexto R_X denota el rango de la variable aleatoria mencionada.

Ejemplo 2.2 Para el espacio muestral constituido por los siguientes resultados:

$$\Omega = \{dd, dn, nd, nn\}.$$

Donde d : artículo defectuoso, n : artículo no defectuoso, se define la siguiente variable aleatoria,

$$X : \Omega \to R .$$

X : número de artículos defectuosos en cada resultado de Ω.

$$X(dd) = 2 .$$

$$X(dn) = 1 = X(nd) .$$

$$X(nn) = 0 .$$

La variable X toma los valores enteros 0, 1, 2. Es decir, $R_X = \{0,1,2\}$.

2.2 Variable aleatoria discreta

Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio muestral Ω y R_X su rango en el conjunto de los números reales R. Si R_X es un conjunto contable (discreto), entonces la variable aleatoria X se denomina variable aleatoria discreta. El rango de una variable aleatoria discreta puede ser un conjunto finito o infinito contable como se indica a continuación:

i) $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

ii) $R_X = \{x_1, x_2, ..., ..\}$.

Si $(\Omega, \Im, P)$ es el espacio muestral de referencia sobre el cual se define la variable aleatoria X y (R, β, P_X) es el espacio de probabilidad inducido por la variable aleatoria X donde β es el $\sigma -$álgebra de Borel, entonces se tiene que:

$$P_X(\{x_i\}) = P(X^{-1}\{x_i\}).$$

Sea X una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y con valores en el espacio medible (R, β, P_X). Si se define,

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \text{ con } B \in \beta$$

Entonces

$$P_X(B) = P(\{X \in B\}) \text{ para todo } B \in \beta$$

Se puede verificar que P_X satisface las condiciones que definen una medida de probabilidad.

2.2.1 *Función de probabilidad*

Sea X una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y sea R_X su rango (recorrido), para cada $x \in R$, sea

$$f(x) = P_X(\{x\})$$

Entonces a la función f se la denomina la función de probabilidad $(f.p.)$ de la variable aleatoria X.

Al conjunto $\{(x, f(x)) : x \in R\}$ se le llama la gráfica de la función de probabilidad de X, la cual se puede representar en un plano cartesiano o mediante una tabla de valores tal como se indica en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Función de probabilidad

X	x_1	x_2	...	x_n
$f(x) = P(X = x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

La función de probabilidad f cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f(x) \geq 0$.

ii) $\sum_{x_i \in R_X} f(x_i) = 1$.

2.2.2 *Función de distribución de probabilidad*

Sea X una variable aleatoria real. La función F_X definida sobre el conjunto de los números reales R por medio de

$$F_X(x) = P_X\big((-\infty, x]\big) = P\left(X \leq x\right)$$

Se llama la función de distribución de la variable aleatoria X o distribución acumulativa de X, si no hay lugar a confusiones la función de distribución de la variable aleatoria X se denota simplemente con F.

Ejemplo 2.3 Se lanza una moneda tres veces y se observa el número de caras (c) en cada uno de los posibles resultados. Determinar la función de probabilidad y la distribución de probabilidad.

Para obtener el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio se puede utilizar un diagrama de árbol como se muestra en la Figura 2.1. En este ejemplo, el espacio muestral está conformado por 8 resultados posibles, seg¼n se indica a continuación:

$$\Omega = \{ccc,\ ccs,\ csc,\ css,\ scc,\ scs,\ ssc,\ sss\}$$

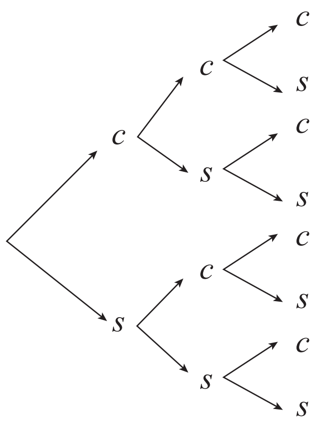

Figura 2.1. Diagrama de árbol

Si se define la variable aleatoria X como el número de caras en cada uno de los posibles resultados del espacio muestral, entonces,

X : Número de caras en cada uno de los posibles resultados

$X(ccc) = 3$

$X(ccs) = 2 = X(csc) = X(scc)$

$X(ssc) = 1 = X(scs) = X(css)$

$X(sss) = 0$

Así X es una variable aleatoria discreta porque solo toma los valores enteros 0, 1, 2, 3. Es decir,

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

El rango de la variable es $R_X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3\}$

Ahora,

$$f(x_1) = f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{8}$$

$$f(x_2) = f(1) = P(X = 1) = \frac{3}{8}$$

$$f(x_3) = f(2) = P(X = 2) = \frac{3}{8}$$

$$f(x_4) = f(3) = P(X = 3) = \frac{1}{8}$$

Cada $f(x_i) > 0$

$$\sum_{i=1}^{4} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

La función de probabilidad está dada en la Tabla 2.2, su representación gráfica se indica en la Figura 2.2.

Tabla 2.2. Función de probabilidad de la variable *X*

X	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

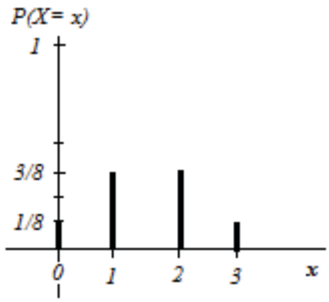

Figura 2.2. Representación gráfica de la función de probabilidad

La distribución de probabilidad se presenta en la Tabla 2.3 y su representación gráfica se indica en la Figura 2.3.

Tabla 2.3. Distribución de la variable aleatoria *X*

X	0	1	2	3
$F(x) = P(X \le x)$	1/8	4/8	7/8	1

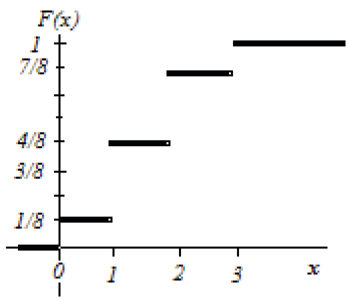

Figura 2.3. Representación gráfica de la función de distribución.

Con base en las anteriores tablas, se pueden calcular las siguientes probabilidades:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$P(X>2)=P(X=3)=\frac{1}{8}$$

$$P(X>0)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8} \quad \text{o}$$

$$P(X>0)=1-P(X\leq 0)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

2.3 Variable aleatoria continua

En este apartado se definen las variables aleatorias continuas y se especifican su función de densidad de probabilidad y su función de distribución. Sea X una variable aleatoria definida sobre un espacio muestral Ω y R_X su rango en R. Si R_X es un conjunto no contable (infinito no contable), entonces la variable aleatoria X puede ser una variable aleatoria continua. Intuitivamente el rango de una variable aleatoria continua corresponde a un intervalo.

2.3.1 *Función de densidad de probabilidad*

Una función real f que satisface las dos condiciones siguientes:

i) $f(x)\geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

se denomina una función de densidad de probabilidad $(f.d.p.)$ para la variable aleatoria continua X.

Sea X una variable aleatoria tal que para todo evento $B\in \beta$ se cumple que,

$$P_X(B)=\int_B f(x)dx$$

Para alguna función de densidad f, entonces la variable aleatoria X se llama una variable aleatoria de tipo continua o una variable aleatoria continua. Es de señalar que B es un conjunto Boreliano y la integral sobre B es una integral de Lebesgue (Shao, 1999).

2.3.2 *Variable aleatoria absolutamente continua*

Sea X una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$. Se dice que X es absolutamente continua, si y solo si, existe una función real no negativa e integrable f_X, tal que para todo $x \in R$, se satisface:

$$F_X(x) = P_X\left(\left(-\infty, x\right]\right) = P\left(X \leq x\right) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La función f_X se denomina función de densidad de probabilidad $(f.d.p.)$ de la variable aleatoria X. A la función F_X se le llama función de distribución de la variable aleatoria X o función de distribución acumulativa de probabilidad $(f.d.c.)$.

Ejemplo 2.4. Analizar si la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

a) Es una función de densidad para la variable aleatoria X, *b)* de ser así, determinar la función de distribución para X.

Solución a) para valores de x fuera del intervalo [0,1] la función vale cero y para valores de x en el intervalo [0,1] se trabaja con,

$$f(x) = 3x^2$$

En la Tabla 2.4 se presentan algunos valores de la función $f(x)$ y en la Figura 2.4 se muestra la representación gráfica de la mencionada función.

Tabla 2.4. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria X

x	0	0.2	0.5	1	-2	-1	2	2.5
$f(x)$	0	0.12	0.75	3	0	0	0	0

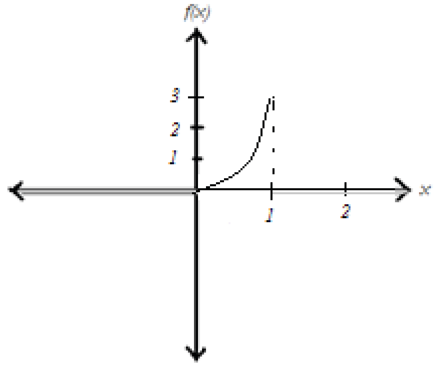

Figura 2.4. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X*

De la definición de la función y de la Figura 2.4, se ve que $f(x) \geq 0$.

Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{1} 3x^2 dx + \int_{1}^{\infty} 0dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = x^3\Big|_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

En conclusión, $f(x)$ s² es una función de densidad para la variable aleatoria X.

b) La función de distribución para X es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ x^3 & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función de distribución para la variable aleatoria X se indica en la Figura 2.5.

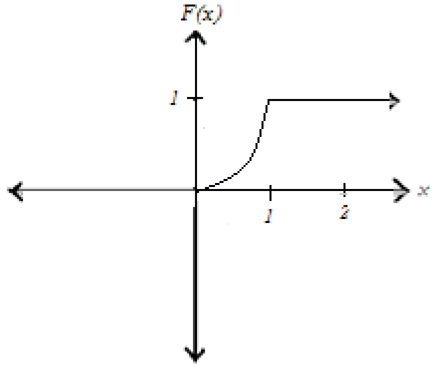

Figura 2.5. Función de distribución para la variable aleatoria *X*.

2.3.3 *Propiedades de la función de distribución de probabilidad*

Sea X una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, la función de distribución F_X satisface las siguientes condiciones:

i) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ para todo $x \in R$.

ii) Si $x_1 \leq x_2$ entonces $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

iii) $F_X(x^+) = \lim\limits_{a \to 0^+} F_X(x+a) = F_X(x)$.

iv) $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

v) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$.

2.4 Esperanza matemática y varianza de una variable aleatoria

Los siguientes conceptos referentes a la esperanza matemática y la varianza de una variable aleatoria son adoptados con base en lo expuesto Lindgren (1993), Shao (1999) y Burbano (2014).

Sea X una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, entonces:

i) Si X es una variable aleatoria discreta con rango $R_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ y f su función de probabilidad entonces, el valor esperado de X está dado por,

$$\mu = E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

Siempre y cuando la anterior suma exista.

ii) Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f_X entonces el valor esperado de X o media de la variable aletoria está dado por,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Siempre y cuando la anterior integral exista.

2.4.1 *Propiedades de la esperanza matemática*

Si X es una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, algunas propiedades de la esperanza matemática son:

i) Para cualquier $a \in R$, entonces $E(a) = a$.

ii) Para cualquier $a \in R$, entonces $E(aX) = aE(X)$.

iii) $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Como consecuencia de la propiedad *iii),* se tiene:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Siendo X, Y variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad.

Si X es una variable aleatoria real definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$, entonces la varianza de X se denota y define por,

$$Var(X) = E\left(X - E(X)\right)^2.$$

Siempre que el valor esperado de X exista. Al número,

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

se le llama la desviación estándar de la variable aleatoria X .

2.4.2 *Propiedades de la varianza*

Entre las propiedades de la varianza de la variable aleatoria X están:

i) Para cualquier $a \in R$, entonces $Var(a) = 0$.

ii) Para cualquier $a \in R$, entonces $Var(aX) = a^2 Var(X)$.

iii) $Var(X) \geq 0$.

iv) Para cualquier $a \in R$, entonces $Var(a + X) = Var(X)$.

v) $Var(X) = 0,$ si y sólo si, $P(X = E(X)) = 1$

vi) Si X es una variable aleatoria tal que $E(X)$ existe, entonces

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

Ejemplo 2.5 Para la variable aleatoria discreta asociada al experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces y de observar el número de caras en cada uno de los posibles resultados, como se indicó en el ejemplo *2.3.,* la función de probabilidad se indica en la Tabla *2.5.*

Tabla 2.5. Función de probabilidad

X	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Como el valor esperado de la variable aleatoria X está dado por:

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

entonces,

$$\mu = E(X) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Para determinar la varianza, inicialmente se calcula:

$$E(X^2) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 P(X = x_i)$$

$$E(X^2) = 0^2\left(\frac{1}{8}\right) + 1^2\left(\frac{3}{8}\right) + 2^2\left(\frac{3}{8}\right) + 3^2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{24}{8} = 3$$

Como

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

$$Var(X) = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

La desviación estándar es:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

Ejemplo 2.6. Para la variable aleatoria continua del ejemplo 2.4, se tiene que la función expresada por,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & si\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

es una función de densidad para la variable aleatoria X. Calcular su $E(X)$, $Var(X)$ y desviación estándar.

El valor esperado de la variable aleatoria X o media de la variable aleatoria es,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Entonces,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{1} xf(x)dx + \int_{1}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{0} x(0)dx + \int_{0}^{1} x(3x^2)dx + \int_{1}^{\infty} x(0)dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{1} 3x^3 dx = 3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$

$$E(X)=3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\left[3\frac{1^4}{4}-3\frac{0^4}{4}\right]=\frac{3}{4}=0.75$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{0}x^2(0)dx+\int_{0}^{1}x^2(3x^2)dx+\int_{1}^{\infty}x^2(0)dx$$

$$E(X^2)=\int_{0}^{1}3x^4dx=3\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\left[3\frac{1^5}{5}-3\frac{0^5}{5}\right]=\frac{3}{5}=0.6$$

La varianza de X está dada por:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.6-0.75^2=0.6-0.5625=0.0375$$

Desviación estándar de X es:

$$\sigma_X=\sqrt{0.0375}\cong 0.1936$$

Cuando X es una variable aleatoria continua, ella toma cualquier valor en un intervalo de números reales; es decir "su rango es un subconjunto no numerable de números reales". En la práctica algunos ejemplos de variables aleatorias reales podrían ser los siguientes:

a) X : la duración de un bombillo elegido al azar de un determinado lote, X puede tomar valores en $[0,+\infty)$.

b) X : la estatura en metros de una persona escogida al azar en el colegio A, X puede tomar valores en el intervalo [1.2, 1.9].

c) X : el peso en gramos de un objeto tomado al azar; X podría tomar valores en el intervalo [0.1, 15].

d) X : longitud en centímetros de un tallo elegido al azar en un jardín, X podría tomar valores en [20, 50].

Es conveniente señalar que si $f(x)$ es una función de densidad para la variable aleatoria X, entonces la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores en un intervalo $[a,b]$ está dada por:

$$P(a\le X\le b)=P(a<X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx\ .$$

Ejemplo 2.7 Para la variable aleatoria continua considerada en el ejemplo 2.6., se quiere calcular las siguientes probabilidades: $P(0 \leq X \leq 0.5)$, $P(-3 \leq X \leq 0.2)$.

En efecto,

$$P(0 \leq X \leq 0.5) = \int_0^{0.5} f(x)dx = \int_0^{0.5} 3x^2 dx = x^3\Big|_0^{0.5} = (0.5)^3 - (0)^3 = 0.125$$

$$P(-3 \leq X \leq 0.2) = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_0^{0.2} f(x)dx = \int_{-3}^{0} 0dx + \int_0^{0.2} 3x^2 dx = x^3\Big|_0^{0.2}$$

$$P(-3 \leq X \leq 0.2) = (0.2)^3 - (0)^3 = 0.008\,.$$

2.5 Momentos de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria real. El r-ésimo momento central de X alrededor de cero, se denota y define así:

$$\mu_r' = E(X^r)$$

Siempre y cuando el valor esperado exista.

Sea X una variable aleatoria real cuyo valor esperado existe. El r-ésimo momento central de X alrededor de $E(X)$, se denota y define así:

$$\mu_r = E((X - E(X))^r)$$

Siempre y cuando el valor esperado exista.

En concordancia con Burbano *et al*. (2014), para el caso discreto el r-ésimo momento central de X alrededor de su valor esperado $E(X)$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mu_r = E((X - E(X))^r) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^r P(X = x)$$

Además, para el caso continuo es,

$$\mu_r = E((X - E(X))^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f_X(x)dx$$

De acuerdo con Abramowitz y Stegun (1972), el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis se definen a través de las siguientes expresiones, respectivamente,

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}} = E(X - \mu)^3 / \sigma^3$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = E(X-\mu)^4/\sigma^4$$

Ejemplo 2.8 Para la variable aleatoria X discreta considerada en el ejemplo 2.5, el coeficiente de asimetría se obtiene realizando el siguiente procedimiento,

$$E(X-\mu)^3 = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^3 f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^3 P(X=x_i)$$

$$E(X-\mu)^3 = \left(0-\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)+\left(1-\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right)+\left(2-\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{3}{8}\right)+\left(3-\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X-\mu)^3 = \left(\frac{-27}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{-1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X-\mu)^3 = \frac{-27}{64}-\frac{3}{64}+\frac{3}{64}+\frac{27}{64}=0$$

Como $\sigma_X = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$\alpha_3 = \frac{E(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{4}}^{\,3}} = 0$$

El resultado anterior indica que el coeficiente de asimetría de la variable aleatoria X es igual a cero.

Ejemplo 2.9 Para la variable aleatoria X discreta considerada en el ejemplo 2.5, el coeficiente de curtosis se obtiene mediante el siguiente conjunto de pasos,

$$E(X-\mu)^4 = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^4 f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} (x_i-\mu)^4 P(X=x_i)$$

$$E(X-\mu)^4 = \left(0-\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{1}{8}\right)+\left(1-\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{3}{8}\right)+\left(2-\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{3}{8}\right)+\left(3-\frac{3}{2}\right)^4\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X-\mu)^4 = \left(\frac{81}{16}\right)\left(\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}\right)\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{81}{16}\right)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$E(X-\mu)^4 = \frac{81}{128}+\frac{3}{128}+\frac{3}{128}+\frac{81}{128}=\frac{168}{128}$$

Como $\sigma_X = \sqrt{\frac{3}{4}}$

$$\alpha_4 = \frac{E(X-\mu)^4}{\sigma^4} = \frac{\frac{168}{128}}{\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^4} = \frac{\frac{168}{128}}{\frac{9}{16}} = \frac{\frac{168}{128}}{\frac{72}{128}} = \frac{168}{72} \cong 2.6666$$

El resultado anterior indica que el coeficiente de curtosis de la variable aleatoria X es igual a 2.6666 aproximadamente.

Ejemplo 2.10 En el siguiente caso se requiere: *a)* determinar si la función dada corresponde a una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X, b)* de ser así calcular su valor esperado y su varianza, *c)* determinar su función de distribución de probabilidad, *d)* determinar las probabilidades $P(X < 2)$ y $P(X > 1.5)$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) En la Tabla 2.6 se presentan algunos valores de la función $f(x)$ y en la Figura 2.6 se muestra la representación gráfica de la mencionada función.

Tabla 2.6. Valores de la función *f(x)*

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	0	1	0.367	0.1356	0.049	0.018

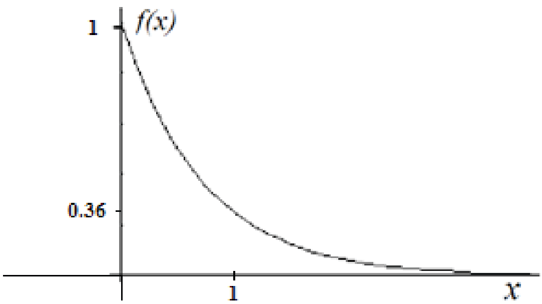

Figura 2.6. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X*

De la definición de la función y de la Figura 2.6, se ve que $f(x) \geq 0$. Adicionalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(-e^{-b}\right) - \left(-e^{-0}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0 + 1 = 1$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

En conclusión, $f(x)$ si es una función de densidad para la variable aleatoria X.

b) La función de distribución para X es la siguiente:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 - e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función de distribución para la variable aleatoria X se indica en la Figura 2.7

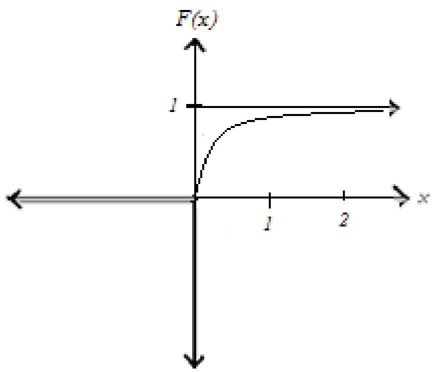

Figura 2.7. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria X

c) El valor esperado de la variable aleatoria X es,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Entonces,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx+\int_{0}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0} x(0)dx+\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx$$

Ahora integrando por partes, resulta:

$$E(X)=\int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(x(-e^{-x})-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{b}$$

$$\mu=E(X)=\lim_{b\to\infty}\left(b(-e^{-b})-e^{-b}\right)-\left(0(-e^{-0})-e^{-0}\right)=1$$

Luego,

$$\mu=E(X)=1$$

Adicionalmente,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx+\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{0} x^2e^{-x}dx$$

Integrando dos veces por partes, se tiene,

$$E(X^2)=\int_{0}^{\infty} x^2e^{-x}dx=\lim_{b\to\infty}\left(x^2(-e^{-x})-2xe^{-x}-2e^{-x}\right)\Big|_{0}^{b}$$

$$E(X^2)=\lim_{b\to\infty}\left(b^2(-e^{-b})-2be^{-b}-2e^{-b}\right)-\left(0^2(-e^{-0})-2(0)e^{-0}-2e^{-0}\right)=2$$

La varianza de X está dada por:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-(1)^2=2-1=1$$

Desviación estándar de X es,

$$\sigma_X=\sqrt{1}=1$$

d) A continuación se calcularán las probabilidades siguientes: *P(X < 2)* y *P(X > 1.5)*.

$$P(X > 1.5) = \int_{1.5}^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \to \infty} \left(-e^{-x}\right)\Big|_{1.5}^{b} = \lim_{b \to \infty} \left(-e^{-b}\right) - \left(-e^{-1.5}\right) = e^{-1.5}$$

En consecuencia,

$$P(X > 1.5) = e^{-1.5} = 0.2231$$

$$P(X < 2) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$P(X < 2) = \int_{-\infty}^{0} (0)dx + \int_{0}^{2} e^{-x} dx$$

$$P(X < 2) = \int_{0}^{2} e^{-x} dx = \left(-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{2} = \left(-e^{-2}\right) - \left(-e^{-0}\right) = 1 - e^{-2}$$

Por lo tanto,

$$P(X < 2) = 1 - e^{-2} \cong 0.8646$$

2.6 Función generadora de momentos

Sea X una variable aleatoria tal que $E(e^{tX})$ es finito para todo $t \in (-\alpha, \alpha)$ con $\alpha \in R^{+}$. Se define la función generadora de momentos de X así (Blanco, 2004):

$$m_X(t) = E(e^{tX}) \text{ con } t \in (-\alpha, \alpha)$$

Si X es una variable aleatoria discreta tal que

i) $R_X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

Entonces

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{tx_i} P(X = x_i)$$

Si X es una variable aleatoria discreta tal que

ii) $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$

Entonces

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} P(X = x_i)$$

Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad f, entonces

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

La existencia de la función generadora de momentos de una variable aleatoria X garantiza la existencia de todos los momentos de orden r alrededor de cero de la variable X. Además si la función generadora de momentos existe, entonces es diferenciable en una vecindad del origen (en este caso de cero) y se cumple que:

$$\frac{d^r}{dt^r} m_X(t)\Big|_{t=0} = E(X^r)$$

Si X es una variable aleatoria cuya función generadora de momentos $m_X(.)$ existe, entonces, existe $a \in R^+$ tal que,

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X^i)\frac{t^i}{i!} \text{ para todo } t \in (-a, a)$$

Además,

$$\frac{d^r}{dt^r} m_X(t)\Big|_{t=0} = E(X^r)$$

Si X, Y son variables aleatorias cuyas funciones generadoras de momentos $m_X(.)$, $m_Y(.)$ existen y además,

$$m_X(t) = m_Y(t); \text{ para todo } t,$$

entonces X, Y tienen la misma distribución.

Ejemplo 2.11 Sea X una variable aleatoria cuyo rango es $R_X = \{0,1\}$, con función de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} p & si\ x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Para este caso, se tiene que $f_X(1) = P(X = 1) = p$ y $f_X(0) = P(X = 0) = 1 - p$ corresponden a las probabilidades de éxito y de fracaso en el modelo de Bernoulli (se tratará en un capítulo posterior).

La función generadora de momentos de X es,

$$m_X(t) = \sum_{i=1}^{2} e^{tx_i} P(X = x_i)$$

$$m_X(t) = e^{t(0)}P(X=0) + e^{t(1)}P(X=1)$$

$$m_X(t) = 1 - p + pe^t$$

El valor esperado se puede obtener de la siguiente manera:

$$E(X) = \frac{d}{dt} m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(1 - p + pe^t\right)\Big|_{t=0} = \left(pe^t\right)\Big|_{t=0} = pe^0 = p$$

por lo tanto

$$E(X) = p$$

También se tiene que:

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\left(1 - p + pe^t\right)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(pe^t\right)\Big|_{t=0} = pe^0 = p \ .$$

Como

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

entonces,

$$Var(X) = p(1-p)$$

Ejemplo 2.12 Sea X una variable aleatoria cuyo rango es $R_X = \{0,1,2,...,n\}$, $n \in Z^+$ cuya función de probabilidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1\text{-}p)^{n-x} & si\ x = 0,1,...,n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para este caso, se tiene que p y $1-p$ corresponden a las probabilidades de éxito y de fracaso en el modelo de Binomial el cual se tratará en el capítulo posterior.

La función generadora de momentos de X es:

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{tx_i} P(X = x_i) = \sum_{i=0}^{n} e^{t(i)} P(X = i)$$

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{n} e^{t(i)} \frac{n!}{i!(n-i)!} p^i (1\text{-}p)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} e^{t(i)} \binom{n}{i} p^i (1\text{-}p)^{n-i}$$

$$m_X(t) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(pe^t\right)^i (1\text{-}p)^{n-i}$$

$$m_X(t) = \left(pe^t + 1 - p\right)^n$$

El valor esperado se puede obtener de la siguiente forma:

$$E(X) = \frac{d}{dt} m_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(pe^t + 1 - p\right)^n \Big|_{t=0} = n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1}\left(pe^t\right)\Big|_{t=0}$$

$$E(X) = n\left(pe^0 + 1 - p\right)^{n-1}\left(pe^0\right)\Big|_{t=0} = n(1)pe^0 = np$$

Por lo tanto

$$E(X) = np$$

También se tiene que:

$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2} m_X(t) \Big|_{t=0} = \frac{d^2}{dt^2}\left(pe^t + 1 - p\right)^n \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t \Big|_{t=0}$$

$$E(X^2) = \left(n(n-1)\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-2} pe^t pe^t + n\left(pe^t + 1 - p\right)^{n-1} pe^t\right)_{t=0}$$

$$E(X^2) = \left(n(n-1)\left(pe^0 + 1 - p\right)^{n-2} pe^0 pe^0 + n\left(pe^0 + 1 - p\right)^{n-1} pe^0\right)$$

$$E(X^2) = n(n-1)(1)p^2 + n(1)p = n^2p^2 - np^2 + np$$

Como

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2 = np(1-p)$$

entonces,

$$Var(X) = np(1-p)$$

Ejemplo 2.13 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función generadora de momentos es

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{tx}(0)dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$m_X(t) = \int_{0}^{\infty} e^{tx}e^{-x}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x(1-t)}dx = \frac{-1}{1-t} e^{-x(1-t)} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$m_X(t)=\frac{-1}{1-t}e^{-x(1-t)}\Big|_0^\infty=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{1-t}e^{-x(1-t)}\right)\Big|_0^b=\frac{1}{1-t}$$

$$m_X(t)=\frac{1}{1-t}\quad \text{si } t<1\ .$$

El valor esperado se puede obtener de la siguiente forma:

$$E(X)=\frac{d}{dt}m_X(t)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{t=0}=\frac{1}{(1-t)^2}\Big|_{t=0}=1$$

Por lo tanto

$$E(X)=1$$

También se tiene que,

$$E(X^2)=\frac{d^2}{dt^2}m_X(t)\Big|_{t=0}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{1-t}\right)\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)\Big|_{t=0}=\frac{2}{(1-t)^3}=2\ .$$

Como

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-[1]^2=1$$

entonces,

$$Var(X)=1$$

Estos resultados concuerdan con los valores de la esperanza y la varianza determinados en el ejemplo 2.10

Ejemplo 2.14 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & si\ a\le x\le b\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

La función generadora de momentos es:

$$m_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}e^{tx}(0)dx+\int_a^b e^{tx}f(x)dx+\int_b^\infty e^{tx}(0)dx$$

$$m_X(t)=\int_a^b e^{tx}\left(\frac{1}{b-a}\right)dx=\frac{1}{(b-a)t}e^{tx}\Big|_a^b=\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$$

$$m_X(t)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$$

La anterior expresión requiere que $t \neq 0$, por lo tanto la función generadora de momentos no existe.

Es necesario indicar que si X, Y son variables aleatorias independientes y $m_X(.)$, $m_Y(.)$ sus correspondientes funciones generadoras de momentos, entonces,

$$m_{X+Y}(t) = m_X(t)m_Y(t), \text{ para todo t.}$$

En efecto,

$$m_{X+Y}(t) = E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = m_X(t)m_Y(t), \text{ para todo t.}$$

2.7 Función característica

Sea X una variable aleatoria. La función característica de la variable X, se denota y se define de la siguiente forma,

$$\Psi_X : R \longrightarrow C$$

Tal que

$$\Psi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos(tX)) + iE(sen(tX)) \text{ para } i = \sqrt{-1}$$

Ejemplo 2.15 Sea X una variable aleatoria con rango $R_X = \{0,1\}$ y función de probabilidad dada por,

$$P(X = 0) = \frac{1}{2}$$
$$P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

Entonces la función característica se obtiene del siguiente modo,

$$\Psi_X(t) = E(e^{itX}) = \frac{1}{2}(\cos(0) + \cos(t)) + \frac{1}{2}i(sen(0) + sen(t))$$

$$\Psi_X(t) = E(e^{itX}) = \frac{1}{2}(1 + \cos(t)) + \frac{1}{2}isen(t)$$

2.8 Cuantiles y mediana de una variable aleatoria

Sea $F(x) = P(X \leq x)$ una función de distribución de una variable aleatoria X y sea $q \in [0,1]$ si existe un número real $x_q \in R$ tal que,

$$F(x_q) = q$$

Entonces x_q se denomina el cuantil q de la variable aleatoria X.

Se define la mediana de X (o de F) como el punto θ para el cual se cumple que:

$$P(X \leq \theta) = P(X \geq \theta) \geq \frac{1}{2}$$

La igualdad solo se cumple cuando F es una función de distribución con densidad continua y en este caso la mediana es única.

Al conjunto de las funciones de distribución absolutamente continuas con mediana cero, se lo denota por (Hettmansperger, 1984):

$$\Omega_0 = \{F : F \ \textit{absolutamente continua y } F(0) = 1/2 \textit{ únicamente}\}$$

Ejemplo 2.16 Sea X una variable aleatoria con rango $R_X = \{0,1\}$ y función de probabilidad dada por,

$$f(0) = f(1) = \tfrac{1}{2}$$

La función de distribución de la variable aleatoria X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Debido a que existen infinidad de valores $x_p = \theta$ que satisfacen la siguiente igualdad:

$$F_X(x_p) = P(X \leq x_p) = P(X \geq x_p) = \frac{1}{2}$$

Se concluye que hay infinidad de medianas, por ejemplo $x_p = \theta = \frac{1}{3}$, $x_p = \theta = \frac{3}{4}$ son algunas medianas de la variable X.

Ejemplo 2.17 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & si \ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de distribución de la variable aleatoria X está dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si -1} \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

El valor $x_p = \mathrm{q} = 0$ satisface la siguiente igualdad:

$$F_X(x_p) = P(X \le x_p) = P(X \ge x_p) = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $x_p = \mathrm{q} = 0$ es la mediana de la variable X

Actividades para el estudio independiente capítulo 2

2.1 Para el espacio muestral constituido por los siguientes resultados: $n =$ no, $s =$ sí, como la posible respuesta que podría dar una persona escogida aleatoriamente a la pregunta, ¿es usted un trabajador del sector público?

$$\Omega = \{s, n\}$$

Se define la siguiente variable aleatoria:

$$X : \Omega \to R$$

$$n \to 0$$

$$s \to 1\ .$$

Determinar *a)* el rango de la variables *b)* la función de probabilidad, *c)* la distribución de probabilidad, *d)* el valor esperado, *e)* la varianza, *f)* la desviación estándar de la variable aleatoria y *g)* calcular la probabilidad: $P(X < 1)$, $P(X > 0)$, $P(X = 1)$.

2.2 Se seleccionan aleatoriamente dos artículos de un proceso productivo para analizar si son defectuosos o no defectuosos y se obtiene el siguiente espacio muestral, $\Omega = \{dd, dn, nd, nn\}$, donde d: artículo defectuoso, n: artículo no defectuoso. Se define la siguiente variable aleatoria,

$$X : \Omega \to R$$

X : número de artículos defectuosos en cada resultado de Ω.

Determinar:
a) La función de probabilidad
b) La distribución de probabilidad
c) El valor esperado
d) La varianza
e) La desviación estándar de la variable aleatoria
f) Calcular las siguientes probabilidades: $P(X \leq 1)$ $P(X > 0)$ y $P(X = 1)$

2.3 Analizar si la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x & si\ x \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$$

a) Es una función de densidad para la variable aleatoria X

b) De ser así, determinar la función de distribución para X
c) Determinar su valor esperado y su varianza
d) Calcular $P(0 \leq X \leq 1.5)$, $P(-3 \leq X \leq 0.5)$.

2.4 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determinar:
a) El valor esperado
b) La varianza de la variable aleatoria X

Ejercicios para el capítulo 2

2.1 Para el espacio muestral conformado por los posibles resultados de lanzar una moneda tres veces, se define una variable aleatoria de la siguiente manera:

X : Número de sellos en cada uno de los posibles resultados.

a) Determinar:
   a) El rango de X.
   b) $P(X=2)$.
   c) $P(X \geq 1)$.
   d) $P(X<2)$.

b) Presentar la distribución de probabilidad de X.
c) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar.
d) Determinar la función de distribución $F_X(x)$.

2.2 Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{si } x\in[0,4] \\ 0 & \text{si } x\notin[0,4] \end{cases}$$

a) Analizar si $f(x)$ es una función de densidad para la variable aleatoria X. De ser así, calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar.
b) Determinar la función de distribución $F_X(x)$.

2.3 Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} -2e^{-2x} & \text{si } x\geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

a) Analizar si $f(x)$ es una función de densidad para la variable aleatoria X. De ser así, calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar.
b) Determinar la función de distribución $F_X(x)$.
c) Calcular $m_X(t)$.

2.4 Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por,

$$f(x)=\begin{cases} 0.2 & si\ \ -1<x\leq 0 \\ 0.2+cx & si\ \ 0<x\leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Determinar el valor de c
b) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X
c) Calcular $P(0 \leq X < 0.5)$
d) Determinar $P(X > 0.5 / X > 0.1)$
e) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar

2.5 Para una variable aleatoria X con función de probabilidad dada por,

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

a) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar.
b) Determinar la función de distribución $F_X(x)$ y construir su representación gráfica.

2.6 Sea X una variable aleatoria con función de densidad $(f.d.p.)$ dada por,

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & si\ 0 < x \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X
b) Calcular $P(-0.5 < X < 0.5)$
c) Calcular $P(|X| > 0.4)$
d) Determinar $P(X > 0.3 / X > 0.2)$
e) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar
f) Determinar la mediana

2.7 Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por,

$$f(x) = \begin{cases} x & si\ 0 < x < 1 \\ 2-x & si\ 1 \leq x < 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtener la función de distribución de la variable aleatoria X
b) Calcular $P(X < 0.7)$
c) Calcular $P(|X| > 0.6)$
d) Determinar $P(X > 0.8 / X > 0.2)$

e) Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar

f) Determinar la mediana

3

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

En este capítulo se presentan las distribuciones de probabilidad para variables aleatorias tanto discretas como continuas más frecuentes; asimismo, se proporcionan ejemplos de aplicación del modelo binomial, hipergeométrico, de Poisson y normal, entre otros; se indican el valor esperado o media de la variable aleatoria y la varianza para cada distribución y se proponen algunos ejercicios a fin de que el lector utilice los modelos de probabilidad estudiados.

3.1 Distribuciones de probabilidad de tipo discreto

En esta sección se explicitan los modelos de Bernoulli, binomial, hipergeométrico y de Poisson. Algunos de los aspectos teóricos considerados están soportados en los conceptos expuestos por autores como Bickel (1977), Papoulis (1991), Ross (1998), Freund y Miller (2000), y Marshall y Olkin (2007), entre otros.

3.1.1 *Distribución de Bernoulli*

Una variable aleatoria X tiene distribución de Bernoulli de parámetro p si su función de probabilidad es,

$$f(x) = P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0,1$$

Al parámetro p se le denomina probabilidad de éxito en una prueba de Bernoulli.

3.1.1.1 Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución de Bernoulli, entonces:

i) $E(X) = p$.

ii) $Var(X) = p(1 - p)$.

Los anteriores valores fueron obtenidos en el capítulo anterior mediante la función generadora de momentos.

3.1.2 *Distribución Binomial*

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución binomial de parámetros n y p si su función de probabilidad es

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & si\ x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Al parámetro p se le denomina probabilidad de éxito en cada una de las n pruebas de Bernoulli independientes que se han de involucrar en la definición de la variable aleatoria X, la cual corresponde al número de éxitos en las n pruebas.

3.1.2.1 Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución binomial, entonces su valor esperado o media de la variable aleatoria y su varianza están dados por,

i) $E(X) = np$.

ii) $Var(X) = np(1-p)$.

Los anteriores valores fueron obtenidos en el capítulo anterior mediante la función generadora de momentos.

3.1.2.2 Aplicaciones

Ejemplo 3.1 Una máquina produce piezas del tipo T para una clase de mueble, la probabilidad de que cualquier pieza del tipo T producida por la máquina resulte de buena calidad es 0.95, si se escoge una muestra aleatoria de 10 de dicha piezas para someterlas a control de calidad,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ocho resulten de buena calidad?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que todas resulte de buena calidad?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos ocho resulten de buena calidad?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más siete resulten de buena calidad?

e) Determinar el valor esperado y la varianza del número de piezas del tipo T de buena calidad en la muestra.

Se define la variable aleatoria como X : número de piezas del tipo T de buena calidad en la muestra de 10, los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,10.

a) Aplicando el modelo binomial con $n=10$ y $p=0.95$ resulta,

$$f(8)=P(X=8)=\binom{10}{8}(0.95)^{8}(1-0.95)^{10-8}$$

$$P(X=8)=\frac{10!}{8!(10-2)!}(0.0.6634)(0.05)^{2}=45(0.66342)(0.0025)$$

$$P(X=8)\cong 0.07463$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria resulten ocho piezas del tipo T de buena calidad es de 0.07463 o del 7.46% aproximadamente.

b)

$$f(10)=P(X=10)=\binom{10}{10}(0.95)^{10}(1-0.95)^{10-10}$$

$$P(X=10)=\frac{10!}{10!(10-10)!}(1)(0.95)^{10}(1)=1(0.5987)(1)\cong 0.5987$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria todas las piezas del tipo T resulten de buena calidad es de 0.5987 o del 59.87%.

c) Se ha de calcular,

$$P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X=8)$ y $P(X=10)$, solamente resta calcular $P(X=9)$ y reemplazar los resultados en la anterior expresión,

$$f(9)=P(X=9)=\binom{10}{9}(0.95)^{9}(1-0.95)^{10-9}$$

$$P(X=9)=\frac{10!}{9!(10-9)!}(0.95)^{9}(0.05)=10(0.63024)(0.05)\cong 0.3151$$

Luego,

$$P(X \geq 8) = 0.0746 + 0.3151 + 0.5987 = 0.9884$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria por lo menos ocho piezas del tipo T resulten de buena calidad es de 0.9884 o del 98.84%.

d) Se debe calcular,

$$P(X \leq 7) = P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = 7)$$

O de forma equivalente se usa la probabilidad del evento complementario y se calcular§ la siguiente probabilidad:

$$P(X \leq 7) = 1 - \left\{ P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \right\}$$

$$P(X \leq 7) = 1 - \left\{ 0.0746 + 0.3151 + 0.5987 \right\} = 1 - 0.9884 = 0.0116$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria a lo más siete de las piezas del tipo T resulten de buena calidad es de 0.0116 o del 1.16%.

e) El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente manera:

$$E(X) = np = 10\left(0.95\right) = 9.5$$

$$Var(X) = np(1 - p) = 10(0.95)(0.05) = 0.475$$

Ejemplo 3.2 La probabilidad de que cualquier pollo de la granja G esté bajo de peso después de ser alimentado con una ración alimentaria específica hasta la segunda semana es de 0.4, si se toma una muestra aleatoria de 15 pollos de dicha granja,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pollo de la muestra resulte bajo de peso?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los pollos de la muestra resulte bajo de peso?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos pollos resulten con bajo peso?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que todos los pollos de la muestra resulten con bajo peso?

Se define la variable aleatoria como X: número de porcinos de la granja A que pueden presentar bajo peso en la muestra de 15. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,15.

a) Aplicando el modelo binomial con $n = 15$ y $p = 0.4$ resulta,

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{15}{1}(0.4)^1(1-0.4)^{15-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{15!}{1!(15-1)!}(0.4)(0.6)^{14} = 15(0.4)(0.0007836) \cong 0.0047$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria resulte un pollo bajo de peso es de 0.0047 o del 0.47%.

b)

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{15}{0}(0.4)^0(1-0.4)^{15-0}$$

$$P(X = 0) = \frac{15!}{0!(15-0)!}(1)(0.6)^{15} = 1(1)(0.00047) \cong 0.00047$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria ninguno de los pollos resulte bajo de peso es de 0.00047 o del 0.047%.

c) Se debe calcular,

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X = 1)$ y $P(X = 0)$, solamente resta calcular $P(X = 2)$ y reemplazar los resultados en la anterior expresión,

$$f(2) = P(X = 2) = \binom{15}{2}(0.4)^2(1-0.4)^{15-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{15!}{2!(15-2)!}(0.16)(0.6)^{13} = 105(0.16)(0.0013) \cong 0.0219$$

Luego,

$$P(X \leq 2) = 0.0047 + 0.00047 + 0.0219 = 0.0693$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria a lo más dos pollos presenten bajo peso es de 0.0693 o del 6.93%.

d)

$$f(15) = P(X = 15) = \binom{15}{15}(0.4)^{15}(1-0.4)^{15-15}$$

$$P(X=15)=\frac{15!}{15!(15-15)!}(0.4)^{15}(0.6)^{0}=1(0.000001)(1)\cong 0.000001$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria todos los pollos resulten con bajo peso es de 0.000001 o del 0.0001%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente manera:

$$E(X)=np=15(0.4)=6$$

Se esperaría que en la muestra aleatoria 6 pollos resulten con bajo peso.

$$Var(X)=np(1-p)=15(0.4)(0.6)=3.6$$

3.1.3. *Distribución hipergeométrica*

Una variable aleatoria X tiene distribución hipergeométrica de parámetros n, M y N si su función de probabilidad es,

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\dbinom{M}{x}\dbinom{N-M}{n-x}}{\dbinom{\mathrm{N}}{n}} & si\ x=0,1,\ldots,n\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

En este modelo se define la variable aleatoria como X: Número de éxitos en la muestra

3.1.3.1. Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución hipergeométrica, entonces:

i) $E(X)=n\dfrac{M}{N}$

ii) $Var(X)=n\dfrac{M}{N}\dfrac{N-M}{N}\dfrac{N-n}{N-1}$

3.1.3.2 Aplicaciones

Ejemplo 3.3 En un curso de estadística hay 20 estudiantes de los cuales 8 son de la carrera de administración y 12 de la carrera de economía, si se decide escoger aleatoriamente un grupo de cinco del mencionado curso para realizar una prueba diagnóstica sobre conocimientos previos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos estudiantes de la carrera de administración?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un estudiante de la carrera de administración?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los estudiantes resulten de la carrera de economía?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres estudiantes de la carrera de administración?

e) Obtener el valor esperado e interpretar.

Se define la variable aleatoria como *X:* número de estudiantes de la carrera de administración que resultarán conformando el grupo de cinco para realizar la prueba diagnóstica sobre conocimientos previos. Los posibles valores que puede asumir la variable son: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

En este este caso, es posible aplicar el modelo hipergeométrico con:

$$N = 20\,,\; M = 8\,,\; N - M = 12\,,\; n = 5$$

a) La probabilidad de que dos estudiantes de la carrera de administración resulten en el grupo de cinco, se calcula de la siguiente forma,

$$P(X=2) = \frac{\binom{8}{2}\binom{12}{5-2}}{\binom{20}{5}} = \frac{\frac{8!}{2!(8-2)!}\,\frac{12!}{3!(12-3)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}} = \frac{28(220)}{15504} \cong 0.3973$$

La probabilidad de que en el grupo de cinco resulten dos estudiantes de la carrera de administración es de 0.3973 o del 39.73%.

b) Ahora, la probabilidad de que un solo estudiante de la carrera de administración resulte en el grupo de cinco, se obtiene de la siguiente manera,

$$P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{12}{5-1}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{8!}{1!(8-1)!}\frac{12!}{4!(12-4)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{8(495)}{15504}\cong 0.2554$$

La probabilidad de que en el grupo de cinco resulte un solo estudiante de la carrera de administración es de 0.2554 o del 25.54%.

c) Que en el grupo todos los estudiantes resulten de la carrera de economía significa que cero estudiantes de la carrera de administración conformarán el grupo de cinco, luego,

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{8}{0}\binom{12}{5-0}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{8!}{0!(8-0)!}\frac{12!}{5!(12-5)!}}{\frac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{1(792)}{15504}\cong 0.0511$$

La probabilidad de que en el grupo de cinco todos los estudiantes resulten de la carrera de economía es de 0.0511 o del 5.11%.

d) Se ha de calcular $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$.

En este caso también se puede usar la probabilidad del evento complementario a través de,

$$P(X\geq 3)=1-\{0.0511+0.2554+0.3973\}=1-0.7038=0.2962$$

La probabilidad de que en el grupo de cinco resulten por lo menos tres estudiantes de la carrera de administración es de 0.2962 o del 29.62%.

e) El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula de la siguiente manera:

$$E(X)=n\frac{M}{N}=5\left(\frac{8}{20}\right)=\frac{40}{20}=2$$

Se esperaría que dos estudiantes de la carrera de administración estuvieran en el grupo de cinco para presentar la prueba diagnóstica sobre conocimientos previos.

Ejemplo 3.4 La junta directiva de una empresa TB está conformada por 10 miembros, de los cuales 4 son mujeres, si se proyecta organizar un comité auditor conformado por 3 miembros de la junta directiva, *a)* ¿Cuál es la probabilidad de que el comité resulte conformado solo por mujeres?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el comité resulte conformado solo por hombres?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el comité resulte conformado por una mujer y dos hombres?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 mujeres resulten conformando el comité?

Se define la variable aleatoria como *X:* número de mujeres que resulten conformando el comité social.

Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2, 3.

Para este caso, se aplica el modelo hipergeométrico con:

$$N=10,\ M=4,\ N-M=6,\ n=3$$

a) Que todos los miembros del comité social resulten mujeres.

$$f(3)=P(X=3)=\frac{\binom{4}{3}\binom{6}{3-3}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{4!}{3!(4-3)!}\,\frac{6!}{0!(6-0)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}}=\frac{4(1)}{120}\cong 0.0333$$

La probabilidad de que el comité resulte conformado solo por mujeres es de 0.0333 o del 3.33%.

b) Que todos los miembros del comité social resulten hombres significa incluir cero mujeres en el comité.

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{4}{0}\binom{6}{3-0}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{4!}{0!(4-0)!}\,\frac{6!}{3!(6-3)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}}=\frac{1(20)}{120}\cong 0.1667$$

La probabilidad de que el comité resulte conformado solo por hombres es de 0.1667 o del 16.67%.

c) Que una mujer y dos hombres puedan conformar el comité social significa incluir una sola mujer en el comité.

$$f(1)=P(X=1)=\frac{\binom{4}{1}\binom{6}{3-1}}{\binom{10}{3}}=\frac{\frac{4!}{1!(4-1)!}\frac{6!}{2!(6-2)!}}{\frac{10!}{3!(10-3)!}}=\frac{4(15)}{120}=0.5$$

La probabilidad de que el comité resulte conformado por una mujer y dos hombres es de 0.5 o del 50%.

d) Se debe calcular $P(X\geq 2)=P(X=2)+P(X=3)$ o equivale a usar la probabilidad del evento complementario:

$$P(X\geq 2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$$

Debido a que en las partes *b)* y *c)* ya se han calculado las probabilidades $P(X=0)$ y $P(X=1)$, solamente se reemplazan en la anterior expresión,

$$P(X\geq 2)=1-\{0.1667+0.5\}=1-0.6667\cong 0.3333$$

La probabilidad de que por lo menos 2 mujeres resulten conformando el comité social es 0.3333 o del 33.33%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente forma:

$$E(X)=n\frac{M}{N}=3\left(\frac{4}{10}\right)=\frac{12}{10}=1.2$$

Se esperaría que una mujer estuviera conformando el comité auditor.

$$Var(X)=n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-n}{N-1}=3\frac{4}{10}\frac{6}{10}\frac{7}{9}=\frac{504}{900}=0.56$$

3.1.4 *Distribución Poisson*

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda>0$ si su función de probabilidad es

$$f(x)=P(X=x)=\begin{cases}\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} & si\ x=0,1,...\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

X: número de eventos independientes en un lapso de tiempo o por unidad de área o de volumen. El parámetro λ es el promedio de eventos independientes en el periodo de tiempo

3.1.4.1 Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución Poisson, entonces su valor esperado o media de la variable aleatoria y su varianza son:

i) $E(X) = \lambda$

ii) $Var(X) = \lambda$

3.1.4.2 Aplicaciones

En el modelo de Poisson, la variable aleatoria X representa el número de eventos aleatorios independientes que ocurren con una rapidez constante en un lapso de tiempo o en un determinado espacio. El parámetro λ corresponde al promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo o de espacio.

Con la ayuda del modelo de Poisson se puede modelar fenómenos como los siguientes:

a) X : número de llamadas telefónicas que recibe una central telefónica por hora.

b) X : número de partículas alfa emitidas por segundo por una sustancia radiactiva.

c) X : número de vehículos que llegan a un parqueadero por día.

d) X : número de accidentes en una determinada vía por mes.

e) X : número de clientes que llegan a la cola de un banco por hora para realizar alguna transacción financiera.

A continuación se proporcionan algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 3.5 El promedio de autos de la marca R que llegan a una estación de gasolina por hora para abastecerse de combustible es de 4,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que tres autos de la marca R lleguen a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más un auto de la marca R llegue a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos dos autos de la marca R lleguen a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible?

d) Obtener el valor esperado y la varianza e interpretar el valor esperado.

Se define la variable aleatoria como X: número de autos de la marca R que llegarán a estación de gasolina en la próxima hora para abastecerse de combustible. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…

a) Aplicando el modelo Poisson con $\lambda = 4$ resulta,

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{4^3}{3!} e^{-4} = \frac{64}{6}\left(0.0183\right) \cong 0.1952$$

La probabilidad de que tres autos de la marca R lleguen a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible es de 0.1952 o del 19.52% aproximadamente.

b) Se debe calcular $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{4^0}{0!} e^{-4} \cong 0.0183$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{4^1}{1!} e^{-4} = 4\left(0.0183\right) \cong 0.0732$$

Luego,

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.0183 + 0.0732 = 0.0915$$

La probabilidad de que a lo más un auto de la marca R llegue a la estación en la próxima hora para abastecerse de combustible es de 0.0915 o del 9.15%.

c) En este caso, se ha de calcular,

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + ...$$

De manera equivalente, se calcula la probabilidad del evento complementario,

$$P(X \geq 2) = 1 - \left\{P(X = 0) + P(X = 1)\right\} = 1 - \left\{0.0183 + 0.0732\right\}$$

$$P(X \geq 2) = 1 - 0.0915 = 0.9085$$

La probabilidad de que por lo menos dos autos de la marca R lleguen a dicha estación en la próxima hora para abastecerse de combustible es de 0.9085 o del 90.85%

d) El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se obtienen directamente,

$$E(X) = \lambda = 4$$
$$Var(X) = \lambda = 4$$

Se espera que cuatro autos de la marca R lleguen a la mencionada estación en la próxima hora para abastecerse de combustible

Ejemplo 3.6 En la empresa JJ, el promedio de ausencia por mes de sus trabajadores es de 2,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente mes 2 trabajadores se ausenten de la empresa JJ?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente mes por lo menos 3 trabajadores se ausenten de la empresa JJ?

c) Obtener la media o valor esperado y la varianza.

La variable aleatoria se puede definir así X: número de trabajadores que se ausentarán el próximo mes en la empresa JJ. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…

a) Aplicando el modelo Poisson con $\lambda = 2$ resulta,

$$f(2) = P(X = 2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = \frac{4}{2}(0.1353) \cong 0.2706$$

La probabilidad de que en el siguiente mes 2 trabajadores se ausenten de la empresa JJ es de 0.2706 o del 27.06%.

b) Se ha de calcular,

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + ...$$

De manera equivalente,

$$P(X \geq 3) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\}$$
$$f(0) = P(X = 0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} \cong 0.1353$$
$$f(1) = P(X = 1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 2(0.1353) \cong 0.2706$$
$$f(2) = P(X = 2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2(0.1353) \cong 0.2706$$

Luego,

$$P(X \geq 3) = 1 - \{0.1353 + 0.2706 + 0.2706\} = 1 - 0.6766 = 0.3234$$

La probabilidad de que en el siguiente mes por lo menos 3 trabajadores se ausenten de la empresa JJ es de 0.3234 o del 32.34% aproximadamente.

c) El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se obtienen directamente,

$$E(X) = \lambda = 2$$

Se espera que el próximo mes se presenten 2 ausencias en los trabajadores de la empresa JJ.

$$Var(X) = \lambda = 2$$

Es conveniente señalar aquí que el modelo binomial se puede aproximar por el modelo de Poisson cuando n es grande, p es pequeño (inferior a 0.1) y se satisface que $1 \leq \lambda = np \leq 5$

Ejemplo 3.7 El 3% de los usuarios de la entidad financiera H tienen seguro contra robo en el cajero automático, si se escogen aleatoriamente 100 usuarios de la mencionada entidad financiera ¿cuál es la probabilidad de que más de uno tenga el seguro contra robo?

En este caso, se puede definir la variable aleatoria así X : número de usuarios de la entidad financiera H que tienen el seguro contra robo en la muestra. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…, 100. Como $\lambda = np = 0.03(100) = 3$ y se cumple las condiciones para aproximar el modelo binomial al modelo de Poisson, luego:

Se ha de calcular $P(X \geq 2) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1)\}$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} \cong 0.04978$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{3^1}{1!} e^{-3} = 3(0.04978) \cong 0.14934$$

Por lo tanto,

$$P(X \geq 2) = 1 - \{0.04978 + 0.14934\} = 1 - 0.1991 = 0.8009$$

La probabilidad de que más de uno de los usuarios de la muestra tenga el seguro contra robo en el cajero automático es de 0.8009 o del 80.09%.

Ahora, si se usa el modelo binomial con $n = 100$ y $p = 0.03$ se obtiene un resultado bastante aproximado, como se verifica en seguida,

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{100}{0}(0.03)^0(1-0.03)^{100-0}$$

$$P(X=0) = \frac{100!}{0!(100-0)!}(1)(0.97)^{100} = 1(1)(0.04755) \cong 0.04755$$

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{100}{1}(0.03)^1(1-0.03)^{100-1}$$

$$P(X=1) = \frac{100!}{1!(100-1)!}(0.03)^1(0.97)^{100-1} \cong 100(0.03)(0.049)$$

$$P(X = 1) \cong 0.147$$

$$P(X \geq 2) = 1 - \{0.04755 + 0.147\} = 1 - 0.19455 \cong 0.8054$$

3.1.5 *Otras distribuciones discretas*

En este apartado, se mencionan otras distribuciones discretas de probabilidad, las cuales pueden resultar de interés para el lector. Ejemplos de aplicación de algunas de estas distribuciones se pueden consultar en: Freund y Miller (2000) sección 5.5, Ross (1998) sección 4.8 y Blanco (2004) sección 3.3.

3.1.5.1 Distribución uniforme discreta

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye de manera uniforme sobre los puntos $x_1, x_2, ..., x_N$ si su función de probabilidad es,

$$f(x_i) = P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{para } x_i = 1, 2, ..., N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El parámetro de la distribución discreta uniforme es N.

Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución discreta uniforme, entonces su valor esperado y su varianza son:

i) $E(X)=\dfrac{N+1}{2}$

ii) $Var(X)=\dfrac{N^2-1}{12}$

3.1.5.2 Distribución geométrica o de Pascal

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución Geométrica o de Pascal de parámetro p si su función de probabilidad es,

$$f(x)=P(X=x)=p(1-p)^{x-1},\ \ x=1,2,...$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución Geométrica o de Pascal, entonces:

i) $E(X)=\dfrac{1}{p}$

ii) $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

3.1.5.3 Distribución binomial negativa

Una variable aleatoria X tiene distribución binomial negativa de parámetros k y p si su función de probabilidad es,

$$f(x)=P(X=x)=\binom{x-1}{k-1}p^k(1-p)^{x-k}\ \ si\ x=k,k+1,2,...\ \ k=1,2,...$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución Binomial negativa, entonces:

i) $E(X)=\dfrac{k}{p}$

ii) $Var(X)=\dfrac{k(1-p)}{p^2}$

3.2 Distribuciones de probabilidad de tipo continuo

En esta sección se indican los modelos uniforme, normal, exponencial, lognormal, logístico, de Weibull, Laplace y Beta entre otros. Algunos de los aspectos teóricos considerados están soportados en los conceptos expuestos por autores como Bickel (1977), Papoulis (1991), Ross (1998), Freund (2000) y Marshall (2007), por citar algunos.

3.2.1 *Distribución uniforme*

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye uniformemente sobre el intervalo $[a,b]$ con $a<b$ números reales si su función de densidad es,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & si\ a\le x\le b\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

3.2.1.1 Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución uniforme en $[a,b]$ con $a<b$, entonces:

i) $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

ii) $Var(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

En la Figura 3.1 se indica la representación gráfica de la función de densidad de la variable aleatoria X con distribución uniforme.

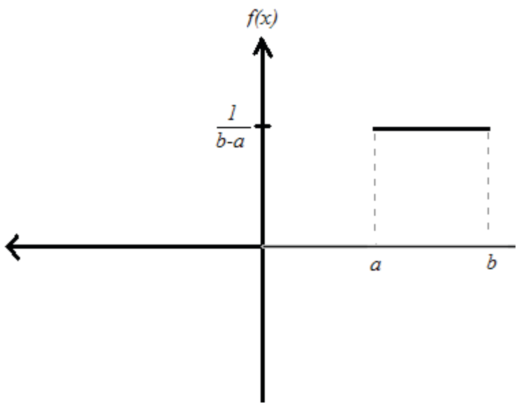

Figura 3.1. Función de densidad de la variable aleatoria *X* uniforme

Como caso particular se tiene que para $a=0,\ \ b=1$ una variable aleatoria X se distribuye uniformemente sobre el intervalo $[0,1]$ si su función de densidad es,

$$f(x)=\begin{cases}1 & si\ 0\le x\le 1\\ 0 & en\ otro\ caso\end{cases}$$

Propiedades

Si X es una variable aleatoria con distribución uniforme en $[0,1]$, entonces:

i) $E(X)=\dfrac{1}{2}$

ii) $Var(X)=\dfrac{1}{12}$

3.2.2 *Distribución normal*

Se dice que una variable aleatoria X sigue una distribución normal de parámetros μ y σ, donde μ es un número real y σ un número real positivo si su función de densidad es,

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}\right],\quad x\in R$$

Su representación gráfica se presenta en la Figura 3.2.

La curva se denomina campana de Gauss y el área bajo la curva vale 1.

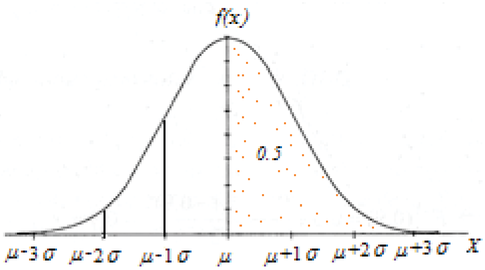

Figura 3.2. Función de densidad de la variable aleatoria *X* normal

Además se cumplen las dos condiciones siguientes:

i) $f(x) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$

3.2.2.1 Propiedades

i) $E(X) = \mu$

ii) $Var(X) = \sigma^2$

Como caso particular si $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, se tiene la densidad de la distribución normal estándar dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right], \quad x \in R$$

La mencionada distribución se obtiene realizando la siguiente estandarización de la variable:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$dz = \frac{1}{\sigma}dx$$

La densidad de la distribución normal estándar cumple la siguiente igualdad,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = 1$$

La densidad de la distribución normal estándar para la variable aleatoria Z es,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}}$$

que sin pérdida de generalidad se puede escribir de la siguiente manera,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right], \quad x \in R$$

Donde $f(x)$ es una función de densidad para la variable aleatoria X.

La función de distribución de la variable aleatoria Z con distribución normal estándar es,

$$F(z) = P(Z \leq z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}t^2\right] dt$$

En la Figura 3.3 se indica la función de densidad de la distribución normal estándar, se observa que ella es simétrica con respecto al eje vertical. El área bajo la curva es igual a 1, en la parte izquierda se ubica un área igual a 0.5=50% y en la parte derecha se tiene un área de 0.5 como resultado de la simetría. Los valores en el eje horizontal para la variable estandarizada están aproximadamente entre -3.5 y 3.5.

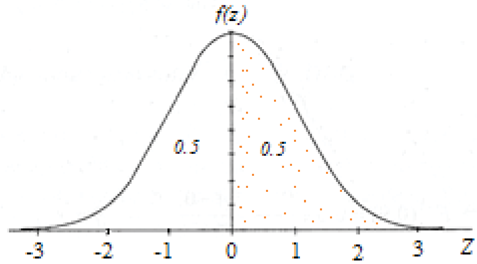

Figura 3.3. Función de densidad de la variable aleatoria *X* normal estándar

Ejemplo 3.8 La Figura 3.4 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad $P(Z \leq 2.02)$, la cual se puede leer en una tabla para la distribución normal estándar.

$F(2.02) = P(Z \leq 2.02) = \Phi(2.02) = ?$

$F(2.02) = P(Z \leq 2.02) = 0.9783 \cong 97.83\%.$

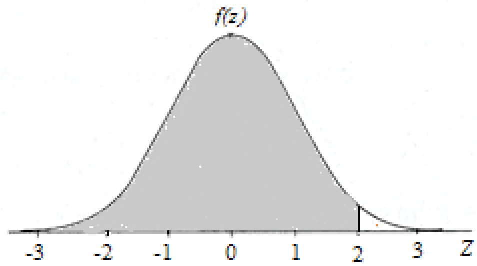

Figura 3.4. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq 2.02)$

Ejemplo 3.9 La Figura 3.5 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$F(-1.18) = P(Z \leq -1.18) = \Phi(-1.18) = 0.119 \cong 11.9\%$

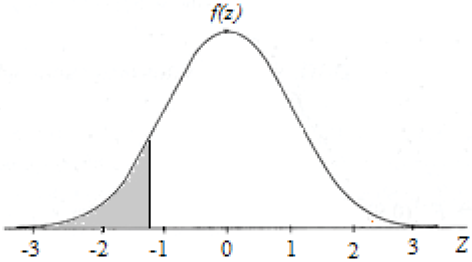

Figura 3.5. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq -1.18)$

Ejemplo 3.10 La Figura 3.6 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$P(Z \leq 0.83) = 0.7967 \cong 79.67\%$

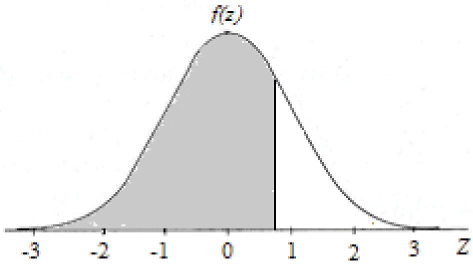

Figura 3.6. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq 0.83)$

Ejemplo 3.11 La Figura 3.7 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$P(Z \geq 1.4) = 1 - P(Z \leq 1.4) = 1 - 0.9192 = 0.0808 \cong 8.08\%$

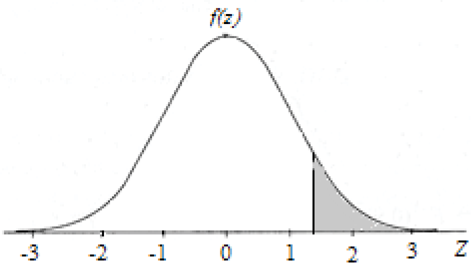

Figura 3.7. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \geq 1.4)$

Ejemplo 3.12 La Figura 3.8 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$$P(-1.4 \leq Z \leq 2.5) = P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq -1.4)$$

$$P(-0.4 \leq Z \leq 2.5) = 0.9938 - 0.0808 = 0.9130$$

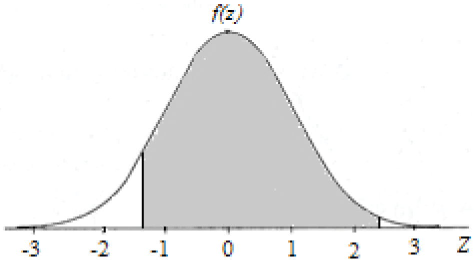

Figura 3.8. Área bajo la curva normal estándar $P(-1.4 \leq Z \leq 2.5)$

3.2.2.2 Aplicaciones

Ejemplo 3.12 La empresa LL produce lámparas cuya duración en horas se distribuye normalmente con media de 900 horas y desviación estándar de 50 horas. Si se toma al azar una lámpara de la producción,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dure máximo 940 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dure por lo menos 822 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que dure entre 880 y 1020 horas?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 1200 horas?

$\mu = 900$ horas, $\sigma = 50$ horas

X: duración en horas de una lámpara cualesquiera producida por la empresa LL.

a) $P(X \leq 940) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{940-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{940-900}{50}\right)$

$$P(X \leq 940) = P\left(Z \leq \frac{40}{50}\right) = P(Z \leq 0.8) = 0.7881 \cong 78.81\%$$

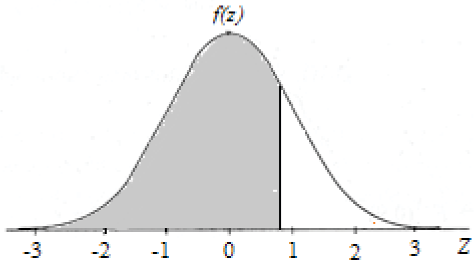

Figura 3.9. Área bajo la curva normal estándar $(P\ \ Z \leq 0.8)$

La probabilidad de que una lámpara escogida al azar de la producción dure máximo 940 horas es del 78.81%. Una representación de la situación se tiene en la Figura 3.9.

b) $$P(X \geq 822) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{822-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{822-900}{50}\right)$$

$$P(X \geq 822) = P(Z \geq -1.56) = 1 - P(Z \leq -1.56) = 1 - 0.0594 = 0.9406$$

$$P(X \geq 822) = 0.9406 \cong 94.06\%$$

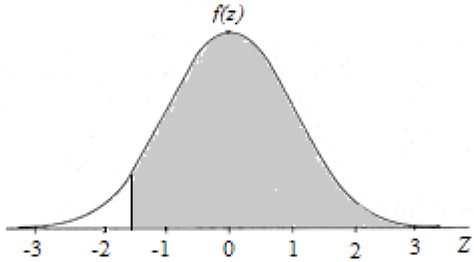

Figura 3.10. Área bajo la curva normal estándar $(P\ \ Z \geq -\,1.56)$

La probabilidad de que una lámpara escogida al azar de la producción dure por lo menos 822 horas es del 94.06%. Una representación de la anterior situación se tiene en la Figura 3.10.

c) $$P(880 \leq X \leq 1020) = P\left(\frac{880-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{1020-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(880 \leq X \leq 1020) = P\left(\frac{880-900}{50} \leq Z \leq \frac{1020-900}{50}\right) = P(-0.4 \leq Z \leq 2.4)$$

$$P(880 \leq X \leq 1020) = 0.9918 - 0.3446 = 0.6472 \cong 64.72\%$$

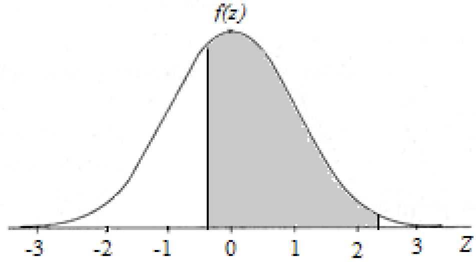

Figura 3.11. Área bajo la curva normal estándar $P(-0.4 \leq Z \leq 2.4)$

La probabilidad de que una lámpara escogida al azar de la producción dure entre 880 y 1020 horas es de 64.72%. Ver Figura 3.11.

d) $P(X \geq 1200) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1200-900}{50}\right) = P(Z \geq 6) \cong 0$

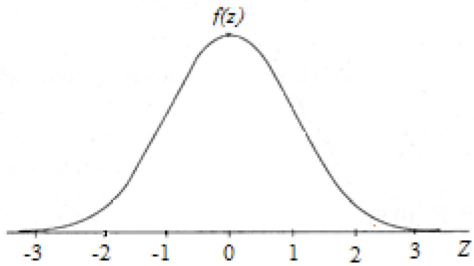

Figura 3.12. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \geq 6)$

La probabilidad de que una lámpara escogida al azar de la producción dure más de 1200 horas es del 0% aproximadamente. Ver Figura 3.12.

Ejemplo 3.13 El peso de los paquetes de azúcar empacados por la máquina R es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media $\mu = 500$ gramos, y una desviación estándar $\sigma = 20$ gramos. Si se escoge aleatoriamente un paquete de azúcar empacado por la máquina R,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de por lo menos 486 gramos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea a lo más de 480 gramos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté entre 476 y 550 gramos?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de menos de 400 gramos?

e) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de más de 440 gramos?

$\mu = 500$ gramos, $\sigma = 20$ gramos.

X : peso de un roedor silvestre escogido aleatoriamente.

a) $P(X \geq 486) = 1 - P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{486-500}{20}\right)$

$$P(X \geq 486) = P(Z \geq -0.7) = 1 - P(Z \leq -0.7) = 1 - 0.2420 = 0.758 \cong 75.8\%$$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente sea de por menos 486 gramos es de 75.8%. Obsérvese la Figura 3.13.

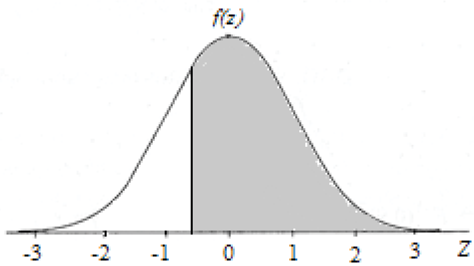

Figura 3.13. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \geq -0.7)$

b) $P(X \leq 480) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \leq \dfrac{480-500}{20}\right) = P(Z \leq -1) = 0.1587 \cong 15.87\%.$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente sea de máximo 480 gramos es de 15.87%. Ver Figura 3.14.

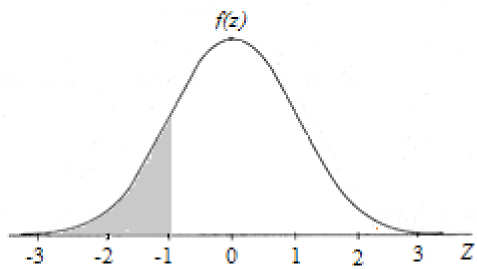

Figura 3.14. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq -1)$

c) $P(476 \leq X \leq 550) = P\left(\frac{476-500}{20} \leq Z \leq \frac{550-500}{20}\right)$

$$P(476 \leq X \leq 550) = P\left(-1.2 \leq Z \leq 2.5\right) = P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq -1.2)$$

La situación anterior se puede observar en la Figura 3.15.

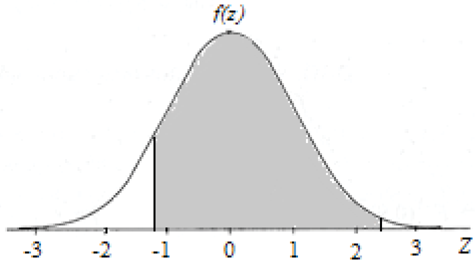

Figura 3.15. Área bajo la curva normal estándar $P(-1.2 \leq Z \leq 2.5)$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente esté entre 476 y 550 gramos es del 87.87%

d) $P(X \leq 400) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{400-500}{20}\right) = P(Z \leq -5) \cong 0\%$

Esta situación se puede observar en la Figura 3.16.

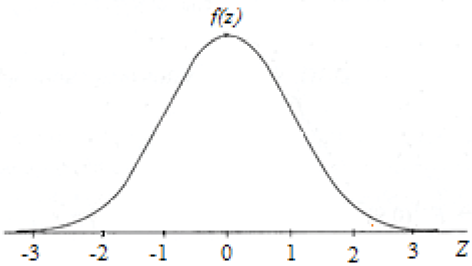

Figura 3.16. Área bajo la curva normal estándar $(P\ Z \leq -5)$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente sea de menos de 400 gramos es de 0% aproximadamente.

e) $P(X \geq 440) = P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \geq \dfrac{440-500}{20}\right) = P(Z \geq -3) = 1 - P(Z \leq -3)$

$$P(X \geq 440) = 1 - 0.0013 = 0.9987 \cong 99.87\%$$

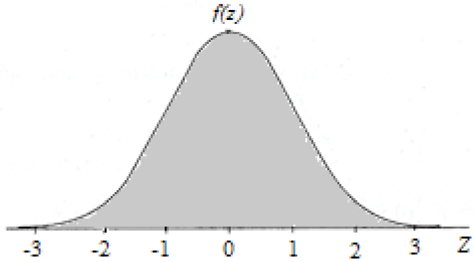

Figura 3.17. Área bajo la curva normal estándar $(P\ \ Z \geq -3)$

La probabilidad de que el peso del paquete de azúcar escogido aleatoriamente sea de más de 440 gramos es de 99.87%. Obsérvese la Figura 3.17.

3.2.3 *Otras distribuciones de tipo continuo*

En este apartado se indican otras distribuciones continuas de probabilidad, las cuales pueden resultar de interés para el lector. Ejemplos de aplicación de algunas de estas distribuciones se pueden consultar en: Freund y Miller (2000) capítulo 6, Ross (1998) capítulo 5, Blanco (2004) capítulo 4, Marshall y Olkim (2007) capítulo 9, Papoulis (1991) sección 4.3 y Meeker y Escobar (1998) capítulo 4.

3.2.3.1 Distribución Gamma

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Gamma de parámetros $r > 0$ y $\lambda > 0$ si su función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\Gamma(r)}(\lambda x)^{r-1}\exp(-\lambda x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Donde $\Gamma(r)$ es la función Gamma definida como se indica a continuación,

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} t^{r-1}\exp(-t)dt$$

Propiedades

i) $E(X) = \dfrac{r}{\lambda}$

ii) $Var(X) = \dfrac{r}{\lambda^2}$

Como un caso particular, si $r = 1$, se tiene una variable aleatoria X con distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$. En efecto, resultaría:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\Gamma(1)} (\lambda x)^{1-1} \exp(-\lambda x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Pero $\Gamma(1) = 1$, ya que se trata de la función Gamma calculada en $r = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} \exp(-t) dt = \int_0^\infty \exp(-t) dt = \underset{b \to \infty}{Lim} \left(-\exp(-t)\right)\Big|_0^b = 1$$

Finalmente, resulta la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria con distribución exponencial que se presentará en un apartado posterior.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

3.2.3.2 Distribución Beta

Una variable aleatoria X tiene distribución Beta de parámetros $a > 0$ y $b > 0$ si su función de densidad es,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1 - x)^{b-1} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1) \end{cases}$$

Donde $B(a,b)$ es la función Beta definida de la siguiente forma,

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx \cdot$$

Propiedades

i) $E(X) = \dfrac{a}{a+b}$.

ii) $Var(X) = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2}$

3.2.3.3 Distribución Weibull

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución Weibull de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} \exp\left(-\alpha x^{\beta}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propiedades

i) $E(X) = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(1 + \dfrac{1}{\beta}\right)$

ii) $Var(X) = \left(\dfrac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{\beta}} \left[\Gamma\left(1+\dfrac{2}{\beta}\right) - \Gamma^{2}\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)\right]$

3.2.3.4 Distribución Cauchy

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye Cauchy de parámetros θ, β, $\theta \in R$, $\beta \in R^{+}$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\pi\beta} \frac{1}{1 + \left(\dfrac{x-\theta}{\beta}\right)^2}, \quad x \in R$$

Cuando $\theta = 0$ y $\beta = 1$ resulta:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+x^2)}, \quad x \in R$$

3.2.3.5 Distribución de Laplace

Se dice que una variable aleatoria X se distribuye Laplace o Exponencial doble de parámetros α, β si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|x \quad \alpha|}{\beta}\right), \quad \alpha \in R \text{ y } \beta \in R^{+}$$

3.2.3.6 Distribución lognormal

Sea X una variable aleatoria no negativa y $Y = \ln X$, si la variable Y se distribuye normal de parámetros μ, σ, entonces se dice que Y tiene distribución lognormal de parámetros μ, σ. Si Y tiene distribución lognormal, entonces su función de densidad está dada por,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\left(\dfrac{\ln x - \mu}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right], & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

3.2.3.7 Distribución logística

Se dice que una variable aleatoria X tiene distribución logística de parámetros α, β, $\alpha \in R$, $\beta \in R^+$, si su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\beta} \frac{\exp\left[-\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]}{\left[1 + \exp\left[-\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)\right]\right]^2}, \quad x \in R$$

Cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$ resulta:

$$f(x) = \frac{\exp(-x)}{\left[1 + \exp(-x)\right]^2}, \quad x \in R$$

3.2.3.8 Distribución exponencial

Una variable aleatoria X tiene distribución exponencial si su función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Propiedades

i) $\mu = E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$

ii) $\sigma^2 = Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

La representación de la función de densidad se indica en la Figura 3.18.

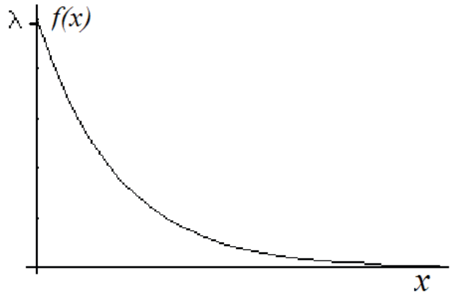

Figura 3.18. Función de densidad de una variable aleatoria exponencial

De la Figura 3.18 se observa que la función de densidad es decreciente pero el área bajo la curva es igual a 1, por ello se utiliza para el cálculo de probabilidades.

3.2.3.9 Distribución Lambda generalizada

La Distribución Lambda generalizada es una familia de distribuciones de probabilidad, que se define a través de su función percentil como sigue (Karian y Dudewics, 2000):

$$F^{-1}(y) = x = F^{-1}(y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2}$$

Con $0 \leq y \leq 1$, en la definición dada anteriormente es necesario el cumplimiento de la condición de que $\lambda_2 \neq 0$. Las constantes λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 se llaman parámetros de la Distribución Lambda Generalizada. El valor λ_1 se asocia con el parámetro de localización; el valor λ_2, con el parámetro de escala; el valor λ_3, con el momento de tercer orden, que define la asimetría de una distribución de probabilidad, y el valor λ_4, con el momento de cuarto orden, que permite definir el apuntamiento de la curva o también denominado curtosis.

Si $F(x)$ es la función de distribución de una variable aleatoria continua X tal que $x = F^{-1}(y)$, entonces se tiene que $y = F(x)$. Al aplicar cálculo diferencial y al derivar con respecto a x mediante el procedimiento de derivación para una función inversa se obtiene la función de densidad siguiente:

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\right) = f(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}} \; ; \; x = F^{-1}(y)$$

Es conveniente indicar que a los cuatro parámetros antes mencionados se les pueden asignar valores específicos apropiados para que las expresiones que definen la Distribución Lambda Generalizada y la función de densidad cumplan con las dos condiciones siguientes que formalmente distinguen una función de densidad de probabilidad:

1. $f(F^{-1}(y)) = f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(F^{-1}(y))d(F^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

La primera condición indica que la curva *f(x)* debe estar por arriba del eje horizontal o sobre él, pero nunca por debajo; analíticamente implica que

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3 - 1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4 - 1}} \geq 0$$

La segunda condición implica que el área bajo la curva es igual a 1.

Para determinar las parejas (λ_3, λ_4), en las cuales la Distribución Lambda Generalizada resulte válida, es decir, permita definir formalmente una distribución de probabilidad, Karian y Dudewicz (2000) estudiaron las siguientes regiones:

$$R_1 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 \leq -1, \lambda_4 \geq 1\}$$

$$R_2 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 \geq 1, \lambda_4 \leq -1\}$$

$$R_3 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 \geq 0\}$$

$$R_4 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 \leq 0, \lambda_4 \leq 0\}$$

$$V_1 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 < 0,\ 0 < \lambda_4 < 1\}$$

$$V_2 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } 0 < \lambda_3 < 1,\ \lambda_4 < 0\}$$

$$V_3 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } -1 < \lambda_3 < 0,\ \lambda_4 > 1\}$$

$$V_4 = \{(\lambda_3, \lambda_4) \text{ a } \lambda_3 > 1,\ -1 < \lambda_4 < 0\}$$

Karian y Dudewicz demostraron que la Distribución Lambda Generalizada es válida en las regiones: R_1, R_2, R_3, y R_4, pero no es válida en las regiones V_1 y V_2; además, llegaron a la conclusión de que la Distribución Lambda Generalizada es válida en las regiones V_3 y V_4, si y solo si

$$\frac{(1-\lambda_3)^{1-\lambda_3}}{(\lambda_4-\lambda_3)^{\lambda_4-\lambda_3}}(\lambda_4-1)^{\lambda_4-1}<\frac{-\lambda_3}{\lambda_4}$$

El anterior contexto indica que la DLG no está definida para valores arbitrarios de sus cuatro parámetros. Karian y Dudewicz (2000) han propuesto una tabla que contiene una gama muy amplia de valores para los parámetros, de tal manera que con ellos sí se tiene un amplio espectro de distribuciones provenientes de la DLG; así mismo han desarrollado un algoritmo que permite cubrir una muy amplia variedad de casos de distribuciones que se pueden generar al dar valores específicos a los parámetros de la DLG, resultando distribuciones simétricas, asimétricas, platicúrticas, leptocúrticas u otras como la uniforme, normal, logística, t-student y más que puedan ser útiles en la intención de modelar un determinado conjunto de datos reales.

3.2.3.10 Distribución Birnbaum-Saunders

Una variable aleatoria X tiene distribución Birnbaum-Saunders de parámetros $\alpha>0$, $\beta>0$, si su función de distribución está dada por (Birnbaum & Saunders, 1969a, 1969b; Saunders, 2007):

$$F_X(x)=\Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right)=\Phi\left(h(x)\right)$$

con

$$h(x)=z=\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

La cual se denota con $X\rightarrow BS(\alpha,\beta)$; donde $\Phi(x)$ representa la distribución normal estándar. En este caso, $z=h(x)$ corresponde al conjunto de los valores de una variable normal estándar Z. El p percentil de la distribución de la variable aleatoria $X\rightarrow BS(\alpha,\beta)$ es $x_p=F_X^{-1}(p)$ (Kandu, 2008; Díaz, 2005; Leiva, 2009; Barros, 2009); también este se puede obtener aplicando el método de la transformada inversa, a partir del cual se puede obtener la siguiente expresión,

$$x_p = \beta \left[\frac{\alpha z_p}{2} + \frac{\sqrt{(\alpha z_p)^2 + 4}}{2} \right]^2$$

Donde z_p es el p percentil de la distribución de una variable normal estándar denotada con $Z \to N(0,1)$. La mencionada expresión se puede utilizar para generar valores x deuna variable aleatoria con distribución Birnbaum-Saunders, $X \to BS(\alpha, \beta)$.

Actividades para el estudio independiente capítulo 3

3.1 El equipo de fútbol CC tiene una probabilidad de 0.75 de ganar cada vez que juega. Si aún le quedan por jugar 8 partidos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que gane tres partidos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no gane los restantes partidos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que gane por lo menos cuatro partidos? Determinar el número de partidos que espera ganar el equipo CC y la varianza.

3.2 La probabilidad de que cualquiera de las vacas de la granja A esté produciendo leche en alguna época del año es de 0.6. Si se toma una muestra aleatoria de 6 vacas de la granja A,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una vaca de la muestra esté produciendo leche?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos vacas de la muestra estén produciendo leche?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más dos vacas de la muestra estén produciendo leche?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que todas las vacas de la muestra estén produciendo leche?

e) Determinar el valor esperado e interpretarlo.

3.3 Una máquina produce artículos del tipo RRR, la probabilidad de que cualquier artículo producido por la máquina resulte defectuoso es 0.05, si se escoge una muestra aleatoria de 10 artículos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos resulten defectuosos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno resulte defectuoso?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos tres resulten defectuosos?

Se define la variable aleatoria como X : número de artículos defectuosos del tipo RRR en la muestra de 10. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,10.

3.4 En un curso de Probabilidad está conformado por 10 estudiantes de matemáticas y 15 estudiantes de otras carreras, si se decide escoger aleatoriamente un grupo de 6 estudiantes del curso de probabilidad para que hagan una disertación sobre espacios de probabilidad en el salón de clase, *a)* ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos estudiantes matemáticas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un estudiante de matemáticas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los estudiantes sean de otras carreras?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres estudiantes de matemáticas?

e) Determinar el valor esperado.

3.5 En una granja hay unos vacunos de los cuales 8 son de la raza pardosuizo y 12 de la raza romosinuano, si se decide escoger aleatoriamente un grupo de cinco de los mencionados vacunos para exhibirlos en la feria regional ganadera,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos vacunos de la raza pardosuizo?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un vacuno de la raza pardosuizo?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los vacunos resulten de la raza romosinuano?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres vacunos de la raza pardosuizo?

3.6 El promedio de inyecciones del medicamento AA que no surten efecto en los cachorros de la región B es de 2 en las jornadas de vacunación que se han realizado,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro inyecciones del medicamento AA no surtan efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más una inyección del medicamento AA no surta efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento?

3.7 El promedio de caninos infestados de pulgas encontrados en las últimas visitas a la región BB realizadas por los inspectores de salud animal es de 5,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente visita a la región BB, los inspectores de salud animal encuentren tres caninos infestados de pulgas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente visita a la región BB, los inspectores de salud animal encuentren a lo más dos caninos infestados de pulgas?

c) Determinar el valor esperado y la varianza.

3.8 Graficar y determinar las siguientes probabilidades utilizando la distribución normal estándar a) $P(Z \leq -1.35)$, b) $P(Z \geq 1.3)$ c) $P(0.31 \leq Z \leq 2.5)$

3.9 Una fábrica produce bombillos, la duración de los bombillos tiene una distribución normal con media de 800 horas y desviación estándar de 50 horas. Si se toma al azar un bombillo de la producción,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dure máximo 840 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dure por lo menos 720 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que dure entre 780 y 920 horas?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 1000 horas?

3.10 El peso en una clase de unos roedores silvestres es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media $\mu = 500$ gramos, y una desviación estándar $\sigma = 30$ gramos. Si se escoge aleatoriamente un roedor de esa clase,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de por lo menos 480 gramos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea a lo más de 470 gramos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté entre 465 y 575 gramos?

Ejercicios para el capítulo 3

3.1 Leer en una tabla normal estándar, los siguientes valores de probabilidad:

a) $P(Z \leq 2.6)$

b) $P(Z \geq 1.32)$

c) $P(Z < -0.24)$

d) $P(Z > 2.16)$

e) $P(Z < -1.37)$

f) $P(Z = -0.24)$

3.2 El sueldo de los trabajadores de la empresa T&T se distribuye normalmente con media de 500 (en miles de pesos) y desviación estándar de 10, se escoge aleatoriamente a un trabajador de dicha empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que su salario sea superior a 493, inferior a 489, o esté entre 482 y 512?

3.3 De los estudiantes que cursan una asignatura, 15 son de economía y 25 son de otras carreras, si se escoge aleatoriamente un grupo de 10 estudiantes para que asistan a un encuentro nacional, ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo haya por lo menos tres estudiantes de economía?, ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo haya por lo menos tres estudiantes de otras carreras?

3.4 El peso de un producto de la marca P sigue una distribución normal con media 1000 gramos y desviación estándar de 6 gramos, si se escoge aleatoriamente una unidad del producto de la marca P ¿cuál es la probabilidad de que su peso sea superior a 1010 gramos?

3.5 En una fábrica, el promedio de ausencia por mes de sus trabajadores es de 3. ¿Cuál es la probabilidad de que en el siguiente mes por lo menos 3 trabajadores se ausenten de la fábrica?

3.6 En un proceso productivo, se sabe que el 96% de los artículos de la marca M1 resultan de buena calidad, si se selecciona una muestra aleatoria de 40 unidades del artículo, ¿cuál es la probabilidad de que más de 95 artículos de esta marca resulten de buena calidad?

3.7 Una fábrica produce medicamentos del tipo A para vacunos, la probabilidad de que cualquier unidad del medicamento producido por la fábrica no resulte efectiva es del 4%, si se escoge una muestra aleatoria de 90 unidades del medicamento. ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos 4 no resulten efectivos?

3.8 Si la probabilidad de que una res sufra reacción por una vacuna anti-aftosa es del 1% y si se toma una muestra aleatoria de 200 reses, *a)* ¿Cuál es la probabilidad de encontrar que tres reses de la muestra sufran reacción ante la vacuna antiaftosa?, *b)* ¿Cuál es la probabilidad de encontrar que más de cinco reses de la muestra sufran reacción ante la vacuna anti-aftosa?

3.9 De un corral que contiene cerdos, se escogen 3 aleatoriamente para diagnosticar si están infectados o no lo están con un nuevo virus que ha aparecido en la región. ¿Cuál es la probabilidad de que como mínimo dos cerdos resulten infectados?

3.10 El peso de un grupo de aves sigue una distribución normal con media 1800 gramos y desviación estándar de 40 gramos. Si se escoge aleatoriamente una ave de ese grupo ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea mayor que 1850 gramos?

3.11 Una máquina produce artículos del tipo C, la probabilidad de que cualquier artículo producido por la máquina resulte de mala calidad es 0.03, si se escoge una muestra aleatoria de 20 artículos, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos tres resulten de mala calidad?

3.12 Probar que en la distribución uniforme discreta se cumple que,

i) $E(X)=\dfrac{N+1}{2}$

ii) $Var(X)=\dfrac{N^2-1}{12}$

3.13 Trazar la gráfica de una distribución Lambda generalizada de parámetros 0, 0.1975, 0.1349 y 0.1349; y de una distribución Birnbaum-Saunders de parámetros 0.3, 1

4

VECTORES ALEATORIOS

En los capítulos anteriores se ha establecido el concepto de variable aleatoria como una función medible, para la cual fue posible determinar su función y distribución de probabilidad, el valor esperado y la varianza, entre otros. En este capítulo se hará una extensión de estos conceptos hacia los denominados vectores aleatorios; específicamente se definen y ejemplifican la función de probabilidad o de densidad, la distribución de probabilidad, las marginales, la función de probabilidad condicional, la esperanza matemática y la matriz de covarianzas para vectores aleatorios tanto discretos como continuos. Algunos de los aspectos teóricos incluidos en este capítulo se soportan en los conceptos expuestos por autores como Lindgren (1993), Papoulis (1991), Ross (1998), Jacod y Protter (2000), Muñoz y Blanco (2002), Hernández (2003), Blanco (2004), por citar algunos.

4.1 Concepto de vector aleatorio

Dado un espacio de probabilidad $\Omega, \Im, P$ y el espacio medible (R^k, β_k) donde β_k es el sigma álgebra de Borel en R^k , un vector aleatorio real $\overline{X}$ es una función medible definida de la siguiente manera,

$$
\begin{aligned}
\overline{X} : \Omega &\rightarrow \mathrm{R}^k \\
\omega &\rightarrow \overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_k(\omega))
\end{aligned}
$$

Tal que cada X_i para $i = 1, 2, \ldots, k$ es una variable aleatoria real y para todo evento E en β_k se tiene que
$\overline{X}^{-1}(E) \in \Im$.

Ahora si X_i para $i = 1, 2, \ldots, k$ son variables aleatorias reales, entonces se puede conformar un vector aleatorio con k componentes, así:

$$\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$$

Ejemplo 4.1 Si X_1 y X_2 son variables aleatorias reales, entonces $\overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega))$ es un vector aleatorio bidimensional, el cual suele denotarse con $\overline{X} = (X_1, X_2)$ si no hay lugar a confusiones; Si X_1, X_2 y X_3 son variables aleatoria reales entonces $\overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), X_3(\omega))$ es un vector aleatorio tridimensional que puede denotarse con $\overline{X}_3 = (X_1, X_2, X_3)$, y así sucesivamente.

Por otro lado si X_1, X_2, …, X_k son variables aleatorias discretas, es decir sus correspondientes rangos $R_{X_1}, R_{X_2}, ..., R_{X_k}$ son conjuntos finitos o numerables entonces el vector

$$\overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_k(\omega))$$

es un vector aleatorio discreto.

Además, si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ son variables aleatorias continuas, es decir sus correspondientes rangos $R_{X_1}, R_{X_2}, ..., R_{X_k}$, son conjuntos no numerables entonces el vector,

$$\overline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), ..., X_k(\omega))$$

es un vector aleatorio continuo.

Ahora, si algunas de las X_i para $i = 1, 2, ..., k$ son variables aleatorias discretas y las demás son variables aleatorias continuas, entonces $\overline{X}$ es vector aleatorio mixto.

4.2 Función de probabilidad conjunta

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio discreto en R^k, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k, la función

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = \begin{cases} P(\overline{X} = \overline{x}) & si\ \overline{x} \in R_{\overline{X}} \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La cual también se puede expresar como

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = \begin{cases} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap ... \cap (X_k = x_k)) \\ 0 \qquad\qquad\qquad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Con $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2}, ..., R_{X_k})$, la función $f_{\overline{X}}$ es una función de probabilidad para el vector aleatorio discreto $\overline{X}$ si cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) \geq 0$.

ii) $\sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} ... \sum_{R_{X_k}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = 1$.

En la anterior definición, se ha de tener presente los siguientes eventos:

$$(X_1 = x_1) = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = x_1\}$$

$$(X_2 = x_2) = \{\omega \in \Omega : X_2(\omega) = x_2\}$$

Sucesivamente,

$$(X_k = x_k) = \{\omega \in \Omega : X_k(\omega) = x_k\}$$

Ejemplo 4.2 Considerando el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, la función

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} P(\overline{X} = \overline{x}) \quad si\ \overline{x} \in R_{\overline{X}} \\ 0 \qquad\qquad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

La cual también se puede expresar como

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2)) \\ 0 \qquad\qquad\qquad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

O también por

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ 0 \qquad\quad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Con $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2})$, se denomina función de probabilidad bi-variada del vector aleatorio discreto $\overline{X}$ si $f_{\overline{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2) \geq 0$.

ii) $\sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} f_{\bar{X}}(x_1, x_2) = 1$

En el espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^3, β_3) $\bar{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio discreto en R^3, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector en R^3, la función,

$$f_{\bar{X}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} P((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap (X_3 = x_3)) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

La cual también se puede expresar como

$$f_{\bar{X}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Con $R_{\bar{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2}, R_{X_3})$, se llama función de probabilidad trivariada del vector aleatorio discreto $\bar{X}$ si $f_{\bar{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\bar{X}}(x_1, x_2, x_3) \geq 0$

ii) $\sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} \sum_{R_{X_3}} f_{\bar{X}}(x_1, x_2, x_3) = 1$

4.3 Función de densidad multivariada

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\bar{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio continuo en R^k, $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k, la función real,

$$f_{\bar{X}} : R^k \to R$$

es una función de densidad de probabilidad para el vector aleatorio continuo $\bar{X}$ si $f_{\bar{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\bar{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_{\bar{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) dx_1 dx_2 ... dx_k = 1$

Ejemplo 4.3 En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\bar{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\bar{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, la función real

$f_{\overline{X}} : R^2 \to R$

es una función de densidad de probabilidad bivariada para el vector aleatorio continuo $\overline{X}$ si $f_{\overline{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = 1$

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^3, β_3), $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio continuo en R^3, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector en R^3, la función real

$$f_{\overline{X}} : R^3 \to R$$

es una función de densidad de probabilidad trivariada para el vector aleatorio continuo $\overline{X}$ si $f_{\overline{X}}$ cumple las dos condiciones siguientes:

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) \geq 0$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 = 1$

4.4 Función de distribución multivariada

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio continuo en R^k, $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k, la función de distribución de probabilidad del vector aleatorio $\overline{X}$ se define de la siguiente manera:

$$F_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_k \leq x_k)$$

También se puede expresar de la siguiente forma,

$$F_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = P((X_1 \leq x_1) \cap (X_2 \leq x_2) \cap ... \cap (X_k \leq x_k))$$

Si no hay lugar a confusiones, la función de distribución del vector aleatorio $\overline{X}$ se denota simplemente con F. Además, los eventos involucrados en la definición se pueden escribir de la siguiente forma:

$$(X_1 \leq x_1) = \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \leq x_1\}$$

$$(X_2 \leq x_2) = \{\omega \in \Omega : X_2(\omega) \leq x_2\}$$

Sucesivamente,

$$(X_k \leq x_k) = \{\omega \in \Omega : X_k(\omega) \leq x_k\}$$

Ahora, si el vector aleatorio $\overline{X}$ es continuo, entonces su función de distribución de probabilidad conjunta se puede expresar así

$$F_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_k} f_{\overline{X}}(t_1, t_2, ..., t_k)dt_1dt_2...dt_k$$

Aquí es conveniente considerar que para un evento $E \in \beta_k$ entonces,

$$P(\overline{X} \in E) = \iint_E ...\int f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)dx_1dx_2...dx_k$$

Donde la anterior es una integral de Lebesgue sobre *E*.

Ejemplo 4.4 En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, para el evento $E = [a,b]\times[c,d] \in \beta_2$ se tiene

$$P(\overline{X} \in E) = P(\overline{X} \in [a,b]\times[c,d]) = \int_{[a,b]}\int_{[c,d]} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)dx_2dx_1$$

4.5 Funciones de probabilidad marginales

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2 y $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2})$, la función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_1 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_2 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2}(x_2) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$$

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^3, β_3), $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio discreto en R^3, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector en R^3, y $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2}, R_{X_3})$, la función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_1 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{R_{X_2}} \sum_{R_{X_3}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_2 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2}(x_2) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_3}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_3}(x_3) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a las variables aleatorias X_2 y X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2, X_3}(x_2, x_3) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

La función de probabilidad marginal con respecto a las variables aleatorias X_1 y X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1, X_3}(x_1, x_3) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3)$$

En general en un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio continuo en R^k, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k y $R_{\overline{X}} = (R_{X_1}, R_{X_2}, ..., R_{X_k})$, la función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_i que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_i}(x_i) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} \cdots \sum_{R_{X_{i-1}}} \sum_{R_{X_{i+1}}} \cdots \sum_{R_{X_k}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, la función de densidad de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_1 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) dx_2$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_2 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) dx_1$$

En un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^3, β_3), $\overline{X} = (X_1, X_2, X_3)$ un vector aleatorio continuo en R^3, $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ un vector en R^3, la función de densidad de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_1 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_2 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_3$$

La función de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_3}(x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2$$

La función de probabilidad marginal con respecto a las variables aleatorias X_2 y X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_2,X_3}(x_2,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2,x_3)dx_1$$

La función de probabilidad marginal con respecto a las variables aleatorias X_1 y X_3 que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_1,X_3}(x_1,x_3)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2,x_3)dx_2$$

En general en un espacio de probabilidad $(\Omega,\Im,P)$ y el espacio medible (R^k,β_k), $\overline{X}=(X_1,X_2,...,X_k)$ un vector aleatorio continuo en R^k, $\overline{x}=(x_1,x_2,...,x_k)$ un vector en R^k, la función de densidad de probabilidad marginal con respecto a la variable aleatoria X_i que compone el vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$f_{X_i}(x_i)=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)dx_1...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_k$$

Ejemplo 4.5. El siguiente ejemplo es adaptado de Freund y Miller (2000). En un salón de la universidad A se encuentran reunidos dos estudiantes de matemáticas, tres estudiantes de ingeniería, y cuatro de economía; se escogen aleatoriamente dos estudiantes para aplicarles una encuesta a cerca de la calidad de la educación superior.

A continuación se definen las variables aleatorias,

X_1 : número de estudiantes de ingeniería entre dos seleccionados.

X_2 : número de estudiantes de matemáticas entre los dos seleccionados.

Se desea encontrar las probabilidades asociadas con todos los pares posibles de valores para las variables aleatorias X_1 y X_2, la función de probabilidad conjunta $f_{\overline{X}}(x_1,x_2)$ y $F_{\overline{X}}(0,2)$.

Los valores que puede tomar la variable X_1 son $x_1=0,1,2$ y la variable X_2 toma los valores $x_2=0,1,2$. Así, $R_{X_1}=\{0,1,2\}$ y $R_{X_2}=\{0,1,2\}$

Los posibles pares de valores son: $(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (1,1),\ (2,0)$.

Como en total hay 9 estudiantes, el total de muestras de tamaño dos es 36, que se obtiene de la siguiente forma:

$$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9*8*7!}{2*7!} = 36$$

Para obtener la probabilidad asociada con del par (x_1, x_2) se determina el evento de obtener x_1 de los tres estudiantes de ingeniería, x_2 de los dos estudiantes de matemáticas y $2 - x_1 - x_2$ de los estudiantes de economía, el número de resultados igualmente probables del evento está dado por:

$$\binom{3}{x_1}\binom{2}{x_2}\binom{4}{2 - x_1 - x_2}$$

La función de probabilidad conjunta es

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{\binom{3}{x_1}\binom{2}{x_2}\binom{4}{2 - x_1 - x_2}}{\binom{9}{2}} & si\ x_1 = 0,1,2;\ x_2 = 0,1,2;\ 0 \le x_1 + x_2 \le 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La probabilidad para el par $(0,1)$ es

$$f_{\overline{X}}(0,1) = \frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{4}{2-0-1}}{\binom{9}{2}} = \frac{8}{36}$$

Siguiendo un procedimiento similar se obtienen

$$f(0,0) = \frac{6}{36},\ f(0,2) = \frac{1}{36},\ f(1,0) = \frac{12}{36},\ f(1,1) = \frac{6}{36},\ f(2,0) = \frac{3}{36}$$

$$f(1,2) = 0,\ f(2,1) = 0,\ f(2,2) = 0$$

Los anteriores valores para la función de densidad conjunta se presentan en el cuerpo de la Tabla 4.1.

El valor de $F(0,2)$ usando la Tabla 4.1, se calcula de la siguiente forma,

$$F_{\overline{X}}(0,2) = P(X_1 \le 0, X_2 \le 2) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(0,2)$$

$$F(0,2) = F_{\overline{X}}(0,2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$$

Tabla 4.1 Función de probabilidad conjunta de X_1 y X_2

$R_{X_2} \backslash R_{X_1}$	0	1	2	Marginales
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{21}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
Marginales	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$	

Pero cabe preguntarse, ¿los valores de la Tabla 4.1 definen una función de probabilidad conjunta?

En efecto,

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2) \geq 0$, debido a que cada uno de los valores de la Tabla 4.1 es mayor o igual que cero.

ii) $\sum\limits_{R_{X_1}} \sum\limits_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(1,1)$

$$+ f_{\overline{X}}(1,2) + f_{\overline{X}}(2,0) + f_{\overline{X}}(2,1) + f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$\sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} + \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 + \frac{3}{36} + 0 + 0 = \frac{36}{36} = 1$$

Del cumplimiento de las dos condiciones anteriores, se deduce que $f_{\overline{X}}$ sí es una función de probabilidad para el vector aleatorio en consideración.

A continuación se calculan *a)* $P(X_1 \leq 1, X_2 > 1)$, *b)* $P(X_1 \geq 1, X_2 \geq 1)$, *c)* el valor de $F_{\overline{X}}(1,1)$

$$a)\ P(X_1 \le 1, X_2 > 1) = f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,2) = \frac{1}{36} + 0 = \frac{1}{36}$$

$$b)\ P(X_1 \ge 1, X_2 \ge 1) = f_{\overline{X}}(1,1) + f_{\overline{X}}(1,2) + f_{\overline{X}}(2,1) + f_{\overline{X}}(2,2) = \frac{6}{36} + 0 + 0 + 0 + 0 = \frac{6}{36}$$

$$c)\ F_{\overline{X}}(1,1) = P(X_1 \le 1, X_2 \le 1) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(1,1)$$

$$F_{\overline{X}}(1,1) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{12}{36} + \frac{6}{36} = \frac{32}{36}$$

En seguida se presentan algunos valores para las distribuciones marginales:

$$f_{X_1}(1) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(1, x_2) = f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(1,1) + f_{\overline{X}}(1,2)$$

$$f_{X_1}(1) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(1, x_2) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{18}{36}$$

$$f_{X_2}(0) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 0) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(2,0)$$

$$f_{X_2}(0) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 0) = \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{3}{36} = \frac{21}{36}$$

Ejemplo 4.6 A continuación se proporciona un ejemplo en el cual se trabaja con un vector aleatorio continuo bidimensional.

Analizar si la siguiente función corresponde a una función de densidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 24x_1x_2 \ \ si \ \ 0 < x_1 < 1;\ x_2 > 0;\ x_1 + x_2 < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{en otro caso} \end{cases}$$

i) $f_{\overline{X}}(x_1, x_2) \ge 0$, por definición de la función dada.

$$ii)\ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1\left(\int_0^{1-x_1} x_2dx_2\right)dx_1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1, x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1 24x_1 \left.\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\right|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 12x_1(1-x_1)^2\,dx_1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(12x_1 - 24x_1^2 + 12x_1^3\right)dx_1 = \left(6x_1^2 - 8x_1^3 + 3x_1^4\right)\Big|_0^1 = 6 - 8 + 3 = 1$$

Del cumplimiento de las dos condiciones anteriores, se deduce que $f_{\overline{X}}$ si es una función de densidad de probabilidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$.

En seguida se calcula *a)* $P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2)$, *b)* se determinan las funciones de densidad marginales.

$$a)\ P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \int_{0.5}^{0.8}\left(\int_0^{0.2} 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 + \int_{0.8}^{1}\left(\int_0^{1-x_1} 24x_1x_2dx_2\right)dx_1$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \int_{0.5}^{0.8} 24x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.2} dx_1 + \int_{0.8}^{1} 24x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \int_{0.5}^{0.8} 12x_1\left(0.04\right)dx_1 + \int_{0.8}^{1} 12x_1\left(1 - x_1\right)^2 dx_1$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \int_{0.5}^{0.8} 0.48x_1dx_1 + \int_{0.8}^{1}\left(12x_1 - 24x_1^2 + 12x_1^3\right)dx_1$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \left(0.24x_1^2\right)\Big|_{0.5}^{0.8} - \left(6x_1^2 - 8x_1^3 + 3x_1^4\right)\Big|_{0.8}^{1}$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = \left(0.24(0.8)^2\right) - \left(0.24(0.5)^2\right) + \left(6(1)^2 - 8(1)^3 + 3(1)^4\right) - \left(6(0.8)^2 - 8(0.8)^3 + 3(0.8)^4\right)$$

$$P(X_1 > 0.5, X_2 < 0.2) = 0.1536 - 0.06 + 1 - 3.84 + 4.96 - 1.2288 \cong 0.1208$$

b) A continuación se determinan las funciones de densidad marginales.

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{0} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_2 + \int_{0}^{1-x_1} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_2 + \int_{1-x_1}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_2$$

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^{1-x_1} 24x_1x_2dx_2 = 24x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} = 12x_1\left(1 - x_1\right)^2$$

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 12x_1\left(1 - x_1\right)^2 & si\ 0 < x_1 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1 = \int_{-\infty}^{0} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1 + \int_{0}^{1-x_2} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1 + \int_{1-x_2}^{\infty} f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1$$

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^{1-x_2} 24x_1x_2dx_1 = 24x_2 \left(\frac{x_1^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_2} = 12x_2\left(1-x_2\right)^2$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 12x_2\left(1-x_2\right)^2 & si\ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

4.6 Valor esperado y matriz de covarianzas

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, entonces el valor esperado del vector aleatorio $\overline{X}$ es otro vector conformado por los valores esperados de cada variable aleatoria que compone dicho vector,

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(X_1, X_2\right) = \left(E(X_1), E(X_2)\right)$$

Donde,

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2)$$

En general, para un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^k, β_k), $\overline{X} = (X_1, X_2, ..., X_k)$ un vector aleatorio discreto en R^k, $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_k)$ un vector en R^k, el valor esperado del vector aleatorio $\overline{X}$ es

$$E\left(\overline{X}\right) = \left(E(X_1), E(X_2), ..., E(X_k)\right)$$

Donde,

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}...\sum_{R_{X_k}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}...\sum_{R_{X_k}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

Así, sucesivamente,

$$E(X_k) = \sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}...\sum_{R_{X_k}} x_k f_{\overline{X}}(x_1, x_2, ..., x_k)$$

Adicionalmente,

$$E(X_iX_j)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}}...\sum_{R_{X_k}}x_ix_jf_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)$$

Ahora si $\overline{X}=(X_1,X_2,...,X_k)$ es un vector aleatorio continuo en R^k, entonces,

$$E(X_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}x_1f_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)dx_1dx_2...dx_k$$

$$E(X_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}x_2f_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)dx_1dx_2...dx_k$$

Así sucesivamente,

$$E(X_k)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}x_2f_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)dx_1dx_2...dx_k$$

Además,

$$E(X_iX_j)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}x_ix_jf_{\overline{X}}(x_1,x_2,...,x_k)dx_1dx_2...dx_k$$

De manera general, $E(X_i)<\infty$ y $E(X_j)<\infty$, $i,j=1,2...,k$, entonces se define la covarianza entre X_i y X_j de la siguiente forma:

$$Cov\left(X_i,X_j\right)=E\left((X_i-E(X_i))(X_j-E(X_j))\right)=Cov\left(X_j,X_i\right)$$

$$Cov\left(X_i,X_j\right)=E\left(X_iX_j\right)-E\left(X_i\right)E\left(X_j\right)$$

Como caso particular resulta,

$$Cov\left(X_i,X_i\right)=E\left((X_i-E(X_i))(X_i-E(X_i))\right)=E\left(X_i-E(X_i)\right)^2=Var\left(X_i\right)$$

Como consecuencia, se tiene

$$Cov\left(X_i,X_i\right)=E\left(X_iX_i\right)-E\left(X_i\right)E\left(X_i\right)=E\left(X_i\right)^2-\left(E\left(X_i\right)\right)^2=Var\left(X_i\right)$$

La matriz de covarianzas asociada correspondiente al vector aleatorio $\overline{X}=(X_1,X_2,...,X_k)$ se denota y define de la siguiente manera:

$$\sum=\begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) & ... & Cov(X_1,X_k) \\ Cov(X_2,X_1) & Cov(X_2,X_2) & ... & Cov(X_2,X_k) \\ . & . & ... & . \\ Cov(X_k,X_1) & Cov(X_k,X_2) & ... & Cov(X_k,X_k) \end{pmatrix}$$

El coeficiente de correlación lineal entre las variables X_i y X_j se denota y define de la siguiente manera:

$$\rho_{ij}=\frac{Cov(X_i,X_j)}{\sqrt{Var(X_i)}\sqrt{Var(X_j)}}$$

El coeficiente de correlación indica una relación lineal entre las variables X_i y X_j

$$Var\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)=\sum_{i=1}^{k} Var(X_i)+2\sum\sum_{i<j} Cov\left(X_i,X_j\right)$$

Solamente en el caso en que las variables $X_1,X_2,...,X_k$ sean independientes, entonces,

$$Var\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)=\sum_{i=1}^{k} Var(X_i)$$

Es decir,

$$Var\left(X_1+X_2+...+X_k\right)=Var\left(X_1\right)+Var\left(X_2\right)+...+Var\left(X_k\right)$$

Ejemplo 4.7. Se sabe que la función $f_{\overline{X}}(x_1,x_2)$ del ejemplo 4.6 es una función de densidad de probabilidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X}=(X_1,X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\begin{cases}24x_1x_2 \;\; si \;\; 0<x_1<1;\; x_2>0;\; x_1+x_2<1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad en\ otro\ caso\end{cases}$$

Determinar *a)* el valor esperado de $\overline{X}$, *b)* la matriz de covarianza y *c)* la matriz de correlaciones.

$$a)\ E\left(\overline{X}\right)=\left(E(X_1),E(X_2)\right)$$

$$E(X_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} x_1 24x_1x_2dx_2\right)dx_1=\int_0^1 24x_1^2\left(\int_0^{1-x_1} x_2dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_1)=\int_0^1 24x_1^2\left.\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\right|_0^{1-x_1} dx_1=\int_0^1 12x_1^2\left(1-x_1\right)^2 dx_1=\int_0^1\left(12x_1^2-24x_1^3+12x_1^4\right)dx_1$$

$$E(X_1) = \left(4x_1^3 - 6x_1^4 + \frac{12}{5}x_1^5\right)\Bigg|_0^1 = 4-6+\frac{12}{5} = \frac{2}{5}$$

$$E(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} x_2 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1\left(\int_0^{1-x_1} x_2^2dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_2) = \int_0^1 24x_1\left(\frac{x_2^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 8x_1(1-x_1)^3dx_1 = \int_0^1\left(8x_1 - 24x_1^2 + 24x_1^3 - 8x_1^4\right)dx_1$$

$$E(X_2) = \left(4x_1^2 - 8x_1^3 + 6x_1^4 - \frac{8}{5}x_1^5\right)\Bigg|_0^1 = 4-8+6-\frac{8}{5} = \frac{2}{5}$$

Por lo tanto,

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(X_1, X_2\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

Por otro lado,

$$E(X_1^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} x_1^2 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1^3\left(\int_0^{1-x_1} x_2dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_1^2) = \int_0^1 24x_1^3\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 12x_1^3(1-x_1)^2dx_1 = \int_0^1\left(12x_1^3 - 24x_1^4 + 12x_1^5\right)dx_1$$

En consecuencia,

$$E(X_1^2) = \left(3x_1^4 - \frac{24}{5}x_1^5 + 2x_1^6\right)\Bigg|_0^1 = 3-\frac{24}{5}+2 = \frac{1}{5}$$

Así,

$$Cov\left(X_1, X_1\right) = Var\left(X_1\right) = E\left(X_1\right)^2 - \left(E\left(X_1\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}$$

$$E(X_2^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_2^2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} x_2^2 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1\left(\int_0^{1-x_1} x_2^3dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_2^2) = \int_0^1 24x_1\left(\frac{x_2^4}{4}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 6x_1(1-x_1)^4dx_1 = \int_0^1\left(6x_1 - 24x_1^2 + 36x_1^3 - 24x_1^4 + 6x_1^5\right)dx_1$$

$$E(X_2^2) = \left(3x_1^2 - 8x_1^3 + 9x_1^4 - \frac{24}{5}x_1^5 + x_1^6\right)\Bigg|_0^1 = 3-8+9-\frac{24}{5}+1 = 5-\frac{24}{5} = \frac{1}{5}$$

Por consiguiente,

$$Cov\left(X_2, X_2\right) = Var\left(X_2\right) = E\left(X_2\right)^2 - \left(E\left(X_2\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{4}{25} = \frac{1}{25}$$

$$E(X_1X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \int_0^1\left(\int_0^{1-x_2} x_1^2\, 24x_1x_2dx_2\right)dx_1 = \int_0^1 24x_1^2\left(\int_0^{1-x_1} x_2^2dx_2\right)dx_1$$

$$E(X_1X_2) = \int_0^1 24x_1^2\left(\frac{x_2^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x_1} dx_1 = \int_0^1 8x_1^2\left(1-x_1\right)^3 dx_1 = \int_0^1\left(8x_1^2 - 24x_1^3 + 24x_1^4 - 8x_1^5\right)dx_1$$

$$E(X_1X_2) = \left(\frac{8}{3}x_1^3 - 6x_1^4 + \frac{24}{5}x_1^5 - \frac{8}{6}x_1^6\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3} - 6 + \frac{24}{5} - \frac{8}{6} = \frac{2}{15}$$

Por lo tanto,

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{2}{15} - \left(\frac{2}{15}\right)\left(\frac{2}{15}\right) = -\frac{2}{75} = Cov(X_2, X_1)$$

b) La matriz de covarianzas es la siguiente,

$$\sum = \begin{pmatrix} Cov(X_1, X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Cov(X_2, X_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{25} & \frac{-2}{75} \\ \frac{-2}{75} & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de correlaciones, inicialmente se calculan los siguientes coeficientes de correlación,

$$\rho_{1,1} = \frac{Cov(X_1, X_1)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_1)}} = \frac{\frac{1}{25}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{1}{25}}} = 1$$

$$\rho_{2,2} = \frac{Cov(X_2, X_2)}{\sqrt{Var(X_2)}\sqrt{Var(X_2)}} = \frac{\frac{1}{25}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{1}{25}}} = 1$$

$$\rho_{1,2} = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}} = \frac{\frac{-2}{75}}{\sqrt{\frac{1}{25}}\sqrt{\frac{1}{25}}} = \frac{\frac{-2}{75}}{\frac{1}{25}} = \frac{-50}{75} = \frac{-2}{3} = \rho_{2,1}$$

Así, la matriz de correlaciones es

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-2}{3} \\ \dfrac{-2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.8 Con la información del ejemplo 4.5, determinar *a)* el valor esperado del vector aleatorio discreto $\overline{X}$, *b)* la matriz de covarianza y *c)* la matriz de correlaciones.

$$a)\ E\left(\overline{X}\right) = \left(E(X_1), E(X_2)\right)$$

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = 0 f_{\overline{X}}(0,0) + 0 f_{\overline{X}}(0,1) + 0 f_{\overline{X}}(0,2) + 1 f_{\overline{X}}(1,0) + 1 f_{\overline{X}}(1,1)$$
$$+ 1 f_{\overline{X}}(1,2) + 2 f_{\overline{X}}(2,0) + 2 f_{\overline{X}}(2,1) + 2 f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = 0*\frac{6}{36} + 0*\frac{8}{36} + 0*\frac{1}{36} + 1*\frac{12}{36} + 1*\frac{6}{36} + 1*0 + 2*\frac{3}{36} + 2*0 + 2*0$$

$$E(X_1) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} x_1 f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \frac{24}{36}$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = 0 f_{\overline{X}}(0,0) + 0 f_{\overline{X}}(1,0) + 0 f_{\overline{X}}(2,0) + 1 f_{\overline{X}}(0,1) + 1 f_{\overline{X}}(1,1)$$
$$+ 1 f_{\overline{X}}(2,1) + 2 f_{\overline{X}}(0,2) + 2 f_{\overline{X}}(1,2) + 2 f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = 0*\frac{6}{36} + 0*\frac{12}{36} + 0*\frac{3}{36} + 1*\frac{8}{36} + 1*\frac{6}{36} + 1*0 + 2*\frac{1}{36} + 2*0 + 2*0$$

$$E(X_2) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \frac{16}{36}$$

Por lo tanto,

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(X_1, X_2\right) = \left(\frac{24}{36}, \frac{16}{36}\right)$$

$$E(X_1 X_2) = \sum_{R_{X_1}} \sum_{R_{X_2}} x_1 x_2 f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = 0*0 f_{\overline{X}}(0,0) + 0*1 f_{\overline{X}}(0,1) + 0*2 f_{\overline{X}}(0,2) + 1*0 f_{\overline{X}}(1,0)$$
$$+ 1*1 f_{\overline{X}}(1,1) + 1*2 f_{\overline{X}}(1,2) + 2*0 f_{\overline{X}}(2,0) + 2*1 f_{\overline{X}}(2,1) + 2*2 f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_1X_2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1x_2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=0*0\frac{6}{36}+0*1\frac{8}{36}+0*2\frac{1}{36}+1*0\frac{12}{36}$$
$$+1*1\frac{6}{36}+1*2*0+2*0\frac{3}{36}+2*1*0+2*2*0$$

Por consiguiente,

$$E(X_1X_2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1x_2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\frac{6}{36}$$

A continuación,

$$Cov\left(X_1,X_2\right)=E\left(X_1X_2\right)-E\left(X_1\right)E(X_2)=\left(\frac{6}{36}\right)-\left(\frac{24}{36}\right)\left(\frac{16}{36}\right)=\frac{1}{6}-\frac{8}{27}=\frac{-7}{54}$$

$$Cov\left(X_2,X_1\right)=\frac{-7}{54}$$

Además,

$$E(X_1^2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1^2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=0^2 f_{\overline{X}}(0,0)+0^2 f_{\overline{X}}(0,1)+0^2 f_{\overline{X}}(0,2)+1^2 f_{\overline{X}}(1,0)+1^2 f_{\overline{X}}(1,1)$$
$$+1^2 f_{\overline{X}}(1,2)+2^2 f_{\overline{X}}(2,0)+2^2 f_{\overline{X}}(2,1)+2^2 f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_1^2)=0^2*\frac{6}{36}+0^2*\frac{8}{36}+0^2*\frac{1}{36}+1^2*\frac{12}{36}+1^2*\frac{6}{36}+1^2*0+2^2*\frac{3}{36}+2^2*0+2^2*0$$

$$E(X_1^2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_1^2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\frac{30}{36}$$

Ahora,

$$Cov\left(X_1,X_1\right)=Var\left(X_1\right)=E\left(X_1\right)^2-\left(E\left(X_1\right)\right)^2=\left(\frac{30}{36}\right)-\left(\frac{24}{36}\right)^2=\frac{5}{6}-\frac{4}{9}=\frac{14}{36}$$

$$E(X_2^2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_2^2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=0^2 f_{\overline{X}}(0,0)+0^2 f_{\overline{X}}(1,0)+0^2 f_{\overline{X}}(2,0)+1^2 f_{\overline{X}}(0,1)+1^2 f_{\overline{X}}(1,1)$$
$$+1^2 f_{\overline{X}}(2,1)+2^2 f_{\overline{X}}(0,2)+2^2 f_{\overline{X}}(1,2)+2^2 f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$E(X_2^2)=0^2*\frac{6}{36}+0^2*\frac{12}{36}+0^2*\frac{3}{36}+1^2*\frac{8}{36}+1^2*\frac{6}{36}+1^2*0+2^2*\frac{1}{36}+2^2*0+2^2*0$$

$$E(X_2^2)=\sum_{R_{X_1}}\sum_{R_{X_2}} x_2^2 f_{\overline{X}}(x_1,x_2)=\frac{18}{36}$$

Pero,

$$Cov(X_2,X_2)=Var(X_2)=E(X_2)^2-(E(X_2))^2=\left(\frac{18}{36}\right)-\left(\frac{16}{36}\right)^2=\frac{3}{6}-\frac{16}{81}=\frac{49}{162}$$

b) La matriz de covarianzas es,

$$\sum=\begin{pmatrix} Cov(X_1,X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & Cov(X_2,X_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{14}{36} & \frac{-7}{54} \\ \frac{-7}{54} & \frac{49}{162}\end{pmatrix}$$

A continuación se calculan los siguientes coeficientes de correlación,

$$\rho_{1,1}=\frac{Cov(X_1,X_1)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_1)}}=\frac{\frac{14}{36}}{\sqrt{\frac{14}{36}}\sqrt{\frac{14}{36}}}=1$$

$$\rho_{2,2}=\frac{Cov(X_2,X_2)}{\sqrt{Var(X_2)}\sqrt{Var(X_2)}}=\frac{\frac{49}{162}}{\sqrt{\frac{49}{162}}\sqrt{\frac{49}{162}}}=1$$

$$\rho_{1,2}=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{Var(X_1)}\sqrt{Var(X_2)}}=\frac{\frac{-7}{54}}{\sqrt{\frac{14}{36}}\sqrt{\frac{49}{162}}}=\frac{\frac{-7}{54}}{\frac{7}{6}\frac{\sqrt{7}}{9}}=\frac{-1}{\sqrt{7}}=\rho_{2,1}$$

Así, la matriz de correlaciones es,

$$\rho=\begin{pmatrix}\rho_{1,1} & \rho_{1,2} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{7}} \\ \frac{-1}{\sqrt{7}} & 1\end{pmatrix}$$

4.7 Función de probabilidad condicional

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega,\Im,P)$ y el espacio medible (R^2,β_2), $\bar{X}=(X_1,X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\bar{x}=(x_1,x_2)$ un vector en R^2, entonces la función de probabilidad condicional de X_1 dada X_2 se denota y se define de la siguiente forma:

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)}{P(X_2 = x_2)} = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Con $f_{X_2}(x_2) > 0$

La función de probabilidad condicional de X_2 dada X_1 se denota y se define de la siguiente forma:

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{P(X_2 = x_1, X_1 = x_1)}{P(X_1 = x_1)} = \frac{f_{\overline{X}}(x_2, x_1)}{f_{X_1}(x_1)}$$

Con $f_{X_1}(x_1) > 0$

Ejemplo 4.9 Con la información del ejemplo 4.5, determinar la probabilidad condicional de $X_1 = 1$ dada $X_2 = 0$.

Uno de los resultados del ejemplo 5.5 permitió establecer que

$$f_{X_2}(0) = P(X_2 = 0) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 0) = \frac{6}{36} + \frac{12}{36} + \frac{3}{36} = \frac{21}{36}$$

En consecuencia

$$f_{X_1/X_2}(1/0) = \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 0)}{P(X_2 = 0)} = \frac{\frac{12}{36}}{\frac{21}{36}} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el spacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, entonces la función de densidad de probabilidad condicional de X_1 dada X_2 se denota y se define de la siguiente forma

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Con $f_{X_2}(x_2) > 0$

La función de densidad de probabilidad condicional de X_2 dada X_1 se denota y se define de la siguiente forma:

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

Con $f_{X_1}(x_1) > 0$

Ejemplo 4.10 Con la función de densidad bivariada del ejemplo 4.6, determinar la función de densidad de probabilidad condicional de X_2 dada X_1.

Uno de los resultados del ejemplo 4.6 permitió obtener,

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 12x_1(1-x_1)^2 & si\ 0 < x_1 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = \begin{cases} \dfrac{24x_1x_2}{12x_1(1-x_1)^2} & si\ 0 < x_1 < 1;\ 0 < x_2 < 1 - x_1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

4.8 Esperanza matemática condicional

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio discreto en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, entonces la esperanza matemática de X_1 dada X_2 se denota y se define de la siguiente forma:

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \sum_{R_{X_1}} x_1 f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \sum_{R_{X_1}} x_1 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

La esperanza matemática de X_2 dada X_1 se denota y se define de la siguiente forma:

$$E(X_2/X_1 = x_1) = \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1) = \sum_{R_{X2}} x_2 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}$$

Ejemplo 4.11 Con la información del ejemplo 5.5, determinar la esperanza matemática de X_2 dada $X_1 = 1$.

En principio,

$$E(X_2/X_1 = 1) = \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1 = 1) = \sum_{R_{X2}} x_2 \frac{f_{\overline{X}}(1, x_2)}{f_{X_1}(1)}$$

Luego,

$$E(X_2/X_1 = 1) = 0\frac{f_{\overline{X}}(1,0)}{f_{X_1}(1)} + 1\frac{f_{\overline{X}}(1,1)}{f_{X_1}(1)} + 2\frac{f_{\overline{X}}(1,2)}{f_{X_1}(1)}$$

Adicionalmente, usando la información de la Tabla 4.1 y uno de los resultados del ejemplo 4.5 que establece que

$$f_{X_1}(1) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(1, x_2) = \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{18}{36}$$

Reemplazando, se tiene:

$$E(X_2/X_1 = 1) = 0\left(\frac{\frac{12}{36}}{\frac{18}{36}}\right) + 1\left(\frac{\frac{6}{36}}{\frac{18}{36}}\right) + 2(0) = \frac{1}{3}$$

Sea un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y el espacio medible (R^2, β_2), $\overline{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio continuo en R^2, $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vector en R^2, entonces la esperanza matemática de X_1 dada X_2 se denota y se define de la siguiente forma:

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)\, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx_1$$

La esperanza matemática de X_2 dada X_1 se denota y se define de la siguiente forma:

$$E(X_2/X_1 = x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)\, dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} dx_2$$

Ejemplo 4.12 Con la información del ejemplo 4.6, determinar la esperanza matemática de X_2 dada $X_1 = 0.5$

Usando el resultado del ejemplo 4.10, se tiene que

$$E(X_2/X_1 = x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)\,dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x_2 \frac{24x_1x_2}{12x_1(1-x_1)^2}\,dx_2$$

$$E(X_2/X_1 = x_1) = \int_0^{1-x_1} x_2 \frac{24x_1x_2}{12x_1(1-x_1)^2}\,dx_2 = \left.\frac{2x_1\left(\frac{x_2^3}{3}\right)}{x_1(1-x_1)^2}\right|_0^{1-x_1} = \frac{2x_1(1-x_1)^3}{3x_1(1-x_1)^2}$$

$$E(X_2/X_1 = x_1) = \frac{2(1-x_1)}{3}$$

Finalmente,

$$E(X_2/X_1 = 0.5) = \frac{2(1-0.5)}{3} = \frac{1}{3}$$

Actividades para el estudio independiente capítulo 4

4.1 Con base en la información de la Tabla 4.1, determinar $a)$ $P(X_1 \leq 2, X_2 > 1)$,

b) $F_{\overline{X}}(1,2)$, $f(1,0)$, *c)* $f_{X_1}(0)$, *d)* $f_{X_2}(2)$, *e)* $f_{X_2/X_1}(2/0)$, *f)* $E(X_2/X_1 = 2)$.

4.2 Dada la siguiente función de densidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 24x_1x_2 \ \ si \ \ 0 < x_1 < 1; \ x_2 > 0; \ x_1 + x_2 < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Calcular $a)$ $P(X_1 \leq 0.6, X_2 < 0.2)$, *b)* $f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)$ *c)* determinar la esperanza matemática de X_1 dada $X_2 = 0.4$.

Ejercicios para el capítulo 4

4.1 Con base en la información de la Tabla 4.2, determinar $a)$ $P(X_1 \leq 2, X_2 > 1)$, *b)* $F_{\overline{X}}(1,2)$, $f(1,3)$, *c)* $f_{X_1}(2)$, *d)* $f_{X_2}(1)$, *e)* $f_{X_2/X_1}(2/3)$, *f)* $E(X_2/X_1 = 2)$, *g)* Obtener el valor esperado para el vector aleatorio discreto $\overline{X} = (X_1, X_2)$, *h)* obtener la matriz de varianza y la matriz de correlación para el vector aleatorio $\overline{X}$.

Tabla 4.2 Función de probabilidad conjunta de X_1 **y** X_2

$R_{X_2} \backslash R_{X_1}$	1	2	3	Marginales
1	0.1	0	0.13	0.23
2	0	0.25	0.07	0.32
3	0.3	0.15	0	0.45
Marginales	0.4	0.4	0.2	

4.2 Analizar si la siguiente función corresponde a una función de densidad de probabilidad para el vector aleatorio continuo $\overline{X} = (X_1, X_2)$,

$$f_{\overline{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 + x_2 \ \ si \ \ 0 < x_1 < 1; \ 0 < x_2 < 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad en \ otro \ caso \end{cases}$$

De resultar función de densidad, calcular: $a)$ $P(X_1 \leq 0.8, X_2 > 0.2)$, *b)* $f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)$ *c)* determinar la esperanza matemática de X_1 dada $X_2 = 0.7$ *d)* obtener el valor esperado para el vector aleatorio $\overline{X} = (X_1, X_2)$, *e)* obtener la matriz de varianza y la matriz de correlación para el vector aleatorio $\overline{X}$.

5

INFORMACIÓN DE RETORNO SOBRE LAS ACTIVIDADES DE ESTUDIO INDEPENDIENTE

En este capítulo se desarrollan procesos de cálculo y se proporcionan las respuestas a las preguntas que se formulan en las actividades para el estudio independiente, que el estudiante o el lector debía haber resuelto una vez haya realizado una lectura comprensiva de los temas y revisado los ejemplos indicados a través de cada capítulo. Con el propósito de aclarar algunas dudas, se desarrollan completamente los ejercicios que se propusieron en las mencionadas actividades.

Capítulo 1

1.1

a) Espacio muestral
b) Experimento aleatorio
c) Evento
d) Continuo.
e) $\sigma -$ *álgebra de Borel*
f) Un espacio de probabilidad sobre Ω
g) Laplaciano

1.2 Clasificar cada uno de los siguientes espacios muestrales:

a) Espacio muestral discreto (finito)
b) Espacio muestral discreto (infinito contable)
c) Espacio muestral continuo (infinito no contable)
d) Espacio muestral discreto (finito)

1.3 De acuerdo con cada uno de los siguientes espacios muestrales, responder las preguntas correspondientes.

Si $\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$ y considerando las colecciones de subconjuntos de Ω siguientes:

$\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$

$\Im_2 = \{\phi, \{cc\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$

$\Im_3 = \{\phi, \{cc, cs\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$

$\Im_4 = \{\phi, \{cc, cs, sc\}, \{ss\}\}$

a) Sigma álgebra trivial

b) $\{sc, ss\}^c = \{cc, cs\} \notin \Im_2$

c) Sigma álgebra

d) $\Omega \notin \Im_4$

1.4 Asumiendo que todos los puntos del espacio muestral Ω tienen la misma probabilidad de ocurrir y dados los siguientes eventos:

$$E = \{cs, sc, ss\}$$

$$F = \{ss\}$$

e) $P(E) = \frac{3}{4}$

f) $P(F) = \frac{1}{4}$

g) $P(E \cup F) = \frac{3}{4}$

h) $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

i) $P(E^c) = \frac{1}{4}$

j) $P(E - F) = \frac{2}{4}$

1.5. Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω y sean F , E eventos en $\Im$ tales que $P(E) = p$, $P(F) = q$, $P(E \cup F) = r$, probar que:

a) $P(E \cap F) = p + q - r$.

Puesto que, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ resulta:

$$P(E \cap F) = P(E) + P(F) - P(E \cup F).$$

Sustituyendo $P(E) = p$, $P(F) = q$, $P(E \cup F) = r$

en la anterior expresión se obtiene: $P(E \cap F) = p + q - r$.

b) $P(E - F) = r - q$.

Los eventos $E - F$ y F son eventos mutuamente excluyentes, tales que

$$(E - F) \cup F = E \cup F$$

$$P(E - F) + P(F) = P(E \cup F)$$

$$P(E - F) = P(E \cup F) - P(F),$$

y reemplazando, $P(F) = q$, $P(E \cup F) = r$

en la anterior expresión resulta: $P(E - F) = r - q$.

c) $P(E^c \cap F^c) = 1 - r$.

Usando las leyes de Morgan, es posible escribir,

$$P(E^c \cap F^c) = P((E \cup F)^c) = 1 - P(E \cup F) = 1 - r.$$

d) $P(E \cup F^c) = p - r + 1$.

Usando las leyes de Morgan,

$$P(E \cup F^c) = P((E^c \cap F)^c) = 1 - P(E^c \cap F)$$

Pero $P(E^c \cap F) = P(F - E) = P(E \cup F) - P(E) = r - p$, sustituyendo en la expresión anterior se tiene,

$$P(E \cup F^c) = P((E^c \cap F)^c) = 1 - (r - p) = p - r + 1 .$$

1.6. Comprobar la ley de probabilidad total.

Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una partición de Ω entonces

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F \cap E_n) , \quad F \in \Im$$

En efecto, debido a que $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una partición de Ω, entonces los elementos de la partición son disjuntos dos a dos y se tiene que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$$F = F \cap \Omega = F / \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(F / E_n \right)$$

$$P(F) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(F / E_n \right) \right)$$

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(F / E_n \right) \qquad (*)$$

Puesto que,

$$P(F / E_n) = \frac{P\left(F / E_n \right)}{P(E_n)}$$

la anterior expresión se puede escribir como:

$$P(F / E_n) P(E_n) = P \ F / E_n \Big)$$

Reemplazando en (*) se tiene:

$$P(F) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F / E_n) P(E_n) \qquad (**)$$

Mostrar que si $E_1, E_2, ...$ es una partición de Ω con $P(E_n) > 0$ para todo *n,* entonces para todo F evento de $\Im$ tal que $P(F) > 0$ se cumple que,

$$P(E_n / F) = \frac{P(F / E_n)P(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(F / E_n)P(E_n)}.$$

Ya que,

$$P(F / E_n) = \frac{P(F \ / \ E_n)}{P(E_n)}$$

Implica que

$$P(F / E_n)P(E_n) = P(F \ / \ E_n)$$

Además,

$$P(E_n / F) = \frac{P(E_n \ / \ F)}{P(F)}$$

Se puede escribir así:

$$P(E_n / F) = \frac{P(F / E_n)P(E_n)}{P(F)}.$$

Sustituyendo (**) en la anterior expresión resulta:

$$P(E_n / F) = \frac{P(F / E_n)P(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(F / E_n)P(E_n)}.$$

1.7 Se tienen 3 cajas con artículos dispuestos de la siguiente forma: la primera caja tiene 20 artículos, de los cuales 8 son defectuosos; la segunda tiene 16 artículos, de los cuales 6 son defectuosos; y la tercera tiene 10 artículos, de los cuales 2 son defectuosos. Si se escoge una caja al azar y se extrae un artículo al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?
b) Si el artículo escogido resultó defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la segunda caja?

Se definen los siguientes eventos:

E : la unidad del artículo extraído al azar resulta defectuosa
A: la primera caja es seleccionada
B : la segunda caja es seleccionada
C : la tercera caja es seleccionada

a) $P(E)=P(E/A)P(A)+P(E/B)P(B)+P(E/C)P(C)$

$$P(E)=\left(\frac{8}{20}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{6}{16}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{10}\right)\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$P(E)=0.1333+0.125+0.0667\cong 0.325.$$

La probabilidad de que si se escoge una caja al azar y se extrae un artículo al azar, el artículo sea defectuoso, es de 32.5%.

b) $P(B/\ E)=\dfrac{P(E/B)P(B)}{P(E/A)P(A)+P(E/B)P(B)+P(E/C)P(C)}$

$$P(B/\ E)=\frac{\left(\frac{6}{16}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{0.325}=\frac{0.125}{0.325}=0.3846$$

Si el artículo escogido resultó defectuoso, la probabilidad de que provenga de la segunda caja es del 38.46%.

1.8 Una fábrica productora del artículo WW tiene tres puntos de producción A, B, C, donde el 70% de las unidades del artículo WW se producen en el punto A, el 20% en el punto B y el 10% en el punto C. Por circunstancias de mantenimiento de sus máquinas se están produciendo algunas unidades del artículo WW defectuosas. Sin embargo, el 90% de las unidades del producto que provienen de A es de buena calidad, el 80% de las que provienen de B es de buena calidad y el 85% de las que provienen de C es de buena calidad, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo WW resulte de buena calidad? Determinar la probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C.

Se definen los siguientes eventos:

E: la unidad del artículo WW seleccionada aleatoriamente resultará de buena calidad
A: unidades del artículo WW producidas en el punto A
B: unidades del artículo WW producidas en el punto B
C: unidades del artículo WW producidas en el punto C

$$P(E)=P(E/A)P(A)+P(E/B)P(B)+P(E/C)P(C)$$

$$P(E)=(0.9)(0.7)+(0.8)(0.2)+(0.85)(0.1)\ P(E)=0.63+0.16+0.085=0.875$$

La probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo WW resulte de buena calidad es de 0.875 o del 87.5%.

$$P(C/\ E)=\frac{P(E/C)P(C)}{P(E/A)P(A)+P(E/B)P(B)+P(E/C)P(C)}$$

$$P(C/\ E)=\frac{(0.85)(0.1)}{0.875}=0.097$$

La probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C es de 0.097 o del 9.7%.

1.9 ξ: se lanza una moneda una vez, sin que ella pueda caer de filo.

$$\Omega=\{c,s\};\text{ donde } c\text{ :cara, } s\text{ :sello.}$$

Si se toma como base el sigma álgebra dada por $\Im=\{\phi,\{c\},\{s\},\{c,s\}\}$, y definiendo siguiente *medida de probabilidad:*

$$P:\Im\to R\ .$$

Tal que

$$P(\{c\})=p_1\geq 0 \quad \text{y} \quad P(\{s\})=p_2\geq 0$$

con

$$\Omega=\{c,s\}$$

Entonces se debe cumplir que:

i) $P(\Omega)=1$

ii) $\sum_{i=1}^{2}p_i=1$, es decir que $p_1+p_2=1$.

¿Cuáles valores son posibles para p_1, p_2?

Solamente si se sabe con toda seguridad que la moneda que se lanza no está cargada, se puede asumir que $p_1=p_2=\frac{1}{2}$; en este caso se estará trabajando bajo equiprobabilidad.

Para los demás casos, se tiene que $p_1 \neq p_2$, pudiéndose tener por ejemplo que:

$$p_1 = \frac{1}{3} \text{ y } p_2 = \frac{2}{3}$$

$$p_1 = \frac{1}{5} \text{ y } p_2 = \frac{4}{5}$$

En otro caso, puede suceder por ejemplo que $p_1 = 3p_2$ con lo cual resulta que:

$$3p_2 + p_2 = 1$$

Entonces,

$$p_1 = \frac{3}{4} \; y \; p_2 = \frac{1}{4}$$

Y así se pueden presentar muchos casos más.

Es decir, que si no se trabaja bajo total incertidumbre, hay infinidad de valores que pueden asumir p_1, p_2 de tal forma que $p_1 + p_2 = 1$.

1.10 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ y se define la siguiente función,

$$P(\{n\}) = p_n = \frac{2}{3^n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Verificar si la anterior función define una medida de probabilidad. De ser así, calcular la probabilidad de los siguientes eventos: $E = \{1, 3, 5, ...\}$, $F = \{2, 4, 6, ...\}$, $H = \{1, 3, 5, 7\}$

Por la definición de P se tiene que,

$$i)\; p_n \geq 0$$

Ahora comprobaremos si la suma siguiente es igual a 1.

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2\left(1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) = 2\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}\right) = 2\left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 2\left(-1 + \frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Para el evento $E = \{1,3,5,...\}$ su probabilidad de ocurrencia es:

$$P(E) = P\left(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup ,...\right)$$

$$P(E) = P\left(\{1\}\right) + P\left(\{3\}\right) + P\left(\{5\}\right) + ...$$

$$P(E) = \frac{2}{3^1} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^5} + ...$$

$$P(E) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{-1}}\right)\frac{1}{3^{2n}} = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{2n}} = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$$

$$P(E) = 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} = 6\left(\frac{1}{1-\frac{1}{9}} - 1\right) = 6\left(\frac{1}{\frac{8}{9}} - 1\right) = 6\left(\tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{6}{8} = \tfrac{3}{4} = 0.75 \ .$$

Para el evento $F = \{2,4,6,...\}$ su probabilidad de ocurrencia se calcula de la siguiente manera:

$$F = \{2,4,6,...\} = E^c \ .$$

Luego,

$$P(F) = P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 0.75 = 0.25$$

Para el evento finito $H = \{1,3,5,7\}$ su probabilidad de ocurrencia es,

$$P(E) = P\left(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup ,\{7\}\right)$$

$$P(E) = P\left(\{1\}\right) + P\left(\{3\}\right) + P\left(\{5\}\right) + P\left(\{7\}\right)$$

$$P(E) = \frac{1458 + 162 + 18 + 2}{3^7} = \frac{1640}{2187} =\cong 0.7498$$

Capítulo 2

2.1 Para el espacio muestral constituido por los siguientes resultados: $n =$ no, $s =$ sí, como la posible respuesta que podría dar una persona escogida aleatoriamente a la pregunta, ¿es usted un trabajador del sector público?

$$\Omega = \{s, n\}$$

Se define la siguiente variable aleatoria:

$$X : \Omega \to R$$

$$n \to 0$$

$$s \to 1 \; .$$

Determinar *a)* el rango de la variables *b)* la función de probabilidad, *c)* la distribución de probabilidad, *d)* el valor esperado, *e)* la varianza, *f)* la desviación estándar de la variable aleatoria y *g)* calcular la probabilidad: $P(X<1)$, $P(X>0)$, $P(X=1)$.

a) En este caso se tiene que $X(n)=0$ y $X(s)=1$, X es una variable aleatoria cuyo rango es un conjunto finito dado por $R_X=\{0,1\}$. En este contexto R_X denota el rango de la variable aleatoria mencionada.

b) Bajo el supuesto de que los resultados del espacio muestral fueran equiprobables, para determinar la función de probabilidad, se procede de la siguiente manera:

$$f(x_1)=f(0)=P(X=0)=\frac{1}{2}$$

$$f(x_2)=f(1)=P(X=1)=\frac{1}{2}$$

Cada $f(x_i)>0$

$$\sum_{i=1}^{2} f(x_i)=f(x_1)+f(x_2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1 \, .$$

La función de probabilidad está dada en la Tabla 5.1:

Tabla 5.1. Función de probabilidad

X	0	1	Suma
$f(x)=P(X=x)$	1/2	1/2	1

c) La distribución de probabilidad se presenta en la Tabla 5.2:

Tabla 5.2. Distribución de probabilidad

X	0	1
$F(x)=P(X\le x)$	1/2	2/2

d) El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula utilizando la expresión siguiente:

$$E(X)=\sum_{x_i\in R_X} x_i f(x_i)=\sum_{x_i\in R_X} x_i P(X=x_i)$$

$$E(X)=0\left(\frac{1}{2}\right)+1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

e) Para determinar la varianza, inicialmente se calcula:

$$E(X^2)=\sum_{x_i\in R_X} x_i^2 f(x_i)=\sum_{x_i\in R_X} x_i^2 P(X=x_i)$$

$$E(X^2)=0^2\left(\frac{1}{2}\right)+1^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Como

$$Var(X)=E\left(X\right)^2-\left(E(X)\right)^2$$

$$Var(X)=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

f) La desviación estándar es:

$$\sigma_X=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

g) Para calcular las probabilidades siguientes se utilizan los valores que se presentan en las tablas 5.1 y 5.2.

$$P\left(X<1\right)=P(X=0)=\frac{1}{2}$$

$$P\left(X>0\right)=P(X=1)=\frac{1}{2}$$

2.2 Se seleccionan aleatoriamente dos artículos de un proceso productivo para analizar si son defectuosos o no defectuosos y se obtiene el siguiente espacio muestral:

$$\Omega=\left\{dd,dn,nd,nn\right\}$$

Donde d: artículo defectuoso y n: artículo no defectuoso, se define la siguiente variable aleatoria:

$$X:\Omega\to R$$

X : número de artículos defectuosos en cada resultado de Ω.

Determinar *a)* la función de probabilidad, *b)* la distribución de probabilidad, *c)* el valor esperado, *d)* la varianza, *e)* la desviación estándar de la variable aleatoria y *f)* calcular las siguientes probabilidades: $P(X \leq 1)$, $P(X > 0)$, $P(X = 1)$.

a) Inicialmente se determina el rango de la variable,

$$X(dd) = 2$$

$$X(dn) = 1 = X(nd)$$

$$X(nn) = 0$$

La variable X es una variable aleatoria discreta que toma los valores enteros 0, 1, 2, es decir,

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

El rango de la variable es $R_X = \{x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2\}$

Ahora,

$$f(x_1) = f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$f(x_2) = f(1) = P(X = 1) = \frac{2}{4}$$

$$f(x_3) = f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Cada $f(x_i) > 0$.

$$\sum_{i=1}^{3} f(x_i) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

La función de probabilidad está dada en la Tabla 5.3:

Tabla 5.3. Función de probabilidad

X	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	1/4	2/4	1/4

b) La distribución de probabilidad se presenta en la Tabla 5.4:

Tabla 5.4. Distribución de probabilidad

X	0	1	2
$F(x) = P(X \leq x)$	¼	¾	1

c) El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula utilizando la expresión siguiente:

$$E(X) = \sum_{x_i \in R_X} x_i f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{2}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{4} = 1$$

d) Para determinar la varianza, inicialmente se calcula:

$$E(X^2) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 f(x_i) = \sum_{x_i \in R_X} x_i^2 P(X = x_i)$$

$$E(X^2) = 0^2\left(\frac{1}{4}\right) + 1^2\left(\frac{2}{4}\right) + 2^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{4} = 1.5$$

Como

$$Var(X) = E(X)^2 - (E(X))^2$$

$$Var(X) = 1.5 - (1)^2 = 0.5$$

e) La desviación estándar es:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.5} = 0.7071$$

f) Para calcular las probabilidades siguientes se utilizan los valores que se presentan en las tablas 5.3 y 5.4.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(X > 0) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(X = 1) = \frac{2}{4}$$

2.3 Dada la función,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & si\ x \in [0,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,2] \end{cases}$$

a) Analizar si es una función de densidad para la variable aleatoria *X*.

En efecto, para valores de x fuera del intervalo [0,2] la función vale cero y para valores de x en el intervalo [0,2] se trabaja con

$$f(x) = \frac{1}{2}x$$

En la Tabla 5.5 se presentan algunos valores de la función $f(x)$ y en la Figura 4.1 se muestra la representación gráfica de la mencionada función.

Tabla 5.5. Valores de la función *f(x)*

x	0	1	2	1.4	3	-1
$f(x)$	0	0.5	1	0.7	0	0

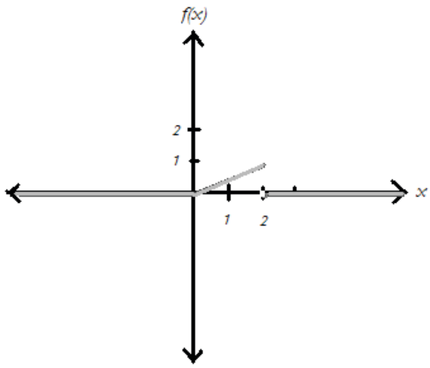

Figura 5.1. Función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *X*

De la Figura 5.1 se ve que $f(x) \geq 0$, además:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{\infty} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}xdx + \int_{2}^{\infty} 0dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4} = 1$$

Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

En conclusión, $f(x)$ cumple con las condiciones de una función de densidad, por ello $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad para X .

b) La función de distribución para X está dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & si\ 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función de distribución se observa en la Figura 5.2

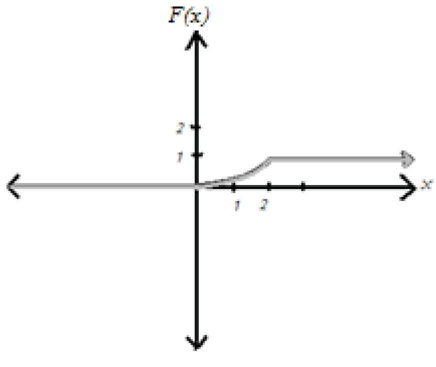

Figura 5.1. Función de distribución para la variable aleatoria *X*

c) El valor esperado de la variable aleatoria X es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Entonces,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0} xf(x)dx+\int_{0}^{2} xf(x)dx+\int_{2}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{0} x(0)dx+\int_{0}^{2} x\frac{1}{2}xdx+\int_{2}^{\infty} x(0)dx$$

$$E(X)=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}x^2dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right)$$

$$\mu=E(X)=\frac{x^3}{6}\Big|_0^2=\left[\frac{2^3}{6}-\frac{0^3}{6}\right]=\frac{4}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx+\int_{0}^{2} x^2\frac{1}{2}xdx+\int_{2}^{\infty} x^2(0)dx$$

$$E(X^2)=\int_{0}^{2}\frac{1}{2}x^3dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right)=\frac{x^4}{8}\Big|_0^2=\left[\frac{2^4}{8}-\frac{0^4}{8}\right]=2$$

La varianza de X está dada por:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-\left[\frac{4}{3}\right]^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$$

La desviación estándar de X es:

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{2}{9}}=0.4714$$

d) Las probabilidades pedidas se determinan de la siguiente forma:

$$P(0\le X\le 1.5)=\int_{0}^{1.5} f(x)dx=\int_{0}^{1.5}\frac{1}{2}xdx=\frac{1}{4}x^2\Big|_0^{1.5}=\frac{1}{4}(1.5)^2-\frac{1}{4}(0)^2$$

$$P(0\le X\le 1.5)=\frac{2.25}{4}=0.5625$$

$$P(-3 \leq X \leq 0.5) = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{0.5} f(x)dx = \int_{-3}^{0} 0dx + \int_{0}^{0.5} \frac{1}{2} xdx = \frac{1}{4}\left(x^2 \Big|_0^{0.5} \right)$$

$$P(-3 \leq X \leq 0.5) = \frac{1}{4}(0.5)^2 - \frac{1}{4}(0)^2 = \frac{0.25}{4} = 0.0625$$

2.4 Una variable aleatoria X tiene como función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ a \leq x \leq b \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Determinar *a)* el valor esperado, *b)* la varianza de la variable aleatoria X.

El valor esperado de la variable aleatoria X es:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Entonces,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{a} xf(x)dx + \int_{a}^{b} xf(x)dx + \int_{b}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{a} x(0)dx + \int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{\infty} x(0)dx$$

$$E(X) = \int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)}$$

$$E(X) = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} x^2(0)dx + \int_{a}^{b} x^2\frac{1}{b-a}dx + \int_{b}^{\infty} x^2(0)dx$$

$$E(X^2) = \int_{a}^{b} x^2\frac{1}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{x^3}{3(b-a)} - \frac{a^3}{3(b-a)}$$

$$E(X^2)=\frac{b^3}{3(b-a)}-\frac{a^3}{3(b-a)}=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{(b-a)(b^2+ba+a^2)}{3(b-a)}$$

$$E(X^2)=\frac{b^2+ba+a^2}{3}$$

La varianza de X está dada por:

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\left(\frac{(a+b)}{2}\right)^2$$

$$Var(X)=\frac{b^2+ba+a^2}{3}-\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{4}\right)$$

$$Var(X)=\frac{4b^2+4ba+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Desviación estándar de X es:

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

Capítulo 3

3.1 El equipo de fútbol CC tiene una probabilidad de 0.75 de ganar cada vez que juega, si aún le quedan por jugar 8 partidos *a)* ¿cuál es la probabilidad de que gane tres partidos? *b)* ¿cuál es la probabilidad de que no gane los restantes partidos? *c)* ¿cuál es la probabilidad de que gane por lo menos cuatro partidos?, determinar el número de partidos que espera ganar el equipo CC y la varianza.

Se define la variable aleatoria como X: número de partidos ganados en los 8 partidos que aún le quedan por jugar al equipo CC.

Los posibles valores de la variable X son: 0, 1, 2,…,8.

a) Aplicando el modelo Binomial con $n=8$ y $p=0.75$ resulta,

$$f(3)=P(X=3)=\binom{8}{3}(0.75)^3(1-0.75)^{8-3}$$

$$P(X=3)=\frac{8!}{3!(8-3)!}(0.421875)(0.25)^5$$

$$P(X=3)=56(0.421875)(0.0009765)\cong 0.023$$

La probabilidad de que el equipo CC gane tres partidos de los ocho que aún le quedan por jugar es de 0.023 o del 2.3%.

b) $f(0)=P(X=0)=\binom{8}{0}(0.75)^0(1-0.75)^{8-0}$

$$P(X=0)=\frac{8!}{0!(10-0)!}(1)(0.25)^8=1(1)(0.000015)\cong 0.000015$$

La probabilidad de que el equipo CC no gane los restantes 8 partidos que aún le quedan por jugar es de 0.000015 o del 0.0015%.

c) Se debe calcular,

$$P(X\geq 4)=P(X=4)+P(X=5)+...+P(X=8)$$

O equivalentemente usando la probabilidad del evento complementario se puede calcular la siguiente probabilidad :

$$P(X\geq 4)=1-\{P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\}$$

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X=3)$ y $P(X=0)$, solamente restan calcularse $P(X=1)$ y $P(X=2)$ y reemplazar en la anterior expresión.

$$f(1)=P(X=1)=\binom{8}{1}(0.75)^1(1-0.75)^{8-1}$$

$$P(X=1)=\frac{8!}{1!(8-1)!}(0.75)(0.25)^7=8(0.75)(0.000061)\cong 0.000366\,.$$

$$f(2)=P(X=2)=\binom{8}{2}(0.75)^2(1-0.75)^{8-2}$$

$$P(X=2)=\frac{8!}{2!(8-2)!}(0.5625)(0.25)^6$$

$$P(X=2)=28(0.5625)(0.000244)\cong 0.003843$$

Luego,

$$P(X \geq 4) = 1 - \{0.000015 + 0.000366 + 0.03843 + 0.023\}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - 0.02722 = 0.97278$$

La probabilidad de que el equipo CC gane por lo menos cuatro partidos de los ocho que aún le quedan por jugar es de 0.97278 o del 97.278%

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente manera:

$$E(X) = np = 8(0.75) = 6$$

El número de partidos que se espera que gane el equipo CC es 6.

$$Var(X) = np(1-p) = 8(0.75)(0.25) = 1.5$$

3.2 La probabilidad de que las vacas de la granja A estén produciendo leche en cualquier época del año es de 0.6, se toma una muestra aleatoria de 6 vacas de la granja A, *a)* ¿cuál es la probabilidad de que una vaca de la muestra esté produciendo leche? *b)* ¿cuál es la probabilidad de que dos vacas de la muestra estén produciendo leche? *c)* ¿cuál es la probabilidad de que a lo más dos vacas de la muestra estén produciendo leche? *d)* ¿cuál es la probabilidad de que todas las vacas de la muestra estén produciendo leche? *e)* determinar el valor esperado e interpretarlo.

Se define la variable aleatoria como,

X : número de vacas en la muestra de seis que están produciendo leche en la granja A en cualquier época del año.

Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,6.

a) Aplicando el modelo Binomial con $n = 6$ y $p = 0.6$ resulta,

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{6}{1}(0.6)^1(1-0.6)^{6-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{6!}{1!(6-1)!}(0.6)(0.4)^5 = 6(0.6)(0.01024) \cong 0.03686$$

La probabilidad de que una vaca de la muestra aleatoria esté produciendo leche es de 0.03686 o del 3.686%.

b) $f(2) = P(X = 2) = \binom{6}{2}(0.6)^2(1-0.6)^{6-2}$

$$P(X = 2) = \frac{6!}{2!(6-2)!}(0.36)(0.4)^4 = 15(0.36)(0.0256) \cong 0.1382$$

La probabilidad de que dos vacas de la muestra aleatoria esté produciendo leche es de 0.1382 o del 13.82%.

c) Se debe calcular, $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$.

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X = 1)$ y $P(X = 2)$, solamente resta calcular $P(X = 0)$ y reemplazar en la anterior expresión.

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{6}{0}(0.6)^0(1-0.6)^{6-0}$$

$$P(X = 0) = \frac{6!}{0!(6-0)!}(1)(0.4)^6 = 1(1)(0.004096) \cong 0.004096$$

Luego,

$$P(X \leq 2) = 0.004096 + 0.03686 + 0.1382 = 0.1791$$

La probabilidad de que a lo más dos vacas de la muestra aleatoria esté produciendo leche es de 0.1791 o del 17.91%.

d) $f(6) = P(X = 6) = \binom{6}{6}(0.6)^6(1-0.6)^{6-6}$

$$P(X = 6) = \frac{6!}{6!(6-6)!}(0.6)^6(0.4)^0 = 1(0.04665)(1) \cong 0.04665$$

La probabilidad de que todas las vacas de la muestra aleatoria estén produciendo leche es de 0.04665 o del 4.665%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente forma,

$$E(X) = np = 6(0.6) = 3.6 \cong 4$$

Se esperaría que en la muestra aleatoria 4 vacas estén produciendo leche.

$$Var(X) = np(1-p) = 6(0.6)(0.4) = 1.44$$

3.3 Una máquina produce artículos del tipo RRR, la probabilidad de que cualquier artículo producido por la máquina resulte defectuoso es 0.05, si se escoge una muestra aleatoria de 10 artículos,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos resulten defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno resulte defectuoso?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos tres resulten defectuosos?
Se define la variable aleatoria como X : número de artículos defectuosos del tipo RRR en la muestra de 10. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…,10.

a) Aplicando el modelo Binomial con $n = 10$ y $p = 0.05$ resulta,

$$f(2) = P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.05)^2(1-0.05)^{10-2}$$

$$P(X = 2) = \frac{10!}{2!(10-2)!}(0.0025)(0.95)^8 = 45(0.0025)(0.66342)$$

$$P(X = 2) \cong 0.0746$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria resulten dos artículos defectuosos del tipo RRR es de 0.0746 o del 7.46%.

b)

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0}(0.05)^0(1-0.05)^{10-0}$$

$$P(X = 0) = \frac{10!}{0!(10-0)!}(1)(0.95)^{10} = 1(1)(0.5987) \cong 0.5987$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria ninguno de los artículos resulte defectuoso es de 0.5987 o del 59.87%.

c) Se debe calcular

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + ... + P(X = 10)$$

O de forma equivalente se usa la probabilidad del evento complementario y se calculara la siguiente probabilidad:

$$P(X \geq 3) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\}$$

Puesto que en las partes *a)* y *b)* ya se han calculado las probabilidades $P(X = 2)$ y $P(X = 0)$, solamente resta calcular $P(X = 1)$ y reemplazar los resultados en la anterior expresión,

$$f(1) = P(X = 1) = \binom{10}{1}(0.05)^1(1 - 0.05)^{10-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{10!}{1!(10-1)!}(0.05)(0.95)^9 = 10(0.05)(0.63024) \cong 0.3151$$

Luego,

$$P(X \geq 3) = 1 - \{0.5987 + 0.3151 + 0.0746\} = 1 - 0.9884 = 0.0116$$

La probabilidad de que en la muestra aleatoria por lo menos tres artículos resulten defectuosos es de 0.0116 ó del 1.16%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se calculan de la siguiente manera,

$$E(X) = np = 10(0.05) = 0.5$$

$$Var(X) = np(1 - p) = 10(0.05)(0.95) = 0.475$$

3.4 En un curso de probabilidad 10 estudiantes de matemáticas y 15 estudiantes de otras carreras, se decide escoger aleatoriamente un grupo de 6 estudiantes del curso de probabilidad para que hagan una disertación sobre espacios de probabilidad en el salón de clase, *a)* ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan dos estudiantes matemáticas?, *b)* ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un estudiante de matemáticas?, *c)* ¿cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los estudiantes sean de otras carreras?, *d)*¿cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres estudiantes de matemáticas? y *e)* determinar el valor esperado.

Se define la variable aleatoria como X : número de estudiantes de matemáticas que resulten conformando el grupo de los seis estudiantes que harán la disertación mencionada. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Para este caso, se aplica el modelo hipergeométrico con $N=25$, $M=10$, $N-M=15$, $n=6$.

a)

$$P(X=2)=\frac{\binom{10}{2}\binom{15}{6-2}}{\binom{25}{6}}=\frac{\left(\frac{10!}{2!(10-2)!}\right)\left(\frac{15!}{4!(15-4)!}\right)}{\frac{25!}{6!(25-6)!}}=\frac{45(1365)}{177100}\cong 0.3468.$$

La probabilidad de que en el grupo haya dos estudiantes de matemáticas es de 0.3468 o del 34.68%.

b)

$$P(X=1)=\frac{\binom{10}{1}\binom{15}{6-1}}{\binom{25}{6}}=\frac{\left(\frac{10!}{1!(10-1)!}\right)\left(\frac{15!}{5!(15-5)!}\right)}{\frac{25!}{6!(25-6)!}}=\frac{10(3003)}{177100}\cong 0.1695.$$

La probabilidad de que en el grupo haya un solo estudiante de matemáticas es de 0.1695 o del 16.95%.

c) Que en el grupo todos los estudiantes sean de otras carreras, significa que cero estudiantes de matemáticas estarán en el grupo de los seis que harán la disertación.

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{10}{0}\binom{15}{6-0}}{\binom{25}{6}}=\frac{\left(\frac{10!}{0!(10-0)!}\right)\left(\frac{15!}{6!(15-6)!}\right)}{\frac{25!}{6!(25-6)!}}=\frac{1(5005)}{177100}$$

$$f(0)=P(X=0)\cong 0.02826$$

La probabilidad de que en el grupo todos los estudiantes sean de otras carreras es de 0.02826 o del 2.826%.

d) Se debe calcular $P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$.

Aquí se puede usar la probabilidad del evento complementario y calcular la probabilidad,

$$P(X \geq 3) = 1 - \{0.02826 + 0.1695 + 0.3468\} = 1 - 0.54456 = 0.45544.$$

La probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres estudiantes de matemáticas es 0.45544 o del 45.544%.

El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula de la siguiente manera:

$$E(X) = n\frac{M}{N} = 6\left(\frac{10}{20}\right) = \frac{60}{20} = 3$$

Se esperaría que tres estudiantes de matemáticas estuvieran en el grupo de seis estudiantes que harán la disertación sobre espacios de probabilidad.

3.5 En una granja hay unos vacunos de los cuales 8 son de la raza pardosuizo y 12 de la raza romosinuano, si se decide escoger aleatoriamente un grupo de cinco de los mencionados vacunos para exhibirlos en la feria regional ganadera,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya dos vacunos de la raza pardosuizo?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo haya solo un vacuno de la raza pardosuizo?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo todos los vacunos resulten de la raza romosinuano?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres vacunos de la raza pardosuizo?

Se define la variable aleatoria como X: número de vacunos de la raza pardo-suizo que resulten conformando el grupo de cinco que se llevarán a la feria regional. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Para este caso, se aplica el modelo hipergeométrico con:

$$N = 20,\ M = 8,\ N - M = 12,\ n = 5.$$

a) Que dos vacunos de la raza pardosuizo resulten en el grupo de cinco.

$$P(X=2)=\frac{\binom{8}{2}\binom{12}{5-2}}{\binom{20}{5}}=\frac{\dfrac{8!}{2!(8-2)!}\dfrac{12!}{3!(12-3)!}}{\dfrac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{28(220)}{15504}\cong 0.3973$$

La probabilidad de que en el grupo resulten dos vacunos de la raza pardosuizo es de 0.3973 o del 39.73%.

b) Que un solo vacuno de la raza pardosuizo resulte en el grupo de cinco.

$$P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\binom{12}{5-1}}{\binom{20}{5}}=\frac{\dfrac{8!}{1!(8-1)!}\dfrac{12!}{4!(12-4)!}}{\dfrac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{8(495)}{15504}\cong 0.2554$$

La probabilidad de que en el grupo resulte un solo vacuno de la raza pardosuizo es de 0.2554 ó del 25.54%.

c) Que en el grupo todos los vacunos resulten de la raza romosinuano significa que cero vacunos de la raza pardosuizo estarán en el grupo de cinco.

$$f(0)=P(X=0)=\frac{\binom{8}{0}\binom{12}{5-0}}{\binom{20}{5}}=\frac{\dfrac{8!}{0!(8-0)!}\dfrac{12!}{5!(12-5)!}}{\dfrac{20!}{5!(20-5)!}}=\frac{1(792)}{15504}\cong 0.0511$$

La probabilidad de que en el grupo todos los vacunos resulten de la raza romosinuano es de 0.0511 ó del 5.11%.

d) Se debe calcular $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

Aquí se puede usar la probabilidad del evento complementario y calcular la probabilidad,

$$P(X\geq 3)=1-\{0.0511+0.2554+0.3973\}=1-0.7038=0.2962$$

La probabilidad de que en el grupo resulten por lo menos tres vacunos de la raza pardosuizo es 0.2962 o del 29.62%.

El valor esperado de la variable aleatoria X se calcula de la siguiente manera:

$$E(X) = n\frac{M}{N} = 5\left(\frac{8}{20}\right) = \frac{40}{20} = 2$$

Se esperaría que dos vacunos de la raza pardosuizo estuvieran en el grupo de cinco vacunos que se llevará a la feria regional.

3.6 El promedio de inyecciones del medicamento AA que no surten efecto en los cachorros de la región B es de 2 en las jornadas de vacunación que se han realizado,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro inyecciones del medicamento AA no surtan efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más una inyección del medicamento AA no surta efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento?

Se define la variable aleatoria como X: número de inyecciones del medicamento AA que no surtirán efecto en los cachorros de la región B la próxima vez que se apliquen. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…

a) Aplicando el modelo Poisson con $\lambda = 2$ resulta,

$$f(4) = P(X = 4) = \frac{2^4}{4!}e^{-2} = \frac{16}{24}(0.1353) \cong 0.0902$$

La probabilidad de que cuatro inyecciones del medicamento AA no surtan efecto en los cachorros de la región B en la próxima aplicación del medicamento en la región B es de 0.0902 o del 9.02%.

b) Se debe calcular $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{2^0}{0!}e^{-2} \cong 0.1353$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{2^1}{1!}e^{-2} = 2(0.1353) \cong 0.2706$$

Luego,

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.1353 + 0.2706 = 0.4059$$

La probabilidad de que a lo más una inyección del medicamento AA no surta efecto en los cachorros de la región B la próxima vez que se apliquen es de 0.4059 ó del 40.59%.

El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se obtienen directamente,

$$E(X) = \lambda = 2$$

$$Var(X) = \lambda = 2$$

3.7 El promedio de caninos infestados de pulgas en la región BB en las últimas visitas realizadas por los inspectores de salud animal es 5, *a)* ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente visita los inspectores de salud animal encuentren tres caninos infestados de pulgas en la región BB? *b)* ¿cuál es la probabilidad de que en la siguiente visita los inspectores de salud animal encuentren a lo más dos caninos infestados de pulgas en la región BB? y *c)* determinar el valor esperado y la varianza.

Se define la variable aleatoria como X : número de caninos que los inspectores de salud animal encuentren infestados de pulgas en la región BB. Los posibles valores de la variable son: 0, 1, 2,…

a) Aplicando el modelo Poisson con $\lambda = 5$ resulta

$$f(3) = P(X = 3) = \frac{5^3}{3!}e^{-5} = \frac{125}{6}\left(0.006737\right) = 0.1403$$

La probabilidad de que en la siguiente visita los inspectores de salud animal encuentren tres caninos infestados de pulgas en la región BB es de 0.1403 o del 14.03%.

b) Se debe calcular $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} = 0.006737$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 0.03368$$

$$f(2)=P(X=2)=\frac{5^2}{2!}e^{-5}=0.08421$$

Luego,

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$P(X\leq 2)=0.006737+0.03368+0-08421=0.1246$$

La probabilidad de que en la siguiente visita los inspectores de salud animal encuentren a lo más dos caninos infestados de pulgas en la región BB es de 0.1246 o del 12.46%.

c) El valor esperado y la varianza para la variable aleatoria X se obtienen directamente,

$$E(X)=\lambda=5$$

$$Var(X)=\lambda=5$$

3.8 Graficar y determinar las siguientes probabilidades utilizando la distribución normal estándar a) $P(Z\leq -1.35)$, b) $P(Z\geq 1.3)$ c) $P(0.31\leq Z\leq 2.5)$

$a)$ $P(Z\leq -1.35)=\Phi(-1.35)=0.0885\cong 8.85\%$

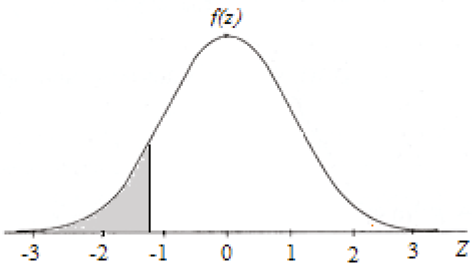

Figura 5.3. Área bajo la curva normal estándar $P(Z\leq -1.35)$

La Figura 5.3 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

$b)$ $P(Z\geq 1.3)=1-P(Z\leq 1.3)=1-0.9032=0.0968\cong 9.68\%$

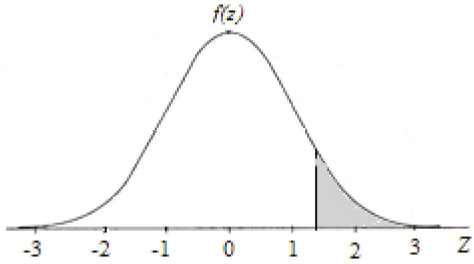

Figura 5.4. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \geq 1.3)$

La Figura 5.4 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad

c) $P(0.31 \leq Z \leq 2.5) = P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq 0.31)$

$$P(0.31 \leq Z \leq 2.5) = 0.9938 - 0.6217 = 0.3721 \cong 37.21\%$$

La Figura 5.5 muestra el valor del área bajo la curva normal estándar equivalente al cálculo de la probabilidad.

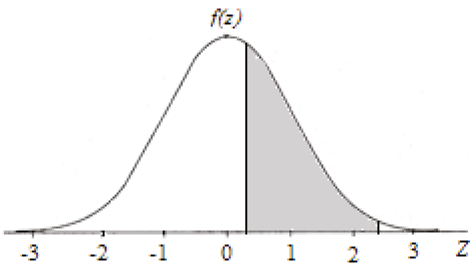

Figura 5.5. Área bajo la curva normal estándar $P(0.31 \leq Z \leq 2.5)$

3.9 Una fábrica produce bombillos, la duración de los bombillos tiene una distribución normal con media de 800 horas y desviación estándar de 50 horas. Si se toma al azar un bombillo de la producción,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dure máximo 840 horas?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que dure por lo menos 720 horas?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que dure entre 780 y 920 horas?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que dure más de 1000 horas?

$\mu = 800$ horas, $\sigma = 50$ horas

X: duración en horas de un bombillo producidos por la fábrica y escogido aleatoriamente.

a) $P(X \leq 840) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{840-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{840-800}{50}\right)$

$$P(X \leq 480) = P\left(Z \leq \frac{40}{50}\right) = P(Z \leq 0.8) = 0.7881 \cong 78.81\%$$

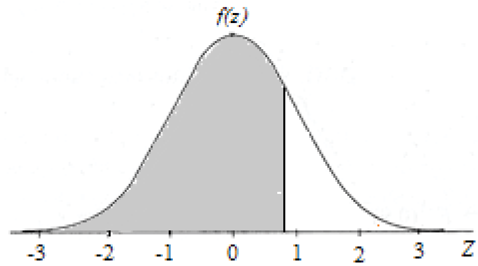

Figura 5.6. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \leq 0.8)$

La probabilidad de que un bombillo escogido al azar dure máximo 840 horas es del 78.81%.

Una representación de la situación se tiene en la Figura 5.6.

b) $P(X \geq 720) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{720-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{720-800}{50}\right)$

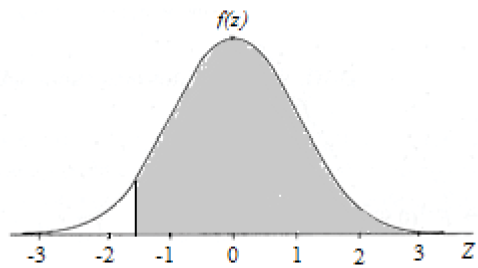

Figura 5.7. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \geq -1.6)$

$$P(X \geq 720) = P(Z \geq -1.6) = 1 - P(Z \leq -1.6) = 1 - 0.0548 = 0.9452$$

$$P(X \geq 720) = 0.9452 \cong 94.52\%$$

La probabilidad de que un bombillo escogido al azar dure por lo menos 720 horas es del 94.52%. Una representación de la situación anterior se tiene en la Figura 5.7.

c) $P(780 \leq X \leq 920) = P\left(\frac{780-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{920-\mu}{\sigma}\right)$

$$P(780 \leq X \leq 920) = P\left(\frac{780-800}{50} \leq Z \leq \frac{920-800}{50}\right) = P(-0.4 \leq Z \leq 2.4)$$

$$P(780 \leq X \leq 920) = 0.9918 - 0.3446 = 0.6472 \cong 64.72\%$$

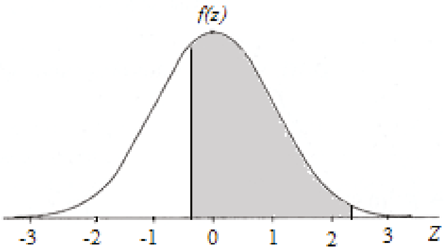

Figura 5.8. Área bajo la curva normal estándar $P(\leq -0.4Z \leq 2.4)$

La probabilidad de que un bombillo escogido al azar dure entre 780 y 920 horas es de 64.72%. Ver Figura 5.8.

d) $P(X \geq 1000) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1000-800}{50}\right) = P(Z \geq 4) \cong 0$

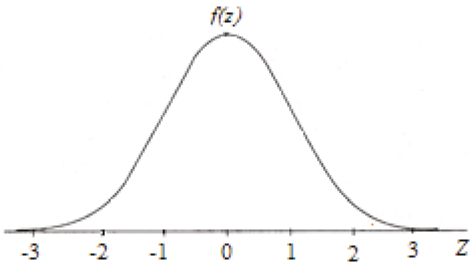

Figura 5.9. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \geq 4)$

La probabilidad de que un bombillo escogido al azar dure más de mil horas es del 0%. Ver Figura 5.9.

3.10 El peso en una clase de unos roedores silvestres es una variable aleatoria que se distribuye normalmente con media $\mu = 500$ gramos, y una desviación estándar $\sigma = 30$ gramos. Si se escoge aleatoriamente un roedor de esa clase,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea de por lo menos 480 gramos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso sea a lo más de 470 gramos?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que su peso esté entre 465 y 575 gramos?

$\mu = 500$ gramos, $\sigma = 30$ gramos.

X : peso de un roedor silvestre escogido aleatoriamente.

a) $P(X \geq 480) = 1 - P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{480 - 500}{30}\right)$

$$P(X \geq 480) = P(Z \geq -0.6) = 1 - P(Z \leq -0.6) = 1 - 0.2743 = 0.7257 \cong 72.57\%$$

La probabilidad de que el peso de un roedor escogido aleatoriamente sea de por menos 480 gramos es de 72.57%. Obsérvese la Figura 5.10.

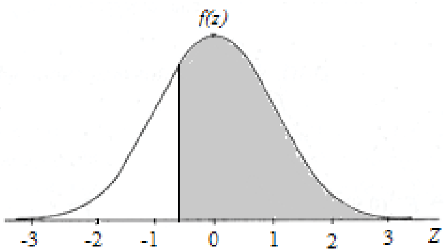

Figura 5.10. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \geq -0.6)$

$$b)\ P(X \leq 470) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{470 - 500}{30}\right) = P(Z \leq -1) = 0.1587 \cong 15.87\%$$

La probabilidad de que el peso de un roedor escogido aleatoriamente sea de máximo 470 gramos es de 15.87%. Ver Figura 5.11.

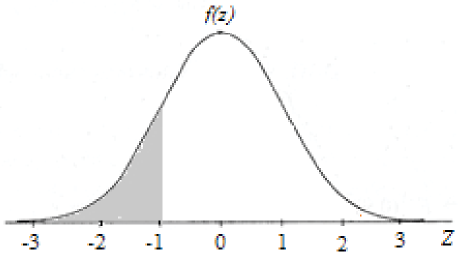

Figura 5.11. Área bajo la curva normal estándar $P(Z \leq -1)$

c) $P(465 \leq X \leq 575) = P\left(\frac{465-500}{30} \leq Z \leq \frac{575-500}{30}\right)$

$$P(465 \leq X \leq 575) = P(-1.16 \leq Z \leq 2.5) = P(Z \leq 2.5) - P(Z \leq -1.16)$$

$$P(465 \leq X \leq 575) = 0.9938 - 0.1230 = 0.8708 \cong 87.08\%$$

La situación anterior se puede observar en la Figura 5.12.

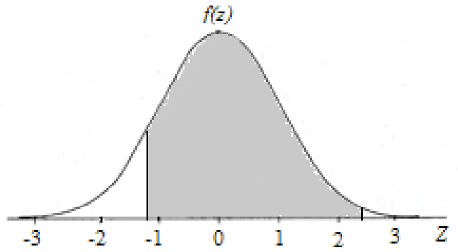

Figura 5.12. Área bajo la curva normal estándar $P(-1.16 \leq Z \leq 2.5)$

La probabilidad de que el peso de un roedor escogido aleatoriamente esté entre 465 y 575 gramos es del 87.08%

Capítulo 4

4.1 Con base en la información de la Tabla 4.1, determinar $a)$ $P(X_1 \leq 2, X_2 > 1)$,

b) $F_{\bar{X}}(1,2)$, $f(1,0)$, *c)* $f_{X_1}(0)$, d) $f_{X_2}(2)$, e) $f_{X_2/X_1}(2/0)$, f) $E(X_2/X_1 = 2)$.

Solución

$$a)\ P(X_1 \leq 2, X_2 > 1) = f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,2) + f_{\overline{X}}(2,2) = \frac{1}{36} + 0 + 0 = \frac{1}{36}$$

$$b)\ F_{\overline{X}}(1,2) = P(X_1 \leq 1, X_2 \leq 2) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,0) + f_{\overline{X}}(1,1) + f_{\overline{X}}(1,2)$$

$$F_{\overline{X}}(1,2) = P(X_1 \leq 1, X_2 \leq 2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} + \frac{12}{36} + \frac{6}{36} + 0 = \frac{33}{36}$$

Ahora,

$$f(1,0) = \frac{12}{36}$$

$$c)\ f_{X_1}(0) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(0, x_2) = f_{\overline{X}}(0,0) + f_{\overline{X}}(0,1) + f_{\overline{X}}(0,2)$$

$$f_{X_1}(0) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(1, x_2) = \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$$

$$d)\ f_{X_2}(2) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 2) = f_{\overline{X}}(0,2) + f_{\overline{X}}(1,2) + f_{\overline{X}}(2,2)$$

$$f_{X_2}(2) = \sum_{R_{X_1}} f_{\overline{X}}(x_1, 2) = \frac{6}{36} + 0 + 0 = \frac{6}{36}$$

$$e)\ f_{X_2/X_1}(2/0) = \frac{P(X_1 = 0, X_2 = 2)}{P(X_1 = 0)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{1}{15}$$

$$f)\ E(X_2/X_1 = 2) = \sum_{R_{X_2}} x_2 f_{X_2/X_1}(x_2/x_1 = 2) = \sum_{R_{X2}} x_2 \frac{f_{\overline{X}}(2, x_2)}{f_{X_1}(2)}$$

Luego,

$$E(X_2/X_1 = 2) = 0\frac{f_{\overline{X}}(2,0)}{f_{X_1}(2)} + 1\frac{f_{\overline{X}}(2,1)}{f_{X_1}(2)} + 2\frac{f_{\overline{X}}(2,2)}{f_{X_1}(2)}$$

Pero,

$$f_{X_1}(2) = \sum_{R_{X_2}} f_{\overline{X}}(2, x_2) = f_{\overline{X}}(2,0) + f_{\overline{X}}(2,1) + f_{\overline{X}}(2,2) = \frac{3}{36} + 0 + 0 = \frac{3}{36}$$

Por lo tanto,

$$E(X_2/X_1=2)=0\left(\frac{\frac{3}{36}}{\frac{3}{36}}\right)+1(0)+2(0)=0$$

$R_{X_2}\backslash R_{X_1}$	0	1	2	Marginales
0	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{21}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	0	$\frac{14}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{1}{36}$
Marginales	$\frac{15}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{3}{36}$	

4.2 Dada la siguiente función de densidad para el vector aleatorio continuo $\bar{X}=(X_1,X_2)$,

$$f_{\bar{X}}(x_1,x_2)=\begin{cases}24x_1x_2 \ si \ 0<x_1<1;\ x_2>0;\ x_1+x_2<1\\ 0 \qquad\qquad\qquad en\ otro\ caso\end{cases}$$

Calcular $a)\ P(X_1\leq 0.6, X_2<0.2)$, *b)* $f_{X_1/X_2}(x_1/x_2)$ *c)* determinar la esperanza matemática de X_1 dada $X_2=0.4$.

Solución

$$a)\ P(X_1\leq 0.6, X_2<0.2)=\int_0^{0.6}\left(\int_0^{0.2}24x_1x_2dx_2\right)dx_1$$

$$P(X_1\leq 0.6, X_2<0.2)=\int_0^{0.6}24x_1\left(\frac{x_2^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0.2}dx_1$$

$$P(X_1\leq 0.6, X_2<0.2)=\int_0^{0.6}12x_1(0.04)dx_1=\int_0^{0.6}0.48x_1dx_1$$

$$P(X_1 \leq 0.6, X_2 < 0.2) = \int_0^{0.6} 0.48 x_1 dx_1 = \left(0.24 x_1^2\right)\Big|_0^{0.6} = 0.24(0.6)^2 = 0.0864$$

b) Inicialmente se tiene que,

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 12x_2\left(1 - x_2\right)^2 & si\ \ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$f_{X_1/X_2}(x_1/x_2) = \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} = \begin{cases} \dfrac{24x_1x_2}{12x_2\left(1 - x_2\right)^2} & si\ \ 0 < x_2 < 1;\ 0 < x_1 < 1 - x_2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

c) Como,

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 12x_2\left(1 - x_2\right)^2 & si\ \ 0 < x_2 < 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \frac{f_{\overline{X}}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} dx_1 = \int_0^{1-x_2} x_1 \frac{24x_1x_2}{12x_2\left(1 - x_2\right)^2} dx_1$$

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \int_0^{1-x_2} x_1 \frac{24x_1x_2}{12x_2\left(1 - x_2\right)^2} dx_1 = \left.\frac{2x_2\left(\frac{x_1^3}{3}\right)}{x_2\left(1 - x_2\right)^2}\right|_0^{1-x_2} = \frac{2x_2\left(1 - x_2\right)^3}{3x_2\left(1 - x_2\right)^2}$$

$$E(X_1/X_2 = x_2) = \frac{2\left(1 - x_2\right)}{3}$$

Finalmente,

$$E(X_1/X_2 = 0.4) = \frac{2\left(1 - 0.4\right)}{3} = 0.4$$

REFERENCIAS

Abramowitz, M. & Stegun, I. A. (1972). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55*.

Alexander, R., & Kelly, B. (1999). *Mathematics 12: Western Canadian edition*. Don Mills: Addison-Wesley

Alvermann, D. (1998). *Estrategias para enseñar a aprender: un enfoque cognitivo para todas las áreas y niveles*. Aique. Buenos Aires.

Barros, M., Paula, G. A., & Leiva, V. (2009). An R implementation for generalize Birnbaum–Saunders distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, *53*(4), 1511-1528.

Bellhouse, D. R. (1993). "The role of roguery in the history of probability". *Statist. Sci.,* 8,410-420.

Bellhouse, D. R. (2004). "Decoding Cardano's Liber de Ludo Alea". *Historia Mathematica*, 1-23.

Bernoulli, J. (1968). Ars conjectandi, 1713. *Reprinted in*.

Bickel, P., & Doksum, K. (1977). *Mathematical Statistics: Basic ideas and select topics*. San Francisco: Holden-Day, Inc.

Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969a). A new family of life distributions. *Journal of Applied Probability* 6: 319-327.

Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a family of life Distributions With Applications to Fatigue. *Journal Applied Probability* 6: 328-347.

Blanco, L. (2004). *Probabilidad*. Universidad Nacional de Colombia.

Burbano, V. (2014). *Simulación con modelos aleatorios*. Conocimiento estadístico-probabilístico y simulación. Tunja: Editorial Uptc.

Canavos, G. (1988). *Probabilidad y Estadística Aplicaciones y Métodos*, Editorial McGraw-Hill. México.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 15-33.

Díaz, J. A. & Leiva, V. (2005). A new family of life distributions based on the elliptically contoured distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, *128*(2), 445-457.

Feller, W. (1993): *Teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. Volúmen II. Limusa. México.

Fly Jones, B. (1987). *Estrategia para enseñar a aprender*, Editorial Aique, Buenos Aires.

Freund, J. y Miller, I. (2000). *Estadística Matemática con aplicaciones*, Prentice Hall, México.

Hacking, I. (1995). *El Surgimiento de la Probabilidad*, Editorial Gedisa, Barcelona, España.

Hernández, F. (2003). *Cálculo de probabilidades*, Textos 25, Nivel Elemental. Sociedad Matemática Mexicana.

Hettmansperger, Th. (1984). *Statistical Inference based on Ranks*, Editorial John Wiley & Sons. United States of America.

Jacod, J. y Protter, P. (2000). *Probability essentials*. Springer-Verlag

Kandu, D., Kannan, N., & Balakrishnan, N. (2008). On the hazard function of the Birnbaum-Saunders distribution and associated inference. *Computational Statistics & Data Analysis* 52: 2692-2702.

Karian, Z. A., Dudewics, E. J. (2000). *Fitting Statistical Distributions: The Generalized Lambda Distribution and Generalized Bootstrap Methods*. Boca Ratón, FL: CRC Press.

Kolmogorov, A. (1956). *Foundations of the theory of probability.* New York: Chelsea (trabajo original publicado en 1933).

Khrennikov, A. (2014). Introduction to foundations of probability and randomness (for students in physics), Lectures given at the Institute of Quantum Optics and Quantum Information, Austrian Academy of Science, Lecture-1: Kolmogorov and von Mises. *arXiv preprint arXiv:1410.5773*.

Laplace, P. S. (1985). *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Madrid: Alianza Editorial (trabajo original publicado en 1814)

Leiva, V., Sanhueza, A., & Angulo, J. M. (2009). A length-biased version of the Birnbaum-Saunders distribution with application in water quality. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, *23*(3), 299-307.

Lindgren, B. (1993). *Statistical Theory*. New York: Chapman & Hall.

Marshall, A. W. y Olkim, I. (2007). *Life distributions*. New York: Springer.

Meeker, W. Q. y Escobar, L. A. (1998). *Statistical Methods for Reliability Data*. Unites Sates of Amerca: John Wiley & Sons.

MEN (2003). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Santafé de Bogotá: Colombia. Online: www.mineducacion.gov.co/.

Mises, R. (1952). *Probabilidad, estadística y verdad*. Madrid, España: Espasa-Calpe (Trabajo original publicado en 1928).

Muñoz, M. y Blanco, L. (2002). *Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad*. Colección Textos. Unibiblos. Universidad Nacional de Colombia.

National Council of Supervisors of Mathematics. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: The position of the National Council of Supervisors of Mathematics. Arithmetic Teacher, 37(1), 44-46.

Papoulis, A. (1991). *Probability, Random variables and Stochastic Process*. New York: McGraw-Hill Inc.

Ross, S. M. (1998). *A First Course in Probability*. México: Prentice Hall.

Saunders, S. C. (2007). *Reliability, Life Testing and Prediction of Services lives*. New York: Springer.

Shao, J. (1999): *Mathematical Statistics*. New York: Springer.

Shulman, S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reforms. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22

Vásquez Ortiz, C. A. (2014). Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.