

CAPÍTULO 2

2. Descripción Analítica y Aplicada del Filtro de Kalman

El filtro de Kalman, también llamado Estimador Cuadrático Lineal (*Linear Quadratic Estimator*, LQE), es un algoritmo desarrollado por Rudolf Emil Kálmán, del cual deriva su nombre, en donde su funcionamiento es de un estimador óptimo recursivo que provee una solución a tareas frecuentes [70] en rastreo [71], seguimiento [72] y predicción [73] de datos que involucre una o más fuentes de ruido, inexactitudes o inconsistencias [74].

Se basa en la observación del comportamiento de los datos a través del tiempo y mediante análisis estadístico realiza correcciones *a priori* y *a posteriori* de los mismos, produciendo valores estimados que tienden a ser más precisos que aquellos obtenidos puramente de las mediciones realizadas en un instante definido de tiempo.

Entiéndase estimador óptimo en el sentido de que, si todo el ruido que afecta a los datos es de tipo Gaussiano, el filtro de Kalman minimiza el error cuadrático medio de los parámetros estimados [75].

Desde su desarrollo en el inicio de la década de los sesenta, el filtro de Kalman ha sentado la base de muchos adelantos tecnológicos que hubiesen sido imposibles sin su aplicación, como la mejora en la industria aeroespacial, en especial a las misiones Apolo de la NASA donde el filtro cobró gran renombre al llevar a Neil Armstrong a la luna [76], aplicaciones diversas pasando desde la electrónica de consumo en cada dispositivo GPS integrado en los teléfonos celulares hasta el control de trayectoria de la mayoría de satélites que orbitan la tierra.

Desde un punto de vista teórico-matemático, el filtro de Kalman “es un algoritmo que permite la inferencia exacta en un sistema dinámico lineal, el cual es un modelo Bayesiano similar a un modelo de Markov oculto, pero

donde el espacio de estados de las variables latentes es continuo y donde todas las variables latentes y observadas tienen una distribución gaussiana, a menudo una distribución gaussiana multivariada” [76].

Las ecuaciones básicas de los filtros de Kalman se presentan en este capítulo. En un principio se describe la estructura de un filtro clásico de Kalman, que se basa en la descripción del espacio de estados de un sistema real que incluye la medición y el ruido del sistema. Posteriormente, las ecuaciones básicas se dividen en predicción y actualización. Finalmente, se presenta dos cálculos alternativos para implementar variantes del filtro de Kalman: Extendido y *Unscented*.

2.1 Modelo del Filtro de Kalman

De una forma general y sin recurrir aún a la matemática asociada al proceso, el filtro de Kalman se ejecuta en dos pasos bien definidos: la etapa de predicción y la etapa de actualización. En la etapa de predicción y tal como su nombre lo sugiere, el filtro de Kalman genera un valor estimado futuro a partir del estado actual de las mediciones que se realicen (*a priori*), incluyendo el ruido y la incertidumbre que ellas puedan tener.

Dicho estado futuro es actualizado en la segunda etapa por medio de la información real (no predicha) del tiempo siguiente (*a posteriori*), produciendo una salida final que corresponde a una “mezcla” o fusión entre el valor predicho y el valor que fue realmente obtenido para ese instante de tiempo.

La proporción de la fusión de información entre las dos etapas está dada por un valor constante llamado Ganancia de Kalman. El filtro repite éstas dos etapas a lo largo del tiempo, una tras otra, haciendo uso de la característica de recursividad, lo cual permite evaluar una entrada en tiempo real en muestras realizadas bajo un intervalo de tiempo indefinido.

El filtro de Kalman se describe por medio de la ecuación (13).

$$\hat{x}_k = K_k \cdot z_k + (1 - K_k) \cdot \hat{x}_{k-1} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta la descripción realizada, la estimación del filtro \hat{x}_k depende

de la ganancia del filtro de Kalman K_k , de la observación (o actualización) del sistema en el tiempo actual z_k más un proporcional de corrección fuertemente influenciado por el estado estimado del filtro de Kalman en el instante de tiempo anterior \hat{x}_{k-1} . Se hace énfasis en que el subíndice k es la designación de los valores de tiempo discreto, por lo que k corresponde al intervalo de muestreo actual mientras que $k - 1$ al tiempo inmediatamente anterior a éste.

El propósito final del filtro es hallar la estimación \hat{x}_k de la señal x , y realizarlo para cada instante de tiempo k .

El único componente no conocido de la ecuación del filtro es la Ganancia de Kalman, el cual corresponde al factor de realimentación del error y su valor debe ser actualizado para cada iteración. Este parámetro es calculado automáticamente por el filtro de Kalman mientras las varianzas de los ruidos que afectan la señal estimada sean conocidas. Su cálculo se explicará posteriormente en el desarrollo de este trabajo.

Dado que el filtro de Kalman obtiene la respuesta de estimación a partir del comportamiento dinámico del sistema y de su observación a través del tiempo, es de fundamental importancia modelar el sistema sobre el cual se aplicará el proceso y además parametrizar los factores que puedan alterar ese modelo y su observación, lo que se conoce como ruido.

A grandes rasgos y siguiendo la estructura del cálculo planteada por Esme [77], el sistema dinámico está modelado por las leyes que rigen el comportamiento del mismo, en su mayoría de veces leyes físicas, las entradas de control conocidas y finalmente las medidas múltiples provenientes de sensores, por ejemplo, para formar un estimado de las cantidades variables del sistema (su estado).

Así pues, el modelo general del filtro de Kalman se puede comenzar a dividir del siguiente modo:

Modelo del sistema



$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (14)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (15)$$

Se puede entender que para cada valor de la señal x_k debe ser evaluada la ecuación estocástica (14), que recibe el nombre de ecuación de estado, cuyos componentes son:

- El vector de estado x_k que contiene los términos de interés del sistema, es decir, la señal de entrada a ser procesada.
- El vector u_k que contiene todas las entradas de control del sistema.
- El vector w_k que contiene el ruido del proceso para cada parámetro del vector de estado. El ruido del proceso puede ser extraído a partir de una distribución normal multivariable con media igual a cero y covarianza dada por la matriz de covarianza Q_k .
- La matriz de transición que aplica el efecto de cada parámetro de estado del sistema en el momento $k - 1$ sobre el estado del sistema en el tiempo k .
- La matriz de control de entrada B que aplica el efecto de cada parámetro de control de entrada en el vector u_k .

Además de la ecuación de estado, también se emplea el modelo matemático del sistema por medio de la observación y se expone en su equivalente ecuación de observación, también llamada ecuación de medida (15), de carácter estocástico, que posee los siguientes componentes.

- El vector de medida Z_k que contiene los términos de interés del sistema, desde el punto de vista de la observación.
- La matriz de transformación H que mapea los parámetros del vector de estado dentro del dominio de medición.
- El vector que contiene el ruido de medida para cada parámetro del vector de medida. Este ruido se comporta de manera similar al ruido presente en la ecuación de estado, en donde se asume que puede ser extraído a partir de una distribución normal multivariable con media igual a cero y covarianza dada por la matriz de covarianza R_k .

Dado que el objetivo del filtro de Kalman es obtener los estados de x_k a partir de las observaciones Z_k , se puede reescribir la ecuación (15) del siguiente modo:

$$Hx_k = z_k - v_k \quad (16)$$

Lo cual es completamente válido dado que el valor estimado de estado sin su ruido de proceso (entendido como la transformación realizada por H) es igual al valor observado con la debida sustracción el ruido que pueda tener implícito dicha observación.

Cabe resaltar que la ecuación de estado (14) es la responsable de la etapa de predicción, mientras que la ecuación de medida (15) es la responsable de la etapa de corrección.

El problema subsecuente de la implementación de un filtro de Kalman es el desconocimiento del ruido v_k presente en cada etapa corrección del sistema, y como es un ruido, por definición es impredecible [78].

El filtro puede estimar el estado tomando en cuenta la observación y el estado anterior, como se había analizado al principio, el cual puede ser expresado por medio de la siguiente ecuación:

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - a\hat{x}_{k-1}) \quad (17)$$

La ecuación (17) es en efecto la misma ecuación (13) pero organizada de una mejor forma para conveniencia del lector y siguiendo con la línea de explicación con la que se viene trabajando. Ahora, atendiendo a la organización propuesta por Levys [78] se analizará la importancia del valor de fusión de la Ganancia de Kalman.

Suponiendo que $K_k = 0$, se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} \quad (18)$$

Lo cual significa que la estimación actual realizada por el filtro está regida únicamente por la predicción en el instante de tiempo inmediatamente anterior y no tiene en cuenta la etapa de corrección en ninguna medida. Caso contrario si la ganancia del filtro es $K_k = 1$, en donde la estimación actual realizada por el filtro está regida únicamente por la etapa de corrección, es decir, por el valor medido en el proceso, tal como se muestra en la ecuación (19).

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} + z_k - a\hat{x}_{k-1} = z_k \quad (19)$$

La importancia de la correcta elección de la ganancia se evidencia ya que la respuesta del filtro depende directamente de su valor para realizar la estimación adecuadamente. El cálculo de la ganancia es realizado por el mismo filtro conforme a los parámetros estadísticos que sean ingresados, es decir, indirectamente desde el ruido.

Si se observa de nuevo la ecuación (15), el ruido asociado a la medición es desconocido, pero puede ser estimado, por ejemplo, de la hoja de especificaciones del sensor que se esté empleando.

Generalmente el valor de exactitud del sensor dará la idea de qué tan ruidosa o estable puede ser la salida del mismo. Se llamará a dicho valor el cual no es dependiente del tiempo, es más bien una propiedad del sensor.

Se puede calcular la ganancia en términos de r :

$$K_k = \frac{p_k \cdot h}{(h \cdot p_k \cdot h + r)} \quad (20)$$

En donde p_k es la predicción del error que se puede calcular recursivamente dada la función (21):

$$p_k = (1 - K_k \cdot h) \cdot p_k \quad (21)$$

Lo que esto significa es que la ganancia de Kalman se calcula en tiempo real haciendo uso de un estimador para determinar la cantidad de error actual en la medida. Suponiendo que el error es cero, la ganancia se torna nula también debido a que si la salida es totalmente acertada (el valor estimado no tiene error), no hay necesidad de hacer la etapa de corrección, tal como se ve en la ecuación (18).

Si por el contrario el error es demasiado alto (cercano a la unidad), es como si se tiene en cuenta únicamente el valor de lectura realizada sin una estimación previa, el caso visto en la ecuación (19), y un estado predicho por el filtro de Kalman en esta situación no es un valor confiable. Hay que tener en cuenta la idea en que Levys y Esme acotan con gran razón: la presencia de ruido

excesivo anula todo esfuerzo en corregir las malas predicciones creadas por el filtro de Kalman (*).

Si se reúnen todas las ecuaciones y se agrupan según su etapa de operación, se obtiene:

Etapa de predicción



$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (14)$$

$$p_k = ap_{k-1}a \quad (22)$$

Etapa de corrección



$$K_k = \frac{p_k \cdot h}{(h \cdot p_k \cdot h + r)} \quad (20)$$

$$p_k = (1 - K_k \cdot h) \cdot p_k \quad (21)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k(z_k - h \cdot \hat{x}_k) \quad (23)$$

Ahora, para que el modelo más completo y general sea representado por matrices, es necesario usar el álgebra lineal para resolver el problema. Se enfatiza en el hecho de que el producto matricial no cumple con la propiedad de conmutatividad: $A \times B$ matricialmente hablando no es necesariamente lo mismo que $B \times A$.

Debido a la carencia de conmutatividad en el producto matricial, se realiza la operación de transposición. Así mismo, se aprovecha el hecho de que una matriz multiplicada por su misma inversa da como resultado una matriz identidad.

(*) Idea extraída de Levys [78]: "Noise overcomes our ability to correct bad predictions". y de Esme [77]: "The only thing to keep in mind is: «The better you estimate the noise parameters, the better estimates you get.»"

Las ecuaciones entonces quedan expresadas del siguiente modo:

Etapa de predicción



$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (24)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (25)$$

Etapa de corrección



$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (26)$$

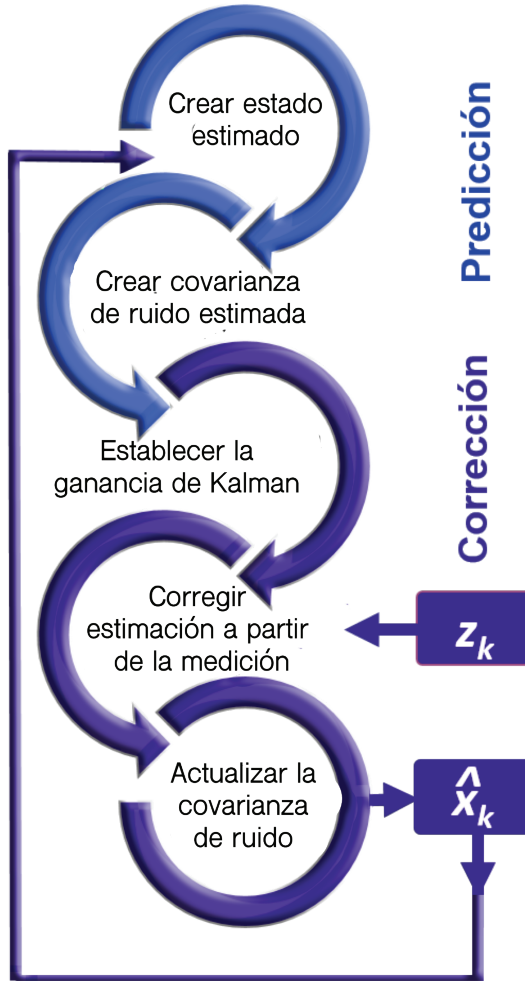
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (27)$$

$$P_k = (1 - K_k H)P_k^- \quad (28)$$

Como enfatiza Esme [77], lo más difícil de efectuar una implementación del filtro de Kalman es encontrar las matrices de covarianza de ruido, tanto para el proceso (definida por la matriz Q) como para la medición (definida por la matriz R). Hallar R es un poco más simple dado que las características propias del sensor pueden proveer información relevante acerca del ruido que pueda generar sus observaciones, pero el ruido del proceso no es fácilmente modelable.

Por último, solo basta hacer la iteración del filtro a través del tiempo para obtener los resultados deseados. Todo el proceso de ejecución del filtro de Kalman se resume en la Figura 14.

Figura 14. Etapas de ejecución del filtro de Kalman.



La salida para k se realimenta como entrada para $k+1$

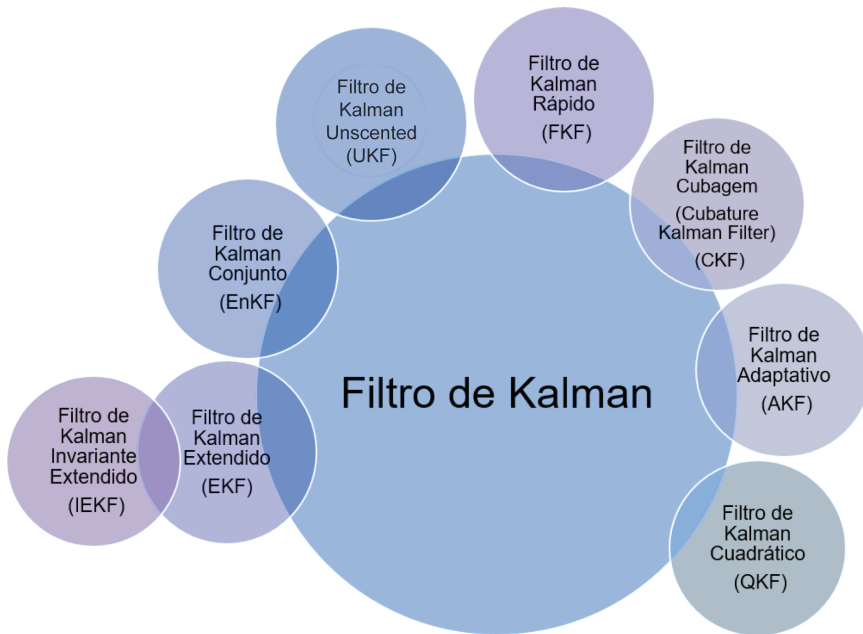
Fuente: Autores. Abstracción realizada a partir de Esme [77] y Aimonen.

2.2 Variantes del filtro de Kalman

El filtro de Kalman es conocido por su implementación sobre sistemas lineales ya que originalmente da solución a problemas de filtrado de este tipo, pero cuando se enfrenta a la estimación de un sistema no lineal, el filtro de Kalman debe adaptarse a las nuevas condiciones de proceso.

Dentro de los Filtros de Kalman existen variantes del algoritmo que permite su mejora dependiendo del tipo de problema de estimación al que se enfrenta, obteniéndose por ejemplo la extensión y aplicación a sistemas no lineales o llegando a establecer un filtrado óptimo en aplicaciones donde el ruido no se puede describir por medio de una distribución gaussiana pura. Cabe resaltar que el filtro de Kalman continúa inalterado desde su esencia, pero se realizan diferentes versiones o adaptaciones que pueden solucionar problemas más ajustados a la vida real.

Figura 15. Variantes del filtro de Kalman.



Fuente: Autores.

Existe gran variedad de filtros de Kalman (KF) para diversos propósitos, algunos de ellos incluidos en la Figura 15. Se destaca el filtro de Kalman Extendido por ser la versión no lineal más directa del filtro de Kalman, y el filtro de Kalman *Unscented*, otro estimador no lineal basado en la transformada *Unscented*, del cual deriva su nombre.

Existen además filtros útiles en aplicaciones basadas en frecuencia, como lo es el filtro de Kalman Rápido, basado en el método de bloqueo de Helmert-Wolf que permite un procesamiento rápido y adecuado de imágenes satelitales

[79]; el filtro de Kalman Cuadrático que permite una formulación rápida de resultados suavizados [80]; y filtros de Kalman que se ocupan de resolver problemas presentados con las versiones generales no lineales de optimización, como lo es el caso del filtro de Kalman Conjunto, el cual es “adecuado para problemas con un gran número de variables, tales como discretizaciones de ecuaciones diferenciales parciales en modelos geofísicos” [81], el filtro de Kalman Cubagem “que hace posible calcular numéricamente las integrales momento multivariados encontradas en el filtro Bayesiano no lineal” [82] o el Filtro Complejo Ampliamente Lineal de Kalman que aprovecha la covarianza Hermitiana y Complementaria de los vectores de ruido para mejorar el rendimiento del filtro [83].

2.3 Filtro de Kalman Extendido

El filtro de Kalman Extendido (EKF) es la implementación del filtro de Kalman para sistemas no lineales, en donde sus características son invariantes al filtro de Kalman, por ejemplo, en donde se asume que el ruido de proceso y de medición es de tipo gaussiano. La adecuación del filtro de Kalman para la estimación en sistemas no lineales estuvo a cargo en su mayoría por el Centro de Investigación Ames de la NASA, cuyo interés en el filtro de Kalman permitió la revolución de la era espacial [84], [85].

El filtro de Kalman Extendido adapta técnicas de cálculo multivariado, en especial las expansiones de las series de Taylor y métodos puramente matemáticos para linealizar el modelo y aplicar un filtro de Kalman estándar [86].

Desde un punto de vista matemático, la formulación del filtro de Kalman Extendido respecto a su versión lineal es de reducida complejidad. Si el KF requiere de ecuaciones lineales que describan el estado del sistema, en el EKF las ecuaciones pueden ser no lineales siempre y cuando la función que represente el comportamiento del mismo sea diferenciable.

Con base en las ecuaciones (24) a (28) planteadas anteriormente, se realiza la modificación de las mismas para que acepten una función no lineal diferenciable como parte del modelo de estado [78]. El modelo del filtro de Kalman Extendido queda representado de la siguiente manera, en donde la

función m es cualquier función no lineal diferenciable y \dot{m}_k representará la primera diferenciación finita en el tiempo discreto k .

Modelo del sistema



$$x_k = Ax_{k-1} + w_k \quad (29)$$

$$z_k = m(x_{k-1}) + v_k \quad (30)$$

Etapa de predicción



$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} \quad (31)$$

$$p_k = p_{k-1} + q \quad (32)$$

Etapa de corrección



$$K_k = p_k \dot{m}_k (\dot{m}_k p_k \dot{m}_k + r)^{-1} \quad (33)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k (z_k - m(\hat{x}_k)) \quad (34)$$

$$p_k = (1 - K_k \dot{m}_k) p_k \quad (35)$$

Las anteriores ecuaciones muestran el funcionamiento del filtro de Kalman Extendido con un modelo simplificado del que se había trabajado anteriormente, permitiendo su rápida comparación y bosquejo de funcionamiento. El modelo descrito no posee señal de control ni matrices de transición, aunque su uso no está restringido.

Hay dos cosas que se deben considerar para terminar de formular el EKF [78]: la forma en cómo hallar la primera diferenciación finita \dot{m}_k sin saber

cuál es la función m directamente, y además cómo generalizar el modelo para que represente un estado multivariado.

Para encontrar la diferencia finita de una función con respecto a una variable, hay que recordar esta operación es una medida de la tasa a la que el valor de dicha función cambia con respecto al cambio de la variable. Dicho cambio puede ser representado como el límite que tiende a cero de las diferencias sucesivas de los valores en la función con respecto al tiempo, matemáticamente representado como:

$$\dot{m}(X) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x} \quad (36)$$

Si un algoritmo no puede encontrar la diferencia finita de una función desconocida por sí mismo, es necesario realizar las restas sucesivas que darán una aproximación a la primera diferencia finita de la función, esto resuelve el primer problema planteado.

$$\frac{m_{k+1} - m_k}{k} \quad (37)$$

Si la señal de medición z_k es función de la señal de proceso x_k , se puede aplicar la ecuación (37) de forma que sea posible la división de las diferencias sucesivas de la primera señal por las diferencias sucesivas de la segunda señal:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (38)$$

Para representar un modelo general multivariado, hay que empezar a modificar el sistema desde el modelo de estado en donde el componente de medición lineal está representado por:

$$z_k = Hx_k \quad (39)$$

Dado como ejemplo para una sola señal, como un sensor, en un estado unidimensional. Al trabajar de manera matricial se puede extender el número de componentes del sistema, representado de la siguiente manera (por ejemplo, con tres sensores y dos variables de estado).

$$z_k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}x_{k1} & + & h_{12}x_{k2} \\ h_{21}x_{k1} & + & h_{22}x_{k2} \\ h_{31}x_{k1} & + & h_{32}x_{k2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Para un caso no lineal, el número de filas corresponde al número de observadores (sensores) y el número de columnas al número de estados, pero recordando que cada valor en la matriz está dado por la relación que hay entre observadores y estados, es decir, cada elemento es el valor actual de la primera diferencia finita del valor del sensor con respecto a su valor de estado.

$$z_k = \frac{dz}{dx} = \mathbf{J} \quad (41)$$

La matriz resultante por lo tanto es una Matriz Jacobiana, en donde su determinante se denomina Jacobiano en cálculo vectorial. El modelo del sistema para el caso no lineal (29) necesita ser reescrito.

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k \quad (42)$$

Donde A , la matriz de transición, es reemplazada por la función de transición Jacobiana f . La notación generalmente usada es F_k para esta Matriz Jacobiana (que reemplaza a la función f) y H_k para la matriz Jacobiana, que reemplaza la función del sensor m . Se llega al modelo del EKF generalizado desde la ecuación (43).

Modelo del sistema



$$x_k = f(x_{k-1}, u_k) + w_k \quad (43)$$

$$z_k = m(x_k) + v_k \quad (44)$$

Etapa de predicción



$$\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k) \quad (45)$$

$$P_k = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (46)$$

Etapa de corrección



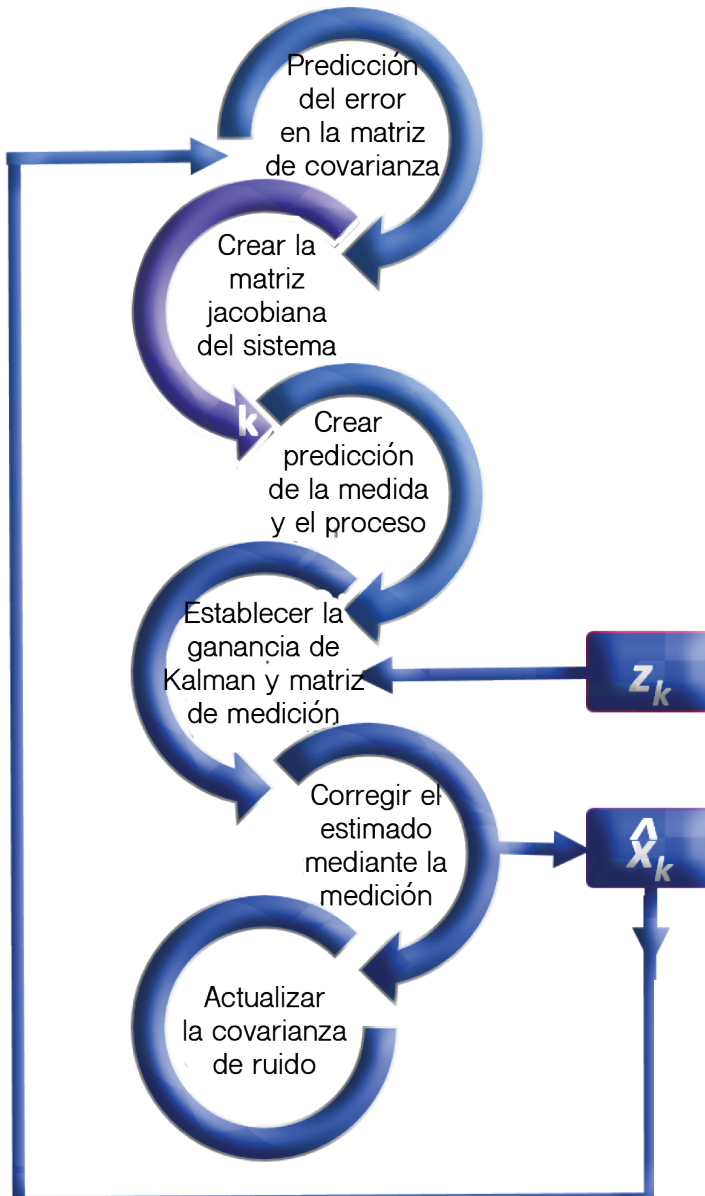
$$K_k = P_k H_k^T (H_k P_k H_k^T + R)^{-1} \quad (47)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k (z_k - m(\hat{x}_k)) \quad (48)$$

$$P_k = (1 - K_k H_k) P_k \quad (49)$$

En numerosos casos descritos, la función de transición es simplemente la función identidad, por lo que la matriz Jacobiana se reduce a ser una matriz identidad. El resumen de la ejecución del filtro de Kalman Extendido se evidencia en la Figura 16.

Figura 16. Etapas de ejecución del filtro de Kalman Extendido.



La salida para k se realimenta como entrada para $k+1$

2.4 Filtro de Kalman *Unscented*

El filtro de Kalman *Unscented* (*Unscented Kalman Filter*, UKF) es otra variante del KF común, aplicado a sistemas no lineales multivariados, el cual se desarrolló de forma similar al EKF, pero mejorando algunas de sus características. Retomando el actuar del EKF, se encuentra que es necesario emplear matrices Jacobianas para realizar una aproximación lineal del sistema descrito por su ecuación de estado.

La parametrización del EKF dificulta obtener una aproximación a la linealización cuando el sistema presenta órdenes altos, como por ejemplo en los procesos en donde el tiempo de muestreo es reducido (representa un valor corto de tiempo).

El EKF puede crear pequeñas desviaciones en los resultados estimados, conocido como deriva, creada por la estimación del estado a partir de la propagación analítica de las variables aleatorias gaussianas (media y covarianza) por medio de la linealización estimada, y dicha deriva es además acumulativa dada la recursividad del filtro.

El filtro de Kalman *Unscented* hace un trabajo excepcional al utilizar una manera determinística de muestreo aproximado, el cual según Cao [87], está diseñado para producir múltiples puntos de muestreo llamados Puntos Sigma, los cuales son cuidadosamente seleccionados y se encuentran “distanciados” uno de otro con base a la covarianza en torno al estado estimado actual, prosiguiendo con la propagación de dichos puntos sobre un mapa de no linealidad (llamado también nube de dispersión de Puntos Sigma, ya que los puntos transformados crean un contorno definido) para obtener una estimación más acertada o cercana de los valores estadísticos del ruido que afecta el sistema (media del error y covarianza). En el UKF se usa de manera frecuente la descomposición de Cholesky para escoger un conjunto de puntos sigma el cual sigue el estado promedio como un vector x de longitud n y covarianza dada por una matriz P de tamaño $n \times n$ [88]. Este proceso llamado Transformada *Unscented*, propuesto por Julier y Uhlmann [89], libera al UKF de realizar el procedimiento de restas sucesivas con el fin de hallar la primera diferencia finita de la función, es decir, se elimina la necesidad de recurrir al cálculo de la matriz Jacobiana, sin sacrificar otras características como el rendimiento.

Para el análisis de este algoritmo de aquí en adelante se empleará el aporte de Terejanu [90], el cual propone el modelo del sistema empleado anteriormente en la realización tanto del KF como del EKF.

Modelo del sistema



$$x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1} \quad (50)$$

$$z_k = m(x_k) + v_k \quad (51)$$

El estado inicial del sistema x_0 tiene una media conocida $\mu_0 = E[x_0]$ y covarianza dada por $P_0 = E[(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T]$. El estado predicho del sistema y de ruido es afectada por la Transformada *Unscented* [91]:

$$x_k^{aug} = [x_k^T \ w_{k-1}^T \ v_k^T]^T \quad (52)$$

$$P_k^{aug} = \begin{bmatrix} P_k & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (53)$$

Ahora es necesario seleccionar los Puntos Sigma para realizar las correcciones a las predicciones. Considere a X_{k-1} un conjunto de $2n + 1$ Puntos Sigma (donde n es la dimensión del espacio de estados en el modelo), junto con el peso para cada uno de ellos (dicho valor determinará la relevancia o cercanía estimada de cada Punto Sigma a la media y varianza real de la señal):

$$X_{k-1} = [(x_{k-1}^j, W^j) | j = 0, \dots, 2n] \quad (54)$$

La selección de Puntos Sigma es limitada según el diseñador y su cantidad varía en función de cuán no lineal sea el sistema. Considere la selección limitada de Puntos Sigma que incorpora la información de orden para cada uno de ellos [92]:

$$x_{k-1}^0 = x_{k-1}^{aug}, \{-1 < W^0 < 1\} \quad (55)$$

$$x_{k-1}^i = x_{k-1}^{aug} + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}} \right)_i, \{1: i: n\} \quad (56)$$

$$x_{k-1}^{i+n} = x_{k-1}^{aug} - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}} \right)_i, \{n+1: i: 2n\} \quad (57)$$

$$W^j = \frac{1-W^0}{2n}, \{1: j: 2n\} \quad (58)$$

y a su vez, los pesos deben cumplir con la condición:

$$\sum_{j=0}^{2n} W^j = 1 \quad (59)$$

En donde el valor $\left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}} \right)_i$ es la fila o la columna de la matriz de la

raíz cuadrada de $\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}$.

El valor inicial de peso W^0 modifica la posición de los Puntos Sigma. Si es mayor o igual a 0, los puntos tenderán a reunirse más lejos del origen, mientras que, si este valor inicial es menor a 0, los puntos tenderán a reunirse más cerca del origen.

Cada punto sigma es propagado, como se mencionó en anterioridad, a través del modelo de proceso no lineal:

$$x_k^{f,j} = f(x_{k-1}^j) \quad (60)$$

Los puntos transformados son empleados para calcular los parámetros estadísticos, es decir la media y la covarianza de la predicción del modelo x_k .

Etapa de predicción



$$x_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j x_k^{f,j} \quad (61)$$

$$p_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(x_k^{f,j} - x_k^f)^T + Q_{k-1} \quad (62)$$

Una vez propagados por el modelo del sistema (proceso), los Puntos Sigma son propagados a través del modelo de observación no lineal:

$$z_{k-1}^{f,j} = m(x_{k-1}^j) \quad (63)$$

Los puntos transformados son empleados esta vez para calcular los parámetros estadísticos, es decir la media y la covarianza de la predicción de la observación z_k .

$$z_{k-1}^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j z_{k-1}^{f,j} \quad (64)$$

$$\delta(z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T + R_k \quad (65)$$

$$\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T \quad (66)$$

Una vez realizadas las predicciones de los valores estimados probabilísticos tanto en la medida como en el estado, es necesario combinar los procesos de predicción y medición real para obtener un estado más cercano a la realidad.

Etapa de corrección



$$K_k = \delta(x_k^f, z_{k-1}^f) \delta^{-1}(z_{k-1}^f) \quad (67)$$

$$x_k^{aug} = x_k^f + K_k(z_k - z_{k-1}^f) \quad (68)$$

$$P_k = P_k^f - K_k \delta^{-1}(z_{k-1}^f) K_k^T \quad (69)$$

Es habitual, como se explica en un principio, que para la selección de los Puntos Sigma sea necesario calcular la matriz de la raíz cuadrada de la covarianza posterior en cada iteración ($P_k = S_k S_k^T$). Como la corrección es aplicada al cálculo final de la covarianza, se puede modificar el algoritmo de una forma más óptima para que dicho valor se propague directamente en la matriz de la raíz cuadrada, es decir en S_k .

$$x_{k-1}^0 = x_{k-1}^{aug}, \{-1 < W^0 < 1\} \quad (70)$$

$$x_{k-1}^i = x_{k-1}^{aug} + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_{k-1} \right)_i, \{1:i:n\} \quad (71)$$

$$x_{k-1}^{i+n} = x_{k-1}^{aug} - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_{k-1} \right)_i, \{n+1:i:2n\} \quad (72)$$

$$W^j = \frac{1-W^0}{2n}, \{1:j:2n\} \quad (73)$$

Este cambio facilita la realización del cálculo, pero se debe implementar una matriz de raíz cuadrada inicial por medio de la factorización de Cholesky de la matriz final de covarianza del error.

$$S_0 = \text{Cholesky}(E[(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T]) \quad (74)$$

Según lo expuesto por Terejanu [90] en su trabajo, como $W^j > 0$ para todos los $i \geq 1$ en la etapa de corrección, la predicción de la matriz de covarianza se puede reescribir con base a la ecuación (62) como:

$$\begin{aligned}
 p_k^f &= \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(x_k^{f,j} - x_k^f)^T + Q_{k-1} \\
 p_k^f &= \sum_{j=1}^{2n} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f)^T + \sqrt{Q_{k-1}} \sqrt{Q_{k-1}}^T \\
 &\quad + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f)(x_k^{f,0} - x_k^f)^T \\
 p_k^f &= \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) & \sqrt{Q_{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f)^T \\ \sqrt{Q_{k-1}}^T \end{bmatrix} \\
 &\quad + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f)(x_k^{f,0} - x_k^f)^T \\
 &\quad \text{Para } \{1:j:2n\} \tag{75}
 \end{aligned}$$

En donde $\sqrt{Q_{k-1}}$ es la matriz de la raíz cuadrada de la covarianza del ruido en el proceso. Se puede usar la descomposición de Cholesky para expresar la transpuesta de la matriz en términos de una matriz ortogonal O_k y una matriz triangular positiva $(S_k^f)^T$.

$$O_k (S_k^f)^T = \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) & \sqrt{Q_{k-1}} \end{bmatrix}^T \quad \text{Para } \{1:j:2n\} \tag{76}$$

Entonces, reemplazando la ecuación (76) en (75), se obtiene:

$$P_k^f = S_k^f O_k^T O_k (S_k^f)^T + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f)(x_k^{f,0} - x_k^f)^T$$

$$P_k^f = S_k^f (S_k^f)^T + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f)(x_k^{f,0} - x_k^f)^T \quad (77)$$

Para incluir el efecto del último término de la matriz de raíz cuadrada, se debe efectuar una factorización de Cholesky de primer grado:

$$S_k^f = \text{Cholesky} (S_k^f, (x_k^{f,0} - x_k^f), \text{sgn}\{W^0\}\sqrt{W^0}) \quad (78)$$

Donde sgn es la función signo y Cholesky entrega el factor de Cholesky de la ecuación (77). En consecuencia, la predicción de la matriz de covarianza se puede escribir como $P_k^f = S_k^f (S_k^f)^T$. Lo mismo aplica a la covarianza posterior, que se puede expresar como $P_k = S_k (S_k)^T$ y la covarianza final como $\delta(z_{k-1}^f) = S_{z_{k-1}^f} S_{z_{k-1}^f}^T$.

En resumen:

Etapa de predicción



$$x_k^{f,j} = f(x_{k-1}^j) \quad (79)$$

$$x_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j x_k^{f,j} \quad (80)$$

$$(S_k^f) = \text{qr}([\sqrt{W^j}(x_k^{f,j} - x_k^f) \quad \sqrt{Q_{k-1}}]) \quad \text{Para } \{1:j:2n\} \quad (81)$$

$$S_k^f = \text{Cholesky} (S_k^f, (x_k^{f,0} - x_k^f), \text{sgn}\{W^0\}\sqrt{W^0}) \quad (82)$$

- Transformación de los Puntos Sigma para incorporar el efecto del ruido de proceso

$$x_k^{f,0} = x_k^f \quad (83)$$

$$x_k^{f,i} = x_k^f + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_k^f \right)_i, \{1:i:n\} \quad (84)$$

$$x_k^{f,i+n} = x_k^f - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_k^f \right)_i, \{1:i:n\} \quad (85)$$

- Propagación de los puntos Sigma Transformados a través del modelo de medición

$$z_{k-1}^{f,j} = m(x_{k-1}^{f,j}) \quad (86)$$

$$z_{k-1}^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j z_{k-1}^{f,j} \quad (87)$$

$$S_{z_{k-1}^f} = qr\left(\left[\sqrt{W^j}(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f) \quad \sqrt{R_k}\right]\right)$$

$$\text{Para } \{1:j:2n\} \quad (88)$$

$$S_{z_{k-1}^f} = \text{Cholesky}\left(S_{z_{k-1}^f}, (z_{k-1}^{f,0} - z_{k-1}^f), \text{sgn}\{W^0\}\sqrt{W^0}\right) \quad (89)$$

$$\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T \quad (90)$$

La función qr regresa únicamente la matriz triangular negativa.

Etapa de corrección



$$K_k = (\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) / S_{z_{k-1}^f}^T) / S_{z_{k-1}^f} \quad (91)$$

$$x_k^{aug} = x_k^f + K_k(z_k - z_{k-1}^f) \quad (92)$$

$$S_k = \text{Cholesky}(S_k^f, K_k \delta(x_k^f, z_{k-1}^f), -1) \quad (93)$$

Donde el signo / denota una operación de sustitución inversa. Esta es una alternativa computacionalmente eficiente a la inversión de la matriz, aunque se puede usar dicha operación sin inconveniente también. Como la factorización de Cholesky es una matriz triangular negativa, se puede hallar el valor de la K_k ganancia usando una doble sustitución inversa en la ecuación:

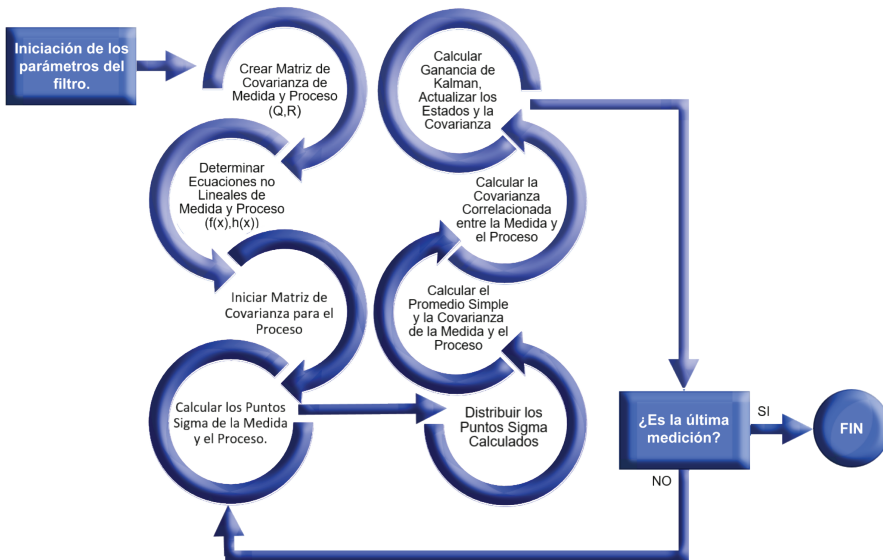
$$K_k(S_{z_{k-1}^f} \ S_{z_{k-1}^f}^T) = \delta(x_k^f, z_{k-1}^f) \quad (94)$$

En la ecuación (93), como el argumento del medio en la factorización de Cholesky es una matriz $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, el resultado es una consecución de n veces el factor de Cholesky usando las n columnas de la matriz.

De esta forma es posible implementar un filtro de Kalman *Unscented* algorítmicamente, en donde las operaciones básicas con matrices pueden ser sustituidas por métodos computacionalmente más eficientes.

En la Figura 17 se muestra el resumen de las etapas de ejecución del filtro de Kalman *Unscented*.

Figura 17. Etapas de ejecución del filtro de Kalman *Unscented*.



Fuente: Autores. Adaptación realizada a partir de Callejas [93].

2.5 Fusión de Datos.

La fusión de datos es una característica que puede proveer los algoritmos de estimación no lineal y en especial el Filtro de Kalman, y hace referencia específicamente a la combinación de información y datos extraídos de diferentes fuentes como por ejemplo sensores, de tal manera que la información resultante tiene menos incertidumbre o error de lo que se esperaría cuando se utilizan las mismas fuentes por separado.

Las fuentes de datos utilizadas para un proceso de fusión no son específicas ya que se pueden emplear información recolectada de muchos medios, como es el caso de sensores de diferentes tipos, valores pasados de los mismos sensores, información acerca del ambiente e información recolectada de sistemas de diversos tipos [94].

Existen actualmente muchos algoritmos para realizar fusión de datos, como por ejemplo el teorema de límite central [95], redes Bayesianas [96], teoría de Dempster-Shafer [97] y finalmente el filtro de Kalman [98].

Específicamente hablando del filtro de Kalman, la fusión de datos es ampliamente utilizada en los sistemas de captura de movimiento biomecánico al tomar datos de varios sensores inerciales o de una combinación de sensores inerciales con sistemas de captura ópticos.

Esta fusión de datos también permite ayudar a corregir diversos problemas como el ruido de una señal, ya que, al obtenerse más información del sistema, el ruido presente en todas las señales en conjunto se puede estimar de una mejor manera dando resultados más precisos. Sin embargo, la fusión de datos supone algunas desventajas, como por ejemplo un incremento del costo computacional requerido para ejecutar el algoritmo. Para tener una idea de cómo una fusión sensorial funciona, se puede proponer un sistema de referencia con sólo un estado. Se sigue el modelo de Levys [78], para simplificar aún más el sistema se puede asumir que no se tiene conocimiento del modelo de transición conocido anteriormente como la matriz A .

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} = 1\hat{x}_{k-1} = \hat{x}_{k-1} \quad (95)$$

Como no existe un modelo de transición de estados para el sistema, se puede asumir únicamente que el estado en el tiempo actual es el mismo estado en el tiempo inmediatamente anterior. Como se necesita más de un valor para fusionar los datos, se supondrá que hay dos sensores idénticos que contribuyen igualmente a la estimación del estado, por lo cual la matriz del estado sólo tendrá dos valores.

$$z_k = H\hat{x}_k + v_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_k + v_k \quad (96)$$

Para obtener la matriz R , es necesario recordar que fue definido anteriormente como la varianza de la señal de ruido en la observación v_k , pero como este sistema tiene más de dos sensores, la matriz R contendrá la covarianza de ambos sensores. La diagonal de la matriz principal contendrá el valor de la varianza para ese sensor. Los elementos que no están en la diagonal principal de la matriz representan la cantidad de ruido del sensor que varía con respecto a la del otro. En la mayoría de aplicaciones, salvo casos específicos, tales valores son cero.

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \quad (97)$$

De esta forma se tienen todos los elementos en forma matricial para ser computados conjuntamente con el resto del algoritmo de Kalman.