

CAPÍTULO 1

1. Fundamentación Teórica para la Implementación de Técnicas de Procesamiento de Señales

Los sistemas que capturan la información cinemática en el cuerpo humano arrojan información que contiene múltiples errores de medición producidos por perturbaciones o indeterminaciones, en donde su origen se debe a la naturaleza misma del movimiento y a otros factores que pueden ser emanados de elementos externos. Algunas fuentes de ruido son generalmente sistemas que causan perturbaciones electromagnéticas, como dispositivos electrónicos, líneas de transmisión de energía, elementos ferromagnéticos y el sistema de captura en sí mismo, donde los módulos utilizados generan varios tipos de errores en las señales.

Los problemas detectados en la información que no ha sido procesada de manera adecuada son claramente visibles en forma de imprecisiones, desviaciones, deriva o truncamiento de los valores reales que se espera obtener, y que reducen la calidad de una aplicación en donde la exactitud de la información recogida es un factor importante. Como se ha planteado inicialmente, la corrección o disminución de los errores en los datos biomecánicos se puede realizar mediante el uso de filtros, entre los que se encuentra el filtro de Kalman, destacándose el filtro de Kalman *Unscented* –sin aroma– y el filtro de Kalman Extendido, siendo necesario establecer cuál de los dos tipos de filtro puede mejorar la información extraída a partir de la captura de señales, reduciendo al mínimo los errores presentados en los datos según el requerimiento de la aplicación final.

Para el desarrollo de los filtros es necesario poseer un lenguaje matemáticamente apropiado que permita la asimilación de la información, por lo tanto, en este capítulo se desarrolla la sustentación teórica que fundamenta el desarrollo de los mismos con un enfoque netamente matemático, analítico y de ingeniería. Mediante exposición directa y un análisis completo se cubre la temática de

información preliminar, que comprende desde la definición y clarificación de los conceptos básicos, pasando por la definición de estimadores hasta la ilustración y estructura de los Filtros de Kalman, sumado a las variantes incluidas en el enfoque de este documento.

1.1 Conceptos Matemáticos

Con el propósito de aportar en la comprensión global de la información presentada a lo largo del texto, en esta sección se expone algunos conceptos preliminares relevantes relacionados con los procesos matemáticos que permiten la adecuada interpretación de la investigación.

1.1.1 Estimador

En el campo de la estadística, un estimador, habitualmente llamado “estimador sin sesgo” es una función matemática que puede ser usada para calcular un parámetro desconocido de una distribución de probabilidad teórica a partir de observaciones indirectas. Formalizando el lenguaje estadístico, se distinguen tres términos estrechamente relacionados: estimador, estimación y estimando. La regla matemática recibe el nombre de estimador, mientras que la cantidad de interés es el estimando y su resultado es la estimación.

Un estimador puede ser de dimensión finita (en modelos paramétricos y semiparamétricos) o de dimensión infinita (modelos semiparamétricos y no paramétricos)[2]. Si el parámetro se denota θ , el estimador se escribe tradicionalmente añadiendo un circunflejo sobre el símbolo: $\hat{\theta}$. Al ser una función de los datos, el estimador es en sí mismo una variable aleatoria y una realización particular de esta variable aleatoria se llama “estimación” [3].

Suponiendo que hay un parámetro fijo θ que necesita ser estimado, entonces el estimador es una función que mapea el espacio de muestra a un conjunto de estimaciones de muestra. A menudo es conveniente expresar la teoría de estimación usando el álgebra de variables aleatorias: así, si X se usa para denotar una variable aleatoria correspondiente a los datos observados, el estimador (en sí mismo tratado como una variable aleatoria) se simboliza como una función de esa variable aleatoria, $\hat{\theta}(X)$. La estimación para un valor de datos observado particular x , es decir, para $X = x$ es entonces $\hat{\theta}(x)$, el cual es un valor fijo [4].

1.1.2 Error

El error puede definirse como una propiedad cuantificable de un estimador [4], y hace referencia a la diferencia entre un valor verdadero y una estimación, o aproximación, de ese valor. En estadística, un ejemplo común es la diferencia entre la media de una población completa y la media de una muestra extraída de esa población.

Es importante resaltar que el error de la estimación no depende solo del estimador sino también de cuán representativa es la muestra elegida para obtener la estimación. Para una muestra específica $\hat{\theta}$, el error del estimador estará dado por (1).

$$e(x) = \hat{\theta}(x) - \theta \quad (1)$$

Dado que el error es la diferencia de un valor real o experimental frente a un valor teórico o hipotético, existen innumerables funciones matemáticas que pueden describir la relación entre el estimador y la muestra y , por lo tanto, varios tipos de errores. Algunos de los tipos de errores más frecuentes son los estadísticos (llamados perturbaciones), errores residuales (de ajuste de la desviación), entre otros.

1.1.3 Error Cuadrático Medio (*Mean Square Error*, MSE)

El concepto de error cuadrático medio (*Mean Square Error*, MSE) es un criterio que se utiliza para medir el rendimiento de un estimador. El error cuadrático medio, abreviado como MSE, es importante para transmitir los conceptos de precisión, sesgo y exactitud durante la estimación estadística [5].

Al contar con el objetivo de predicción o estimación junto con un predictor o estimador que se dice que es la función de los datos dados, el MSE se define como el promedio de cuadrados de las diferencias entre el atributo que se debe estimar y el estimador. El error cuadrático medio se puede llamar una función de riesgo que corresponde al valor esperado de la pérdida de error al cuadrado. Esta diferencia o pérdida podría desarrollarse debido a la aleatoriedad o debido a que el estimador no representa la información que podría proporcionar una estimación más precisa [6].

Formalmente, el error cuadrático medio de $\hat{\theta}$ es el valor esperado (la esperanza matemática de todas las muestras hechas) de los errores cuadráticos, como se muestra en (2).

$$MSE(\hat{\theta}) = E \left[(\hat{\theta}(x) - \theta)^2 \right] \quad (2)$$

De esta forma el MSE indica hasta qué punto los valores estimados promedio se desplazan entre sí teniendo como referencia a un parámetro único dentro de los valores estimados. Esta definición depende del parámetro desconocido, y el MSE en este sentido es una propiedad de un estimador [4].

1.1.4 Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RMSE)

La Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio es una medida de error estadística, correspondiente a la magnitud media del error, y es ampliamente utilizada como parámetro de análisis del error para datos numéricos de propósito general.

A comparación del error absoluto medio (*Mean Absolute Error*, MAE) en donde brinda el mismo peso a todos los errores de la señal, el RMSE penaliza severamente a los errores más grandes que se encuentren en los datos, es decir, que más se alejen de la varianza [7] ya que los errores se elevan al cuadrado antes de que se promedien en el análisis. Esto significa que el RMSE es más útil cuando grandes errores son particularmente indeseables [8].

La escala del RMSE puede estar comprendida de 0 a ∞ y sus puntuaciones son de orientación negativa, es decir que los valores más bajos son los más óptimos o los mejores. La ecuación por medio de la cual se calcula el valor del RMSE es la siguiente.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} = \sqrt{MSE(\hat{\theta})} \quad (3)$$

Hay que tener en cuenta que el término Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RMSE) y Raíz Cuadrada de la Desviación Cuadrática

Media (RMSD) es el mismo parámetro estimativo, llamado simplemente de dos modos ya que se entiende a la desviación como una medida de error, adoptando el otro nombre.

1.1.5 Muestreo

La definición de muestreo puede darse desde el punto de vista estadístico o de procesamiento digital de señales, ambos utilizados en este libro.

Desde el punto de vista estadístico, es un procedimiento que se refiere a la selección de observaciones individuales, donde estas nos ayudan a hacer inferencias estadísticas sobre la población o proceso analizado [9]. En el muestreo, suponemos que las muestras se extraen de la población, mientras que los medios de muestra y los medios de población son iguales.

Desde el punto de vista de procesamiento digital de señales, el muestreo hace referencia a la teoría de digitalización propuesta por Nyquist-Shannon, el cual establece que una condición suficiente en la frecuencia de toma de datos permite que una secuencia discreta de muestras capture toda la información de una señal de tiempo continuo de ancho de banda finito [10]. En ingeniería, una señal de tiempo continuo suele ser una señal analógica, mientras que una secuencia discreta de muestras puede ser una señal digital o simplemente una secuencia.

1.1.6 Desviación de Muestreo

La desviación de muestreo es el error de la muestra seleccionada de las verdaderas características, rasgos, comportamientos, cualidades o figuras de toda la población. Al ser un error, es a su vez una diferencia entre la muestra estadística utilizada para estimar un parámetro y el valor real pero desconocido del parámetro [11].

Una estimación de un valor generalmente estará sujeta a variación de muestra a muestra. Estas variaciones en los valores de muestra posibles de una estadística se pueden expresar teóricamente como errores de muestreo, aunque en la práctica el error de muestreo exacto es típicamente desconocido [12].

Si se tiene el parámetro θ y su estimador $\hat{\theta}$, este error, para un valor x está dado por

$$d(x) = \hat{\theta}(x) - E(\hat{\theta}(X)) = \hat{\theta}(x) - E(\hat{\theta}) \quad (4)$$

En donde $E(\hat{\theta}(X))$ es el valor esperado (esperanza matemática) del estimador. Al igual que el error de la estimación, la desviación del muestreo no depende solo del estimador sino también de cuán representativa es la muestra elegida para obtener la estimación.

1.1.7 Sesgo (*Bias*)

El sesgo es una característica estadística según la cual el valor esperado de los resultados difiere del verdadero parámetro cuantitativo subyacente que se está estimando [13].

Se puede representar como un valor que muestra la distancia entre el promedio de la recolección de valores estimados y un solo parámetro que está siendo estimado. El sesgo $\hat{\theta}$ de está definido como:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (5)$$

1.1.8 Matriz Hermitiana

La matriz Hermitiana es un tipo de matriz cuadrada que contiene elementos de tipo complejo y posee además la característica de ser igual a su propia traspuesta conjugada [2].

El elemento en la i -ésima fila y j -ésima columna es igual al conjugado del elemento en la j -ésima fila e i -ésima columna para los índices i, j en una matriz hermitiana.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 + i \\ 2 - i & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Las matrices hermitianas llevan el nombre de Charles Hermite, quien demostró en 1855 que las matrices de esta forma comparten una propiedad

con matrices simétricas reales de tener siempre valores propios reales. Las matrices hermitianas son fundamentales para la teoría cuántica de la mecánica de matrices creada por Werner Heisenberg, Max Born y Pascual Jordan en 1925.

1.1.9 Matriz Triangular

Es un tipo especial de matriz cuadrada cuyos elementos por encima o por debajo de su diagonal principal son cero [14]. Debido a que las ecuaciones matriciales con matrices triangulares son más fáciles de resolver, son importantes en el análisis numérico y en el desarrollo de sistemas estimativos como los expuestos en este libro.

Pueden existir varios tipos de matrices triangulares de acuerdo a la disposición de los elementos que la conforman. Una matriz cuadrada se llama triangular inferior si todas las entradas por encima de la diagonal principal son cero.

Así mismo, una matriz cuadrada se denomina triangular superior si todas las entradas por debajo de la diagonal principal son cero. Una matriz que es tanto triangular superior como inferior se llama matriz diagonal [15].

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

1.1.10 Ruido

La definición de ruido puede darse desde la definición de estadística espectral sumado al de procesamiento digital de señales, ambos utilizados en este libro. El ruido estadístico es una variabilidad cuyo origen, explicación o interpretación es indeterminada, y que se produce dentro de una muestra de datos.

El término ruido, en este contexto, proviene del procesamiento de la señal, donde se usa para referirse a energía eléctrica o electromagnética no deseada que degrada la calidad de las señales y los datos. La presencia de ruido significa que los resultados del muestreo podrían no duplicarse si el proceso se repitiera [16].

1.1.11 Ruido Gaussiano y Ruido Blanco

El ruido Gaussiano es un tipo de ruido estadístico que tiene una función de densidad de probabilidad igual a la de la distribución normal, que también se conoce como la distribución de Gauss. En otras palabras, los valores que el ruido puede asumir son distribuidos de forma Gaussiana y que, generalmente, se encuentra asociado con la radiación electromagnética [17].

Si un ruido es Gaussiano, la probabilidad que se aleje de más de 3σ del valor promedio es bajo. Esta propiedad es utilizada para identificar la señal del ruido, pero sólo funciona si el ruido es realmente Gaussiano.

El ruido coloreado (blanco, rosa, browniano, etc.) es una señal aleatoria que puede estar distribuida normalmente o no, caracterizada porque sus valores en instantes de tiempo distintos no tienen relación alguna entre sí, es decir, no existe correlación estadística entre sus valores. El ruido coloreado Gaussiano es aquel cuya función de densidad responde a una distribución normal.

1.1.12 Matriz Jacobiana

La matriz Jacobiana es aquella que contiene todas las derivadas parciales de primer orden de una función vectorial. Cuando es una matriz cuadrada, su determinante se denomina Jacobiano [18].

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Como la definición de Matriz Jacobiana y el valor del Jacobiano suele ser confusa, se puede hacer una analogía y pensar en una encuesta en la que se pide a un grupo de personas calificar un par de diferentes productos en una escala (por ejemplo, de 1 a 5) del peor al mejor [19].

La puntuación global dada a cada producto está definida por el promedio de todas las calificaciones que la gente le dio a ese producto. Para ver cómo una persona influyó en la valoración global para un solo producto, se puede analizar la calificación de esa persona para ese producto específico.

Cada una de esas variaciones de la relación entre persona y producto es como una derivada parcial, y la asignación de una valoración de dicha persona a cada producto es como el valor Jacobiano. Si se reemplaza a las personas con sensores y productos con los estados, se puede comprender de mejor manera la relación entre el modelo de sensor y el modelo de proceso del filtro de Kalman Extendido.

1.1.13 Determinante

Es una operación matemática realizada en álgebra matricial. Los determinantes tienen diversas interpretaciones dependiendo del proceso matemático y lógico que se esté siguiendo a través del álgebra como una herramienta [20]. Por ejemplo, los coeficientes en un sistema de ecuaciones lineales están representados habitualmente en forma de matriz, y el determinante se puede usar para resolver esas ecuaciones. El uso de determinantes en cálculo incluye el determinante jacobiano en la regla de cambio de variables para integrales de funciones de varias variables.

Los determinantes también se utilizan para definir el polinomio característico de una matriz, que es esencial para los problemas de valores propios en el álgebra lineal. En ocasiones, los determinantes se usan meramente como una notación compacta para expresiones que de otro modo son difíciles de escribir.

El algoritmo de extracción del determinante de una matriz A de tamaño 3×3 prosigue de la forma

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
 &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.
 \end{aligned} \tag{9}$$

1.1.14 Esperanza Matemática (Valor Esperado)

En la teoría de la probabilidad, el valor esperado de una variable aleatoria, intuitivamente, es el valor promedio a largo plazo de las repeticiones del experimento que representa.

De forma práctica, el valor esperado de una variable aleatoria discreta es el promedio ponderado multiplicado la probabilidad de todos los valores posibles. En otras palabras, cada valor posible que puede asumir la variable aleatoria se multiplica por su probabilidad de ocurrir, y los productos resultantes se suman para producir el valor esperado [21].

El mismo principio se aplica a una variable aleatoria absolutamente continua, excepto que una integral de la variable con respecto a su densidad de probabilidad reemplaza a la suma. La definición formal incluye ambos y también funciona para distribuciones que no son ni discretas ni absolutamente continuas; el valor esperado de una variable aleatoria es la integral de la variable aleatoria con respecto a su medida de probabilidad [22].

El valor esperado, también llamado media poblacional o media de una variable aleatoria X , está representado por el valor $E = [X]$.

Cuando la variable aleatoria es discreta, la esperanza es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso. Representa la cantidad media que se espera obtener como resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces. Cabe decir que el valor que toma la esperanza matemática en algunos casos puede ser uno no esperado, es decir totalmente impredecible, improbable o incluso imposible.

1.1.15 Covarianza

La covarianza es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias. Es uno de los datos fundamentales para determinar si existe una dependencia lineal entre las variables y además es el dato necesario para estimar otros parámetros básicos, como el coeficiente de correlación lineal o la recta de regresión [23]. Se debe aclarar que una covarianza igual a cero no garantiza que las variables sean linealmente independientes, pero se debe tener en cuenta que la covarianza es una medida de linealidad.

La covarianza esta expresada por (10):

$$\sigma(x, y) = E[(x - E[x])(y - E[y])] \quad (10)$$

El signo de la covarianza muestra la tendencia en la relación lineal entre las variables. La magnitud de la covarianza no es fácil de interpretar porque no está normalizada y, por lo tanto, depende de las magnitudes de las variables.

1.1.16 Varianza

Es un valor que mide hasta qué punto un conjunto de números se distribuye alejándose unos de otros [24]. Una variación de cero indica que todos los valores son idénticos. La varianza es siempre es un valor positivo, en donde una varianza baja indica que los puntos de datos tienden a estar cerca de la media (valor esperado) y por lo tanto el uno al otro, mientras que una varianza alta indica que los puntos de datos están distribuidos alrededor de la media y distanciados entre sí.

Una medida equivalente es la raíz cuadrada de la varianza, llamada la desviación estándar. La desviación estándar tiene la misma dimensión que los datos, y por lo tanto es comparable a desviaciones de la media. Como la desviación estándar es a menudo representado con el símbolo σ , la varianza entonces estará representada con el símbolo σ^2 .

$$VAR = E[(X - \mu)^2] \quad (11)$$

1.1.17 Eficiencia

Dos propiedades deseables en la respuesta de un estimador son la imparcialidad (nulo valor de sesgo) y el nulo -o al menos mínimo- error cuadrático medio (MSE). Los estimadores lamentablemente no pueden satisfacer de mejor forma las dos condiciones al mismo tiempo: un estimador con sesgo puede tener menor error cuadrático medio (MSE) que cualquier estimador imparcial.

La eficiencia es por tanto un medidor de la calidad del estimador, y está determinada en una relación entre el elemento de error (MSE) versus el valor de sesgo, y muestra qué tan bueno es el estimador en predecir los parámetros de la variable aleatoria que evalúa. Esencialmente, un estimador más eficiente necesita menos observaciones que una menos eficiente para lograr un rendimiento determinado [2].

Entre estimadores imparciales, a menudo existe uno con la menor varianza, llamado el estimador insesgado de varianza mínima (MVUE). En algunos casos existe un estimador imparcial eficiente, que, además de tener la menor varianza entre los estimadores sin sesgo, satisface la regla de Cramer-Rao, que es un absoluto límite inferior de la varianza para las estadísticas de una variable.

1.2 Estimación.

La estimación es un proceso matemático que permite hallar una aproximación a un determinado valor, que puede ser desconocido pero inferido a partir de datos circundantes y cercanos al mismo, y permite completar o predecir información faltante, incierta o inestable [25]. Generalmente, este proceso matemático involucra usar el valor estadístico derivado de una muestra de datos para un parámetro determinado [25].

Una de las formas más comunes para realizar estimaciones es dividir los datos en muestras para facilitar su análisis, en donde el conteo general de una variable (que se presume demasiado grande) puede inferirse a partir de una fracción de la misma que contenga suficiente información representativa para determinar los datos faltantes. Este tipo de estimación es común en censos poblacionales, donde difícilmente se puede recolectar toda la información específica para el estudio que se pretenda realizar.

Otra forma de estimación matemática es realizada a partir de límites inferiores y superiores de una cantidad de medida que no pueda ser especificada con claridad o especificidad. Como la estimación provee información no existente, es especialmente útil en procesos donde la generación de información futura es crítica.

Para brindar algunos ejemplos de aplicación de las estimaciones a sistemas de uso cotidiano y en ingeniería, el radar tiene como objetivo conocer el número de determinados objetos, usualmente aeronaves, barcos o focos de lluvia cuando el radar es de uso meteorológico, y esta información es mediante el análisis de los tiempos de retraso entre los ecos recibidos y los impulsos transmitidos. Una estimación es necesaria para analizar estos tiempos de respuesta, ya que los impulsos reflejados pueden contener ruido eléctrico adquirido a través del viaje en el espacio, y los valores afectados están distribuidos al azar de modo que el tiempo de retraso debe ser una aproximación del valor real, pero lo suficientemente bueno como para ofrecer un margen de error mínimo y la información pueda ser tomada como válida y confiable [26].

1.2.1 Estimadores.

Adoptando el concepto utilizado en la parte inicial de este capítulo, un estimador es un conjunto de técnicas que por medio de diversas herramientas realizan la estimación en una serie de datos específica.

Desde la definición estricta de la estadística, es una regla para calcular el estimado de una cantidad por medio de los datos de observación recolectados, y tres partes deben ser diferenciables entre sí: la regla (estimador), la cantidad de interés (el estimando) y su resultado (la estimación) [5].

Desde la definición formal, se debe suponer que existe un parámetro fijo θ que debe ser estimado. Para ello, una función mapea el espacio de muestra a un conjunto de estimaciones de la muestra, a dicha función se le llama estimador. Dicho estimador de θ generalmente se representa con el símbolo $\hat{\theta}$. Según sea el grado de conveniencia, se puede expresar el estimador usando el álgebra de variables aleatorias: Así, si x se utiliza para denotar una variable aleatoria que corresponde a los datos observados, el estimador se simboliza como una función de dicha variable aleatoria, $\hat{\theta}(x)$.

Existen diversos tipos de estimadores usados según el tipo de análisis que se quiera realizar al conjunto de datos, las características esenciales de los mismos y sobretodo el comportamiento, descritos desde el punto de vista de funciones matemáticas, que presentan los datos a través del tiempo. Desde ese punto de vista, los estimadores están divididos en dos categorías, de tipo lineal y de tipo no lineal.

1.2.2 Estimadores lineales.

Son aquellos estimadores que realizan aproximaciones de los datos basados en un modelo lineal, y por lo tanto funcionan en modelos de procesos únicamente lineales. El estimador de este tipo más conocido es la Regresión Lineal. La regresión lineal es una técnica que permite modelar la relación entre una variable dependiente generalmente denotada con la letra Y , y uno o más explicativos escalares, llamados variables independientes, denotada con la letra X .

En una regresión lineal simple se puede predecir las puntuaciones en una variable a partir de las puntuaciones en una segunda variable. La variable que se está prediciendo se llama la variable criterio y es la misma variable dependiente. La variable en las que se basan las predicciones se llama en la variable predictora y es la misma variable independiente. Cuando sólo hay una variable de predicción, el método de predicción se llama regresión simple [27].

Un gran número de procedimientos han sido desarrollados para la estimación de parámetros y la inferencia en la regresión lineal. Estos métodos difieren en la simplicidad computacional de los algoritmos, la presencia de una solución de forma cerrada, robustez con respecto a las distribuciones de colas pesadas, y los supuestos teóricos necesarios para validar propiedades estadísticas deseables tales como la consistencia y la eficiencia asintótica [28].

Aparte de las regresiones lineales, existen otros métodos para realizar estimaciones lineales, dentro de los cuales se destacan los siguientes:

Estimación por mínimos cuadrados

- Mínimos cuadrados ordinarios (MCO).
- Mínimos cuadrados generalizados (GLS).

- Porcentuales Mínimos Cuadrados.
- Mínimos Cuadrados Iterativos Reponderados (IRLS).
- Regresión con variables instrumentales (IV).
- Total de mínimos cuadrados (TLS).

La estimación de máxima verosimilitud

- Estimación de máxima verosimilitud.
- Regresión Ridge.
- Desviación de regresión de mínimos absolutos (LAD).
- Estimación adaptativa.

Otras técnicas de estimación

- Bayesiano de regresión lineal.
- Regresión cuantil.
- Modelos mixtos.
- Regresión de componentes principales (PCR).
- Regresión de mínimos de ángulo.
- El estimador de Theil-Sen.

1.2.3 Estimadores no lineales.

Según lo propuesto por Mitter [29], existen dos categorías dentro de los estimadores no lineales: Estimación estática de sistemas no lineales y estimación de estado para sistemas dinámicos no lineales.

De una manera general, los estimadores no lineales brindan una relación entre un conjunto de variables independientes y dependientes dentro de un sistema previamente modelado, en donde el diseñador de la aplicación define el tipo de relación que se da entre las variables que componen el sistema.

Cuando se puede establecer cualquier tipo de relación entre las variables, hay dos situaciones fundamentales que deben analizarse [30].

En primer lugar, se debe analizar la correspondencia entre los grupos de variables para que su asociación cobre un sentido específico y no carezca de validez. En segunda instancia, se debe analizar a qué grado las variables

están correlacionadas entre sí, para comprobar efectivamente que se trate de un sistema no lineal. Técnicamente hablando, la estimación no lineal “es un procedimiento de ajuste que estimará cualquier tipo de relación entre una variable dependiente (o variable de respuesta) y una lista de variables independientes”. [30]

Por citar algunos ejemplos, dentro de los métodos de estimación no lineal se encuentran las siguientes técnicas de ajuste:

- Estimación por Mínimos Cuadrados
- Funciones de pérdida
- Mínimos cuadrados ponderados
- Máxima verosimilitud
- Criterios de convergencia
- Mínimos locales
- Métodos Cuasi-Newtonianos
- Patrón de Movimiento de Hooke-Jeeves
- Patrón de búsqueda Rosenbrock
- Matriz de arpillera y desviación estándar
- Filtro de partículas.
- Filtros de Kalman no Lineales

1.3 Señales.

En el campo de la ingeniería, una señal es una función que “transmite información sobre el comportamiento o atributos de algún fenómeno” [31]. Descrita de una manera física, una señal es una información transmitida de un punto a otro a través de un medio, como por ejemplo un alambre de cobre que puede transportar impulsos eléctricos. Las señales pueden ser también convenciones adoptadas por un grupo de personas en específico, en donde un canal de transmisión con un mensaje puntual puede ser interpretado según la convención, y por consiguiente la palabra “información” cobra un significado de mayor importancia.

Las señales pueden ser categorizadas de muchas formas, pero eléctricamente se distinguen únicamente dos tipos: analógicas y digitales.

Usualmente las señales eléctricas analógicas son las que interpretan el mundo real de una forma continua a través del tiempo, mientras que las señales digitales representan la información en intervalos de tiempo llamadas muestras. Con respecto al tipo de señales que se pueden encontrar en diversos campos de la vida cotidiana están las señales acústicas, producido por ondas oscilantes en un medio, usualmente el aire; señales visuales llamadas imágenes, producida por ondas de diferente frecuencia emanando en un espacio bidimensional; señales audiovisuales, una combinación de las señales visuales y acústicas; señales mecánicas que representan el movimiento y pueden ser monitoreadas de forma eléctrica y por último señales biológicas, provenientes de seres vivos en un sentido global de la interpretación.

1.3.1 Señales biomédicas y biomecánicas

La biomedicina, también conocida como medicina teórica, es un término que comprende el conocimiento y la investigación en los campos de la medicina, veterinaria, odontología y ciencias biológicas fundamentales como la bioquímica, la biología celular, genética, zoología, botánica y microbiología. Las señales que se generan en estos ámbitos son llamadas señales biomédicas. Se trata de un término que puede englobar toda la información proveniente de todos los organismos vivos. Habitualmente se entienden como los registros de tiempo en el que sucede un evento biológico, como el latido del corazón o la contracción de los músculos porque todas las actividades mecánicas, eléctricas y químicas producen señales medibles y analizables.

Hay distintos tipos de señales biomédicas, como lo son por ejemplo señales bioeléctricas, generada por nervios y tejidos musculares como resultado de los cambios en las corrientes eléctricas; señales biomagnéticas, creadas por diversos órganos en forma de campo magnético; señales bioquímicas, que contienen información de los cambios en concentración de compuestos químicos en el cuerpo; señales bioacústicas, señales bioópticas, generada por los atributos ópticos o inducidos por la luz dentro de los sistemas biológicos; y finalmente señales biomecánicas, aquellas originadas directamente con el movimiento o desplazamiento.

Las señales biomecánicas, al igual que cualquier otra señal, posee propiedades temporales, es decir que no se puede describir como una constante a través del tiempo. La manera óptima y más directa de recolectar la información

biomédica a través de sus señales es transduciéndola a una forma eléctrica, para lo cual se usan distintos tipos de sensores según el fenómeno que se desee analizar. Los sistemas biomecánicos poseen una gran variedad de dispositivos electrónicos que pueden caracterizar su comportamiento, como se ha visto en anterioridad todos los sensores y sistemas que pueden permitir la captura del movimiento.

El estudio de las señales biomecánicas está más cercano a la ingeniería que al área médica, ya que los métodos numéricos se aplican en casi todos los estudios biomecánicos. La investigación se realiza en un proceso iterativo de hipótesis y verificación, incluyendo varias etapas de modelado, simulación por computador y mediciones experimentales.

1.3.2 Adquisición de las señales biomecánicas

La adquisición de señales biomecánicas comienza con la selección óptima de los sensores necesarios para medir la actividad mecánica. Este paso, a pesar de parecer relativamente simple, implica un alto esfuerzo y una considerable demanda de tiempo debido a la gran cantidad de sensores disponibles en el mercado actual, sus diversas características, costos y aspectos de la disponibilidad regional. Ya que muchos sensores especializados en el área médica son difíciles de encontrar en ciertas áreas geográficas, es necesario importarlos o al menos ordenarlos a otros lugares remotos.

Una vez que se ha realizado una selección óptima de sensores, el segundo paso más importante es conectar los sensores a un sistema de recolección, procesamiento y almacenamiento. En la mayoría de los casos, los sensores deben ser ensamblados a este sistema principal utilizando elementos electrónicos adicionales que hacen posible una recolección de datos eficiente. Cuando se define el sistema de procesamiento principal, junto con el acoplamiento de los sensores, es necesario implementar el sistema de medición biomecánica en el lugar donde se realizará la verificación.

Como paso final, se deben desarrollar varios protocolos de prueba para el sistema de adquisición de señales biomecánicas, diseñados específicamente para probar exhaustivamente el sistema creado. Estos protocolos de prueba también pueden generar la información biomecánica necesaria para ser analizada, filtrada y procesada por el sistema. Cabe señalar que los protocolos

de prueba varían según el investigador, la investigación y la información que se recopilará, procesará y analizará.

1.3.3 Procesamiento de señales biomecánicas

Una vez las señales biomecánicas son recolectadas, es necesario realizar transformaciones que implican el análisis de estas mediciones para proporcionar información útil sobre la cual se puedan tomar decisiones o extraer información relevante que están enmarcadas en un contexto predefinido [32]. A medida que la tecnología avanza, se van descubriendo nuevas formas de procesar estas señales usando una variedad de técnicas, fórmulas matemáticas y algoritmos.

Cuando se trabaja de la mano con herramientas basadas en la electrónica y computación, los análisis efectivos de las señales pueden ser realizadas por métodos que hacen inclusión de *software* y/o *hardware* especializado que pueden trabajar a velocidades humanamente irreproducibles.

Como expone Chang en su documento [33], el enfoque principal del procesamiento de las señales biomédicas estaba hace algunas décadas en el filtrado de señales para eliminar el ruido que puedan dar origen a inexactitudes o errores en el uso de las señales. Parte de este problema sigue afectando a los investigadores actuales, ya que, si bien algunas fuentes de ruido o problemas se han ido corrigiendo o al menos minimizando con el paso del tiempo, han aparecido otros tipos de inconvenientes que han sido palpables únicamente con el desarrollo de la más reciente tecnología o con la rigurosidad que requieren algunos procesos para ser útiles. Cabe resaltar que el campo de procesamiento de las señales biomédicas en general continúa creciendo a un ritmo sin precedentes gracias al desarrollo de varios instrumentos biomédicos novedosos tales como ultrasonido, equipos de resonancia magnética (MRI), equipos para tomografía por emisión de positrones (PET), evidenciando que las técnicas de procesamiento de señales en sus diferentes niveles (segmentación, seguimiento de movimiento, análisis de secuencias, y el tratamiento estadístico) contribuyen significativamente al avance de la biomedicina.

Con respecto a las señales biomecánicas, los métodos de captura de movimiento son en sí mismos un tipo específico de procesamiento directo de dichas señales. Se utiliza en aplicaciones militares, entretenimiento, deportes, aplicaciones médicas y para la validación de la visión artificial y la robótica. En

el cine y el desarrollo de videojuegos, la información extraída de este proceso sirve para animar modelos digitales de personajes en programas de animación por computador tanto para 2D o 3D [34].

Un procesamiento frecuente en señales biomecánicas es el análisis con base en la frecuencia, ya que, en eventos médicos, esta variable juega un papel importante para la determinación de síntomas o como indicador de problemas específicos en los humanos. El área de aplicación del procesamiento a este tipo de señales es amplia, de modo que el estudio se hace habitualmente sobre un factor en específico, por ejemplo, la aplicación de estimadores no lineales para la reducción de ruido.

1.3.4 Señales biomecánicas en extremidades superiores

En el cuerpo humano, las señales biomecánicas que pueden ser recolectadas son numerosas debido a que hay una gran cantidad de movimientos que pueden realizarse, en donde para cada caso de aplicación se opta por tomar el modelo físico del área concreta de estudio.

En esta investigación, el movimiento biomecánico a ser capturado proviene de las extremidades superiores del cuerpo humano, es decir de los brazos. Para un análisis biomecánico completo, se debe realizar el modelo anatómico y funcional de las extremidades superiores del cuerpo humano, un trabajo extenso y complejo que requiere de profesionales con amplios conocimientos en la estructura física del cuerpo humano y herramientas de modelado matemático^(*). En este apartado, se explica brevemente los movimientos que las extremidades superiores del cuerpo humano pueden tener, así como algunas características físicas de los mismos.

Los términos anatómicos de movimiento en las extremidades superiores del cuerpo humano se utilizan para describir las acciones de los músculos en el esqueleto y su resultado en forma de desplazamiento. Los músculos se contraen o estiran para producir un movimiento en las articulaciones y estos movimientos son los que posteriormente se pueden capturar y analizar usando elementos especializados, en especial aquellos de tipo electrónico.

^(*) Para información biomecánica completa, se sugiere seguir el texto “Biomechanics of the upper limbs: Mechanics, Modeling, and Musculoskeletal Injuries” de Freivalds, Andris.

Para la correcta comprensión de los términos que describen el movimiento de las extremidades superiores del cuerpo presentados a continuación, se debe asumir que el cuerpo comienza en la posición anatómica. Cada par de movimientos está compuesto de su movimiento anatómico y opuesto, llamado movimiento antagónico, para facilitar su comprensión [35].

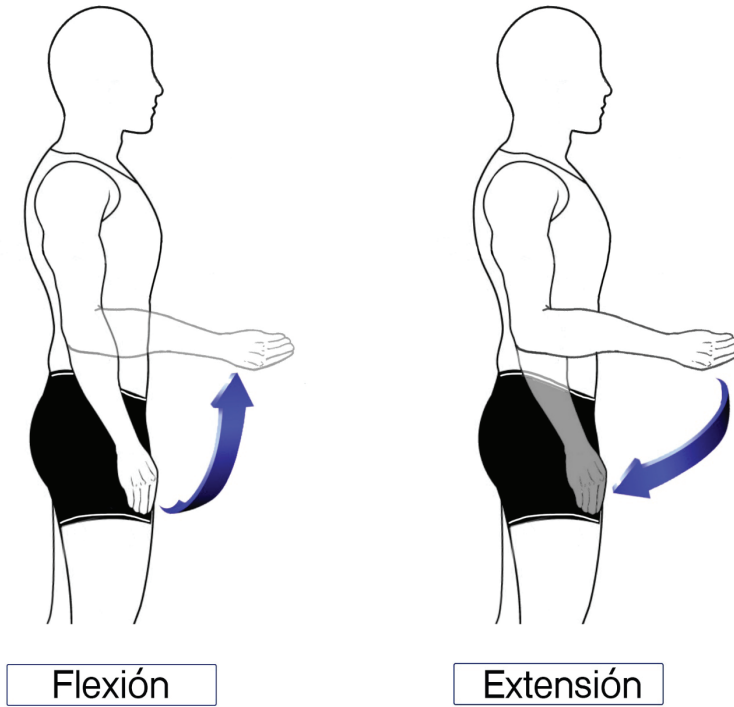
1.3.5 Movimiento de Flexión – Extensión

Los movimientos de flexión y extensión de las extremidades superiores se producen en el plano sagital. Este plano se forma cuando un paralelo vertical divide el cuerpo humano de la cabeza a los pies en dos partes iguales. La descripción básica de este par de movimientos se puede dar en términos de aumentar o disminuir el ángulo entre dos segmentos móviles, en este caso entre el antebrazo y el brazo [36].

La flexión de un miembro superior es el movimiento que disminuye el ángulo entre el antebrazo y el brazo, ya que la flexión con punto de apoyo en el codo está disminuyendo el ángulo entre los huesos cúbito y radio hacia el húmero. De forma concreta, hace que el brazo se contraiga.

La extensión de un miembro superior es el movimiento que aumenta el ángulo el antebrazo y el brazo, ya que la extensión con punto de apoyo en el codo está incrementando el ángulo entre los huesos cúbito y radio hacia el húmero, por tanto, hace que el brazo se estire. Se puede analizar la Figura 1 para comprender de una forma visual la naturaleza de este movimiento.

Figura 1. Movimiento de Flexión y Extensión visto desde un plano parasagital.



Fuente: Autores.

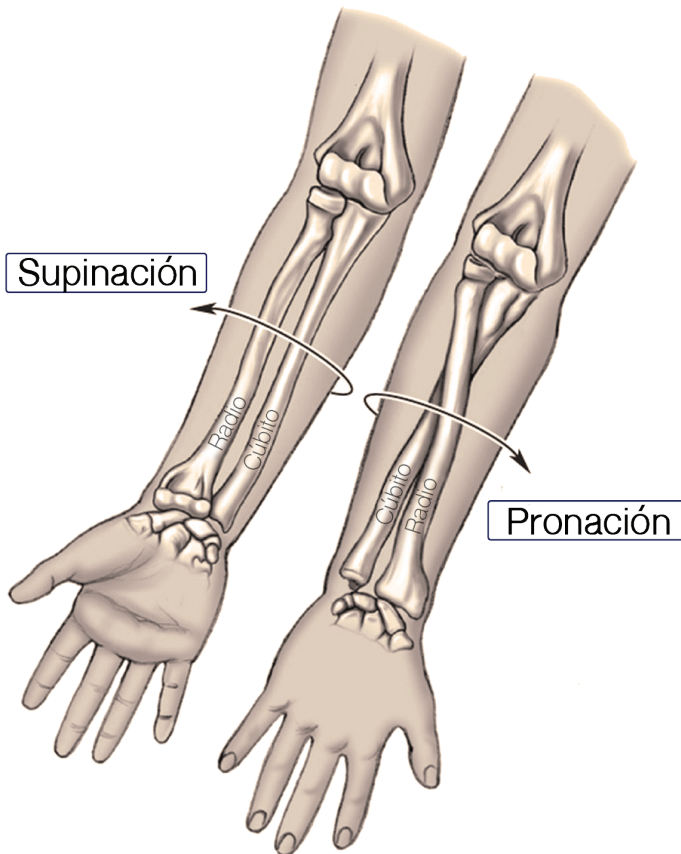
1.3.6 Movimiento de Pronación – Supinación

Este par de movimientos corresponde a una rotación del brazo longitudinalmente, teniendo como punto de apoyo el hombro. Para hacerlo un poco más claro, es el movimiento que se genera al dar vuelta a la mano dejando la palma hacia arriba o hacia abajo, manteniendo el brazo totalmente extendido justo en frente de usted, la mano apuntando hacia el frente, y la posición invariante del codo y del hombro.

El movimiento generado al pasar la mano en posición “boca arriba” a la posición en donde se oculta la palma, se llama pronación. Si el movimiento se realiza de manera contraria, es decir al pasar la mano en posición “boca abajo” a la posición en donde se muestra la palma, se llama supinación.

Estos dos movimientos se evidencian en la Figura 2.

Figura 2. Movimiento de Pronación y Supinación visto desde un plano frontal.



Fuente: *Mosby's Medical Dictionary* [38].

1.3.7 Movimiento de Abducción – Aducción

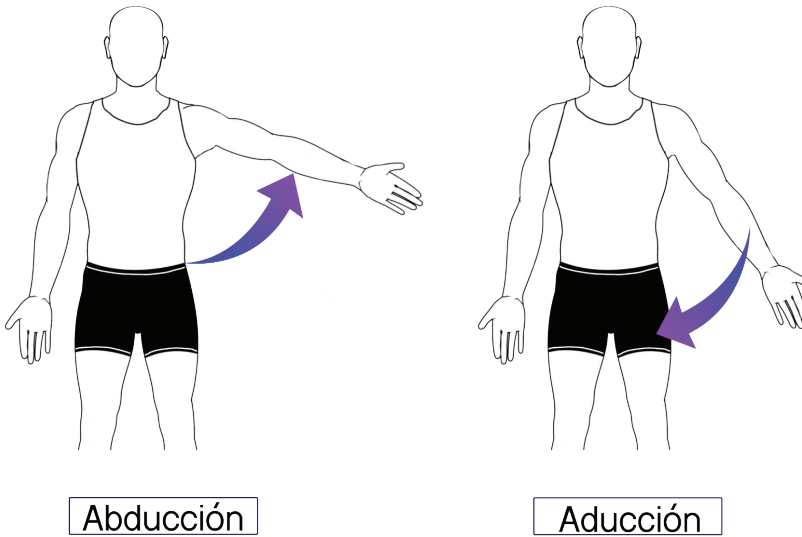
Son dos movimientos que describen el acercamiento o alejamiento de los brazos tomando como punto de referencia la línea media del cuerpo y visto desde el plano coronal.

La abducción es específicamente el movimiento que hace alejar los brazos de la línea media del cuerpo, en donde el movimiento del hombro eleva los brazos a los lados del cuerpo. La aducción por su parte es el movimiento que

hace acercar los brazos a la línea media del cuerpo, en donde el movimiento del hombro desciende los brazos ubicándolos a los lados del cuerpo.

Estos dos movimientos se evidencian en la Figura 3.

Figura 3. Movimiento de Abducción y Aducción de brazo visto desde un plano coronal.



Fuente: Autores.

1.4 Sensores.

Los sensores son aquellos elementos que permiten detectar eventos o cambios de su entorno y proveen una señal de salida o aviso correspondiente. Un transductor, por otro lado, es un sensor que cambia una señal de entrada (generalmente un evento físico) por una respuesta o señal de salida, utilizando habitualmente impulsos eléctricos [39]. Un buen sensor posee una medición precisa de la variable detectada, una baja (idealmente nula) detección de otras variables relacionadas a la de trabajo y una correcta respuesta o señal de salida que permita interpretar o dar a conocer el estado de la variable medida.

En biomecánica y captura de movimiento es habitual hallar sensores que permitan recolectar datos de forma eficiente, confiable y robusta, en donde

un gran número de aplicaciones se basan en una pluralidad de ellos que se comunican usando redes de datos. Los sensores usados dentro de estos escenarios son de diversos tipos, construcción y tecnología, enfocándose principalmente en suplir las necesidades que el diseñador tenga para realizar a cabo el procedimiento requerido.

Hoy en día con el avance de la tecnología y de técnicas en construcción de elementos electrónicos, se cuenta con una amplísima gama de sensores que cubren todas las necesidades del mundo actual, pero muchas veces por su elevado costo o baja disponibilidad no son accesibles o asequibles.

Dentro de este universo de dispositivos se encuentran tecnologías que lideran la recolección de información biomecánica y cinemática, que a gran escala se dividen en dos grupos. El primer grupo comprende todos los métodos de recolección de información por vía óptica, los cuales capturan los datos a través de imágenes y video mediante múltiples cámaras para triangular la posición de un objeto en el espacio, como es el caso del sistema *OptiTrack*TM [40].

Dentro de los métodos de recolección de información óptica hay sistemas más o menos robustos que implican una gran cantidad de técnicas para realizar el procesamiento de la señal. Una gran variedad de los sistemas ópticos actuales se apoya en un sistema de marcadores que se colocan sobre los objetos a rastrear, lo cual permite al software de procesamiento generar los datos necesarios.

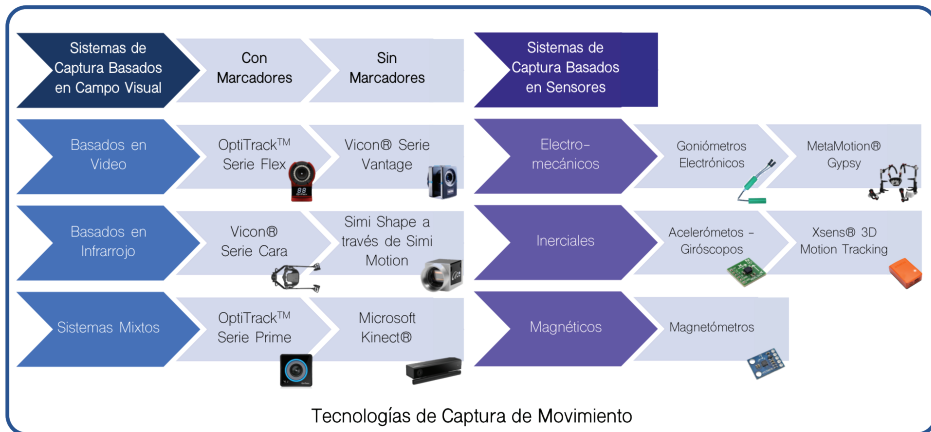
Otros sistemas usan técnicas asistidas por diversos parámetros, por ejemplo, la profundidad de campo y siluetas, usado principalmente en el sistema *Kinect* de *Microsoft* [41].

El segundo grupo de tecnologías desarrolladas para la captura de movimiento está compuesto por los sensores no ópticos, como los sensores inerciales [42], [43], los cuales pueden llegar a presentar dificultad en el tratamiento de la información debido a que los datos extraídos a partir de ellos pueden ser ambiguos y necesitan de un modelo matemático específico para ser procesados. Dentro de este grupo se encuentran los sensores magnéticos, que producen pequeñas variaciones eléctricas a los estímulos magnéticos circundantes detectados por el receptor con pequeñas bobinas.

Finalmente, se consideran los sensores de tipo electromecánico, citando como ejemplo el caso de los electrogoniómetros: un sistema de sensores y transductores

(donde en la mayoría de los desarrollos utilizan galgas extensiométricas) diseñados para estimar los ángulos de una articulación cuando se colocan en el cuerpo humano; o el sistema de captura *Gypsy* desarrollado por *Meta Motion* que usa una tecnología similar [44]. Se presenta un resumen en la Figura 4.

Figura 4. Clasificación de las tecnologías para captura de movimiento en biomecánica y otras aplicaciones.



Fuente: Autores. Las marcas mencionadas están registradas por sus casas matrices correspondientes.

Infortunadamente, los sensores de tipo óptico para captura de movimiento son considerablemente más costosos y difíciles de conseguir, como el caso de *OptiTrack*TM en donde su utilización también requiere de entrenamiento especializado y una infraestructura particular para realizar las mediciones y pruebas necesarias.

Los sensores más relevantes para este caso de estudio están centrados en los no ópticos, en donde los sensores de tipo inercial y magnéticos toman un protagonismo interesante debido a su fácil disponibilidad y relativo bajo costo, de los cuales se hablará subsecuentemente.

1.4.1 Tecnología MEMS

Los sistemas Microelectromecánicos (abreviados MEMS por sus siglas en inglés, *Micro-Electro-Mechanical Systems*) es una tecnología de reciente desarrollo que puede ser definida, en su forma más generalizada, como

elementos mecánicos y electromecánicos miniaturizados y encapsulados, hechos con una técnica de micro y nano fabricación.

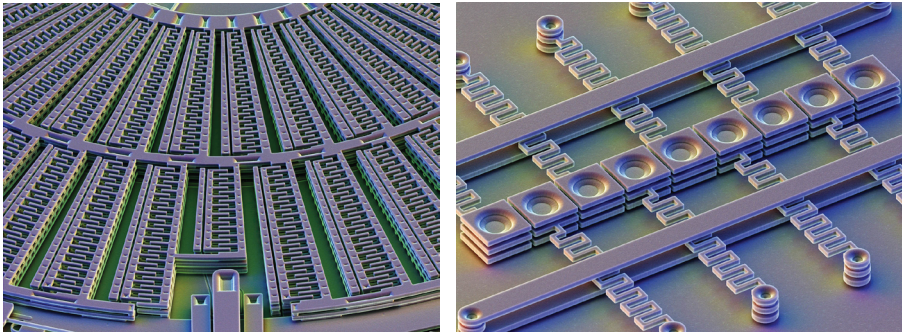
Los sistemas MEMS están hechos de componentes de tamaño muy reducido, los cuales oscilan entre 1 y 100 micrómetros de longitud, y un dispositivo basado en MEMS puede llegar a ser tan pequeño como 20 micrómetros hasta un milímetro, y usualmente contienen de una manera embebida un microprocesador y componentes variados que pueden interactuar con diferentes medios como lo son microsensores y microactuadores [45], aunque también hay diversidad de dispositivos para un amplio rango de usos, por ejemplo estructuras para modificación genética en el campo de la biología.

Internamente, los dispositivos MEMS pueden variar desde estructuras simples que pueden contener elementos móviles (rotatorios o lineales) hasta intrincados laberintos electromecánicos de elementos múltiples bajo el control de diversos elementos electrónicos también fabricados bajo esta tecnología [46].

Así como el desarrollo de otro tipo de tecnologías, los sistemas basados en MEMS presentan algunos desafíos desde el proceso de diseño hasta la construcción. Debido a que esta tecnología fabrica elementos a una escala de tamaño muy reducida, las fuerzas de superficie como la adherencia y la fricción pueden dominar sobre otras fuerzas en el sistema, lo que conduce a la falla del dispositivo [47]. El empaquetado de los componentes MEMS puede presentar un mayor grado de dificultad porque cada dispositivo se debe ensamblar de una manera que mantenga los componentes limpios y libres de contaminación, asegurando al mismo tiempo el movimiento mecánico y, en muchos casos, la interacción con el ambiente [48].

Algunos de ejemplos los elementos MEMS utilizados en la actualidad son los sensores incorporados en la estructura de un ala de avión para que se pueda detectar el flujo de aire por el cambio de la resistencia de su superficie, dispositivos de conmutación óptica que pueden cambiar las señales de luz a través de diferentes caminos a velocidades de conmutación increíblemente rápidas, o sistemas de calefacción y refrigeración producida por el sensor en sí mismo que mejoran drásticamente el ahorro de energía [49]. Se presenta un ejemplo visual de sistemas MEMS en la Figura 5, en donde la imagen a la izquierda corresponde a un nano motor de inducción y la imagen a la derecha corresponde a una nano estructura para un circuito de carga de baterías.

Figura 5. Vista de un sistema MEMS microscópicamente.



Fuente: David Scharf [50].

La tecnología MEMS no solo permite miniaturizar elementos ya creados con anterioridad, por ejemplo, micrófonos o detectores ópticos en cámaras digitales, sino que también abre la posibilidad de crear dispositivos nuevos incapaces de ser fabricados a través de otras tecnologías, como es el caso de los sensores de tipo inercial. El futuro se expande cada vez más al incluir esta tecnología a dispositivos embebidos en la cotidianidad, desde teléfonos celulares hasta cuadricópteros.

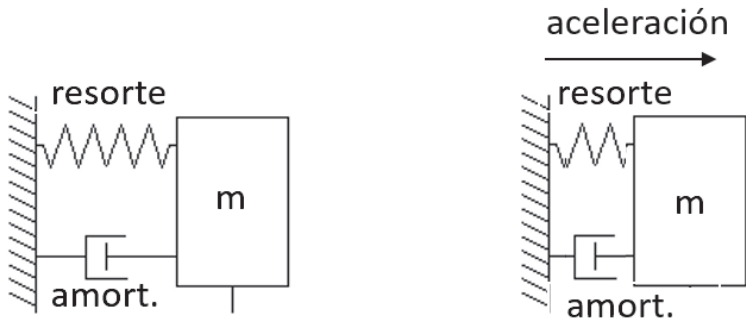
1.4.2 Acelerómetros Basados en MEMS

Un acelerómetro es un tipo de sensor dedicado a medir una aceleración lineal estática aplicada sobre el mismo. Este tipo de aceleración es el que específicamente se crea cuando hay un cambio de *momentum*, y no la tasa cambio de velocidad de un sistema que ya se encuentra en movimiento (aceleración dinámica). Un acelerómetro puede estar construido de diversas maneras, lo que da origen sensores de tipo mecánico, piezoeléctricos, de efecto Hall, electromagnéticos, ferroeléctricos, ópticos, basados en condensador o en tecnología MEMS, que finalmente combina dos o más técnicas de las anteriormente mencionadas.

Aquellos acelerómetros basados en MEMS están creados a partir de su equivalente mecánico pero reducido en escala y con la adecuación de elementos electrónicos que facilitan su lectura. Según lo expuesto por Šprdlík [1], el núcleo del sensor está formado por una masa sujeta de la plataforma del sensor a través de un resorte y un amortiguador.

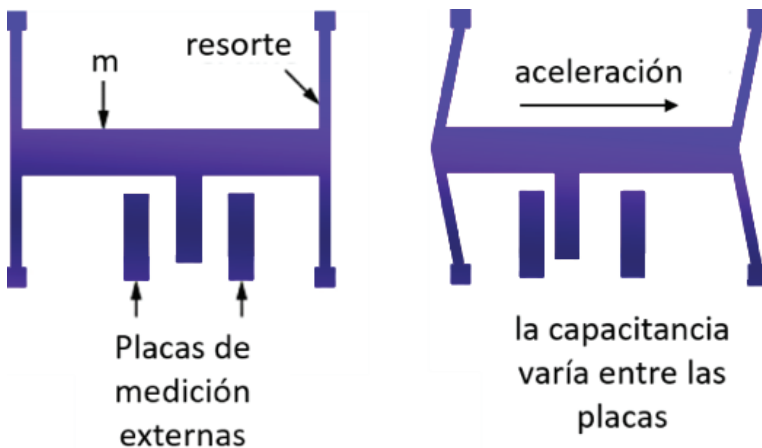
Cuando el sensor se acelera, la masa se mueve en la dirección opuesta a la del movimiento ocurrido, y este desplazamiento es proporcional a la fuerza aplicada. Este efecto se puede evidenciar en la Figura 6 y Figura 7. Generalmente en un sistema MEMS, la aceleración puede determinarse hasta en tres ejes, en los cuales se hace uso de la medición de la capacidad de desplazamiento y se transforma dicha medida en un valor de fácil lectura, como el cambio de voltaje de una salida eléctrica o de manera digital a través de un protocolo de comunicación definido.

Figura 6. Representación de un acelerómetro mecánico.



Fuente: Desconocido, editado al español.

Figura 7. Representación de un acelerómetro basado en MEMS



Fuente: Rob O'Reilly & Alex Khenkin [51]. Editado al español.

Comparando directamente el modelo de un sistema mecánico con un sistema MEMS se puede apreciar que el concepto básico de ingeniería se mantiene sin modificaciones. Se resalta que los puntos de sujeción dentro del sensor MEMS se encuentran en el propio sustrato, el cual actúa de referencia mecánica.

El desplazamiento de la masa es proporcional a la aceleración suministrada modificada por los elementos que componen el sensor, entendiendo al amortiguador simplemente como un supresor de frecuencias indeseadas (ruido) que el resorte pueda inducir en la masa una vez ejercida la aceleración. La ecuación que modela al acelerómetro de una forma general y básica se muestra en (12).

$$d_g = \frac{m}{k} = \frac{g}{\omega_0} \quad (12)$$

En donde d_g es el desplazamiento por unidades de gravedad, m es la masa del elemento, k la constante de elasticidad del resorte, ω_0 la frecuencia angular de resonancia y g la gravedad de la tierra. La aceleración registrada a través del desplazamiento es la diferencia entre la aceleración instantánea y el estado de caída libre. En el caso de una caída libre, las medidas del acelerómetro serán cero a pesar de que su velocidad aumente gradualmente. Para el caso de un sensor que está situado en la superficie de la Tierra, la única aceleración es normal respecto al plano horizontal y tiene el tamaño de la aceleración de la gravedad.

A pesar de la existencia de un supresor de ruido, el sensor experimenta situaciones variadas y no solo mecánicas que afectan la medición precisa del valor de la aceleración. El ruido es una característica propia de cada sensor ya que en él intervienen diversos factores como la disposición de los elementos, las técnicas de fabricación empleadas, los materiales usados y factores ambientales.

Los errores más frecuentemente encontrados en los acelerómetros basados en MEMS son la presencia de deriva a través del tiempo, causada en gran parte por cambios de temperatura ya que los sensores son altamente susceptibles a pequeñas variaciones; la no linealidad de la salida, la no ortogonalidad y la desalineación de los ejes del sensor con respecto a un marco de referencia, que puede ser la tierra en sí misma.

La desviación o deriva a través del tiempo es un problema que, si bien se puede minimizar con una calibración adecuada del sensor, su corrección definitiva no es factible debido a la gran cantidad de factores que pueden generarlo. El procedimiento de calibración consiste en someter al sensor a un número de orientaciones variadas con respecto a la gravedad, lo cual ayuda al mismo a precisar la dirección de la fuerza gravitacional y usarla como referencia para localizaciones posteriores.

Otro tipo de error producido en este tipo de acelerómetros es el Ruido de Johnson-Nyquist, de característica semejante a un ruido blanco y de tipo gaussiano.

Este error es generado por la agitación térmica de los portadores de carga, generalmente electrones dentro de un conductor en equilibrio, lo que sucede con independencia del voltaje aplicado [52]. Este tipo de error es generalmente ignorado en sensores de mayor tamaño ya que la cantidad de ruido creado es despreciable. También se tiene en cuenta el Movimiento Browniano, un tipo de movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido. Habitualmente este tipo de errores suelen ser corregidos por un procesamiento posterior a la señal de salida, ya que la eliminación de la fuente de ruido supone un desafío de ingeniería por fuera del alcance de la población general.

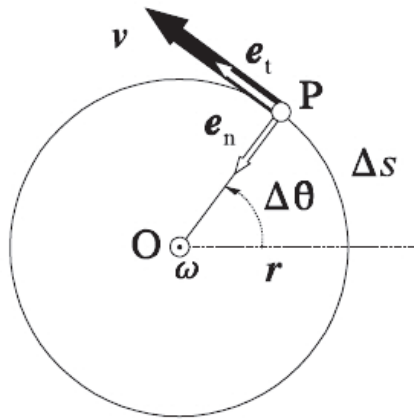
1.4.3 Giroscopios Basados en MEMS

El giroscopio original es un dispositivo netamente mecánico el cual mide la orientación en el espacio de algún elemento móvil o vehículo. Está compuesto generalmente de una rueda giratoria o disco en el que el eje de rotación es libre de moverse en cualquier orientación por sí mismo. Cuando el objeto en movimiento o vehículo gira, la orientación de este eje no se ve afectado por la inclinación o la rotación del montaje según la conservación del momento angular.

La diferencia de un giroscopio y un acelerómetro es que el primero usa la gravedad terrestre para ayudar a determinar la orientación, midiendo el cambio en ángulo desde la última posición, mientras que el acelerómetro está enfocado a medir las aceleraciones no gravitacionales que ocurren en el espacio terrestre.

La Figura 8 ayuda a la interpretación de esta idea. Este dispositivo mecánico como tal fue inventado en 1852 por Leon Foucault, montando una masa rotatoria en un soporte de Cardano para demostrar la rotación terrestre. Si se impiden ciertos movimientos del soporte del giroscopio, éste se alinea con el norte magnético pudiendo ser usado como una brújula, lo cual permitió la invención de la brújula giroscópica llamada girocompás [53].

Figura 8. Representación de la medida de un giroscopio.



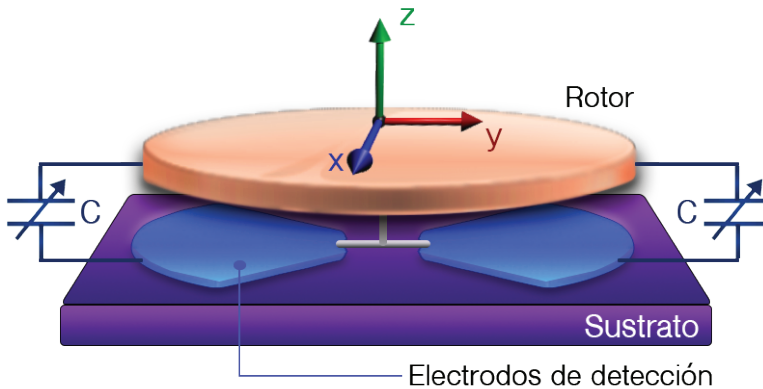
Fuente: Desconocido, bajo licencia *Creative Commons*.

El giroscopio brindará la información correspondiente a la velocidad de rotación de un elemento que sigue una trayectoria circular de referencia, con unidades en rad/s.

Las aplicaciones industriales del invento de Foucault fueron variadas, por ejemplo, como sistema de guía a los primeros torpedos, como asistente en la navegación inercial en aviones, misiles y demás elementos aeroespaciales construidos antes de la aparición del GPS. La tecnología reciente ha permitido la fabricación de diversos giroscopios no mecánicos que se basan en la funcionalidad mas no en el principio de operación original de Foucault, y miden la velocidad angular aplicada sobre ellos, como es el caso de los giroscopios de fibra óptica, el giroscopio resonador hemisférico, los giroscopios basados en estructuras vibrantes, los basados en anillos láser, los basados en MEMS, entre otros, que resuelven problemas cotidianos en aviación, suplen funciones adicionales y de entretenimiento en computadores, consolas de video portátiles, tabletas, teléfonos celulares, relojes y demás.

Específicamente hablando de los giroscopios basados en MEMS, están contruidos con base en el funcionamiento de estructuras vibrantes, cuyo principio físico subyacente es que un objeto en oscilación tiende a continuar vibrando en el mismo plano, incluso si punto de apoyo o marco de referencia gira o se mueve. El efecto Coriolis hace que el objeto ejerza una fuerza sobre su soporte, y mediante la medición de esta fuerza, la velocidad angular puede ser determinada. Las estructuras vibrantes se encapsulan junto con circuitos integrados que proporcionan salidas eléctricas (analógicas o digitales) y brindan soporte para múltiples ejes a un precio considerablemente reducido.

Figura 9. Representación de un giroscopio de estructura vibrante de tres ejes fabricado por Bosch Corporation.



Fuente: SONG, C. Commercial vision of silicon based inertial sensors [54].

Algunos otros giroscopios están basados en otras formas de estructuras vibrantes, debido a que, si el principio físico se mantiene invariante, se puede jugar con las formas y posiciones de dichas estructuras. Tal es el caso de los sensores EPSON que usan otro modelo de estructura vibrante para sus giroscopios basados en MEMS, observado en la Figura 9 [55].

Las características principales que todo giroscopio debe proveer independientemente del método usado para la detección del movimiento son el factor de integración de los dispositivos, ya que, a mayor escala de integración, más robusto el sensor podrá ser; el coeficiente de frecuencia-temperatura, el cual determina ciertas características del sistema como su precisión; la resistencia a impactos debido a las aplicaciones exigentes a las que puedan ser sometidos y finalmente la estabilidad y características de ruido.

Con respecto a la cantidad de ruido y errores que los giroscopios basados en MEMS pueden detectar o generar, son exactamente del mismo tiempo presenciado en los acelerómetros basados en MEMS. Usualmente todos los giróscopos vienen con una calibración hecha por el fabricante en términos del nivel de cero velocidad angular, pero esta corrección a la desviación puede estar sujeta a cambios dada las propiedades físicas de los elementos con los cuales los giroscopios están contruidos.

La compensación de deriva y error iterativo mediante una calibración sencilla para giroscopios de este tipo es definida por Looney [56], en donde propone usar un sistema de referencia angular confiable desde donde se pueda seleccionar un punto pivote fijo en donde el sensor es colocado, para luego ser movido a varios ángulos establecidos a ciertas velocidades angulares. El desplazamiento o deriva en las mediciones pueden ser tomadas como un factor de corrección estimado para ayudar a mejorar la señal de salida del sensor. Esta calibración difiere a la de un acelerómetro, ya que en un giroscopio los errores son más difíciles de medir debido a que se producen mediante condiciones dinámicas.

Así mismo, para la estimación de sólo las ganancias de las salidas, es posible utilizar un procedimiento que incluye rotaciones del giroscopio entre las orientaciones conocidas en vez de una precisa referencia de velocidad angular.

1.4.4 Magnetómetros Basados en MEMS

Un magnetómetro es un dispositivo que sirve para medir, tanto en fuerza como en dirección, una determinada señal magnética. Puede tener dos propósitos principales: realizar una cuantificación de la magnetización de un material magnético o ferromagnético, o para medir la fuerza y, en algunos casos, la dirección del campo magnético en un punto en el espacio.

Desde el punto de vista sensorial, los magnetómetros son simplemente detectores de campo magnético. Existen diversos tipos de magnetómetros, desde los simples dispositivos creados precariamente para la detección de campos magnéticos hasta tecnologías avanzadas de última generación. El primer magnetómetro usable fue construido en 1833 por Carl Friedrich Gauss que dieron paso a tecnologías más recientes como los sensores de efecto Hall usados hoy en día.

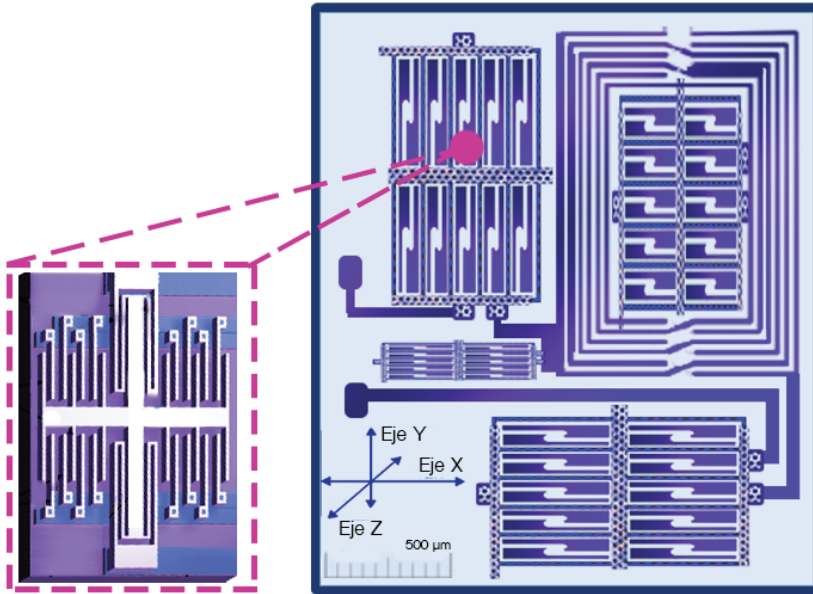
Hay dos tipos básicos de medición que un magnetómetro puede realizar. Los magnetómetros vectoriales miden los componentes del vector de un campo magnético. Los magnetómetros totales de campo (escalares) miden la magnitud del campo magnético vectorial.

Dentro de las aplicaciones más comunes de estos dispositivos se encuentran el estudio del campo magnético de la Tierra, expresando los componentes del vector de campo en términos de declinación (el ángulo entre la componente horizontal del vector de campo y el norte magnético) y la inclinación (el ángulo entre el vector de campo y la superficie horizontal) [57].

Un detector de campo magnético solo puede ser usado como una brújula si el único campo a medir es el magnético terrestre. La mayoría de aplicaciones de un magnetómetro digital moderno es propiamente como brújula digital de estado sólido.

Los magnetómetros también tienen diversas implementaciones, como por ejemplo los magnetómetros basados en Muestras Vibrantes, basados en extracción de campos pulsantes, magnetómetros de torque, magnetómetros de fuerza de Faraday, magnetómetros ópticos y basados en MEMS. En este último tipo de magnetómetros llamados habitualmente sensores de campo magnético, se hace el uso de la fuerza de Lorentz para detectar y medir el campo circundante, el cual produce un cambio en el voltaje o la frecuencia de resonancia la cual se puede medir electrónicamente, o genera un desplazamiento mecánico que se puede medir ópticamente, depende de la tecnología de fabricación usada. En la Figura 10 mostrada a continuación se evidencia la estructura utilizada para sacar provecho de la fuerza de Lorentz en un magnetómetro triaxial de construcción MEMS.

Figura 10. Magnetómetro triaxial basado en el principio de la fuerza de Lorentz construido con tecnología MEMS.



Fuente: Autores. Reconstrucción a partir de: *High-performance MEMS magnetometers* [58].

Este magnetómetro posee capacidad para detectar las variaciones de campo en sus tres ejes usando una única alimentación de corriente. Dichos magnetómetros pueden ser operados fuera de resonancia en variaciones por encima de cientos de Hz, en lugar de la operación resonante convencional. Este principio de trabajo proporciona una mayor estabilidad, menor ruido termomecánico alcanzable en grandes anchos de banda, a costa de una señal de salida inferior, según lo explica el Laboratorio de Sensores y detectores SanDLab.

El problema más grande de los magnetómetros es creado por efectos de la temperatura: cuando esta aumenta, el módulo del material de Young utilizado para fabricar la estructura móvil se disminuye en área, lo que genera un debilitamiento de la estructura móvil [59].

Mientras tanto, la expansión térmica y la conductividad térmica aumentará con la temperatura de la inducción, creando una tensión interna en la estructura móvil. Esto causa el desplazamiento de la frecuencia de resonancia ya la detección de desplazamiento de frecuencia será inválida o menos precisa.

Además, tal como sucede en los acelerómetros y giroscopios basados en MEMS, el aumento de temperatura generará mayor ruido de Johnson y creará grandes fluctuaciones de ruido mecánico. Una corrección de estos fenómenos puede ser alcanzado con un sistema óptimo de control de temperatura interno.

Algunos otros errores que pueden ser producidos en la medición tiene que ver con interferencias de otros campos magnéticos, como lo señala Šprdlík [1], produciendo trastornos cuando hay presencia de materiales magnéticos fijos que se mueven o no al mismo tiempo con el magnetómetro y por el campo magnético causado por las corrientes eléctricas fluctuantes. El primer grupo de los trastornos es causado por materiales de con propiedades ferromagnéticas (imanes permanentes) y los efectos del hierro forjado, aquellos materiales que deforman el campo magnético de la Tierra; mientras que el segundo grupo está dado por líneas de transmisión de energía, por ejemplo.

1.4.5 Unidades de Medición Inercial

Abreviadas como IMU por sus iniciales en inglés, las Unidades de Medición Inercial son dispositivos electrónicos autocontenidos, en su mayoría basados en MEMS, que reúnen dos o más sensores de tipo inercial. En las versiones más modernas, dicho conjunto de sensores se suministra con un módulo de procesamiento central o controlador digital para proveer una salida de datos centralizada.

Los sensores que generalmente se agrupan en una IMU son dos: Acelerómetro y Giroscopio. Algunas IMU se integran con un sistema de georreferenciación como GPS o GLONASS, sensores como medidores de presión barométrica, altímetro digital o magnetómetro; estos sistemas son llamados Unidades de Procesamiento de Movimiento (MPU).

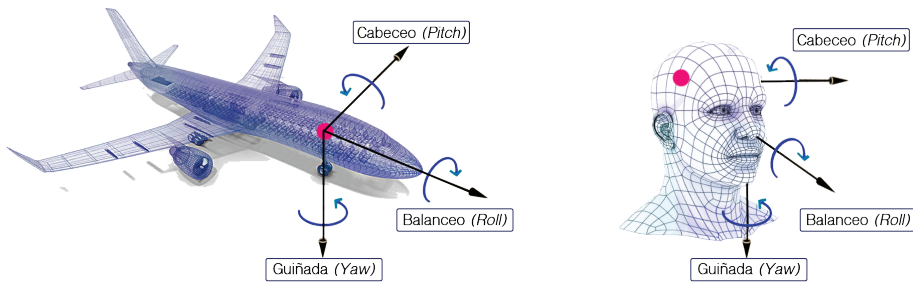
Las aplicaciones más usuales de las IMU se presentan en el control de aeronaves, incluidos los vehículos aéreos no tripulados, helicópteros a pequeña escala, cuadricópteros; en uso militar como misiles guiados o navegación marítima; en la industria de la electrónica de consumo como apoyo de estabilización en cámaras digitales profesionales o vehículos de transporte personal auto balanceados y en la industria aeroespacial, incluyendo los satélites y sondas enviadas al espacio.

Al tener contenida una matriz sensorial de tipo inercial, las IMU son dedicadas a menudo para la medición lineal y angular de movimiento, el análisis de la fuerza específica de un objeto. Una IMU funciona mediante la detección de la tasa de aceleración actual usando los acelerómetros, detecta cambios en los atributos de rotación usando los giroscopios.

1.4.6 Unidad de Procesamiento de Movimiento

La fusión de datos de estas medidas reportadas por un MPU resulta en una información tridimensional acerca del movimiento, que puede ser visto desde el punto de vista de la navegación como los movimientos de cabeceo, balanceo y guiñada. Estos tres movimientos se pueden evidenciar directamente al analizar una aeronave, o la cabeza, mostrados en la Figura 11.

Figura 11. Ejes principales de movimiento.

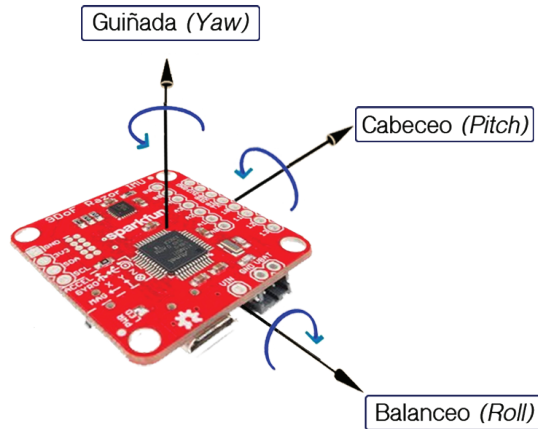


Fuente: Autores.

El movimiento de una aeronave posee tres ejes simétricos que describen el comportamiento en tres dimensiones. El eje del movimiento de cabeceo es paralelo a las alas de un avión y corresponde al cambio de “punta y cola”.

El eje del movimiento de balanceo es perpendicular a las alas de un avión y corresponde al cambio de “inclinación hacia la derecha o izquierda”. Por último, el eje del movimiento de guiñada es normal a las alas de un avión y corresponde al cambio de “rotación sobre su propio eje”. En el caso de la cabeza, el movimiento de cabeceo equivale a mover la cabeza mediante flexión y extensión, el movimiento de balanceo equivale a mover lateral la cabeza, y el movimiento de guiñada corresponde a la rotación de la cabeza mediante el cuello. Estos mismos movimientos son detectados por las MPU, mostrada en la Figura 12.

Figura 12. Ejes principales de una aeronave detectados por una MPU.



Fuente: Autores. Imagen principal: Sparkfun.

Usualmente, un procesador embebido en la MPU realiza cálculos variados para determinar las componentes propias de cada sensor y extrae de ellas información relevante acerca de la posición, y por esta razón una MPU es un tipo de SoC. El número de sensores presentes en la MPU y el número de ejes que cada uno de ellos determina el número de grados de libertad que el dispositivo es capaz de detectar.

Un grado de libertad, expresado como *Degree of Freedom* (DOF), se refiere al movimiento de un cuerpo rígido dentro del espacio.

Podría ser explicado como las diferentes maneras básicas en las que un objeto puede moverse. Sólo hay 6 DOF en total, los cuales se pueden dividir en traslaciones (adelante/atrás, arriba/abajo, derecha/izquierda) y rotaciones (Cabeceo, Balanceo y Guiñada) [60].

Muchas veces es habitual encontrar MPU que se publicitan como 9 o 10 DOF, cuando en realidad solo existen 6 DOF. Esta confusión de parámetros se puede deber a que algunos fabricantes de IMU y MPU publicitan los grados de libertad basado en la definición estadística y no mecánica, en donde un grado de libertad puede definirse como el número mínimo de coordenadas independientes que pueden especificar la posición del sistema completo. Si se toman los componentes axiales de cada sensor, es decir, la magnitud en los tres ejes de un acelerómetro, la magnitud en los tres ejes de un giróscopo y la

magnitud en los tres ejes del magnetómetro, en total se efectúa el monitoreo de 9 ejes, pero esta noción no corresponde con la definición mecánica de DOF porque los tres sensores miden los mismos seis tipos de movimiento.

A pesar de la confusión que puede dar a lugar el empleo de un mismo concepto con diferente significado, una MPU de 9 DOF si puede ser potencialmente mejor que una de 6 DOF, ya que, al incorporar tres señales axiales adicionales, se puede utilizar la fusión de sensores con el fin de mejorar la calidad de la salida final, pero sin ser capaz de detectar aún los movimientos de traslación. Cuando se habla de una IMU de 10 DOF, hace referencia a la integración de un receptor GPS capaz de detectar las traslaciones, lo que sería en realidad la detección completa de los 6 totales DOF mecánicos existentes.

- **MPU-9150 de Invensense**

Este dispositivo Invensense referencia MPU-9150™ basada en MEMS, es la unidad usada para el desarrollo de la presente investigación. De acuerdo con Invensense [61], este MPU es el primer dispositivo del mundo fabricado con tecnología SiP con 9 DOF y tecnología *MotionTracking* (especializada en captura de movimiento) diseñada para un bajo consumo de energía, de relativo bajo costo, y características de alto rendimiento. Dentro de sus tipologías principales se encuentran la combinación de un giroscopio de 3 ejes, acelerómetro de 3 ejes y brújula digital (magnetómetro) de 3 ejes en un mismo chip encapsulado, junto con un DMP capaz de procesar algoritmos complejos de fusión de datos abordo. Las características de esta MPU a nivel técnico se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Características principales de la MPU Invensense MPU-9150.

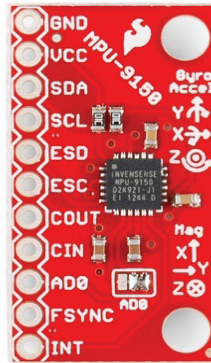
Escala completa del Giroscopio [°/s]	Tasa de Ruido del Giroscopio [%]	Escala completa del Acelerómetro [g]	Escala completa del Magnetómetro [μ T]	Salida Digital	Voltaje lógico de Operación [v]	Voltaje Nominal de Operación [v]	Dimensiones [mm]
±250 ±500 ±1000 ±2000	0,005	±2 ±4 ±8 ±16	±1200	I ² C	1,8±5%	2,4 ~ 3,46 ±5%	4x4x1

Continuación Tabla 1.

Corriente de operación a máximo proceso [mA]	Modo de bajo consumo en Acelerómetro [μ A]@[Hz]	Velocidad de Interfaz I ² C [kHz]	Máxima tolerancia a choque [g]	Direcciones I ² C	ADC	Buffer FIFO	Temperatura de Operación [°C]
4,25	10@1 20@5 70@20 140@40	400	10000	0x68 0x69	3@16bit	1024 bytes	-40 ~ +85

Fuente: Hoja de especificaciones MPU-9150. Disponible en [61].

Figura 13. Tarjeta de desarrollo para MPU-9150.



Fuente: Sparkfun. Imagen propiedad de Sparkfun.

Sparkfun implementa la MPU-9150 en una tarjeta de prototipo que permite una fácil operación del dispositivo. Esta tarjeta, apreciada en la Figura 13, hace que sea sencilla la conexión con pines de separación estándar, resistencias *pull-up* para el bus de datos I²C y un selector de dirección de datos para la comunicación digital.

Dentro de las características más relevantes del DMP incluido dentro de esta MPU se encuentra la opción de deshabilitación selectiva de sensores, autoprueba del dispositivo, parámetros configurables diversos como la velocidad de actualización de los componentes del sistema (desde 1 hasta 8000 Hz), Filtro Pasa Bajos (5 hasta 260 Hz), velocidad de procesamiento de 1 MHz, soporte para interrupciones internas, externas y capacidad de

transformación matricial de componentes, contribuyendo de esta manera a una fácil lectura de datos sin importar la forma en cómo el sensor ha sido instalado en la aplicación final.

Se sugiere la lectura adicional de la hoja de especificaciones completa y mapa de registros para la MPU-9150 provista por Invensense en su portal web [61].

1.5 Complejidad Computacional.

En una descripción general, la complejidad computacional se define en teoría de sistemas como una caracterización matemática de la dificultad de un problema matemático que describe los recursos requeridos por una máquina informática para resolver el problema [62]. Un problema computacional se entiende como una tarea que puede ser resuelta por un sistema electrónico, microcomputarizado, o también por medio de una aplicación ordenada de pasos matemáticos, tales como un algoritmo [63].

La complejidad que tiene implícito un problema computacional es muchas veces dependiente del sistema de resolución que se proponga. Por ejemplo, no se obtiene el mismo resultado si se resuelve un problema de cálculo integral en un computador de uso personal que usando una calculadora científica: ambos sistemas acertarán en su respuesta, pero dependiendo de la técnica de solución, puede que requiera más tiempo en un sistema que en otro. Un problema de cualquier tipo es considerado inherentemente difícil si su solución requiere recursos significativos en el sistema de solución, cualquiera que sea el algoritmo o pasos utilizados para resolverlo.

La formalización de la complejidad computacional viene dada por los modelos matemáticos que analizan los algoritmos de diversas maneras para poder cuantificar qué tan difícil o simple es realmente un problema, dentro de los cuales, en la informática moderna, se puede abordar desde indicadores como el tiempo de procesamiento versus la velocidad del procesamiento, el almacenamiento necesario para realizar el algoritmo, la cantidad de comunicación empleada, el número de compuertas en un circuito integrado, entre otros, que definen qué es posible realizar en un sistema y qué no.

Desde el punto de vista algorítmico implementado en un sistema computarizado moderno, un análisis de complejidad computacional puede realizarse

de muchas maneras, ya que “no hay una forma mágica para analizar la eficiencia de los algoritmos” [63]. Generalmente, se promedia un valor de peso asignado a cada función, iteración, estructuras de control y ecuaciones de recurrencia.

Un valor frecuente en la complejidad computacional está dado por “la gran O”, el cual se utiliza para clasificar los algoritmos con base en su respuesta a los cambios en el tamaño de entrada, por ejemplo, así como el tiempo de procesamiento de un algoritmo cambia a medida que el tamaño del problema se vuelve extremadamente grande [64].

Para el posterior análisis de la complejidad computacional de los algoritmos de filtro de Kalman presentados en este libro, se tendrán en cuenta algunos parámetros indicadores del mismo, de modo que sea un buen estimativo al costo que representa procesar dichos algoritmos en el sistema de captura (*).

1.5.1 Valor de Complejidad Máxima (VDCM)

El valor de complejidad se halla según lo propuesto y definido por McConnell [65]. Este valor mide el número de rutas de ejecución a través de una función o método. Cada función o método tiene una complejidad de uno, e incrementa en uno para cada rama de la declaración como son las instrucciones *if*, *else*, *for*, *foreach*, o *while*. La medida de las sentencias condicionales especiales *if* (*myBoolean*, *ValueIfTrue*, *ValueIfFalse*) agregan un punto al total complejidad. Se añade también un punto de complejidad por cada anidado existente en las operaciones condicionales, como por ejemplo '&&' y '||' e instrucciones lógicas similares.

Las sentencias de tipo *switch* añaden un punto de complejidad para cada salida de un *case*, inclusive teniendo en cuenta los modificadores del flujo del programa, como en el caso de *break*, *Goto*, *return*, *throw*, *continue* o alguna declaración similar, y se añade un cargo para un caso por defecto, incluso si uno no está presente.

1.5.2 Valor de Complejidad (VDC)

Es una medida de la complejidad computacional global calculada para cada método y para cada función. Se establece como una media aritmética simple

(*) Con base en la estructura de análisis existente en SourceMonitor [103].

de los valores de complejidad proporcionados para cada función del código. El valor de Complejidad se establece por medio de la complejidad espacial del código a analizar, y se enfoca en el uso de memoria RAM y ROM del dispositivo embebido consumida por la implementación algorítmica.

Dentro del valor de Complejidad Computacional también se tienen en cuenta: la cantidad de memoria requerida por el código del algoritmo, la cantidad de memoria requerida para almacenar los datos de entrada, la cantidad de memoria requerida para los datos de salida y la cantidad de memoria requerida en cuanto a espacio de trabajo del algoritmo para realizar los cálculos y asignaciones [66].

1.5.3 Número de Declaraciones (NDD)

Una declaración es cualquier instrucción o pseudoinstrucción presente en el procesador. Algunas ramas, como *if*, *for*, *while* y *goto* también se cuentan como declaraciones. Las directivas del preprocesador *#include*, *#define* y *#undef* siempre cuentan como declaraciones. Todas las demás directivas de preprocesador son ignoradas. Se cuentan todos los estados entre cada *#else* o *#elif* y *#endif*

1.5.4 Porcentaje de declaraciones por rama (PDR)

Las sentencias que causan una interrupción en la ejecución secuencial de los estados se cuentan por separado. Estos son los siguientes: *if*, *else*, *for*, *while*, *break*, *continue*, *goto*, *switch*, *case*, *default*, y *return*. Hay que tener en cuenta que no se enumeran porque siempre se repetirán durante un determinado tiempo que si se contabiliza.

1.5.5 Número de Clases (NDC)

Las clases presentes en el código son numeradas sobre la base de las definiciones que posean. En general, las clases se definen en los archivos de cabecera mientras que los métodos normalmente se implementan en archivos separados. Se recuerda al lector que, en la programación orientada a objetos, una clase es una plantilla de código de programa extensible para crear objetos que proporciona valores iniciales para los estados definidos y define las implementaciones de su comportamiento [67], [68].

1.5.6 Métodos por Clase (MPC) y promedio de todos los Métodos por Clase (MPCP)

Es un promedio general de todos los métodos existentes en cada una de las clases, estructuras e implementaciones de métodos de plantilla en un archivo o punto de control, calculado como el número total de métodos, dividido por el número total de clases.

1.5.7 Número de Saltos/Llamados (NDC)

El número total de llamadas a otros métodos o funciones que se encuentran en el interior de todos los métodos o funciones en un algoritmo. Se recuerda al lector que un salto hace referencia a una instrucción en un programa informático que causa que otras o determinadas instrucciones puedan ser ejecutadas en una secuencia diferente, y por lo tanto desvíe el comportamiento predeterminado de ejecutar instrucciones en orden [69].

1.5.8 Profundidad máxima por bloque (PMB) y profundidad promedio por bloque (PPB)

Es el nivel de intrincamiento que posee una anidación de funciones, lo cual resulta en una profundidad máxima y promedio dentro de un bloque. Al comienzo de cada archivo de nivel de bloque es cero. La escala de profundidad puede llegar hasta valores superiores a 9 en donde la profundidad máxima real tiene un tope de 32.

1.5.9 Otros parámetros relevantes

Algunos otros datos que pueden ayudar a la estimación de la complejidad computacional son el número de líneas de código (LDC), número de líneas de comentarios, porcentaje de comentarios (LCP) y el número de funciones de cada clase (NDF). Estos parámetros, aunque menos importantes, hacen parte del análisis de complejidad computacional incluido dentro de esta investigación.

