

COLECCIÓN
INVESTIGACIÓN

Mauro Callejas Cuervo
Manuel Andrés Vélez Guerrero
Andrea Catherine Alarcón Aldana

ESTIMADORES NO LINEALES: APLICACIÓN DEL FILTRO DE KALMAN A SEÑALES BIOMECÁNICAS



**Mauro
Callejas-Cuervo**

Ingeniero de Sistemas y Doctor en Ciencia Aplicada de la Universidad Antonio Nariño; tiene una Maestría en Ciencias de la Computación y un doctorado en Energía y Control de Procesos de la Universidad de Oviedo-España. Es profesor asociado en la Facultad de Ingeniería y Director del Grupo de Investigación en Software de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Sus intereses de investigación incluyen proyectos que apoyan desarrollos tecnológicos para la salud, el deporte y el entretenimiento, sistemas inteligentes, ingeniería de software e inteligencia de negocios. También ha sido profesor invitado como orador principal en eventos científicos en varias universidades al rededor del mundo, tales como: Universidad de Manchester, Universidad de Sheffield, Universidad de Cambridge, en Inglaterra, así como también en la Universidad Soochow en China. En el año 2017 recibió la medalla al científico del año en ciencia y tecnología de materiales avanzados. Es autor de más de un centenar de publicaciones en eventos y revistas especializadas, así como también de siete libros resultado de investigación.

**ESTIMADORES NO
LINEALES: APLICACIÓN DEL
FILTRO DE KALMAN A SEÑALES
BIOMECÁNICAS**

**ESTIMADORES NO
LINEALES: APLICACIÓN DEL
FILTRO DE KALMAN A SEÑALES
BIOMECÁNICAS**

Mauro Callejas Cuervo
Manuel Andrés Vélez Guerrero
Andrea Catherine Alarcón Aldana

Estimadores no lineales: Aplicación del Filtro de Kalman a señales biomecánicas/ Callejas Cuervo, Mauro; Vélez Guerrero Manuel Andrés; Alarcón Aldana, Andrea Catherine. Tunja: Editorial UPTC, 2019. 150 p.

ISBN 978-958-660-351-5

1. Filtro de Kalman. 2. Estimadores no lineales. 3. Señales biomecánicas. 4. Tratamiento de señales. 5. Sensores inerciales y magnéticos.

(Dewey 621.3 /21).



Primera Edición, 2019

300 ejemplares (impresos)

Estimadores no lineales: Aplicación del Filtro de Kalman a señales biomecánicas

ISBN 978-958-660-351-5

Colección de Investigación UPTC No. 134

- © Mauro Callejas Cuervo, 2019
- © Manuel Andrés Vélez Guerrero, 2019
- © Andrea Catherine Alarcón Aldana, 2019
- © Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2019

Editorial UPTC

Edificio Administrativo – Piso 4
Avenida Central del Norte N°. 39-115, Tunja, Boyacá
comite.editorial@uptc.edu.co
www.uptc.edu.co

Rector, UPTC

Oscar Hernán Ramírez

Comité Editorial

Manuel Humberto Restrepo Domínguez, Ph. D.
Enrique Vera López, Ph. D.
Yolima Bolívar Suárez, Mg.
Sandra Gabriela Numpaque Piracoca, Mg.
Olga Yaneth Acuña Rodríguez, Ph. D.
María Eugenia Morales Puentes, Ph. D.
Édgar Nelson López López, Mg.
Saida Zarely Ojeda Pérez, Ph. D.
Carlos Mauricio Moreno Téllez, Ph. D.

Editora en Jefe

Lida Esperanza Riscanevo Espitia, Ph. D.

Coordinadora Editorial

Andrea María Numpaque Acosta, Mg.

Corrección de Estilo

Liliana Paola Muñoz Gómez

Diseño carátula

Manuel Andrés Vélez Guerrero

Diseño y diagramación

Andrés A. López Ramírez
andres.lopez@uptc.edu.co

Libro financiado por la Dirección de Investigaciones de la UPTC. Se permite la reproducción parcial o total, con la autorización expresa de los titulares del derecho de autor. Este libro es registrado en Depósito Legal, según lo establecido en la Ley 44 de 1993, el Decreto 460 de 16 de marzo de 1995, el Decreto 2150 de 1995 y el Decreto 358 de 2000.

Citación: Callejas-Cuervo, M., Vélez-Guerrero, M. A., & Alarcón-Aldana, A. C. (2019). *Estimadores no lineales: Aplicación del Filtro de Kalman a señales biomecánicas*. Tunja: Editorial UPTC.

Prólogo

En los proyectos de investigación desarrollados dentro del Grupo de Investigación en Software GIS de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), se hace uso de diversos métodos, técnicas y tecnologías para la captura del movimiento biomecánico, en donde se evidencian problemáticas relacionadas con la contaminación de las señales recolectadas y el análisis de la información. La implementación de un adecuado procesamiento y filtro de las señales se hace necesario para obtener mejores resultados al momento de procesar dicha información.

A partir del desarrollo de dichos proyectos en el grupo de Investigación GIS, surgió la motivación para llevar a cabo una investigación que origina este libro, cuyo objetivo es mostrar los conceptos básicos y los supuestos que subyacen a un filtro de Kalman en un contexto breve, compacto e ilustrativo. Al mismo tiempo, este libro expone el desarrollo metodológico de la investigación que permite utilizar estos filtros de manera práctica.

Es así que el desarrollo de este libro establece un precedente en la investigación de técnicas de procesamiento de señales digitales, ya que reúne los elementos teóricos fundamentales para la construcción y el diseño de filtros adaptativos basados en el filtro de Kalman. Además, este libro evidencia el proceso de una aplicación teórica directamente en el estudio de caso: el tratamiento y la mejora de las señales biomecánicas producidas por el cuerpo humano.

Desde el punto de vista biomecánico, este libro presenta un desarrollo en el que se establece que la implementación de filtros eficientes proporciona mejores resultados en la generación de la información recopilada, lo que minimiza los factores que dificultan el uso adecuado de los datos. Esta mejora permite un mejor uso de las señales provenientes de las Unidades de Procesamiento de Movimiento (MPU, por sus siglas en inglés) y, por lo tanto, abre la posibilidad

del uso masivo de filtros caso de estudio.

La aplicación de estos filtros se puede incluir diversos tipos de dispositivos biomédicos, lo que beneficia a los especialistas de salud al contar con información precisa, a los usuarios en general al conocer con precisión la información recopilada y, finalmente, a cualquiera que necesite información biomédica o biomecánica con una reducción del componente de ruido y errores.

Desde el punto de vista de la ingeniería, el diseño e implementación de filtros digitales abre una amplia gama de líneas de desarrollo donde el primer beneficio directo es la posibilidad de crear sistemas de recopilación de información más eficientes que permitan un rápido avance de la tecnología en la captura de datos. De la misma manera, se genera una profundización en el procesamiento digital de señales y en el desarrollo de mejores algoritmos que hagan más eficiente la implementación de los filtros en diversas plataformas tecnológicas.

Este libro realiza una exploración base en el filtrado por medio de estimadores no lineales, lo cual permite el futuro desarrollo de otras investigaciones destinadas a determinar la calidad de la información, las mejoras en la transmisión de datos, la implementación eficiente de algoritmos en sistemas integrados y el procesamiento adecuado de datos digitales. Se pretende que, a través de la implementación de técnicas basadas en el filtro de Kalman, se realicen procesos de fusión de datos y estimaciones temporales, invitando al lector a investigar la aplicación de estimadores lineales y no lineales para diferentes procesos en los que existen problemas con características similares al estudio de caso propuesto.

Contenido

INTRODUCCIÓN.....	13
1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO DE SEÑALES.....	17
1.1 Conceptos Matemáticos.....	18
1.2 Estimación.....	28
1.3 Señales.....	32
1.4 Sensores.....	40
1.5 Complejidad Computacional.....	58
2. DESCRIPCIÓN ANALÍTICA Y APLICADA DEL FILTRO DE KALMAN.....	63
2.1 Modelo del Filtro de Kalman.....	64
2.2 Variantes del filtro de Kalman.....	71
2.3 Filtro de Kalman Extendido.....	73
2.4 Filtro de Kalman <i>Unscented</i>	79
2.5 Fusión de Datos.....	88
3. METODOLOGÍA PARA LA EVALUACIÓN DE RENDIMIENTO DE ESTIMADORES NO LINEALES BASADOS EN EL FILTRO DE KALMAN.....	91
3.1 Tipo de Investigación.....	91
3.2 Método.....	92
3.3 Criterios de Validez y Confiabilidad.....	96
3.4 Variables e Indicadores.....	96
3.5 Protocolos de Prueba.....	98
4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	101
4.1 Escenario Basado en una Pluralidad de Sensores.....	101
4.2 Escenario de Referencia para la Comparación de los Filtros.....	105
4.3 Análisis de las muestras recolectadas.....	108
4.4 Simulación y análisis de la actividad biomecánica.....	111
4.5 Captura y Análisis de Datos Biomecánicos Reales.....	130
4.6 Análisis de Complejidad Computacional de los Algoritmos Filtro de Kalman <i>Unscented</i> y Extendido.....	134
5. CONCLUSIÓN.....	141
REFERENCIAS.....	143

Lista de Siglas

ADC	Convertor Analógico-Digital
DAC	Convertor Digital-Analógico
DMP	Procesador Digital de Movimiento
DOF	Grado de Libertad
DPS	Grados por Segundo
DSP	Procesador Digital de Señales
EKF	Filtro de Kalman Extendido
FIFO	Primera Entrada, Primera Salida
FPGA	Arreglo de Compuertas Programables en Campo
GLONASS	Sistema Global de Navegación por Satélite
GPS	Sistema de Posicionamiento Global
IMU	Unidad de Medición Inercial
I ² C	<i>Inter-Integrated Circuit</i>
INS	Sistema de Navegación Inercial
KF	Filtro de Kalman
LDC	Número de líneas de código
LQE	Estimador Lineal Cuadrático
LQR	Regulador Lineal Cuadrático
LSB	Bit Menos Significativo
MEMS	Sistemas Microelectromecánicos
MPC	Métodos por Clase
MPCP	Promedio de todos los Métodos por Clase
MPU	Unidad de Procesamiento de Movimiento
MSD	Desviación de Media Cuadrática
MSE	Error de Media Cuadrática
MSR	Raíz Cuadrada Matricial
NASA	Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio
NDC	Número de Clases
NDD	Número de Declaraciones
NDF	Número de funciones de cada clase
NDS	Número de Saltos/Llamados
PDR	Porcentaje de Declaraciones por Rama
PLCC	Porcentaje de Líneas de Código Comentadas
PMB	Profundidad máxima por bloque
PnP	<i>Plug and Play</i>
PPB	Profundidad promedio por bloque

PSD	Densidad Espectral de Potencia
RMS	Raíz Media Cuadrática
RMSD	Raíz Cuadrada de la Desviación Cuadrática Media
RMSE	Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio
SiP	Sistema en Paquete (<i>System on Packet</i>)
SoC	Sistema en Chip (<i>System on Chip</i>)
SUKF	Filtro de Kalman Escalado <i>Unscented</i>
UKF	Filtro de Kalman <i>Unscented</i>
USB	Bus Serie Universal (<i>Universal Serial Bus</i>)
VDC	Valor de Complejidad
VDCM	Valor de Complejidad Máximo

Lista de Símbolos

$[a \times]$	Matriz del producto vectorial de un vector: $a \times b = [a \times] b$
$\backslash n$	Matriz identidad de tamaño n
\sim	Expresión de rango
\times	Producto cruz
\sim	Aproximadamente
\bullet	Multiplicación de cuaterniones
A	Amplitud
F_s	Frecuencia de muestreo [Hz]
g	Valor de la aceleración de la gravedad en la Tierra ($\sim 9,81 \text{ ms}^{-2}$)
q	Desviación estándar en el proceso
Q_k	Matriz de covarianza de ruido del proceso, o matriz de multiplicación de cuaterniones
R	Desviación estándar en la medida
R_k	matriz de covarianza de ruido de medición de salida, o matriz de rotación
T_c	Tiempo de captura [s]
T_s	Período de muestreo [s]
\bar{x}	Promedio o media aritmética
\bar{x}_q	Desviación estándar promedio en el proceso
\bar{x}_{qe}	Desviación estándar promedio en el proceso para el EKF
\bar{x}_{qu}	Desviación estándar promedio en el proceso para el UKF
\bar{x}_r	Desviación estándar promedio en la medida
\bar{x}_{re}	Desviación estándar promedio en la medida para el EKF
\bar{x}_{ru}	Desviación estándar promedio en la medida para el UKF
φ_m	Inclinación magnética local del campo magnético de la Tierra

Lista de Tablas

Tabla 1.	Características principales de la MPU Invensense MPU-9150.....	56
Tabla 2.	Resumen de especificaciones del servomotor TowerPro SG-90.....	107
Tabla 3.	RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 1 rad/s.....	112
Tabla 4.	RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 5 rad/s.....	112
Tabla 5.	RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 10 rad/s.....	113
Tabla 6.	RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 15 rad/s.....	113
Tabla 7.	Parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular específica.....	115
Tabla 8.	Parámetros de desviación estándar promediados.....	119
Tabla 9.	RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar específicas para cada velocidad en la medida y el proceso.....	120
Tabla 10.	RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar promediados en la medida y el proceso...	121
Tabla 11.	Diferencia del RMSE promedio entre ambos escenarios del protocolo 3...	123
Tabla 12.	Valor del RMSE obtenido en 1 y 15 rad/s con distintos tiempos de captura.....	125
Tabla 13.	Valores estimados para el movimiento biomecánico.....	130
Tabla 14.	Valores de máxima flexión y extensión de los datos biomecánicos capturados.....	131
Tabla 15.	Diferencia entre los valores máximos y mínimos de las señales biomecánicas versus los valores estimados.....	132
Tabla 16.	Parámetros de complejidad computacional medidos en el EKF.....	134
Tabla 17.	Parámetros de complejidad computacional medidos en el UKF.....	137
Tabla 18.	Parámetros de complejidad computacional conjunta.....	139

Lista de Figuras

Figura 1.	Movimiento de Flexión y Extensión visto desde un plano parasagital.....	38
Figura 2.	Movimiento de Pronación y Supinación visto desde un plano frontal.....	39
Figura 3.	Movimiento de Abducción y Aducción visto desde un plano coronal.....	40
Figura 4.	Clasificación de las tecnologías para captura de movimiento en biomecánica y otras aplicaciones.....	42
Figura 5.	Vista de un sistema MEMS microscópicamente.....	44
Figura 6.	Representación de un acelerómetro mecánico.....	45
Figura 7.	Representación de un acelerómetro basado en MEMS.....	45
Figura 8.	Representación de la medida de un giroscopio.....	48
Figura 9.	Representación de un giroscopio de estructura vibrante de dos ejes fabricado por Bosch Corporation.....	49
Figura 10.	Magnetómetro basado en el principio de la fuerza de Lorentz construido con tecnología MEMS.....	52
Figura 11.	Ejes principales de una aeronave.....	54
Figura 12.	Ejes principales de una aeronave detectados por una MPU.....	55
Figura 13.	Tarjeta de desarrollo para MPU-9150.....	57
Figura 14.	Etapas de ejecución del filtro de Kalman.....	71
Figura 15.	Variantes del filtro de Kalman.....	72
Figura 16.	Etapas de ejecución del filtro de Kalman Extendido.....	78
Figura 17.	Etapas de ejecución del filtro de Kalman Unscented.....	88
Figura 18.	Distribución de las MPU ubicadas en las extremidades superiores....	102
Figura 19.	Interconexión de las MPU.....	103
Figura 20.	Sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales...104	
Figura 21.	Plataforma para la experimentación y simulación del movimiento de flexión y extensión....	106
Figura 22.	Diferentes vistas de la plataforma y sus movimientos.....	107
Figura 23.	Ejemplo de la información de resumen que el programa de análisis brinda.....	111
Figura 24.	Valor del RMSE obtenido con los parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular. Protocolo 1.....	115
Figura 25.	Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 1 rad/s. Protocolo 1.....	117

Figura 26. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 10 rad/s. Protocolo 1.....	118
Figura 27. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar específica para cada velocidad en la medida y el proceso.....	120
Figura 28. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar promediados en la medida y el proceso.....	122
Figura 29. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 15 rad/s. Protocolo 3 Escenario 2.....	124
Figura 30. Valor del RMSE obtenido a diferentes tiempos de captura de las señales a velocidad angular de 15 rad/s.....	125
Figura 31. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.....	126
Figura 32. Detalle de la forma de onda al iniciar la captura, velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.....	127
Figura 33. Detalle de la forma de onda al finalizar la captura, velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.....	128
Figura 34. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.....	128
Figura 35. Detalle de la forma de onda al iniciar la captura, velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.....	129
Figura 36. Detalle de la forma de onda al finalizar la captura, velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.....	129
Figura 37. Forma de onda al capturar movimiento biomecánico de miembro superior (articulación del codo), velocidad angular aprox. de 6 rad/s y tiempo de captura 10 s.....	133
Figura 38. Comparación de la forma de onda filtrada frente a la señal estimada, velocidad angular aprox. de 6 rad/s y tiempo de captura 10 s.....	133
Figura 39. Balance computacional del código del filtro de Kalman Extendido.....	136
Figura 40. Balance computacional del filtro de Kalman Unscented.....	138
Figura 41. Balance computacional de los Filtros de Kalman.....	139

Introducción

Hoy en día, el análisis de las señales mecánicas físicas producidas por el cuerpo humano en diversas actividades motrices y cinemáticas son recolectadas por elementos electrónicos, como es el caso de las unidades de medición inercial y las unidades de procesamiento de movimiento. La incursión de los dispositivos electrónicos en este campo hace posible el uso de elementos especializados, cada vez más asequibles para el público en general, en el tratamiento de enfermedades, activación y manipulación de elementos, entre otros usos. El amplio campo de aplicación de los elementos electrónicos está estrechamente relacionado con el tipo de tratamiento dada a las señales, ya que este proceso convierte los datos en información.

En el caso particular de los métodos para la recolección de las señales biomecánicas, se puede afirmar que las Unidades de Medición Inercial (IMU por sus siglas en inglés, *Inertial Measurement Unit*) y las Unidades Procesadoras de Movimiento (MPU por sus siglas en inglés, *Motion Processing Unit*) juegan un papel importante desde el aumento en el desarrollo de los sistemas Microelectromecánicos (MEMS). El uso de estos dispositivos también ha revolucionado otras áreas, como la incorporación de estos sistemas a la electrónica de consumo en el caso de teléfonos móviles, la estabilización de video en cámaras electrónicas, sistemas de navegación computarizados, sistemas de seguridad, entre otros.

Šprdlík [1], en su trabajo sobre sistemas microelectromecánicos MEMS y otras tecnologías, denota que el campo en el que MEMS ha adquirido mayor importancia es en la medicina y ciencias de la salud. Las características más deseables de la tecnología microelectromecánica en este campo de estudio radican en la portabilidad dada por su tamaño reducido, peso ligero y características eléctricas eficientes, donde el bajo consumo de energía, así como la interoperabilidad con varias plataformas es un tema de vital importancia.

Šprdlík añade: “Las IMU pueden complementar o sustituir a otras formas de medición o evaluación para el diagnóstico clínico como de análisis de movimiento basado en video y la evaluación por medio de la observación visual” [1], y esto se debe a que la confiabilidad, precisión y bajo costo en comparación con otros sistemas de captura, hacen de los MEMS una alternativa viable a los desarrollos tecnológicos futuros.

Así como existen tipos de datos o información de diversos orígenes, hay señales que contienen datos de cualquier tipo que va de acuerdo con la aplicación o área de trabajo, en donde se encuentran las señales biomecánicas que se generan a partir de tecnologías como las IMU o MPU basados en MEMS. Este último tipo de señales contienen información acerca de la mecánica de un ser vivo, tratándose en este caso de información biomecánica recolectada directamente del cuerpo humano.

El uso de señales biomecánicas generalmente implica el uso de técnicas de procesamiento de datos, ya que el uso de señales provenientes directamente del proceso de recolección es una mala práctica al eludir el pre-acondicionamiento y procesamiento de la señal. Por este motivo, es necesario someter las señales muestreadas a una transformación o procesamiento específico que proporcione mayor relevancia y confiabilidad de la información según el tipo de aplicación y uso de las mismas.

Cuando se habla de procesamiento de señales, bien sea de forma analógica o digital, se habla de una serie de procedimientos que antecede el análisis y la utilización de las señales, en donde los procesos de transformación se llevan a cabo sometiendo los datos a procesos lógicos, aritméticos y matemáticos realizados directamente por medio de la electrónica, bien sea por computador o mediante dispositivos embebidos. Entre los objetivos más importantes del procesamiento de señales se encuentran las tareas de filtrar, separar, reunir, seleccionar, acondicionar, detectar, clasificar o mejorar la información contenida.

Específicamente hablando de los procesos de filtrado, la eliminación de las perturbaciones que entorpecen el procesamiento de una señal biomecánica supone un desafío en el cual múltiples investigadores, académicos e ingenieros han tratado de resolver mediante diferentes técnicas, encontrando que la mayoría de desarrollos se basan en la electrónica digital y el procesamiento

digital de señales. En el caso particular presentado en este libro, el procesamiento de datos se centrará en el proceso de filtrado, ya que se discriminan rangos de datos definidos en función de las características de la señal y se realizan cambios en la amplitud o fase de la señal procesada.

Dentro de los filtros más destacados para un procesamiento adecuado de señales que involucran movimiento se encuentra el filtro de Kalman. En concreto, el filtro de Kalman es un filtro digital que puede realizarse por medio de un proceso matemático –o algoritmo– dentro de un procesador, y está destinado a la eliminación de ruido blanco por medio de la estimación de estados futuros en un sistema lineal.

Los usos de este filtro son variados, siendo especialmente destacados en el procesamiento de datos georreferenciados (como el caso de los receptores GPS y triangulación satelital), seguimiento de objetos en movimiento, reconocimiento facial y otras aplicaciones de características ópticas, acústicas y de eliminación de interferencias o ruido.

Este libro está estructurado en seis capítulos, en donde se presenta de forma inicial la fundamentación teórica que recae en el uso de conceptos matemáticos, físicos y estadísticos necesarios para desarrollar la temática de investigación, los cuales son expuestos a lo largo del primer capítulo. El capítulo segundo está dedicado plenamente a exponer las características básicas del Filtro de Kalman, pasando por la mención de algunas variantes y el desarrollo teórico del Filtro de Kalman Extendido y Filtro de Kalman *Unscented*. El capítulo tercero expone la metodología planteada para el desarrollo de la investigación; en el capítulo cuarto se registra los resultados de la investigación desarrollada, pasando por la evidencia y discusión de la misma. Finalmente se da paso al capítulo quinto y sexto, en los que se expone las conclusiones y trabajos futuros de esta investigación, respectivamente.

CAPÍTULO 1

1. Fundamentación Teórica para la Implementación de Técnicas de Procesamiento de Señales

Los sistemas que capturan la información cinemática en el cuerpo humano arrojan información que contiene múltiples errores de medición producidos por perturbaciones o indeterminaciones, en donde su origen se debe a la naturaleza misma del movimiento y a otros factores que pueden ser emanados de elementos externos. Algunas fuentes de ruido son generalmente sistemas que causan perturbaciones electromagnéticas, como dispositivos electrónicos, líneas de transmisión de energía, elementos ferromagnéticos y el sistema de captura en sí mismo, donde los módulos utilizados generan varios tipos de errores en las señales.

Los problemas detectados en la información que no ha sido procesada de manera adecuada son claramente visibles en forma de imprecisiones, desviaciones, deriva o truncamiento de los valores reales que se espera obtener, y que reducen la calidad de una aplicación en donde la exactitud de la información recogida es un factor importante. Como se ha planteado inicialmente, la corrección o disminución de los errores en los datos biomecánicos se puede realizar mediante el uso de filtros, entre los que se encuentra el filtro de Kalman, destacándose el filtro de Kalman *Unscented* –sin aroma– y el filtro de Kalman Extendido, siendo necesario establecer cuál de los dos tipos de filtro puede mejorar la información extraída a partir de la captura de señales, reduciendo al mínimo los errores presentados en los datos según el requerimiento de la aplicación final.

Para el desarrollo de los filtros es necesario poseer un lenguaje matemáticamente apropiado que permita la asimilación de la información, por lo tanto, en este capítulo se desarrolla la sustentación teórica que fundamenta el desarrollo de los mismos con un enfoque netamente matemático, analítico y de ingeniería. Mediante exposición directa y un análisis completo se cubre la temática de

información preliminar, que comprende desde la definición y clarificación de los conceptos básicos, pasando por la definición de estimadores hasta la ilustración y estructura de los Filtros de Kalman, sumado a las variantes incluidas en el enfoque de este documento.

1.1 Conceptos Matemáticos

Con el propósito de aportar en la comprensión global de la información presentada a lo largo del texto, en esta sección se expone algunos conceptos preliminares relevantes relacionados con los procesos matemáticos que permiten la adecuada interpretación de la investigación.

1.1.1 Estimador

En el campo de la estadística, un estimador, habitualmente llamado “estimador sin sesgo” es una función matemática que puede ser usada para calcular un parámetro desconocido de una distribución de probabilidad teórica a partir de observaciones indirectas. Formalizando el lenguaje estadístico, se distinguen tres términos estrechamente relacionados: estimador, estimación y estimando. La regla matemática recibe el nombre de estimador, mientras que la cantidad de interés es el estimando y su resultado es la estimación.

Un estimador puede ser de dimensión finita (en modelos paramétricos y semiparamétricos) o de dimensión infinita (modelos semiparamétricos y no paramétricos)[2]. Si el parámetro se denota θ , el estimador se escribe tradicionalmente añadiendo un circunflejo sobre el símbolo: $\hat{\theta}$. Al ser una función de los datos, el estimador es en sí mismo una variable aleatoria y una realización particular de esta variable aleatoria se llama “estimación” [3].

Suponiendo que hay un parámetro fijo θ que necesita ser estimado, entonces el estimador es una función que mapea el espacio de muestra a un conjunto de estimaciones de muestra. A menudo es conveniente expresar la teoría de estimación usando el álgebra de variables aleatorias: así, si X se usa para denotar una variable aleatoria correspondiente a los datos observados, el estimador (en sí mismo tratado como una variable aleatoria) se simboliza como una función de esa variable aleatoria, $\hat{\theta}(X)$. La estimación para un valor de datos observado particular x , es decir, para $X = x$ es entonces $\hat{\theta}(x)$, el cual es un valor fijo [4].

1.1.2 Error

El error puede definirse como una propiedad cuantificable de un estimador [4], y hace referencia a la diferencia entre un valor verdadero y una estimación, o aproximación, de ese valor. En estadística, un ejemplo común es la diferencia entre la media de una población completa y la media de una muestra extraída de esa población.

Es importante resaltar que el error de la estimación no depende solo del estimador sino también de cuán representativa es la muestra elegida para obtener la estimación. Para una muestra específica $\hat{\theta}$, el error del estimador estará dado por (1).

$$e(x) = \hat{\theta}(x) - \theta \quad (1)$$

Dado que el error es la diferencia de un valor real o experimental frente a un valor teórico o hipotético, existen innumerables funciones matemáticas que pueden describir la relación entre el estimador y la muestra y , por lo tanto, varios tipos de errores. Algunos de los tipos de errores más frecuentes son los estadísticos (llamados perturbaciones), errores residuales (de ajuste de la desviación), entre otros.

1.1.3 Error Cuadrático Medio (*Mean Square Error*, MSE)

El concepto de error cuadrático medio (*Mean Square Error*, MSE) es un criterio que se utiliza para medir el rendimiento de un estimador. El error cuadrático medio, abreviado como MSE, es importante para transmitir los conceptos de precisión, sesgo y exactitud durante la estimación estadística [5].

Al contar con el objetivo de predicción o estimación junto con un predictor o estimador que se dice que es la función de los datos dados, el MSE se define como el promedio de cuadrados de las diferencias entre el atributo que se debe estimar y el estimador. El error cuadrático medio se puede llamar una función de riesgo que corresponde al valor esperado de la pérdida de error al cuadrado. Esta diferencia o pérdida podría desarrollarse debido a la aleatoriedad o debido a que el estimador no representa la información que podría proporcionar una estimación más precisa [6].

Formalmente, el error cuadrático medio de $\hat{\theta}$ es el valor esperado (la esperanza matemática de todas las muestras hechas) de los errores cuadráticos, como se muestra en (2).

$$MSE(\hat{\theta}) = E \left[(\hat{\theta}(x) - \theta)^2 \right] \quad (2)$$

De esta forma el MSE indica hasta qué punto los valores estimados promedio se desplazan entre sí teniendo como referencia a un parámetro único dentro de los valores estimados. Esta definición depende del parámetro desconocido, y el MSE en este sentido es una propiedad de un estimador [4].

1.1.4 Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RMSE)

La Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio es una medida de error estadística, correspondiente a la magnitud media del error, y es ampliamente utilizada como parámetro de análisis del error para datos numéricos de propósito general.

A comparación del error absoluto medio (*Mean Absolute Error*, MAE) en donde brinda el mismo peso a todos los errores de la señal, el RMSE penaliza severamente a los errores más grandes que se encuentren en los datos, es decir, que más se alejen de la varianza [7] ya que los errores se elevan al cuadrado antes de que se promedien en el análisis. Esto significa que el RMSE es más útil cuando grandes errores son particularmente indeseables [8].

La escala del RMSE puede estar comprendida de 0 a ∞ y sus puntuaciones son de orientación negativa, es decir que los valores más bajos son los más óptimos o los mejores. La ecuación por medio de la cual se calcula el valor del RMSE es la siguiente.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} = \sqrt{MSE(\hat{\theta})} \quad (3)$$

Hay que tener en cuenta que el término Raíz Cuadrada del Error Cuadrático Medio (RMSE) y Raíz Cuadrada de la Desviación Cuadrática

Media (RMSD) es el mismo parámetro estimativo, llamado simplemente de dos modos ya que se entiende a la desviación como una medida de error, adoptando el otro nombre.

1.1.5 Muestreo

La definición de muestreo puede darse desde el punto de vista estadístico o de procesamiento digital de señales, ambos utilizados en este libro.

Desde el punto de vista estadístico, es un procedimiento que se refiere a la selección de observaciones individuales, donde estas nos ayudan a hacer inferencias estadísticas sobre la población o proceso analizado [9]. En el muestreo, suponemos que las muestras se extraen de la población, mientras que los medios de muestra y los medios de población son iguales.

Desde el punto de vista de procesamiento digital de señales, el muestreo hace referencia a la teoría de digitalización propuesta por Nyquist-Shannon, el cual establece que una condición suficiente en la frecuencia de toma de datos permite que una secuencia discreta de muestras capture toda la información de una señal de tiempo continuo de ancho de banda finito [10]. En ingeniería, una señal de tiempo continuo suele ser una señal analógica, mientras que una secuencia discreta de muestras puede ser una señal digital o simplemente una secuencia.

1.1.6 Desviación de Muestreo

La desviación de muestreo es el error de la muestra seleccionada de las verdaderas características, rasgos, comportamientos, cualidades o figuras de toda la población. Al ser un error, es a su vez una diferencia entre la muestra estadística utilizada para estimar un parámetro y el valor real pero desconocido del parámetro [11].

Una estimación de un valor generalmente estará sujeta a variación de muestra a muestra. Estas variaciones en los valores de muestra posibles de una estadística se pueden expresar teóricamente como errores de muestreo, aunque en la práctica el error de muestreo exacto es típicamente desconocido [12].

Si se tiene el parámetro θ y su estimador $\hat{\theta}$, este error, para un valor x está dado por

$$d(x) = \hat{\theta}(x) - E(\hat{\theta}(X)) = \hat{\theta}(x) - E(\hat{\theta}) \quad (4)$$

En donde $E(\hat{\theta}(X))$ es el valor esperado (esperanza matemática) del estimador. Al igual que el error de la estimación, la desviación del muestreo no depende solo del estimador sino también de cuán representativa es la muestra elegida para obtener la estimación.

1.1.7 Sesgo (*Bias*)

El sesgo es una característica estadística según la cual el valor esperado de los resultados difiere del verdadero parámetro cuantitativo subyacente que se está estimando [13].

Se puede representar como un valor que muestra la distancia entre el promedio de la recolección de valores estimados y un solo parámetro que está siendo estimado. El sesgo $\hat{\theta}$ de está definido como:

$$B(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta \quad (5)$$

1.1.8 Matriz Hermitiana

La matriz Hermitiana es un tipo de matriz cuadrada que contiene elementos de tipo complejo y posee además la característica de ser igual a su propia traspuesta conjugada [2].

El elemento en la i -ésima fila y j -ésima columna es igual al conjugado del elemento en la j -ésima fila e i -ésima columna para los índices i, j en una matriz hermitiana.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 + i \\ 2 - i & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Las matrices hermitianas llevan el nombre de Charles Hermite, quien demostró en 1855 que las matrices de esta forma comparten una propiedad

con matrices simétricas reales de tener siempre valores propios reales. Las matrices hermitianas son fundamentales para la teoría cuántica de la mecánica de matrices creada por Werner Heisenberg, Max Born y Pascual Jordan en 1925.

1.1.9 Matriz Triangular

Es un tipo especial de matriz cuadrada cuyos elementos por encima o por debajo de su diagonal principal son cero [14]. Debido a que las ecuaciones matriciales con matrices triangulares son más fáciles de resolver, son importantes en el análisis numérico y en el desarrollo de sistemas estimativos como los expuestos en este libro.

Pueden existir varios tipos de matrices triangulares de acuerdo a la disposición de los elementos que la conforman. Una matriz cuadrada se llama triangular inferior si todas las entradas por encima de la diagonal principal son cero.

Así mismo, una matriz cuadrada se denomina triangular superior si todas las entradas por debajo de la diagonal principal son cero. Una matriz que es tanto triangular superior como inferior se llama matriz diagonal [15].

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

1.1.10 Ruido

La definición de ruido puede darse desde la definición de estadística espectral sumado al de procesamiento digital de señales, ambos utilizados en este libro. El ruido estadístico es una variabilidad cuyo origen, explicación o interpretación es indeterminada, y que se produce dentro de una muestra de datos.

El término ruido, en este contexto, proviene del procesamiento de la señal, donde se usa para referirse a energía eléctrica o electromagnética no deseada que degrada la calidad de las señales y los datos. La presencia de ruido significa que los resultados del muestreo podrían no duplicarse si el proceso se repitiera [16].

1.1.11 Ruido Gaussiano y Ruido Blanco

El ruido Gaussiano es un tipo de ruido estadístico que tiene una función de densidad de probabilidad igual a la de la distribución normal, que también se conoce como la distribución de Gauss. En otras palabras, los valores que el ruido puede asumir son distribuidos de forma Gaussiana y que, generalmente, se encuentra asociado con la radiación electromagnética [17].

Si un ruido es Gaussiano, la probabilidad que se aleje de más de 3σ del valor promedio es bajo. Esta propiedad es utilizada para identificar la señal del ruido, pero sólo funciona si el ruido es realmente Gaussiano.

El ruido coloreado (blanco, rosa, browniano, etc.) es una señal aleatoria que puede estar distribuida normalmente o no, caracterizada porque sus valores en instantes de tiempo distintos no tienen relación alguna entre sí, es decir, no existe correlación estadística entre sus valores. El ruido coloreado Gaussiano es aquel cuya función de densidad responde a una distribución normal.

1.1.12 Matriz Jacobiana

La matriz Jacobiana es aquella que contiene todas las derivadas parciales de primer orden de una función vectorial. Cuando es una matriz cuadrada, su determinante se denomina Jacobiano [18].

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (8)$$

Como la definición de Matriz Jacobiana y el valor del Jacobiano suele ser confusa, se puede hacer una analogía y pensar en una encuesta en la que se pide a un grupo de personas calificar un par de diferentes productos en una escala (por ejemplo, de 1 a 5) del peor al mejor [19].

La puntuación global dada a cada producto está definida por el promedio de todas las calificaciones que la gente le dio a ese producto. Para ver cómo una persona influyó en la valoración global para un solo producto, se puede analizar la calificación de esa persona para ese producto específico.

Cada una de esas variaciones de la relación entre persona y producto es como una derivada parcial, y la asignación de una valoración de dicha persona a cada producto es como el valor Jacobiano. Si se reemplaza a las personas con sensores y productos con los estados, se puede comprender de mejor manera la relación entre el modelo de sensor y el modelo de proceso del filtro de Kalman Extendido.

1.1.13 Determinante

Es una operación matemática realizada en álgebra matricial. Los determinantes tienen diversas interpretaciones dependiendo del proceso matemático y lógico que se esté siguiendo a través del álgebra como una herramienta [20]. Por ejemplo, los coeficientes en un sistema de ecuaciones lineales están representados habitualmente en forma de matriz, y el determinante se puede usar para resolver esas ecuaciones. El uso de determinantes en cálculo incluye el determinante jacobiano en la regla de cambio de variables para integrales de funciones de varias variables.

Los determinantes también se utilizan para definir el polinomio característico de una matriz, que es esencial para los problemas de valores propios en el álgebra lineal. En ocasiones, los determinantes se usan meramente como una notación compacta para expresiones que de otro modo son difíciles de escribir.

El algoritmo de extracción del determinante de una matriz A de tamaño 3×3 prosigue de la forma

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\
 &= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.
 \end{aligned} \tag{9}$$

1.1.14 Esperanza Matemática (Valor Esperado)

En la teoría de la probabilidad, el valor esperado de una variable aleatoria, intuitivamente, es el valor promedio a largo plazo de las repeticiones del experimento que representa.

De forma práctica, el valor esperado de una variable aleatoria discreta es el promedio ponderado multiplicado la probabilidad de todos los valores posibles. En otras palabras, cada valor posible que puede asumir la variable aleatoria se multiplica por su probabilidad de ocurrir, y los productos resultantes se suman para producir el valor esperado [21].

El mismo principio se aplica a una variable aleatoria absolutamente continua, excepto que una integral de la variable con respecto a su densidad de probabilidad reemplaza a la suma. La definición formal incluye ambos y también funciona para distribuciones que no son ni discretas ni absolutamente continuas; el valor esperado de una variable aleatoria es la integral de la variable aleatoria con respecto a su medida de probabilidad [22].

El valor esperado, también llamado media poblacional o media de una variable aleatoria X , está representado por el valor $E = [X]$.

Cuando la variable aleatoria es discreta, la esperanza es igual a la suma de la probabilidad de cada posible suceso aleatorio multiplicado por el valor de dicho suceso. Representa la cantidad media que se espera obtener como resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces. Cabe decir que el valor que toma la esperanza matemática en algunos casos puede ser uno no esperado, es decir totalmente impredecible, improbable o incluso imposible.

1.1.15 Covarianza

La covarianza es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias. Es uno de los datos fundamentales para determinar si existe una dependencia lineal entre las variables y además es el dato necesario para estimar otros parámetros básicos, como el coeficiente de correlación lineal o la recta de regresión [23]. Se debe aclarar que una covarianza igual a cero no garantiza que las variables sean linealmente independientes, pero se debe tener en cuenta que la covarianza es una medida de linealidad.

La covarianza esta expresada por (10):

$$\sigma(x, y) = E[(x - E[x])(y - E[y])] \quad (10)$$

El signo de la covarianza muestra la tendencia en la relación lineal entre las variables. La magnitud de la covarianza no es fácil de interpretar porque no está normalizada y, por lo tanto, depende de las magnitudes de las variables.

1.1.16 Varianza

Es un valor que mide hasta qué punto un conjunto de números se distribuye alejándose unos de otros [24]. Una variación de cero indica que todos los valores son idénticos. La varianza es siempre es un valor positivo, en donde una varianza baja indica que los puntos de datos tienden a estar cerca de la media (valor esperado) y por lo tanto el uno al otro, mientras que una varianza alta indica que los puntos de datos están distribuidos alrededor de la media y distanciados entre sí.

Una medida equivalente es la raíz cuadrada de la varianza, llamada la desviación estándar. La desviación estándar tiene la misma dimensión que los datos, y por lo tanto es comparable a desviaciones de la media. Como la desviación estándar es a menudo representado con el símbolo σ , la varianza entonces estará representada con el símbolo σ^2 .

$$VAR = E[(X - \mu)^2] \quad (11)$$

1.1.17 Eficiencia

Dos propiedades deseables en la respuesta de un estimador son la imparcialidad (nulo valor de sesgo) y el nulo -o al menos mínimo- error cuadrático medio (MSE). Los estimadores lamentablemente no pueden satisfacer de mejor forma las dos condiciones al mismo tiempo: un estimador con sesgo puede tener menor error cuadrático medio (MSE) que cualquier estimador imparcial.

La eficiencia es por tanto un medidor de la calidad del estimador, y está determinada en una relación entre el elemento de error (MSE) versus el valor de sesgo, y muestra qué tan bueno es el estimador en predecir los parámetros de la variable aleatoria que evalúa. Esencialmente, un estimador más eficiente necesita menos observaciones que una menos eficiente para lograr un rendimiento determinado [2].

Entre estimadores imparciales, a menudo existe uno con la menor varianza, llamado el estimador insesgado de varianza mínima (MVUE). En algunos casos existe un estimador imparcial eficiente, que, además de tener la menor varianza entre los estimadores sin sesgo, satisface la regla de Cramer-Rao, que es un absoluto límite inferior de la varianza para las estadísticas de una variable.

1.2 Estimación.

La estimación es un proceso matemático que permite hallar una aproximación a un determinado valor, que puede ser desconocido pero inferido a partir de datos circundantes y cercanos al mismo, y permite completar o predecir información faltante, incierta o inestable [25]. Generalmente, este proceso matemático involucra usar el valor estadístico derivado de una muestra de datos para un parámetro determinado [25].

Una de las formas más comunes para realizar estimaciones es dividir los datos en muestras para facilitar su análisis, en donde el conteo general de una variable (que se presume demasiado grande) puede inferirse a partir de una fracción de la misma que contenga suficiente información representativa para determinar los datos faltantes. Este tipo de estimación es común en censos poblacionales, donde difícilmente se puede recolectar toda la información específica para el estudio que se pretenda realizar.

Otra forma de estimación matemática es realizada a partir de límites inferiores y superiores de una cantidad de medida que no pueda ser especificada con claridad o especificidad. Como la estimación provee información no existente, es especialmente útil en procesos donde la generación de información futura es crítica.

Para brindar algunos ejemplos de aplicación de las estimaciones a sistemas de uso cotidiano y en ingeniería, el radar tiene como objetivo conocer el número de determinados objetos, usualmente aeronaves, barcos o focos de lluvia cuando el radar es de uso meteorológico, y esta información es mediante el análisis de los tiempos de retraso entre los ecos recibidos y los impulsos transmitidos. Una estimación es necesaria para analizar estos tiempos de respuesta, ya que los impulsos reflejados pueden contener ruido eléctrico adquirido a través del viaje en el espacio, y los valores afectados están distribuidos al azar de modo que el tiempo de retraso debe ser una aproximación del valor real, pero lo suficientemente bueno como para ofrecer un margen de error mínimo y la información pueda ser tomada como válida y confiable [26].

1.2.1 Estimadores.

Adoptando el concepto utilizado en la parte inicial de este capítulo, un estimador es un conjunto de técnicas que por medio de diversas herramientas realizan la estimación en una serie de datos específica.

Desde la definición estricta de la estadística, es una regla para calcular el estimado de una cantidad por medio de los datos de observación recolectados, y tres partes deben ser diferenciables entre sí: la regla (estimador), la cantidad de interés (el estimando) y su resultado (la estimación) [5].

Desde la definición formal, se debe suponer que existe un parámetro fijo θ que debe ser estimado. Para ello, una función mapea el espacio de muestra a un conjunto de estimaciones de la muestra, a dicha función se le llama estimador. Dicho estimador de θ generalmente se representa con el símbolo $\hat{\theta}$. Según sea el grado de conveniencia, se puede expresar el estimador usando el álgebra de variables aleatorias: Así, si x se utiliza para denotar una variable aleatoria que corresponde a los datos observados, el estimador se simboliza como una función de dicha variable aleatoria, $\hat{\theta}(x)$.

Existen diversos tipos de estimadores usados según el tipo de análisis que se quiera realizar al conjunto de datos, las características esenciales de los mismos y sobretodo el comportamiento, descritos desde el punto de vista de funciones matemáticas, que presentan los datos a través del tiempo. Desde ese punto de vista, los estimadores están divididos en dos categorías, de tipo lineal y de tipo no lineal.

1.2.2 Estimadores lineales.

Son aquellos estimadores que realizan aproximaciones de los datos basados en un modelo lineal, y por lo tanto funcionan en modelos de procesos únicamente lineales. El estimador de este tipo más conocido es la Regresión Lineal. La regresión lineal es una técnica que permite modelar la relación entre una variable dependiente generalmente denotada con la letra Y , y uno o más explicativos escalares, llamados variables independientes, denotada con la letra X .

En una regresión lineal simple se puede predecir las puntuaciones en una variable a partir de las puntuaciones en una segunda variable. La variable que se está prediciendo se llama la variable criterio y es la misma variable dependiente. La variable en las que se basan las predicciones se llama en la variable predictora y es la misma variable independiente. Cuando sólo hay una variable de predicción, el método de predicción se llama regresión simple [27].

Un gran número de procedimientos han sido desarrollados para la estimación de parámetros y la inferencia en la regresión lineal. Estos métodos difieren en la simplicidad computacional de los algoritmos, la presencia de una solución de forma cerrada, robustez con respecto a las distribuciones de colas pesadas, y los supuestos teóricos necesarios para validar propiedades estadísticas deseables tales como la consistencia y la eficiencia asintótica [28].

Aparte de las regresiones lineales, existen otros métodos para realizar estimaciones lineales, dentro de los cuales se destacan los siguientes:

Estimación por mínimos cuadrados

- Mínimos cuadrados ordinarios (MCO).
- Mínimos cuadrados generalizados (GLS).

- Porcentuales Mínimos Cuadrados.
- Mínimos Cuadrados Iterativos Reponderados (IRLS).
- Regresión con variables instrumentales (IV).
- Total de mínimos cuadrados (TLS).

La estimación de máxima verosimilitud

- Estimación de máxima verosimilitud.
- Regresión Ridge.
- Desviación de regresión de mínimos absolutos (LAD).
- Estimación adaptativa.

Otras técnicas de estimación

- Bayesiano de regresión lineal.
- Regresión cuantil.
- Modelos mixtos.
- Regresión de componentes principales (PCR).
- Regresión de mínimos de ángulo.
- El estimador de Theil-Sen.

1.2.3 Estimadores no lineales.

Según lo propuesto por Mitter [29], existen dos categorías dentro de los estimadores no lineales: Estimación estática de sistemas no lineales y estimación de estado para sistemas dinámicos no lineales.

De una manera general, los estimadores no lineales brindan una relación entre un conjunto de variables independientes y dependientes dentro de un sistema previamente modelado, en donde el diseñador de la aplicación define el tipo de relación que se da entre las variables que componen el sistema.

Cuando se puede establecer cualquier tipo de relación entre las variables, hay dos situaciones fundamentales que deben analizarse [30].

En primer lugar, se debe analizar la correspondencia entre los grupos de variables para que su asociación cobre un sentido específico y no carezca de validez. En segunda instancia, se debe analizar a qué grado las variables

están correlacionadas entre sí, para comprobar efectivamente que se trate de un sistema no lineal. Técnicamente hablando, la estimación no lineal “es un procedimiento de ajuste que estimará cualquier tipo de relación entre una variable dependiente (o variable de respuesta) y una lista de variables independientes”. [30]

Por citar algunos ejemplos, dentro de los métodos de estimación no lineal se encuentran las siguientes técnicas de ajuste:

- Estimación por Mínimos Cuadrados
- Funciones de pérdida
- Mínimos cuadrados ponderados
- Máxima verosimilitud
- Criterios de convergencia
- Mínimos locales
- Métodos Cuasi-Newtonianos
- Patrón de Movimiento de Hooke-Jeeves
- Patrón de búsqueda Rosenbrock
- Matriz de arpillera y desviación estándar
- Filtro de partículas.
- Filtros de Kalman no Lineales

1.3 Señales.

En el campo de la ingeniería, una señal es una función que “transmite información sobre el comportamiento o atributos de algún fenómeno” [31]. Descrita de una manera física, una señal es una información transmitida de un punto a otro a través de un medio, como por ejemplo un alambre de cobre que puede transportar impulsos eléctricos. Las señales pueden ser también convenciones adoptadas por un grupo de personas en específico, en donde un canal de transmisión con un mensaje puntual puede ser interpretado según la convención, y por consiguiente la palabra “información” cobra un significado de mayor importancia.

Las señales pueden ser categorizadas de muchas formas, pero eléctricamente se distinguen únicamente dos tipos: analógicas y digitales.

Usualmente las señales eléctricas analógicas son las que interpretan el mundo real de una forma continua a través del tiempo, mientras que las señales digitales representan la información en intervalos de tiempo llamadas muestras. Con respecto al tipo de señales que se pueden encontrar en diversos campos de la vida cotidiana están las señales acústicas, producido por ondas oscilantes en un medio, usualmente el aire; señales visuales llamadas imágenes, producida por ondas de diferente frecuencia emanando en un espacio bidimensional; señales audiovisuales, una combinación de las señales visuales y acústicas; señales mecánicas que representan el movimiento y pueden ser monitoreadas de forma eléctrica y por último señales biológicas, provenientes de seres vivos en un sentido global de la interpretación.

1.3.1 Señales biomédicas y biomecánicas

La biomedicina, también conocida como medicina teórica, es un término que comprende el conocimiento y la investigación en los campos de la medicina, veterinaria, odontología y ciencias biológicas fundamentales como la bioquímica, la biología celular, genética, zoología, botánica y microbiología. Las señales que se generan en estos ámbitos son llamadas señales biomédicas. Se trata de un término que puede englobar toda la información proveniente de todos los organismos vivos. Habitualmente se entienden como los registros de tiempo en el que sucede un evento biológico, como el latido del corazón o la contracción de los músculos porque todas las actividades mecánicas, eléctricas y químicas producen señales medibles y analizables.

Hay distintos tipos de señales biomédicas, como lo son por ejemplo señales bioeléctricas, generada por nervios y tejidos musculares como resultado de los cambios en las corrientes eléctricas; señales biomagnéticas, creadas por diversos órganos en forma de campo magnético; señales bioquímicas, que contienen información de los cambios en concentración de compuestos químicos en el cuerpo; señales bioacústicas, señales bioópticas, generada por los atributos ópticos o inducidos por la luz dentro de los sistemas biológicos; y finalmente señales biomecánicas, aquellas originadas directamente con el movimiento o desplazamiento.

Las señales biomecánicas, al igual que cualquier otra señal, posee propiedades temporales, es decir que no se puede describir como una constante a través del tiempo. La manera óptima y más directa de recolectar la información

biomédica a través de sus señales es transduciéndola a una forma eléctrica, para lo cual se usan distintos tipos de sensores según el fenómeno que se desee analizar. Los sistemas biomecánicos poseen una gran variedad de dispositivos electrónicos que pueden caracterizar su comportamiento, como se ha visto en anterioridad todos los sensores y sistemas que pueden permitir la captura del movimiento.

El estudio de las señales biomecánicas está más cercano a la ingeniería que al área médica, ya que los métodos numéricos se aplican en casi todos los estudios biomecánicos. La investigación se realiza en un proceso iterativo de hipótesis y verificación, incluyendo varias etapas de modelado, simulación por computador y mediciones experimentales.

1.3.2 Adquisición de las señales biomecánicas

La adquisición de señales biomecánicas comienza con la selección óptima de los sensores necesarios para medir la actividad mecánica. Este paso, a pesar de parecer relativamente simple, implica un alto esfuerzo y una considerable demanda de tiempo debido a la gran cantidad de sensores disponibles en el mercado actual, sus diversas características, costos y aspectos de la disponibilidad regional. Ya que muchos sensores especializados en el área médica son difíciles de encontrar en ciertas áreas geográficas, es necesario importarlos o al menos ordenarlos a otros lugares remotos.

Una vez que se ha realizado una selección óptima de sensores, el segundo paso más importante es conectar los sensores a un sistema de recolección, procesamiento y almacenamiento. En la mayoría de los casos, los sensores deben ser ensamblados a este sistema principal utilizando elementos electrónicos adicionales que hacen posible una recolección de datos eficiente. Cuando se define el sistema de procesamiento principal, junto con el acoplamiento de los sensores, es necesario implementar el sistema de medición biomecánica en el lugar donde se realizará la verificación.

Como paso final, se deben desarrollar varios protocolos de prueba para el sistema de adquisición de señales biomecánicas, diseñados específicamente para probar exhaustivamente el sistema creado. Estos protocolos de prueba también pueden generar la información biomecánica necesaria para ser analizada, filtrada y procesada por el sistema. Cabe señalar que los protocolos

de prueba varían según el investigador, la investigación y la información que se recopilará, procesará y analizará.

1.3.3 Procesamiento de señales biomecánicas

Una vez las señales biomecánicas son recolectadas, es necesario realizar transformaciones que implican el análisis de estas mediciones para proporcionar información útil sobre la cual se puedan tomar decisiones o extraer información relevante que están enmarcadas en un contexto predefinido [32]. A medida que la tecnología avanza, se van descubriendo nuevas formas de procesar estas señales usando una variedad de técnicas, fórmulas matemáticas y algoritmos.

Cuando se trabaja de la mano con herramientas basadas en la electrónica y computación, los análisis efectivos de las señales pueden ser realizadas por métodos que hacen inclusión de *software* y/o *hardware* especializado que pueden trabajar a velocidades humanamente irreproducibles.

Como expone Chang en su documento [33], el enfoque principal del procesamiento de las señales biomédicas estaba hace algunas décadas en el filtrado de señales para eliminar el ruido que puedan dar origen a inexactitudes o errores en el uso de las señales. Parte de este problema sigue afectando a los investigadores actuales, ya que, si bien algunas fuentes de ruido o problemas se han ido corrigiendo o al menos minimizando con el paso del tiempo, han aparecido otros tipos de inconvenientes que han sido palpables únicamente con el desarrollo de la más reciente tecnología o con la rigurosidad que requieren algunos procesos para ser útiles. Cabe resaltar que el campo de procesamiento de las señales biomédicas en general continúa creciendo a un ritmo sin precedentes gracias al desarrollo de varios instrumentos biomédicos novedosos tales como ultrasonido, equipos de resonancia magnética (MRI), equipos para tomografía por emisión de positrones (PET), evidenciando que las técnicas de procesamiento de señales en sus diferentes niveles (segmentación, seguimiento de movimiento, análisis de secuencias, y el tratamiento estadístico) contribuyen significativamente al avance de la biomedicina.

Con respecto a las señales biomecánicas, los métodos de captura de movimiento son en sí mismos un tipo específico de procesamiento directo de dichas señales. Se utiliza en aplicaciones militares, entretenimiento, deportes, aplicaciones médicas y para la validación de la visión artificial y la robótica. En

el cine y el desarrollo de videojuegos, la información extraída de este proceso sirve para animar modelos digitales de personajes en programas de animación por computador tanto para 2D o 3D [34].

Un procesamiento frecuente en señales biomecánicas es el análisis con base en la frecuencia, ya que, en eventos médicos, esta variable juega un papel importante para la determinación de síntomas o como indicador de problemas específicos en los humanos. El área de aplicación del procesamiento a este tipo de señales es amplia, de modo que el estudio se hace habitualmente sobre un factor en específico, por ejemplo, la aplicación de estimadores no lineales para la reducción de ruido.

1.3.4 Señales biomecánicas en extremidades superiores

En el cuerpo humano, las señales biomecánicas que pueden ser recolectadas son numerosas debido a que hay una gran cantidad de movimientos que pueden realizarse, en donde para cada caso de aplicación se opta por tomar el modelo físico del área concreta de estudio.

En esta investigación, el movimiento biomecánico a ser capturado proviene de las extremidades superiores del cuerpo humano, es decir de los brazos. Para un análisis biomecánico completo, se debe realizar el modelo anatómico y funcional de las extremidades superiores del cuerpo humano, un trabajo extenso y complejo que requiere de profesionales con amplios conocimientos en la estructura física del cuerpo humano y herramientas de modelado matemático^(*). En este apartado, se explica brevemente los movimientos que las extremidades superiores del cuerpo humano pueden tener, así como algunas características físicas de los mismos.

Los términos anatómicos de movimiento en las extremidades superiores del cuerpo humano se utilizan para describir las acciones de los músculos en el esqueleto y su resultado en forma de desplazamiento. Los músculos se contraen o estiran para producir un movimiento en las articulaciones y estos movimientos son los que posteriormente se pueden capturar y analizar usando elementos especializados, en especial aquellos de tipo electrónico.

^(*) Para información biomecánica completa, se sugiere seguir el texto “Biomechanics of the upper limbs: Mechanics, Modeling, and Musculoskeletal Injuries” de Freivalds, Andris.

Para la correcta comprensión de los términos que describen el movimiento de las extremidades superiores del cuerpo presentados a continuación, se debe asumir que el cuerpo comienza en la posición anatómica. Cada par de movimientos está compuesto de su movimiento anatómico y opuesto, llamado movimiento antagónico, para facilitar su comprensión [35].

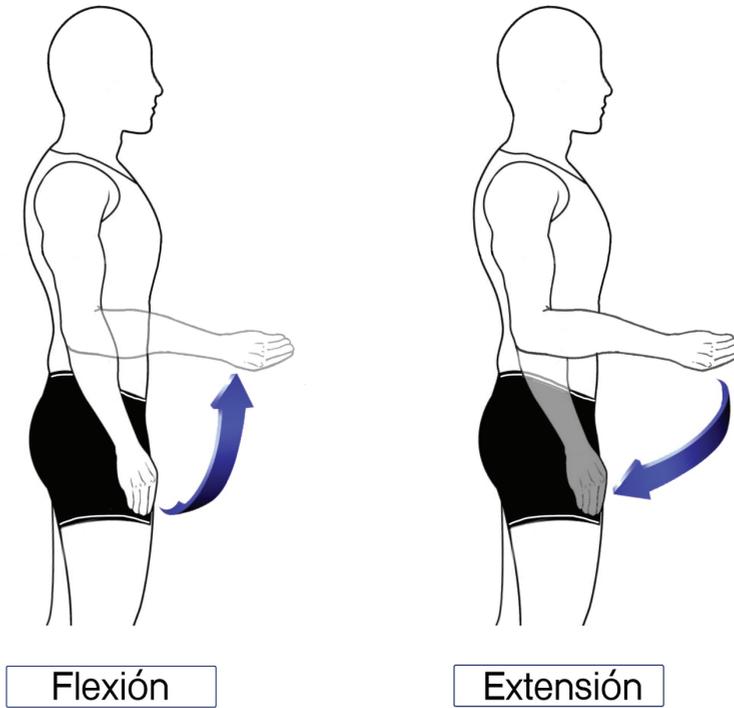
1.3.5 Movimiento de Flexión – Extensión

Los movimientos de flexión y extensión de las extremidades superiores se producen en el plano sagital. Este plano se forma cuando un paralelo vertical divide el cuerpo humano de la cabeza a los pies en dos partes iguales. La descripción básica de este par de movimientos se puede dar en términos de aumentar o disminuir el ángulo entre dos segmentos móviles, en este caso entre el antebrazo y el brazo [36].

La flexión de un miembro superior es el movimiento que disminuye el ángulo entre el antebrazo y el brazo, ya que la flexión con punto de apoyo en el codo está disminuyendo el ángulo entre los huesos cúbito y radio hacia el húmero. De forma concreta, hace que el brazo se contraiga.

La extensión de un miembro superior es el movimiento que aumenta el ángulo el antebrazo y el brazo, ya que la extensión con punto de apoyo en el codo está incrementando el ángulo entre los huesos cúbito y radio hacia el húmero, por tanto, hace que el brazo se estire. Se puede analizar la Figura 1 para comprender de una forma visual la naturaleza de este movimiento.

Figura 1. Movimiento de Flexión y Extensión visto desde un plano parasagital.



Fuente: Autores.

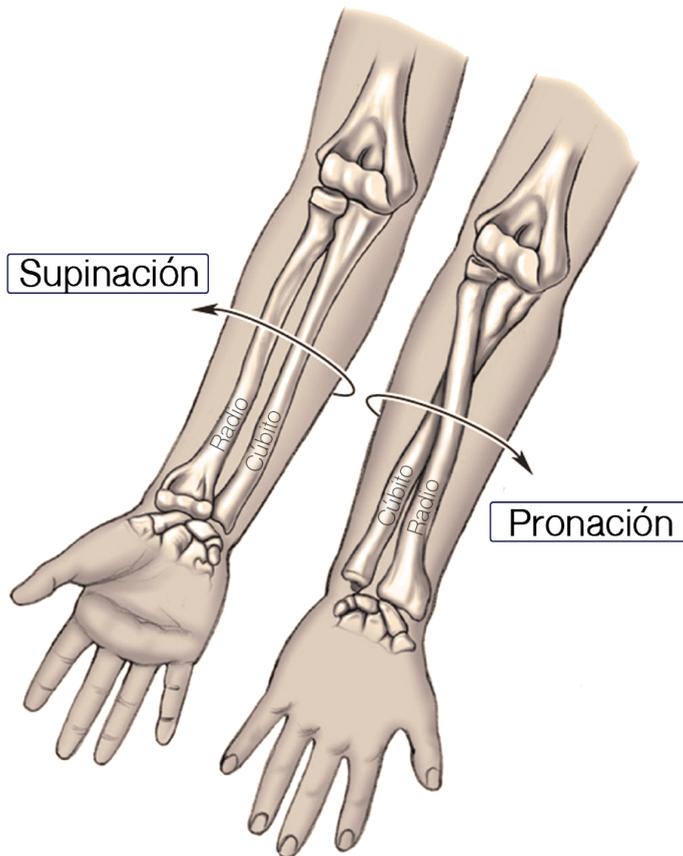
1.3.6 Movimiento de Pronación – Supinación

Este par de movimientos corresponde a una rotación del brazo longitudinalmente, teniendo como punto de apoyo el hombro. Para hacerlo un poco más claro, es el movimiento que se genera al dar vuelta a la mano dejando la palma hacia arriba o hacia abajo, manteniendo el brazo totalmente extendido justo en frente de usted, la mano apuntando hacia el frente, y la posición invariante del codo y del hombro.

El movimiento generado al pasar la mano en posición “boca arriba” a la posición en donde se oculta la palma, se llama pronación. Si el movimiento se realiza de manera contraria, es decir al pasar la mano en posición “boca abajo” a la posición en donde se muestra la palma, se llama supinación.

Estos dos movimientos se evidencian en la Figura 2.

Figura 2. Movimiento de Pronación y Supinación visto desde un plano frontal.



Fuente: *Mosby's Medical Dictionary* [38].

1.3.7 Movimiento de Abducción – Aducción

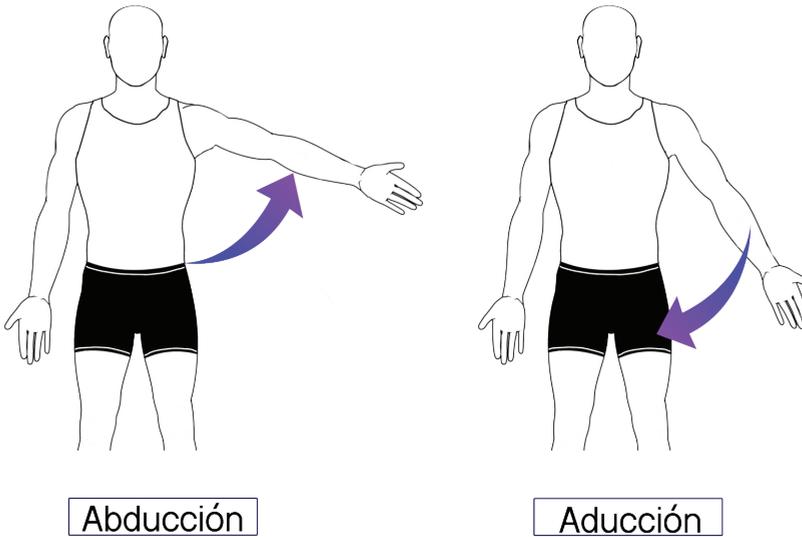
Son dos movimientos que describen el acercamiento o alejamiento de los brazos tomando como punto de referencia la línea media del cuerpo y visto desde el plano coronal.

La abducción es específicamente el movimiento que hace alejar los brazos de la línea media del cuerpo, en donde el movimiento del hombro eleva los brazos a los lados del cuerpo. La aducción por su parte es el movimiento que

hace acercar los brazos a la línea media del cuerpo, en donde el movimiento del hombro desciende los brazos ubicándolos a los lados del cuerpo.

Estos dos movimientos se evidencian en la Figura 3.

Figura 3. Movimiento de Abducción y Aducción de brazo visto desde un plano coronal.



Fuente: Autores.

1.4 Sensores.

Los sensores son aquellos elementos que permiten detectar eventos o cambios de su entorno y proveen una señal de salida o aviso correspondiente. Un transductor, por otro lado, es un sensor que cambia una señal de entrada (generalmente un evento físico) por una respuesta o señal de salida, utilizando habitualmente impulsos eléctricos [39]. Un buen sensor posee una medición precisa de la variable detectada, una baja (idealmente nula) detección de otras variables relacionadas a la de trabajo y una correcta respuesta o señal de salida que permita interpretar o dar a conocer el estado de la variable medida.

En biomecánica y captura de movimiento es habitual hallar sensores que permitan recolectar datos de forma eficiente, confiable y robusta, en donde

un gran número de aplicaciones se basan en una pluralidad de ellos que se comunican usando redes de datos. Los sensores usados dentro de estos escenarios son de diversos tipos, construcción y tecnología, enfocándose principalmente en suplir las necesidades que el diseñador tenga para realizar a cabo el procedimiento requerido.

Hoy en día con el avance de la tecnología y de técnicas en construcción de elementos electrónicos, se cuenta con una amplísima gama de sensores que cubren todas las necesidades del mundo actual, pero muchas veces por su elevado costo o baja disponibilidad no son accesibles o asequibles.

Dentro de este universo de dispositivos se encuentran tecnologías que lideran la recolección de información biomecánica y cinemática, que a gran escala se dividen en dos grupos. El primer grupo comprende todos los métodos de recolección de información por vía óptica, los cuales capturan los datos a través de imágenes y video mediante múltiples cámaras para triangular la posición de un objeto en el espacio, como es el caso del sistema *OptiTrack*TM [40].

Dentro de los métodos de recolección de información óptica hay sistemas más o menos robustos que implican una gran cantidad de técnicas para realizar el procesamiento de la señal. Una gran variedad de los sistemas ópticos actuales se apoya en un sistema de marcadores que se colocan sobre los objetos a rastrear, lo cual permite al software de procesamiento generar los datos necesarios.

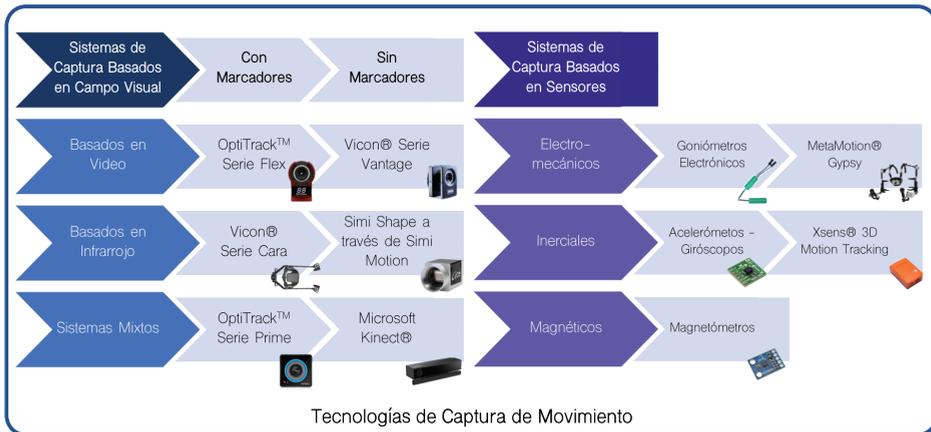
Otros sistemas usan técnicas asistidas por diversos parámetros, por ejemplo, la profundidad de campo y siluetas, usado principalmente en el sistema *Kinect* de *Microsoft* [41].

El segundo grupo de tecnologías desarrolladas para la captura de movimiento está compuesto por los sensores no ópticos, como los sensores inerciales [42], [43], los cuales pueden llegar a presentar dificultad en el tratamiento de la información debido a que los datos extraídos a partir de ellos pueden ser ambiguos y necesitan de un modelo matemático específico para ser procesados. Dentro de este grupo se encuentran los sensores magnéticos, que producen pequeñas variaciones eléctricas a los estímulos magnéticos circundantes detectados por el receptor con pequeñas bobinas.

Finalmente, se consideran los sensores de tipo electromecánico, citando como ejemplo el caso de los electrogoniómetros: un sistema de sensores y transductores

(donde en la mayoría de los desarrollos utilizan galgas extensiométricas) diseñados para estimar los ángulos de una articulación cuando se colocan en el cuerpo humano; o el sistema de captura *Gypsy* desarrollado por *Meta Motion* que usa una tecnología similar [44]. Se presenta un resumen en la Figura 4.

Figura 4. Clasificación de las tecnologías para captura de movimiento en biomecánica y otras aplicaciones.



Fuente: Autores. Las marcas mencionadas están registradas por sus casas matrices correspondientes.

Infortunadamente, los sensores de tipo óptico para captura de movimiento son considerablemente más costosos y difíciles de conseguir, como el caso de *OptiTrack™* en donde su utilización también requiere de entrenamiento especializado y una infraestructura particular para realizar las mediciones y pruebas necesarias.

Los sensores más relevantes para este caso de estudio están centrados en los no ópticos, en donde los sensores de tipo inercial y magnéticos toman un protagonismo interesante debido a su fácil disponibilidad y relativo bajo costo, de los cuales se hablará subsecuentemente.

1.4.1 Tecnología MEMS

Los sistemas Microelectromecánicos (abreviados MEMS por sus siglas en inglés, *Micro-Electro-Mechanical Systems*) es una tecnología de reciente desarrollo que puede ser definida, en su forma más generalizada, como

elementos mecánicos y electromecánicos miniaturizados y encapsulados, hechos con una técnica de micro y nano fabricación.

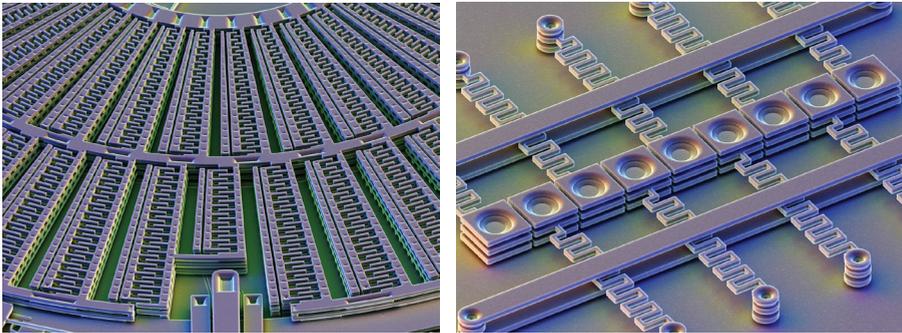
Los sistemas MEMS están hechos de componentes de tamaño muy reducido, los cuales oscilan entre 1 y 100 micrómetros de longitud, y un dispositivo basado en MEMS puede llegar a ser tan pequeño como 20 micrómetros hasta un milímetro, y usualmente contienen de una manera embebida un microprocesador y componentes variados que pueden interactuar con diferentes medios como lo son microsensores y microactuadores [45], aunque también hay diversidad de dispositivos para un amplio rango de usos, por ejemplo estructuras para modificación genética en el campo de la biología.

Internamente, los dispositivos MEMS pueden variar desde estructuras simples que pueden contener elementos móviles (rotatorios o lineales) hasta intrincados laberintos electromecánicos de elementos múltiples bajo el control de diversos elementos electrónicos también fabricados bajo esta tecnología [46].

Así como el desarrollo de otro tipo de tecnologías, los sistemas basados en MEMS presentan algunos desafíos desde el proceso de diseño hasta la construcción. Debido a que esta tecnología fabrica elementos a una escala de tamaño muy reducida, las fuerzas de superficie como la adherencia y la fricción pueden dominar sobre otras fuerzas en el sistema, lo que conduce a la falla del dispositivo [47]. El empaquetado de los componentes MEMS puede presentar un mayor grado de dificultad porque cada dispositivo se debe ensamblar de una manera que mantenga los componentes limpios y libres de contaminación, asegurando al mismo tiempo el movimiento mecánico y, en muchos casos, la interacción con el ambiente [48].

Algunos de ejemplos los elementos MEMS utilizados en la actualidad son los sensores incorporados en la estructura de un ala de avión para que se pueda detectar el flujo de aire por el cambio de la resistencia de su superficie, dispositivos de conmutación óptica que pueden cambiar las señales de luz a través de diferentes caminos a velocidades de conmutación increíblemente rápidas, o sistemas de calefacción y refrigeración producida por el sensor en sí mismo que mejoran drásticamente el ahorro de energía [49]. Se presenta un ejemplo visual de sistemas MEMS en la Figura 5, en donde la imagen a la izquierda corresponde a un nano motor de inducción y la imagen a la derecha corresponde a una nano estructura para un circuito de carga de baterías.

Figura 5. Vista de un sistema MEMS microscópicamente.



Fuente: David Scharf [50].

La tecnología MEMS no solo permite miniaturizar elementos ya creados con anterioridad, por ejemplo, micrófonos o detectores ópticos en cámaras digitales, sino que también abre la posibilidad de crear dispositivos nuevos incapaces de ser fabricados a través de otras tecnologías, como es el caso de los sensores de tipo inercial. El futuro se expande cada vez más al incluir esta tecnología a dispositivos embebidos en la cotidianidad, desde teléfonos celulares hasta cuadricópteros.

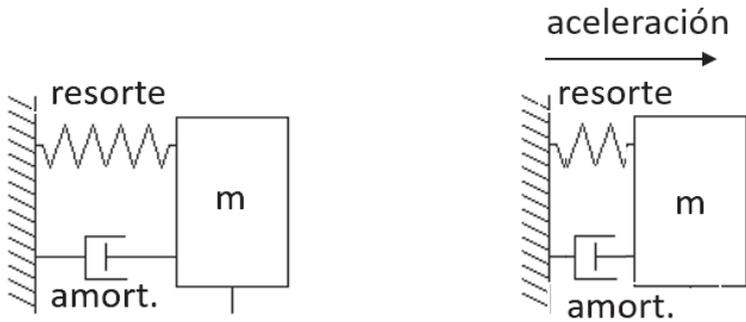
1.4.2 Acelerómetros Basados en MEMS

Un acelerómetro es un tipo de sensor dedicado a medir una aceleración lineal estática aplicada sobre el mismo. Este tipo de aceleración es el que específicamente se crea cuando hay un cambio de *momentum*, y no la tasa cambio de velocidad de un sistema que ya se encuentra en movimiento (aceleración dinámica). Un acelerómetro puede estar construido de diversas maneras, lo que da origen sensores de tipo mecánico, piezoeléctricos, de efecto Hall, electromagnéticos, ferroeléctricos, ópticos, basados en condensador o en tecnología MEMS, que finalmente combina dos o más técnicas de las anteriormente mencionadas.

Aquellos acelerómetros basados en MEMS están creados a partir de su equivalente mecánico pero reducido en escala y con la adecuación de elementos electrónicos que facilitan su lectura. Según lo expuesto por Šprdlík [1], el núcleo del sensor está formado por una masa sujeta de la plataforma del sensor a través de un resorte y un amortiguador.

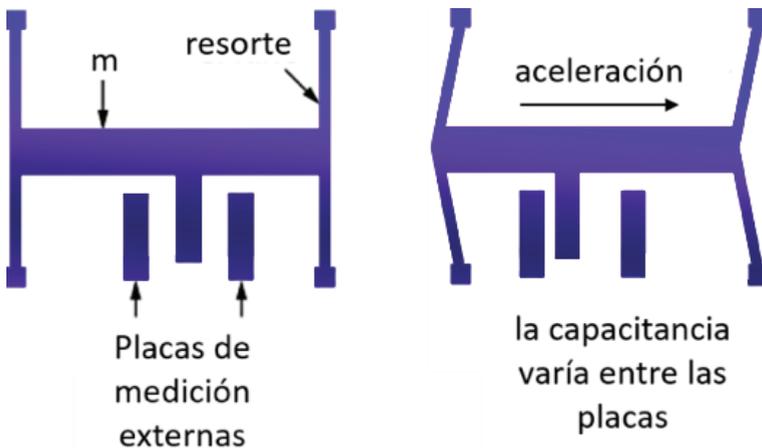
Cuando el sensor se acelera, la masa se mueve en la dirección opuesta a la del movimiento ocurrido, y este desplazamiento es proporcional a la fuerza aplicada. Este efecto se puede evidenciar en la Figura 6 y Figura 7. Generalmente en un sistema MEMS, la aceleración puede determinarse hasta en tres ejes, en los cuales se hace uso de la medición de la capacidad de desplazamiento y se transforma dicha medida en un valor de fácil lectura, como el cambio de voltaje de una salida eléctrica o de manera digital a través de un protocolo de comunicación definido.

Figura 6. Representación de un acelerómetro mecánico.



Fuente: Desconocido, editado al español.

Figura 7. Representación de un acelerómetro basado en MEMS



Fuente: Rob O'Reilly & Alex Khenkin [51]. Editado al español.

Comparando directamente el modelo de un sistema mecánico con un sistema MEMS se puede apreciar que el concepto básico de ingeniería se mantiene sin modificaciones. Se resalta que los puntos de sujeción dentro del sensor MEMS se encuentran en el propio sustrato, el cual actúa de referencia mecánica.

El desplazamiento de la masa es proporcional a la aceleración suministrada modificada por los elementos que componen el sensor, entendiendo al amortiguador simplemente como un supresor de frecuencias indeseadas (ruido) que el resorte pueda inducir en la masa una vez ejercida la aceleración. La ecuación que modela al acelerómetro de una forma general y básica se muestra en (12).

$$d_g = \frac{m}{k} = \frac{g}{\omega_0} \quad (12)$$

En donde d_g es el desplazamiento por unidades de gravedad, m es la masa del elemento, k la constante de elasticidad del resorte, ω_0 la frecuencia angular de resonancia y g la gravedad de la tierra. La aceleración registrada a través del desplazamiento es la diferencia entre la aceleración instantánea y el estado de caída libre. En el caso de una caída libre, las medidas del acelerómetro serán cero a pesar de que su velocidad aumente gradualmente. Para el caso de un sensor que está situado en la superficie de la Tierra, la única aceleración es normal respecto al plano horizontal y tiene el tamaño de la aceleración de la gravedad.

A pesar de la existencia de un supresor de ruido, el sensor experimenta situaciones variadas y no solo mecánicas que afectan la medición precisa del valor de la aceleración. El ruido es una característica propia de cada sensor ya que en él intervienen diversos factores como la disposición de los elementos, las técnicas de fabricación empleadas, los materiales usados y factores ambientales.

Los errores más frecuentemente encontrados en los acelerómetros basados en MEMS son la presencia de deriva a través del tiempo, causada en gran parte por cambios de temperatura ya que los sensores son altamente susceptibles a pequeñas variaciones; la no linealidad de la salida, la no ortogonalidad y la desalineación de los ejes del sensor con respecto a un marco de referencia, que puede ser la tierra en sí misma.

La desviación o deriva a través del tiempo es un problema que, si bien se puede minimizar con una calibración adecuada del sensor, su corrección definitiva no es factible debido a la gran cantidad de factores que pueden generarlo. El procedimiento de calibración consiste en someter al sensor a un número de orientaciones variadas con respecto a la gravedad, lo cual ayuda al mismo a precisar la dirección de la fuerza gravitacional y usarla como referencia para localizaciones posteriores.

Otro tipo de error producido en este tipo de acelerómetros es el Ruido de Johnson-Nyquist, de característica semejante a un ruido blanco y de tipo gaussiano.

Este error es generado por la agitación térmica de los portadores de carga, generalmente electrones dentro de un conductor en equilibrio, lo que sucede con independencia del voltaje aplicado [52]. Este tipo de error es generalmente ignorado en sensores de mayor tamaño ya que la cantidad de ruido creado es despreciable. También se tiene en cuenta el Movimiento Browniano, un tipo de movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido. Habitualmente este tipo de errores suelen ser corregidos por un procesamiento posterior a la señal de salida, ya que la eliminación de la fuente de ruido supone un desafío de ingeniería por fuera del alcance de la población general.

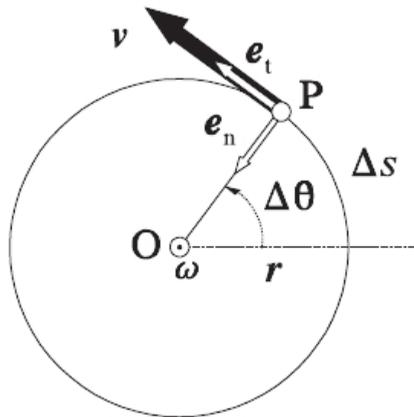
1.4.3 Giroscopios Basados en MEMS

El giroscopio original es un dispositivo netamente mecánico el cual mide la orientación en el espacio de algún elemento móvil o vehículo. Está compuesto generalmente de una rueda giratoria o disco en el que el eje de rotación es libre de moverse en cualquier orientación por sí mismo. Cuando el objeto en movimiento o vehículo gira, la orientación de este eje no se ve afectado por la inclinación o la rotación del montaje según la conservación del momento angular.

La diferencia de un giroscopio y un acelerómetro es que el primero usa la gravedad terrestre para ayudar a determinar la orientación, midiendo el cambio en ángulo desde la última posición, mientras que el acelerómetro está enfocado a medir las aceleraciones no gravitacionales que ocurren en el espacio terrestre.

La Figura 8 ayuda a la interpretación de esta idea. Este dispositivo mecánico como tal fue inventado en 1852 por Leon Foucault, montando una masa rotatoria en un soporte de Cardano para demostrar la rotación terrestre. Si se impiden ciertos movimientos del soporte del giroscopio, éste se alinea con el norte magnético pudiendo ser usado como una brújula, lo cual permitió la invención de la brújula giroscópica llamada girocompás [53].

Figura 8. Representación de la medida de un giroscopio.



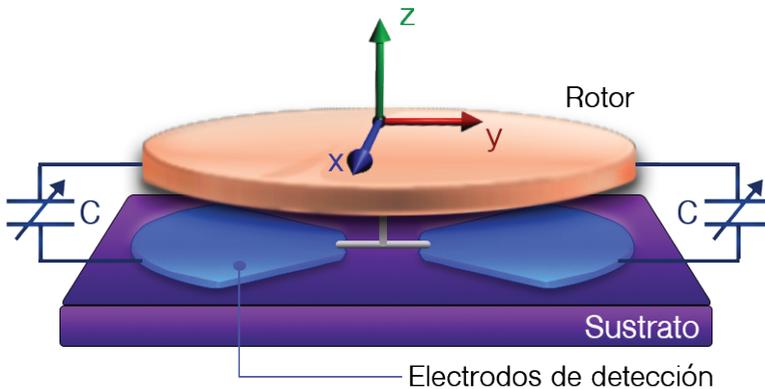
Fuente: Desconocido, bajo licencia *Creative Commons*.

El giroscopio brindará la información correspondiente a la velocidad de rotación de un elemento que sigue una trayectoria circular de referencia, con unidades en rad/s.

Las aplicaciones industriales del invento de Foucault fueron variadas, por ejemplo, como sistema de guía a los primeros torpedos, como asistente en la navegación inercial en aviones, misiles y demás elementos aeroespaciales construidos antes de la aparición del GPS. La tecnología reciente ha permitido la fabricación de diversos giroscopios no mecánicos que se basan en la funcionalidad mas no en el principio de operación original de Foucault, y miden la velocidad angular aplicada sobre ellos, como es el caso de los giroscopios de fibra óptica, el giroscopio resonador hemisférico, los giroscopios basados en estructuras vibrantes, los basados en anillos láser, los basados en MEMS, entre otros, que resuelven problemas cotidianos en aviación, suplen funciones adicionales y de entretenimiento en computadores, consolas de video portátiles, tabletas, teléfonos celulares, relojes y demás.

Específicamente hablando de los giroscopios basados en MEMS, están contruidos con base en el funcionamiento de estructuras vibrantes, cuyo principio físico subyacente es que un objeto en oscilación tiende a continuar vibrando en el mismo plano, incluso si punto de apoyo o marco de referencia gira o se mueve. El efecto Coriolis hace que el objeto ejerza una fuerza sobre su soporte, y mediante la medición de esta fuerza, la velocidad angular puede ser determinada. Las estructuras vibrantes se encapsulan junto con circuitos integrados que proporcionan salidas eléctricas (analógicas o digitales) y brindan soporte para múltiples ejes a un precio considerablemente reducido.

Figura 9. Representación de un giroscopio de estructura vibrante de tres ejes fabricado por Bosch Corporation.



Fuente: SONG, C. Commercial vision of silicon based inertial sensors [54].

Algunos otros giroscopios están basados en otras formas de estructuras vibrantes, debido a que, si el principio físico se mantiene invariante, se puede jugar con las formas y posiciones de dichas estructuras. Tal es el caso de los sensores EPSON que usan otro modelo de estructura vibrante para sus giroscopios basados en MEMS, observado en la Figura 9 [55].

Las características principales que todo giroscopio debe proveer independientemente del método usado para la detección del movimiento son el factor de integración de los dispositivos, ya que, a mayor escala de integración, más robusto el sensor podrá ser; el coeficiente de frecuencia-temperatura, el cual determina ciertas características del sistema como su precisión; la resistencia a impactos debido a las aplicaciones exigentes a las que puedan ser sometidos y finalmente la estabilidad y características de ruido.

Con respecto a la cantidad de ruido y errores que los giroscopios basados en MEMS pueden detectar o generar, son exactamente del mismo tiempo presenciado en los acelerómetros basados en MEMS. Usualmente todos los giróscopos vienen con una calibración hecha por el fabricante en términos del nivel de cero velocidad angular, pero esta corrección a la desviación puede estar sujeta a cambios dada las propiedades físicas de los elementos con los cuales los giroscopios están contruidos.

La compensación de deriva y error iterativo mediante una calibración sencilla para giroscopios de este tipo es definida por Looney [56], en donde propone usar un sistema de referencia angular confiable desde donde se pueda seleccionar un punto pivote fijo en donde el sensor es colocado, para luego ser movido a varios ángulos establecidos a ciertas velocidades angulares. El desplazamiento o deriva en las mediciones pueden ser tomadas como un factor de corrección estimado para ayudar a mejorar la señal de salida del sensor. Esta calibración difiere a la de un acelerómetro, ya que en un giroscopio los errores son más difíciles de medir debido a que se producen mediante condiciones dinámicas.

Así mismo, para la estimación de sólo las ganancias de las salidas, es posible utilizar un procedimiento que incluye rotaciones del giroscopio entre las orientaciones conocidas en vez de una precisa referencia de velocidad angular.

1.4.4 Magnetómetros Basados en MEMS

Un magnetómetro es un dispositivo que sirve para medir, tanto en fuerza como en dirección, una determinada señal magnética. Puede tener dos propósitos principales: realizar una cuantificación de la magnetización de un material magnético o ferromagnético, o para medir la fuerza y, en algunos casos, la dirección del campo magnético en un punto en el espacio.

Desde el punto de vista sensorial, los magnetómetros son simplemente detectores de campo magnético. Existen diversos tipos de magnetómetros, desde los simples dispositivos creados precariamente para la detección de campos magnéticos hasta tecnologías avanzadas de última generación. El primer magnetómetro usable fue construido en 1833 por Carl Friedrich Gauss que dieron paso a tecnologías más recientes como los sensores de efecto Hall usados hoy en día.

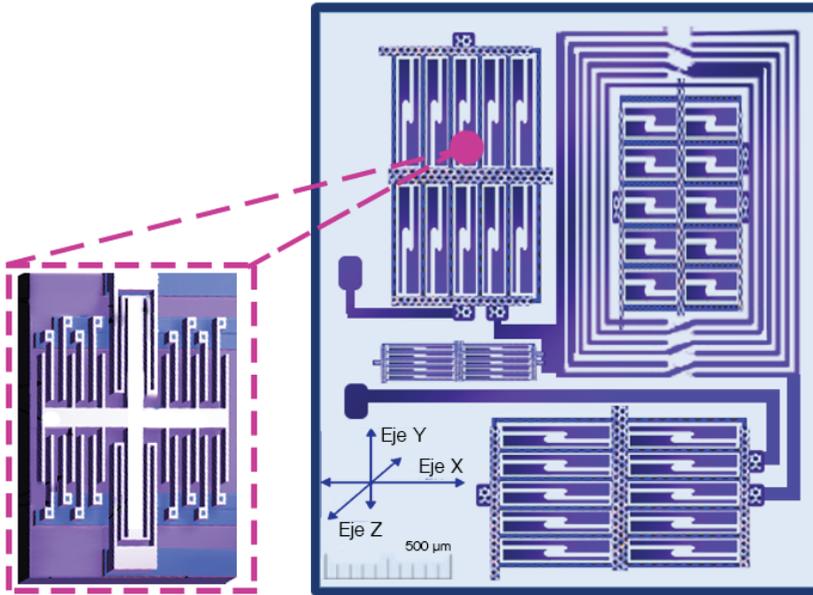
Hay dos tipos básicos de medición que un magnetómetro puede realizar. Los magnetómetros vectoriales miden los componentes del vector de un campo magnético. Los magnetómetros totales de campo (escalares) miden la magnitud del campo magnético vectorial.

Dentro de las aplicaciones más comunes de estos dispositivos se encuentran el estudio del campo magnético de la Tierra, expresando los componentes del vector de campo en términos de declinación (el ángulo entre la componente horizontal del vector de campo y el norte magnético) y la inclinación (el ángulo entre el vector de campo y la superficie horizontal) [57].

Un detector de campo magnético solo puede ser usado como una brújula si el único campo a medir es el magnético terrestre. La mayoría de aplicaciones de un magnetómetro digital moderno es propiamente como brújula digital de estado sólido.

Los magnetómetros también tienen diversas implementaciones, como por ejemplo los magnetómetros basados en Muestras Vibrantes, basados en extracción de campos pulsantes, magnetómetros de torque, magnetómetros de fuerza de Faraday, magnetómetros ópticos y basados en MEMS. En este último tipo de magnetómetros llamados habitualmente sensores de campo magnético, se hace el uso de la fuerza de Lorentz para detectar y medir el campo circundante, el cual produce un cambio en el voltaje o la frecuencia de resonancia la cual se puede medir electrónicamente, o genera un desplazamiento mecánico que se puede medir ópticamente, depende de la tecnología de fabricación usada. En la Figura 10 mostrada a continuación se evidencia la estructura utilizada para sacar provecho de la fuerza de Lorentz en un magnetómetro triaxial de construcción MEMS.

Figura 10. Magnetómetro triaxial basado en el principio de la fuerza de Lorentz construido con tecnología MEMS.



Fuente: Autores. Reconstrucción a partir de: *High-performance MEMS magnetometers* [58].

Este magnetómetro posee capacidad para detectar las variaciones de campo en sus tres ejes usando una única alimentación de corriente. Dichos magnetómetros pueden ser operados fuera de resonancia en variaciones por encima de cientos de Hz, en lugar de la operación resonante convencional. Este principio de trabajo proporciona una mayor estabilidad, menor ruido termomecánico alcanzable en grandes anchos de banda, a costa de una señal de salida inferior, según lo explica el Laboratorio de Sensores y detectores SanDLab.

El problema más grande de los magnetómetros es creado por efectos de la temperatura: cuando esta aumenta, el módulo del material de Young utilizado para fabricar la estructura móvil se disminuye en área, lo que genera un debilitamiento de la estructura móvil [59].

Mientras tanto, la expansión térmica y la conductividad térmica aumentará con la temperatura de la inducción, creando una tensión interna en la estructura móvil. Esto causa el desplazamiento de la frecuencia de resonancia ya la detección de desplazamiento de frecuencia será inválida o menos precisa.

Además, tal como sucede en los acelerómetros y giroscopios basados en MEMS, el aumento de temperatura generará mayor ruido de Johnson y creará grandes fluctuaciones de ruido mecánico. Una corrección de estos fenómenos puede ser alcanzado con un sistema óptimo de control de temperatura interno.

Algunos otros errores que pueden ser producidos en la medición tiene que ver con interferencias de otros campos magnéticos, como lo señala Šprdlík [1], produciendo trastornos cuando hay presencia de materiales magnéticos fijos que se mueven o no al mismo tiempo con el magnetómetro y por el campo magnético causado por las corrientes eléctricas fluctuantes. El primer grupo de los trastornos es causado por materiales de con propiedades ferromagnéticas (imanes permanentes) y los efectos del hierro forjado, aquellos materiales que deforman el campo magnético de la Tierra; mientras que el segundo grupo está dado por líneas de transmisión de energía, por ejemplo.

1.4.5 Unidades de Medición Inercial

Abreviadas como IMU por sus iniciales en inglés, las Unidades de Medición Inercial son dispositivos electrónicos autocontenidos, en su mayoría basados en MEMS, que reúnen dos o más sensores de tipo inercial. En las versiones más modernas, dicho conjunto de sensores se suministra con un módulo de procesamiento central o controlador digital para proveer una salida de datos centralizada.

Los sensores que generalmente se agrupan en una IMU son dos: Acelerómetro y Giroscopio. Algunas IMU se integran con un sistema de georreferenciación como GPS o GLONASS, sensores como medidores de presión barométrica, altímetro digital o magnetómetro; estos sistemas son llamados Unidades de Procesamiento de Movimiento (MPU).

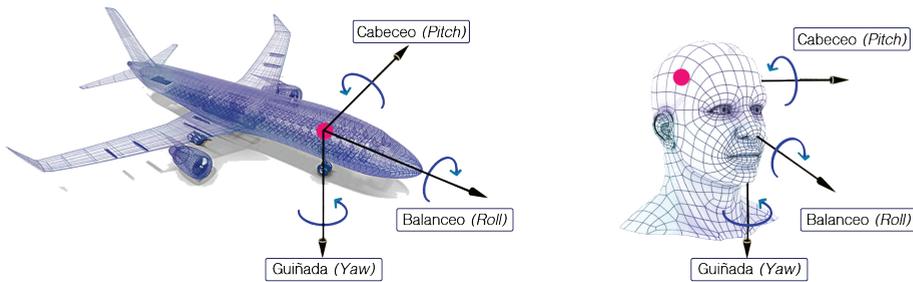
Las aplicaciones más usuales de las IMU se presentan en el control de aeronaves, incluidos los vehículos aéreos no tripulados, helicópteros a pequeña escala, cuadricópteros; en uso militar como misiles guiados o navegación marítima; en la industria de la electrónica de consumo como apoyo de estabilización en cámaras digitales profesionales o vehículos de transporte personal auto balanceados y en la industria aeroespacial, incluyendo los satélites y sondas enviadas al espacio.

Al tener contenida una matriz sensorial de tipo inercial, las IMU son dedicadas a menudo para la medición lineal y angular de movimiento, el análisis de la fuerza específica de un objeto. Una IMU funciona mediante la detección de la tasa de aceleración actual usando los acelerómetros, detecta cambios en los atributos de rotación usando los giroscopios.

1.4.6 Unidad de Procesamiento de Movimiento

La fusión de datos de estas medidas reportadas por un MPU resulta en una información tridimensional acerca del movimiento, que puede ser visto desde el punto de vista de la navegación como los movimientos de cabeceo, balanceo y guiñada. Estos tres movimientos se pueden evidenciar directamente al analizar una aeronave, o la cabeza, mostrados en la Figura 11.

Figura 11. Ejes principales de movimiento.

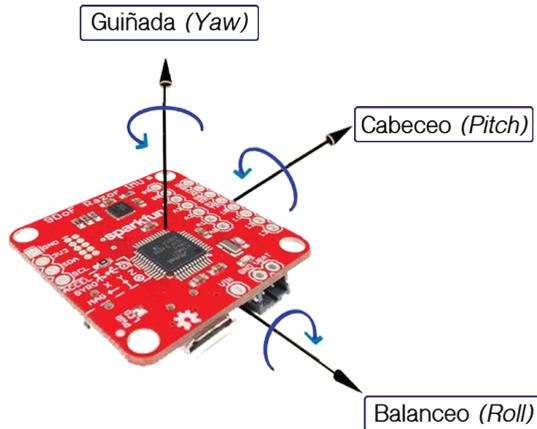


Fuente: Autores.

El movimiento de una aeronave posee tres ejes simétricos que describen el comportamiento en tres dimensiones. El eje del movimiento de cabeceo es paralelo a las alas de un avión y corresponde al cambio de “punta y cola”.

El eje del movimiento de balanceo es perpendicular a las alas de un avión y corresponde al cambio de “inclinación hacia la derecha o izquierda”. Por último, el eje del movimiento de guiñada es normal a las alas de un avión y corresponde al cambio de “rotación sobre su propio eje”. En el caso de la cabeza, el movimiento de cabeceo equivale a mover la cabeza mediante flexión y extensión, el movimiento de balanceo equivale a mover lateral la cabeza, y el movimiento de guiñada corresponde a la rotación de la cabeza mediante el cuello. Estos mismos movimientos son detectados por las MPU, mostrada en la Figura 12.

Figura 12. Ejes principales de una aeronave detectados por una MPU.



Fuente: Autores. Imagen principal: Sparkfun.

Usualmente, un procesador embebido en la MPU realiza cálculos variados para determinar las componentes propias de cada sensor y extrae de ellas información relevante acerca de la posición, y por esta razón una MPU es un tipo de SoC. El número de sensores presentes en la MPU y el número de ejes que cada uno de ellos determina el número de grados de libertad que el dispositivo es capaz de detectar.

Un grado de libertad, expresado como *Degree of Freedom* (DOF), se refiere al movimiento de un cuerpo rígido dentro del espacio.

Podría ser explicado como las diferentes maneras básicas en las que un objeto puede moverse. Sólo hay 6 DOF en total, los cuales se pueden dividir en traslaciones (adelante/atrás, arriba/abajo, derecha/izquierda) y rotaciones (Cabeceo, Balanceo y Guiñada) [60].

Muchas veces es habitual encontrar MPU que se publicitan como 9 o 10 DOF, cuando en realidad solo existen 6 DOF. Esta confusión de parámetros se puede deber a que algunos fabricantes de IMU y MPU publicitan los grados de libertad basado en la definición estadística y no mecánica, en donde un grado de libertad puede definirse como el número mínimo de coordenadas independientes que pueden especificar la posición del sistema completo. Si se toman los componentes axiales de cada sensor, es decir, la magnitud en los tres ejes de un acelerómetro, la magnitud en los tres ejes de un giróscopo y la

magnitud en los tres ejes del magnetómetro, en total se efectúa el monitoreo de 9 ejes, pero esta noción no corresponde con la definición mecánica de DOF porque los tres sensores miden los mismos seis tipos de movimiento.

A pesar de la confusión que puede dar a lugar el empleo de un mismo concepto con diferente significado, una MPU de 9 DOF si puede ser potencialmente mejor que una de 6 DOF, ya que, al incorporar tres señales axiales adicionales, se puede utilizar la fusión de sensores con el fin de mejorar la calidad de la salida final, pero sin ser capaz de detectar aún los movimientos de traslación. Cuando se habla de una IMU de 10 DOF, hace referencia a la integración de un receptor GPS capaz de detectar las traslaciones, lo que sería en realidad la detección completa de los 6 totales DOF mecánicos existentes.

- **MPU-9150 de Invensense**

Este dispositivo Invensense referencia MPU-9150™ basada en MEMS, es la unidad usada para el desarrollo de la presente investigación. De acuerdo con Invensense [61], este MPU es el primer dispositivo del mundo fabricado con tecnología SiP con 9 DOF y tecnología *MotionTracking* (especializada en captura de movimiento) diseñada para un bajo consumo de energía, de relativo bajo costo, y características de alto rendimiento. Dentro de sus tipologías principales se encuentran la combinación de un giroscopio de 3 ejes, acelerómetro de 3 ejes y brújula digital (magnetómetro) de 3 ejes en un mismo chip encapsulado, junto con un DMP capaz de procesar algoritmos complejos de fusión de datos abordo. Las características de esta MPU a nivel técnico se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Características principales de la MPU Invensense MPU-9150.

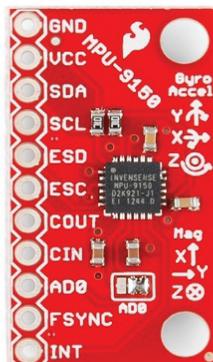
Escala completa del Giroscopio [°/s]	Tasa de Ruido del Giroscopio [%]	Escala completa del Acelerómetro [g]	Escala completa del Magnetómetro [μ T]	Salida Digital	Voltaje lógico de Operación [v]	Voltaje Nominal de Operación [v]	Dimensiones [mm]
±250 ±500 ±1000 ±2000	0,005	±2 ±4 ±8 ±16	±1200	I ² C	1,8±5%	2,4 ~ 3,46 ±5%	4x4x1

Continuación Tabla 1.

Corriente de operación a máximo proceso [mA]	Modo de bajo consumo en Acelerómetro [μ A]@[Hz]	Velocidad de Interfaz I ² C [kHz]	Máxima tolerancia a choque [g]	Direcciones I ² C	ADC	Buffer FIFO	Temperatura de Operación [°C]
4,25	10@1 20@5 70@20 140@40	400	10000	0x68 0x69	3@16bit	1024 bytes	-40 ~ +85

Fuente: Hoja de especificaciones MPU-9150. Disponible en [61].

Figura 13. Tarjeta de desarrollo para MPU-9150.



Fuente: Sparkfun. Imagen propiedad de Sparkfun.

Sparkfun implementa la MPU-9150 en una tarjeta de prototipo que permite una fácil operación del dispositivo. Esta tarjeta, apreciada en la Figura 13, hace que sea sencilla la conexión con pines de separación estándar, resistencias *pull-up* para el bus de datos I²C y un selector de dirección de datos para la comunicación digital.

Dentro de las características más relevantes del DMP incluido dentro de esta MPU se encuentra la opción de deshabilitación selectiva de sensores, autoprueba del dispositivo, parámetros configurables diversos como la velocidad de actualización de los componentes del sistema (desde 1 hasta 8000 Hz), Filtro Pasa Bajos (5 hasta 260 Hz), velocidad de procesamiento de 1 MHz, soporte para interrupciones internas, externas y capacidad de

transformación matricial de componentes, contribuyendo de esta manera a una fácil lectura de datos sin importar la forma en cómo el sensor ha sido instalado en la aplicación final.

Se sugiere la lectura adicional de la hoja de especificaciones completa y mapa de registros para la MPU-9150 provista por Invensense en su portal web [61].

1.5 Complejidad Computacional.

En una descripción general, la complejidad computacional se define en teoría de sistemas como una caracterización matemática de la dificultad de un problema matemático que describe los recursos requeridos por una máquina informática para resolver el problema [62]. Un problema computacional se entiende como una tarea que puede ser resuelta por un sistema electrónico, microcomputarizado, o también por medio de una aplicación ordenada de pasos matemáticos, tales como un algoritmo [63].

La complejidad que tiene implícito un problema computacional es muchas veces dependiente del sistema de resolución que se proponga. Por ejemplo, no se obtiene el mismo resultado si se resuelve un problema de cálculo integral en un computador de uso personal que usando una calculadora científica: ambos sistemas acertarán en su respuesta, pero dependiendo de la técnica de solución, puede que requiera más tiempo en un sistema que en otro. Un problema de cualquier tipo es considerado inherentemente difícil si su solución requiere recursos significativos en el sistema de solución, cualquiera que sea el algoritmo o pasos utilizados para resolverlo.

La formalización de la complejidad computacional viene dada por los modelos matemáticos que analizan los algoritmos de diversas maneras para poder cuantificar qué tan difícil o simple es realmente un problema, dentro de los cuales, en la informática moderna, se puede abordar desde indicadores como el tiempo de procesamiento versus la velocidad del procesamiento, el almacenamiento necesario para realizar el algoritmo, la cantidad de comunicación empleada, el número de compuertas en un circuito integrado, entre otros, que definen qué es posible realizar en un sistema y qué no.

Desde el punto de vista algorítmico implementado en un sistema computarizado moderno, un análisis de complejidad computacional puede realizarse

de muchas maneras, ya que “no hay una forma mágica para analizar la eficiencia de los algoritmos” [63]. Generalmente, se promedia un valor de peso asignado a cada función, iteración, estructuras de control y ecuaciones de recurrencia.

Un valor frecuente en la complejidad computacional está dado por “la gran O”, el cual se utiliza para clasificar los algoritmos con base en su respuesta a los cambios en el tamaño de entrada, por ejemplo, así como el tiempo de procesamiento de un algoritmo cambia a medida que el tamaño del problema se vuelve extremadamente grande [64].

Para el posterior análisis de la complejidad computacional de los algoritmos de filtro de Kalman presentados en este libro, se tendrán en cuenta algunos parámetros indicadores del mismo, de modo que sea un buen estimativo al costo que representa procesar dichos algoritmos en el sistema de captura (*).

1.5.1 Valor de Complejidad Máxima (VDCM)

El valor de complejidad se halla según lo propuesto y definido por McConnell [65]. Este valor mide el número de rutas de ejecución a través de una función o método. Cada función o método tiene una complejidad de uno, e incrementa en uno para cada rama de la declaración como son las instrucciones *if*, *else*, *for*, *foreach*, o *while*. La medida de las sentencias condicionales especiales *if* (*myBoolean*, *ValueIfTrue*, *ValueIfFalse*) agregan un punto al total complejidad. Se añade también un punto de complejidad por cada anidado existente en las operaciones condicionales, como por ejemplo '&&' y '||' e instrucciones lógicas similares.

Las sentencias de tipo *switch* añaden un punto de complejidad para cada salida de un *case*, inclusive teniendo en cuenta los modificadores del flujo del programa, como en el caso de *break*, *Goto*, *return*, *throw*, *continue* o alguna declaración similar, y se añade un cargo para un caso por defecto, incluso si uno no está presente.

1.5.2 Valor de Complejidad (VDC)

Es una medida de la complejidad computacional global calculada para cada método y para cada función. Se establece como una media aritmética simple

(*) Con base en la estructura de análisis existente en SourceMonitor [103].

de los valores de complejidad proporcionados para cada función del código. El valor de Complejidad se establece por medio de la complejidad espacial del código a analizar, y se enfoca en el uso de memoria RAM y ROM del dispositivo embebido consumida por la implementación algorítmica.

Dentro del valor de Complejidad Computacional también se tienen en cuenta: la cantidad de memoria requerida por el código del algoritmo, la cantidad de memoria requerida para almacenar los datos de entrada, la cantidad de memoria requerida para los datos de salida y la cantidad de memoria requerida en cuanto a espacio de trabajo del algoritmo para realizar los cálculos y asignaciones [66].

1.5.3 Número de Declaraciones (NDD)

Una declaración es cualquier instrucción o pseudoinstrucción presente en el procesador. Algunas ramas, como *if*, *for*, *while* y *goto* también se cuentan como declaraciones. Las directivas del preprocesador *#include*, *#define* y *#undef* siempre cuentan como declaraciones. Todas las demás directivas de preprocesador son ignoradas. Se cuentan todos los estados entre cada *#else* o *#elif* y *#endif*

1.5.4 Porcentaje de declaraciones por rama (PDR)

Las sentencias que causan una interrupción en la ejecución secuencial de los estados se cuentan por separado. Estos son los siguientes: *if*, *else*, *for*, *while*, *break*, *continue*, *goto*, *switch*, *case*, *default*, y *return*. Hay que tener en cuenta que no se enumeran porque siempre se repetirán durante un determinado tiempo que si se contabiliza.

1.5.5 Número de Clases (NDC)

Las clases presentes en el código son numeradas sobre la base de las definiciones que posean. En general, las clases se definen en los archivos de cabecera mientras que los métodos normalmente se implementan en archivos separados. Se recuerda al lector que, en la programación orientada a objetos, una clase es una plantilla de código de programa extensible para crear objetos que proporciona valores iniciales para los estados definidos y define las implementaciones de su comportamiento [67], [68].

1.5.6 Métodos por Clase (MPC) y promedio de todos los Métodos por Clase (MPCP)

Es un promedio general de todos los métodos existentes en cada una de las clases, estructuras e implementaciones de métodos de plantilla en un archivo o punto de control, calculado como el número total de métodos, dividido por el número total de clases.

1.5.7 Número de Saltos/Llamados (NDC)

El número total de llamadas a otros métodos o funciones que se encuentran en el interior de todos los métodos o funciones en un algoritmo. Se recuerda al lector que un salto hace referencia a una instrucción en un programa informático que causa que otras o determinadas instrucciones puedan ser ejecutadas en una secuencia diferente, y por lo tanto desvíe el comportamiento predeterminado de ejecutar instrucciones en orden [69].

1.5.8 Profundidad máxima por bloque (PMB) y profundidad promedio por bloque (PPB)

Es el nivel de intrincamiento que posee una anidación de funciones, lo cual resulta en una profundidad máxima y promedio dentro de un bloque. Al comienzo de cada archivo de nivel de bloque es cero. La escala de profundidad puede llegar hasta valores superiores a 9 en donde la profundidad máxima real tiene un tope de 32.

1.5.9 Otros parámetros relevantes

Algunos otros datos que pueden ayudar a la estimación de la complejidad computacional son el número de líneas de código (LDC), número de líneas de comentarios, porcentaje de comentarios (LCP) y el número de funciones de cada clase (NDF). Estos parámetros, aunque menos importantes, hacen parte del análisis de complejidad computacional incluido dentro de esta investigación.

CAPÍTULO 2

2. Descripción Analítica y Aplicada del Filtro de Kalman

El filtro de Kalman, también llamado Estimador Cuadrático Lineal (*Linear Quadratic Estimator*, LQE), es un algoritmo desarrollado por Rudolf Emil Kálmán, del cual deriva su nombre, en donde su funcionamiento es de un estimador óptimo recursivo que provee una solución a tareas frecuentes [70] en rastreo [71], seguimiento [72] y predicción [73] de datos que involucre una o más fuentes de ruido, inexactitudes o inconsistencias [74].

Se basa en la observación del comportamiento de los datos a través del tiempo y mediante análisis estadístico realiza correcciones *a priori* y *a posteriori* de los mismos, produciendo valores estimados que tienden a ser más precisos que aquellos obtenidos puramente de las mediciones realizadas en un instante definido de tiempo.

Entiéndase estimador óptimo en el sentido de que, si todo el ruido que afecta a los datos es de tipo Gaussiano, el filtro de Kalman minimiza el error cuadrático medio de los parámetros estimados [75].

Desde su desarrollo en el inicio de la década de los sesenta, el filtro de Kalman ha sentado la base de muchos adelantos tecnológicos que hubiesen sido imposibles sin su aplicación, como la mejora en la industria aeroespacial, en especial a las misiones Apolo de la NASA donde el filtro cobró gran renombre al llevar a Neil Armstrong a la luna [76], aplicaciones diversas pasando desde la electrónica de consumo en cada dispositivo GPS integrado en los teléfonos celulares hasta el control de trayectoria de la mayoría de satélites que orbitan la tierra.

Desde un punto de vista teórico-matemático, el filtro de Kalman “es un algoritmo que permite la inferencia exacta en un sistema dinámico lineal, el cual es un modelo Bayesiano similar a un modelo de Markov oculto, pero

donde el espacio de estados de las variables latentes es continuo y donde todas las variables latentes y observadas tienen una distribución gaussiana, a menudo una distribución gaussiana multivariada” [76].

Las ecuaciones básicas de los filtros de Kalman se presentan en este capítulo. En un principio se describe la estructura de un filtro clásico de Kalman, que se basa en la descripción del espacio de estados de un sistema real que incluye la medición y el ruido del sistema. Posteriormente, las ecuaciones básicas se dividen en predicción y actualización. Finalmente, se presenta dos cálculos alternativos para implementar variantes del filtro de Kalman: Extendido y *Unscented*.

2.1 Modelo del Filtro de Kalman

De una forma general y sin recurrir aún a la matemática asociada al proceso, el filtro de Kalman se ejecuta en dos pasos bien definidos: la etapa de predicción y la etapa de actualización. En la etapa de predicción y tal como su nombre lo sugiere, el filtro de Kalman genera un valor estimado futuro a partir del estado actual de las mediciones que se realicen (*a priori*), incluyendo el ruido y la incertidumbre que ellas puedan tener.

Dicho estado futuro es actualizado en la segunda etapa por medio de la información real (no predicha) del tiempo siguiente (*a posteriori*), produciendo una salida final que corresponde a una “mezcla” o fusión entre el valor predicho y el valor que fue realmente obtenido para ese instante de tiempo.

La proporción de la fusión de información entre las dos etapas está dada por un valor constante llamado Ganancia de Kalman. El filtro repite éstas dos etapas a lo largo del tiempo, una tras otra, haciendo uso de la característica de recursividad, lo cual permite evaluar una entrada en tiempo real en muestras realizadas bajo un intervalo de tiempo indefinido.

El filtro de Kalman se describe por medio de la ecuación (13).

$$\hat{x}_k = K_k \cdot z_k + (1 - K_k) \cdot \hat{x}_{k-1} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta la descripción realizada, la estimación del filtro \hat{x}_k depende

de la ganancia del filtro de Kalman K_k , de la observación (o actualización) del sistema en el tiempo actual z_k más un proporcional de corrección fuertemente influenciado por el estado estimado del filtro de Kalman en el instante de tiempo anterior \hat{x}_{k-1} . Se hace énfasis en que el subíndice k es la designación de los valores de tiempo discreto, por lo que k corresponde al intervalo de muestreo actual mientras que $k - 1$ al tiempo inmediatamente anterior a éste.

El propósito final del filtro es hallar la estimación \hat{x}_k de la señal x , y realizarlo para cada instante de tiempo k .

El único componente no conocido de la ecuación del filtro es la Ganancia de Kalman, el cual corresponde al factor de realimentación del error y su valor debe ser actualizado para cada iteración. Este parámetro es calculado automáticamente por el filtro de Kalman mientras las varianzas de los ruidos que afectan la señal estimada sean conocidas. Su cálculo se explicará posteriormente en el desarrollo de este trabajo.

Dado que el filtro de Kalman obtiene la respuesta de estimación a partir del comportamiento dinámico del sistema y de su observación a través del tiempo, es de fundamental importancia modelar el sistema sobre el cual se aplicará el proceso y además parametrizar los factores que puedan alterar ese modelo y su observación, lo que se conoce como ruido.

A grandes rasgos y siguiendo la estructura del cálculo planteada por Esme [77], el sistema dinámico está modelado por las leyes que rigen el comportamiento del mismo, en su mayoría de veces leyes físicas, las entradas de control conocidas y finalmente las medidas múltiples provenientes de sensores, por ejemplo, para formar un estimado de las cantidades variables del sistema (su estado).

Así pues, el modelo general del filtro de Kalman se puede comenzar a dividir del siguiente modo:

Modelo del sistema



$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (14)$$

$$z_k = Hx_k + v_k \quad (15)$$

Se puede entender que para cada valor de la señal x_k debe ser evaluada la ecuación estocástica (14), que recibe el nombre de ecuación de estado, cuyos componentes son:

- El vector de estado x_k que contiene los términos de interés del sistema, es decir, la señal de entrada a ser procesada.
- El vector u_k que contiene todas las entradas de control del sistema.
- El vector w_k que contiene el ruido del proceso para cada parámetro del vector de estado. El ruido del proceso puede ser extraído a partir de una distribución normal multivariante con media igual a cero y covarianza dada por la matriz de covarianza Q_k .
- La matriz de transición que aplica el efecto de cada parámetro de estado del sistema en el momento $k - 1$ sobre el estado del sistema en el tiempo k .
- La matriz de control de entrada B que aplica el efecto de cada parámetro de control de entrada en el vector u_k .

Además de la ecuación de estado, también se emplea el modelo matemático del sistema por medio de la observación y se expone en su equivalente ecuación de observación, también llamada ecuación de medida (15), de carácter estocástico, que posee los siguientes componentes.

- El vector de medida Z_k que contiene los términos de interés del sistema, desde el punto de vista de la observación.
- La matriz de transformación H que mapea los parámetros del vector de estado dentro del dominio de medición.
- El vector que contiene el ruido de medida para cada parámetro del vector de medida. Este ruido se comporta de manera similar al ruido presente en la ecuación de estado, en donde se asume que puede ser extraído a partir de una distribución normal multivariante con media igual a cero y covarianza dada por la matriz de covarianza R_k .

Dado que el objetivo del filtro de Kalman es obtener los estados de x_k a partir de las observaciones Z_k , se puede reescribir la ecuación (15) del siguiente modo:

$$Hx_k = z_k - v_k \quad (16)$$

Lo cual es completamente válido dado que el valor estimado de estado sin su ruido de proceso (entendido como la transformación realizada por H) es igual al valor observado con la debida sustracción el ruido que pueda tener implícito dicha observación.

Cabe resaltar que la ecuación de estado (14) es la responsable de la etapa de predicción, mientras que la ecuación de medida (15) es la responsable de la etapa de corrección.

El problema subsecuente de la implementación de un filtro de Kalman es el desconocimiento del ruido v_k presente en cada etapa corrección del sistema, y como es un ruido, por definición es impredecible [78].

El filtro puede estimar el estado tomando en cuenta la observación y el estado anterior, como se había analizado al principio, el cual puede ser expresado por medio de la siguiente ecuación:

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - a\hat{x}_{k-1}) \quad (17)$$

La ecuación (17) es en efecto la misma ecuación (13) pero organizada de una mejor forma para conveniencia del lector y siguiendo con la línea de explicación con la que se viene trabajando. Ahora, atendiendo a la organización propuesta por Levys [78] se analizará la importancia del valor de fusión de la Ganancia de Kalman.

Suponiendo que $K_k = 0$, se obtiene la siguiente ecuación de estado:

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} \quad (18)$$

Lo cual significa que la estimación actual realizada por el filtro está regida únicamente por la predicción en el instante de tiempo inmediatamente anterior y no tiene en cuenta la etapa de corrección en ninguna medida. Caso contrario si la ganancia del filtro es $K_k = 1$, en donde la estimación actual realizada por el filtro está regida únicamente por la etapa de corrección, es decir, por el valor medido en el proceso, tal como se muestra en la ecuación (19).

$$\hat{x}_k = a\hat{x}_{k-1} + z_k - a\hat{x}_{k-1} = z_k \quad (19)$$

La importancia de la correcta elección de la ganancia se evidencia ya que la respuesta del filtro depende directamente de su valor para realizar la estimación adecuadamente. El cálculo de la ganancia es realizado por el mismo filtro conforme a los parámetros estadísticos que sean ingresados, es decir, indirectamente desde el ruido.

Si se observa de nuevo la ecuación (15), el ruido asociado a la medición es desconocido, pero puede ser estimado, por ejemplo, de la hoja de especificaciones del sensor que se esté empleando.

Generalmente el valor de exactitud del sensor dará la idea de qué tan ruidosa o estable puede ser la salida del mismo. Se llamará a dicho valor el cual no es dependiente del tiempo, es más bien una propiedad del sensor.

Se puede calcular la ganancia en términos de r :

$$K_k = \frac{p_k \cdot h}{(h \cdot p_k \cdot h + r)} \quad (20)$$

En donde p_k es la predicción del error que se puede calcular recursivamente dada la función (21):

$$p_k = (1 - K_k \cdot h) \cdot p_k \quad (21)$$

Lo que esto significa es que la ganancia de Kalman se calcula en tiempo real haciendo uso de un estimador para determinar la cantidad de error actual en la medida. Suponiendo que el error es cero, la ganancia se torna nula también debido a que si la salida es totalmente acertada (el valor estimado no tiene error), no hay necesidad de hacer la etapa de corrección, tal como se ve en la ecuación (18).

Si por el contrario el error es demasiado alto (cercano a la unidad), es como si se tiene en cuenta únicamente el valor de lectura realizada sin una estimación previa, el caso visto en la ecuación (19), y un estado predicho por el filtro de Kalman en esta situación no es un valor confiable. Hay que tener en cuenta la idea en que Levys y Esme acotan con gran razón: la presencia de ruido

excesivo anula todo esfuerzo en corregir las malas predicciones creadas por el filtro de Kalman (*).

Si se reúnen todas las ecuaciones y se agrupan según su etapa de operación, se obtiene:

Etapa de predicción



$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k + w_k \quad (14)$$

$$p_k = ap_{k-1}a \quad (22)$$

Etapa de corrección



$$K_k = \frac{p_k \cdot h}{(h \cdot p_k \cdot h + r)} \quad (20)$$

$$p_k = (1 - K_k \cdot h) \cdot p_k \quad (21)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k(z_k - h \cdot \hat{x}_k) \quad (23)$$

Ahora, para que el modelo más completo y general sea representado por matrices, es necesario usar el álgebra lineal para resolver el problema. Se enfatiza en el hecho de que el producto matricial no cumple con la propiedad de conmutatividad: $A \times B$ matricialmente hablando no es necesariamente lo mismo que $B \times A$.

Debido a la carencia de conmutatividad en el producto matricial, se realiza la operación de transposición. Así mismo, se aprovecha el hecho de que una matriz multiplicada por su misma inversa da como resultado una matriz identidad.

(*) Idea extraída de Levys [78]: "Noise overcomes our ability to correct bad predictions". y de Esme [77]: "The only thing to keep in mind is: «The better you estimate the noise parameters, the better estimates you get.»"

Las ecuaciones entonces quedan expresadas del siguiente modo:

Etapa de predicción



$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k \quad (24)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (25)$$

Etapa de corrección



$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (26)$$

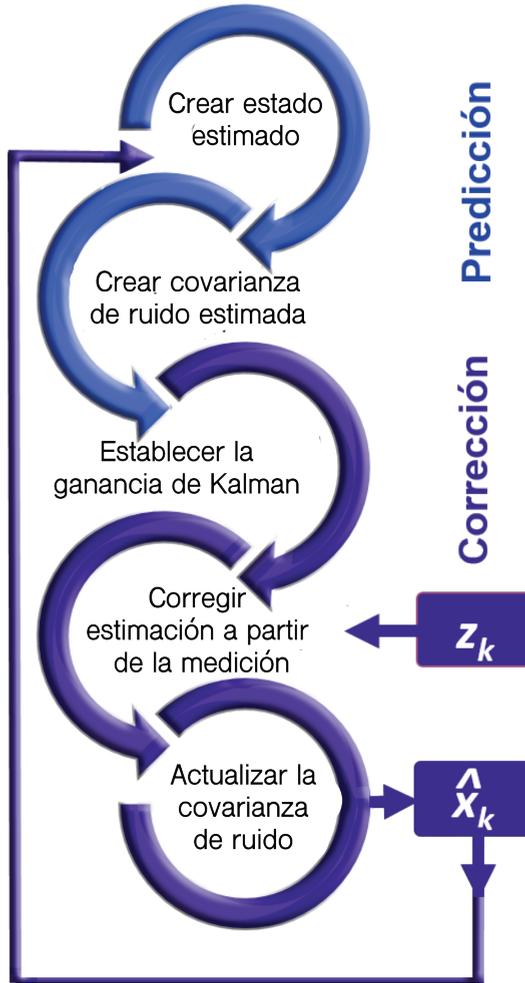
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (27)$$

$$P_k = (1 - K_k H)P_k^- \quad (28)$$

Como enfatiza Esme [77], lo más difícil de efectuar una implementación del filtro de Kalman es encontrar las matrices de covarianza de ruido, tanto para el proceso (definida por la matriz Q) como para la medición (definida por la matriz R). Hallar R es un poco más simple dado que las características propias del sensor pueden proveer información relevante acerca del ruido que pueda generar sus observaciones, pero el ruido del proceso no es fácilmente modelable.

Por último, solo basta hacer la iteración del filtro a través del tiempo para obtener los resultados deseados. Todo el proceso de ejecución del filtro de Kalman se resume en la Figura 14.

Figura 14. Etapas de ejecución del filtro de Kalman.



La salida para k se realimenta como entrada para $k+1$

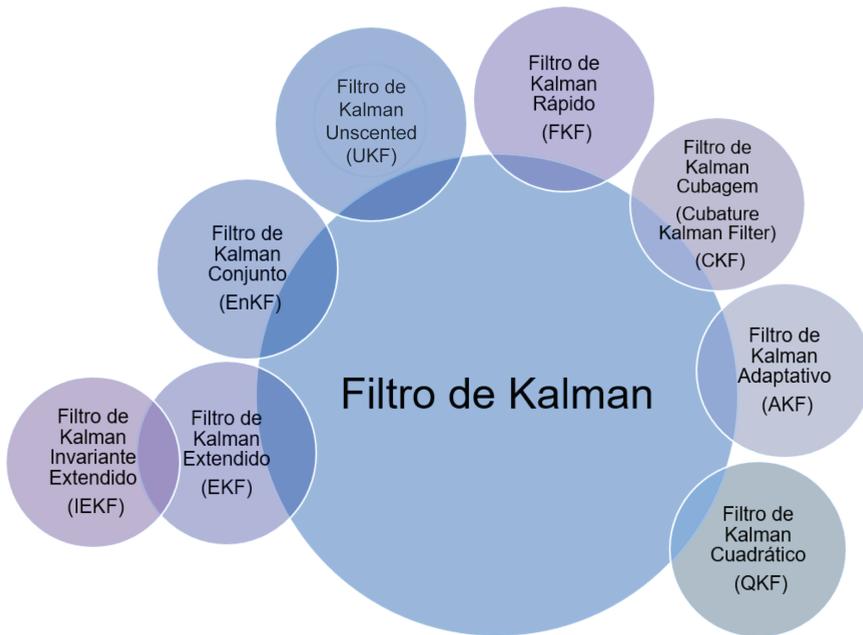
Fuente: Autores. Abstracción realizada a partir de Esme [77] y Aimonen.

2.2 Variantes del filtro de Kalman

El filtro de Kalman es conocido por su implementación sobre sistemas lineales ya que originalmente da solución a problemas de filtrado de este tipo, pero cuando se enfrenta a la estimación de un sistema no lineal, el filtro de Kalman debe adaptarse a las nuevas condiciones de proceso.

Dentro de los Filtros de Kalman existen variantes del algoritmo que permite su mejora dependiendo del tipo de problema de estimación al que se enfrenta, obteniéndose por ejemplo la extensión y aplicación a sistemas no lineales o llegando a establecer un filtrado óptimo en aplicaciones donde el ruido no se puede describir por medio de una distribución gaussiana pura. Cabe resaltar que el filtro de Kalman continúa inalterado desde su esencia, pero se realizan diferentes versiones o adaptaciones que pueden solucionar problemas más ajustados a la vida real.

Figura 15. Variantes del filtro de Kalman.



Fuente: Autores.

Existe gran variedad de filtros de Kalman (KF) para diversos propósitos, algunos de ellos incluidos en la Figura 15. Se destaca el filtro de Kalman Extendido por ser la versión no lineal más directa del filtro de Kalman, y el filtro de Kalman *Unscented*, otro estimador no lineal basado en la transformada *Unscented*, del cual deriva su nombre.

Existen además filtros útiles en aplicaciones basadas en frecuencia, como lo es el filtro de Kalman Rápido, basado en el método de bloqueo de Helmert-Wolf que permite un procesamiento rápido y adecuado de imágenes satelitales

[79]; el filtro de Kalman Cuadrático que permite una formulación rápida de resultados suavizados [80]; y filtros de Kalman que se ocupan de resolver problemas presentados con las versiones generales no lineales de optimización, como lo es el caso del filtro de Kalman Conjunto, el cual es “adecuado para problemas con un gran número de variables, tales como discretizaciones de ecuaciones diferenciales parciales en modelos geofísicos” [81], el filtro de Kalman Cubagem “que hace posible calcular numéricamente las integrales momento multivariados encontradas en el filtro Bayesiano no lineal” [82] o el Filtro Complejo Ampliamente Lineal de Kalman que aprovecha la covarianza Hermitiana y Complementaria de los vectores de ruido para mejorar el rendimiento del filtro [83].

2.3 Filtro de Kalman Extendido

El filtro de Kalman Extendido (EKF) es la implementación del filtro de Kalman para sistemas no lineales, en donde sus características son invariantes al filtro de Kalman, por ejemplo, en donde se asume que el ruido de proceso y de medición es de tipo gaussiano. La adecuación del filtro de Kalman para la estimación en sistemas no lineales estuvo a cargo en su mayoría por el Centro de Investigación Ames de la NASA, cuyo interés en el filtro de Kalman permitió la revolución de la era espacial [84], [85].

El filtro de Kalman Extendido adapta técnicas de cálculo multivariado, en especial las expansiones de las series de Taylor y métodos puramente matemáticos para linealizar el modelo y aplicar un filtro de Kalman estándar [86].

Desde un punto de vista matemático, la formulación del filtro de Kalman Extendido respecto a su versión lineal es de reducida complejidad. Si el KF requiere de ecuaciones lineales que describan el estado del sistema, en el EKF las ecuaciones pueden ser no lineales siempre y cuando la función que represente el comportamiento del mismo sea diferenciable.

Con base en las ecuaciones (24) a (28) planteadas anteriormente, se realiza la modificación de las mismas para que acepten una función no lineal diferenciable como parte del modelo de estado [78]. El modelo del filtro de Kalman Extendido queda representado de la siguiente manera, en donde la

función m es cualquier función no lineal diferenciable y \dot{m}_k representará la primera diferenciación finita en el tiempo discreto k .

Modelo del sistema



$$x_k = Ax_{k-1} + w_k \quad (29)$$

$$z_k = m(x_{k-1}) + v_k \quad (30)$$

Etapa de predicción



$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} \quad (31)$$

$$p_k = p_{k-1} + q \quad (32)$$

Etapa de corrección



$$K_k = p_k \dot{m}_k (\dot{m}_k p_k \dot{m}_k + r)^{-1} \quad (33)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k (z_k - m(\hat{x}_k)) \quad (34)$$

$$p_k = (1 - K_k \dot{m}_k) p_k \quad (35)$$

Las anteriores ecuaciones muestran el funcionamiento del filtro de Kalman Extendido con un modelo simplificado del que se había trabajado anteriormente, permitiendo su rápida comparación y bosquejo de funcionamiento. El modelo descrito no posee señal de control ni matrices de transición, aunque su uso no está restringido.

Hay dos cosas que se deben considerar para terminar de formular el EKF [78]: la forma en cómo hallar la primera diferenciación finita \dot{m}_k sin saber

cuál es la función m directamente, y además cómo generalizar el modelo para que represente un estado multivariado.

Para encontrar la diferencia finita de una función con respecto a una variable, hay que recordar esta operación es una medida de la tasa a la que el valor de dicha función cambia con respecto al cambio de la variable. Dicho cambio puede ser representado como el límite que tiende a cero de las diferencias sucesivas de los valores en la función con respecto al tiempo, matemáticamente representado como:

$$\dot{m}(X) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x} \quad (36)$$

Si un algoritmo no puede encontrar la diferencia finita de una función desconocida por sí mismo, es necesario realizar las restas sucesivas que darán una aproximación a la primera diferencia finita de la función, esto resuelve el primer problema planteado.

$$\frac{m_{k+1} - m_k}{k} \quad (37)$$

Si la señal de medición z_k es función de la señal de proceso x_k , se puede aplicar la ecuación (37) de forma que sea posible la división de las diferencias sucesivas de la primera señal por las diferencias sucesivas de la segunda señal:

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{x_{k+1} - x_k} \quad (38)$$

Para representar un modelo general multivariado, hay que empezar a modificar el sistema desde el modelo de estado en donde el componente de medición lineal está representado por:

$$z_k = Hx_k \quad (39)$$

Dado como ejemplo para una sola señal, como un sensor, en un estado unidimensional. Al trabajar de manera matricial se puede extender el número de componentes del sistema, representado de la siguiente manera (por ejemplo, con tres sensores y dos variables de estado).

$$z_k = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11}x_{k1} & + & h_{12}x_{k2} \\ h_{21}x_{k1} & + & h_{22}x_{k2} \\ h_{31}x_{k1} & + & h_{32}x_{k2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

Para un caso no lineal, el número de filas corresponde al número de observadores (sensores) y el número de columnas al número de estados, pero recordando que cada valor en la matriz está dado por la relación que hay entre observadores y estados, es decir, cada elemento es el valor actual de la primera diferencia finita del valor del sensor con respecto a su valor de estado.

$$z_k = \frac{dz}{dx} = \mathbf{J} \quad (41)$$

La matriz resultante por lo tanto es una Matriz Jacobiana, en donde su determinante se denomina Jacobiano en cálculo vectorial. El modelo del sistema para el caso no lineal (29) necesita ser reescrito.

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k \quad (42)$$

Donde A , la matriz de transición, es reemplazada por la función de transición Jacobiana f . La notación generalmente usada es F_k para esta Matriz Jacobiana (que reemplaza a la función f) y H_k para la matriz Jacobiana, que reemplaza la función del sensor m . Se llega al modelo del EKF generalizado desde la ecuación (43).

Modelo del sistema



$$x_k = f(x_{k-1}, u_k) + w_k \quad (43)$$

$$z_k = m(x_k) + v_k \quad (44)$$

Etapa de predicción



$$\hat{x}_k = f(\hat{x}_{k-1}, u_k) \quad (45)$$

$$P_k = F_{k-1} P_{k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1} \quad (46)$$

Etapa de corrección



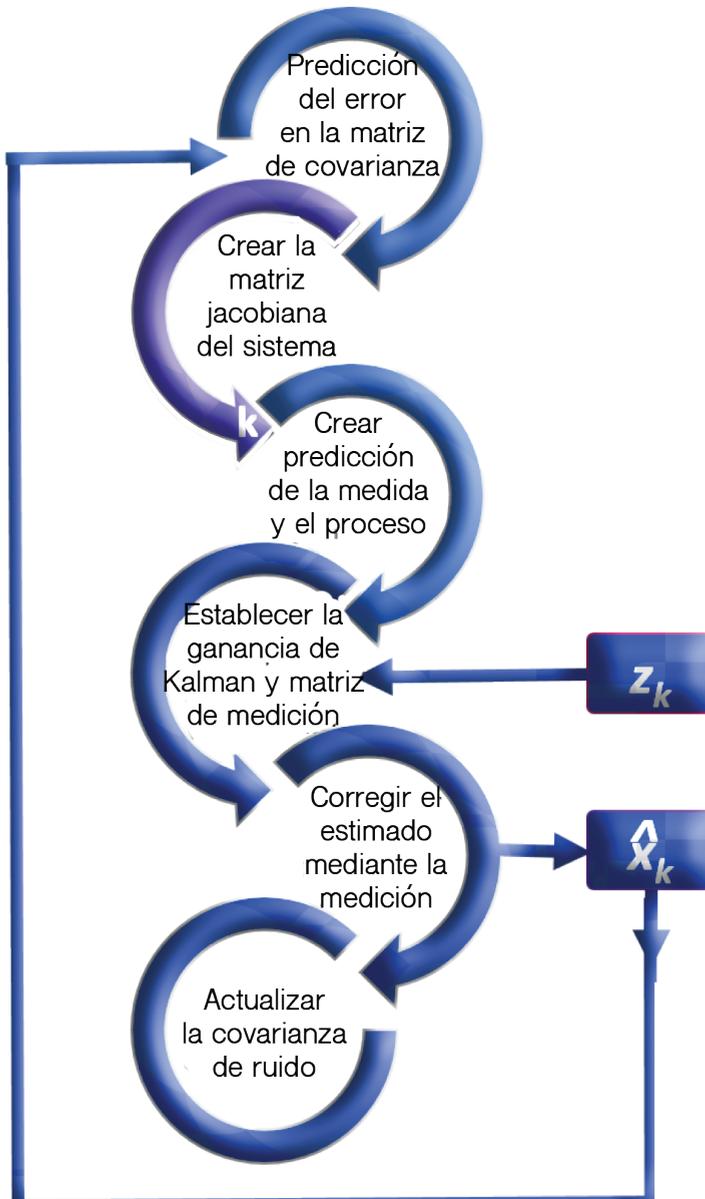
$$K_k = P_k H_k^T (H_k P_k H_k^T + R)^{-1} \quad (47)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k + K_k (z_k - m(\hat{x}_k)) \quad (48)$$

$$P_k = (1 - K_k H_k) P_k \quad (49)$$

En numerosos casos descritos, la función de transición es simplemente la función identidad, por lo que la matriz Jacobiana se reduce a ser una matriz identidad. El resumen de la ejecución del filtro de Kalman Extendido se evidencia en la Figura 16.

Figura 16. Etapas de ejecución del filtro de Kalman Extendido.



La salida para k se realimenta como entrada para $k+1$

2.4 Filtro de Kalman *Unscented*

El filtro de Kalman *Unscented* (*Unscented Kalman Filter*, UKF) es otra variante del KF común, aplicado a sistemas no lineales multivariados, el cual se desarrolló de forma similar al EKF, pero mejorando algunas de sus características. Retomando el actuar del EKF, se encuentra que es necesario emplear matrices Jacobianas para realizar una aproximación lineal del sistema descrito por su ecuación de estado.

La parametrización del EKF dificulta obtener una aproximación a la linealización cuando el sistema presenta órdenes altos, como por ejemplo en los procesos en donde el tiempo de muestreo es reducido (representa un valor corto de tiempo).

El EKF puede crear pequeñas desviaciones en los resultados estimados, conocido como deriva, creada por la estimación del estado a partir de la propagación analítica de las variables aleatorias gaussianas (media y covarianza) por medio de la linealización estimada, y dicha deriva es además acumulativa dada la recursividad del filtro.

El filtro de Kalman *Unscented* hace un trabajo excepcional al utilizar una manera determinística de muestreo aproximado, el cual según Cao [87], está diseñado para producir múltiples puntos de muestreo llamados Puntos Sigma, los cuales son cuidadosamente seleccionados y se encuentran “distanciados” uno de otro con base a la covarianza en torno al estado estimado actual, prosiguiendo con la propagación de dichos puntos sobre un mapa de no linealidad (llamado también nube de dispersión de Puntos Sigma, ya que los puntos transformados crean un contorno definido) para obtener una estimación más acertada o cercana de los valores estadísticos del ruido que afecta el sistema (media del error y covarianza). En el UKF se usa de manera frecuente la descomposición de Cholesky para escoger un conjunto de puntos sigma el cual sigue el estado promedio como un vector x de longitud n y covarianza dada por una matriz P de tamaño $n \times n$ [88]. Este proceso llamado Transformada *Unscented*, propuesto por Julier y Uhlmann [89], libera al UKF de realizar el procedimiento de restas sucesivas con el fin de hallar la primera diferencia finita de la función, es decir, se elimina la necesidad de recurrir al cálculo de la matriz Jacobiana, sin sacrificar otras características como el rendimiento.

Para el análisis de este algoritmo de aquí en adelante se empleará el aporte de Terejanu [90], el cual propone el modelo del sistema empleado anteriormente en la realización tanto del KF como del EKF.

Modelo del sistema



$$x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1} \quad (50)$$

$$z_k = m(x_k) + v_k \quad (51)$$

El estado inicial del sistema x_0 tiene una media conocida $\mu_0 = E[x_0]$ y covarianza dada por $P_0 = E[(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T]$. El estado predicho del sistema y de ruido es afectada por la Transformada *Unscented* [91]:

$$x_k^{aug} = [x_k^T \ w_{k-1}^T \ v_k^T]^T \quad (52)$$

$$P_k^{aug} = \begin{bmatrix} P_k & 0 & 0 \\ 0 & Q_k & 0 \\ 0 & 0 & R_k \end{bmatrix} \quad (53)$$

Ahora es necesario seleccionar los Puntos Sigma para realizar las correcciones a las predicciones. Considere a X_{k-1} un conjunto de $2n + 1$ Puntos Sigma (donde n es la dimensión del espacio de estados en el modelo), junto con el peso para cada uno de ellos (dicho valor determinará la relevancia o cercanía estimada de cada Punto Sigma a la media y varianza real de la señal):

$$X_{k-1} = [(x_{k-1}^j, W^j) | j = 0, \dots, 2n] \quad (54)$$

La selección de Puntos Sigma es limitada según el diseñador y su cantidad varía en función de cuán no lineal sea el sistema. Considere la selección limitada de Puntos Sigma que incorpora la información de orden para cada uno de ellos [92]:

$$x_{k-1}^0 = x_{k-1}^{aug}, \{-1 < W^0 < 1\} \quad (55)$$

$$x_{k-1}^i = x_{k-1}^{aug} + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}} \right)_i, \{1:i:n\} \quad (56)$$

$$x_{k-1}^{i+n} = x_{k-1}^{aug} - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}} \right)_i, \{n+1:i:2n\} \quad (57)$$

$$W^j = \frac{1-W^0}{2n}, \{1:j:2n\} \quad (58)$$

y a su vez, los pesos deben cumplir con la condición:

$$\sum_{j=0}^{2n} W^j = 1 \quad (59)$$

En donde el valor $\left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}} \right)_i$ es la fila o la columna de la matriz de la

raíz cuadrada de $\frac{n}{1-W^0} P_{k-1}$.

El valor inicial de peso W^0 modifica la posición de los Puntos Sigma. Si es mayor o igual a 0, los puntos tenderán a reunirse más lejos del origen, mientras que, si este valor inicial es menor a 0, los puntos tenderán a reunirse más cerca del origen.

Cada punto sigma es propagado, como se mencionó en anterioridad, a través del modelo de proceso no lineal:

$$x_k^{f,j} = f(x_{k-1}^j) \quad (60)$$

Los puntos transformados son empleados para calcular los parámetros estadísticos, es decir la media y la covarianza de la predicción del modelo x_k .

Etapa de predicción



$$x_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j x_k^{f,j} \quad (61)$$

$$p_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(x_k^{f,j} - x_k^f)^T + Q_{k-1} \quad (62)$$

Una vez propagados por el modelo del sistema (proceso), los Puntos Sigma son propagados a través del modelo de observación no lineal:

$$z_{k-1}^{f,j} = m(x_{k-1}^j) \quad (63)$$

Los puntos transformados son empleados esta vez para calcular los parámetros estadísticos, es decir la media y la covarianza de la predicción de la observación z_k .

$$z_{k-1}^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j z_{k-1}^{f,j} \quad (64)$$

$$\delta(z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T + R_k \quad (65)$$

$$\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T \quad (66)$$

Una vez realizadas las predicciones de los valores estimados probabilísticos tanto en la medida como en el estado, es necesario combinar los procesos de predicción y medición real para obtener un estado más cercano a la realidad.

Etapa de corrección



$$K_k = \delta(x_k^f, z_{k-1}^f) \delta^{-1}(z_{k-1}^f) \quad (67)$$

$$x_k^{aug} = x_k^f + K_k(z_k - z_{k-1}^f) \quad (68)$$

$$P_k = P_k^f - K_k \delta^{-1}(z_{k-1}^f) K_k^T \quad (69)$$

Es habitual, como se explica en un principio, que para la selección de los Puntos Sigma sea necesario calcular la matriz de la raíz cuadrada de la covarianza posterior en cada iteración ($P_k = S_k S_k^T$). Como la corrección es aplicada al cálculo final de la covarianza, se puede modificar el algoritmo de una forma más óptima para que dicho valor se propague directamente en la matriz de la raíz cuadrada, es decir en S_k .

$$x_{k-1}^0 = x_{k-1}^{aug}, \{-1 < W^0 < 1\} \quad (70)$$

$$x_{k-1}^i = x_{k-1}^{aug} + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_{k-1} \right)_i, \{1:i:n\} \quad (71)$$

$$x_{k-1}^{i+n} = x_{k-1}^{aug} - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_{k-1} \right)_i, \{n+1:i:2n\} \quad (72)$$

$$W^j = \frac{1-W^0}{2n}, \{1:j:2n\} \quad (73)$$

Este cambio facilita la realización del cálculo, pero se debe implementar una matriz de raíz cuadrada inicial por medio de la factorización de Cholesky de la matriz final de covarianza del error.

$$S_0 = \text{Cholesky}(E[(x_0 - \mu_0)(x_0 - \mu_0)^T]) \quad (74)$$

Según lo expuesto por Terejanu [90] en su trabajo, como $W^j > 0$ para todos los $i \geq 1$ en la etapa de corrección, la predicción de la matriz de covarianza se puede reescribir con base a la ecuación (62) como:

$$\begin{aligned}
 p_k^f &= \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(x_k^{f,j} - x_k^f)^T + Q_{k-1} \\
 p_k^f &= \sum_{j=1}^{2n} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f)^T + \sqrt{Q_{k-1}} \sqrt{Q_{k-1}}^T \\
 &\quad + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f)(x_k^{f,0} - x_k^f)^T \\
 p_k^f &= \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) & \sqrt{Q_{k-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f)^T \\ \sqrt{Q_{k-1}}^T \end{bmatrix} \\
 &\quad + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f)(x_k^{f,0} - x_k^f)^T \\
 &\quad \text{Para } \{1:j:2n\} \tag{75}
 \end{aligned}$$

En donde $\sqrt{Q_{k-1}}$ es la matriz de la raíz cuadrada de la covarianza del ruido en el proceso. Se puede usar la descomposición de Cholesky para expresar la transpuesta de la matriz en términos de una matriz ortogonal O_k y una matriz triangular positiva $(S_k^f)^T$.

$$O_k (S_k^f)^T = \begin{bmatrix} \sqrt{W^j} (x_k^{f,j} - x_k^f) & \sqrt{Q_{k-1}} \end{bmatrix}^T \quad \text{Para } \{1:j:2n\} \tag{76}$$

Entonces, reemplazando la ecuación (76) en (75), se obtiene:

$$P_k^f = S_k^f O_k^T O_k (S_k^f)^T + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f)(x_k^{f,0} - x_k^f)^T$$

$$P_k^f = S_k^f (S_k^f)^T + W^0 (x_k^{f,0} - x_k^f)(x_k^{f,0} - x_k^f)^T \quad (77)$$

Para incluir el efecto del último término de la matriz de raíz cuadrada, se debe efectuar una factorización de Cholesky de primer grado:

$$S_k^f = \text{Cholesky} (S_k^f, (x_k^{f,0} - x_k^f), \text{sgn}\{W^0\}\sqrt{W^0}) \quad (78)$$

Donde sgn es la función signo y Cholesky entrega el factor de Cholesky de la ecuación (77). En consecuencia, la predicción de la matriz de covarianza se puede escribir como $P_k^f = S_k^f (S_k^f)^T$. Lo mismo aplica a la covarianza posterior, que se puede expresar como $P_k = S_k (S_k)^T$ y la covarianza final como $\delta(z_{k-1}^f) = S_{z_{k-1}^f} S_{z_{k-1}^f}^T$.

En resumen:

Etapa de predicción



$$x_k^{f,j} = f(x_{k-1}^j) \quad (79)$$

$$x_k^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j x_k^{f,j} \quad (80)$$

$$(S_k^f) = \text{qr}([\sqrt{W^j}(x_k^{f,j} - x_k^f) \quad \sqrt{Q_{k-1}}]) \quad \text{Para } \{1:j:2n\} \quad (81)$$

$$S_k^f = \text{Cholesky} (S_k^f, (x_k^{f,0} - x_k^f), \text{sgn}\{W^0\}\sqrt{W^0}) \quad (82)$$

- Transformación de los Puntos Sigma para incorporar el efecto del ruido de proceso

$$x_k^{f,0} = x_k^f \quad (83)$$

$$x_k^{f,i} = x_k^f + \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_k^f \right)_i, \{1:i:n\} \quad (84)$$

$$x_k^{f,i+n} = x_k^f - \left(\sqrt{\frac{n}{1-W^0}} S_k^f \right)_i, \{1:i:n\} \quad (85)$$

- Propagación de los puntos Sigma Transformados a través del modelo de medición

$$z_{k-1}^{f,j} = m(x_{k-1}^{f,j}) \quad (86)$$

$$z_{k-1}^f = \sum_{j=0}^{2n} W^j z_{k-1}^{f,j} \quad (87)$$

$$S_{z_{k-1}^f} = qr\left(\left[\sqrt{W^j}(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f) \quad \sqrt{R_k}\right]\right)$$

$$\text{Para } \{1:j:2n\} \quad (88)$$

$$S_{z_{k-1}^f} = \text{Cholesky}\left(S_{z_{k-1}^f}, (z_{k-1}^{f,0} - z_{k-1}^f), \text{sgn}\{W^0\}\sqrt{W^0}\right) \quad (89)$$

$$\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) = \sum_{j=0}^{2n} W^j (x_k^{f,j} - x_k^f)(z_{k-1}^{f,j} - z_{k-1}^f)^T \quad (90)$$

La función qr regresa únicamente la matriz triangular negativa.

Etapa de corrección



$$K_k = (\delta(x_k^f, z_{k-1}^f) / S_{z_{k-1}^f}^T) / S_{z_{k-1}^f} \quad (91)$$

$$x_k^{aug} = x_k^f + K_k(z_k - z_{k-1}^f) \quad (92)$$

$$S_k = \text{Cholesky}(S_k^f, K_k \delta(x_k^f, z_{k-1}^f), -1) \quad (93)$$

Donde el signo / denota una operación de sustitución inversa. Esta es una alternativa computacionalmente eficiente a la inversión de la matriz, aunque se puede usar dicha operación sin inconveniente también. Como la factorización de Cholesky es una matriz triangular negativa, se puede hallar el valor de la K_k ganancia usando una doble sustitución inversa en la ecuación:

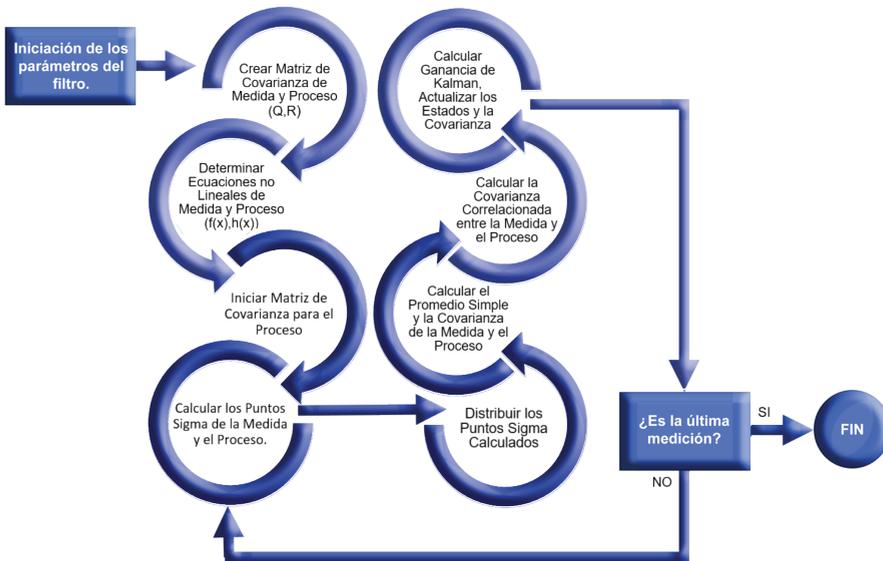
$$K_k(S_{z_{k-1}^f} \ S_{z_{k-1}^f}^T) = \delta(x_k^f, z_{k-1}^f) \quad (94)$$

En la ecuación (93), como el argumento del medio en la factorización de Cholesky es una matriz $\in \mathbb{R}^{n \times n}$, el resultado es una consecución de n veces el factor de Cholesky usando las n columnas de la matriz.

De esta forma es posible implementar un filtro de Kalman *Unscented* algorítmicamente, en donde las operaciones básicas con matrices pueden ser sustituidas por métodos computacionalmente más eficientes.

En la Figura 17 se muestra el resumen de las etapas de ejecución del filtro de Kalman *Unscented*.

Figura 17. Etapas de ejecución del filtro de Kalman *Unscented*.



Fuente: Autores. Adaptación realizada a partir de Callejas [93].

2.5 Fusión de Datos.

La fusión de datos es una característica que puede proveer los algoritmos de estimación no lineal y en especial el Filtro de Kalman, y hace referencia específicamente a la combinación de información y datos extraídos de diferentes fuentes como por ejemplo sensores, de tal manera que la información resultante tiene menos incertidumbre o error de lo que se esperaría cuando se utilizan las mismas fuentes por separado.

Las fuentes de datos utilizadas para un proceso de fusión no son específicas ya que se pueden emplear información recolectada de muchos medios, como es el caso de sensores de diferentes tipos, valores pasados de los mismos sensores, información acerca del ambiente e información recolectada de sistemas de diversos tipos [94].

Existen actualmente muchos algoritmos para realizar fusión de datos, como por ejemplo el teorema de límite central [95], redes Bayesianas [96], teoría de Dempster-Shafer [97] y finalmente el filtro de Kalman [98].

Específicamente hablando del filtro de Kalman, la fusión de datos es ampliamente utilizada en los sistemas de captura de movimiento biomecánico al tomar datos de varios sensores inerciales o de una combinación de sensores inerciales con sistemas de captura ópticos.

Esta fusión de datos también permite ayudar a corregir diversos problemas como el ruido de una señal, ya que, al obtenerse más información del sistema, el ruido presente en todas las señales en conjunto se puede estimar de una mejor manera dando resultados más precisos. Sin embargo, la fusión de datos supone algunas desventajas, como por ejemplo un incremento del costo computacional requerido para ejecutar el algoritmo. Para tener una idea de cómo una fusión sensorial funciona, se puede proponer un sistema de referencia con sólo un estado. Se sigue el modelo de Levys [78], para simplificar aún más el sistema se puede asumir que no se tiene conocimiento del modelo de transición conocido anteriormente como la matriz A .

$$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} = 1\hat{x}_{k-1} = \hat{x}_{k-1} \quad (95)$$

Como no existe un modelo de transición de estados para el sistema, se puede asumir únicamente que el estado en el tiempo actual es el mismo estado en el tiempo inmediatamente anterior. Como se necesita más de un valor para fusionar los datos, se supondrá que hay dos sensores idénticos que contribuyen igualmente a la estimación del estado, por lo cual la matriz del estado sólo tendrá dos valores.

$$z_k = H\hat{x}_k + v_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_k + v_k \quad (96)$$

Para obtener la matriz R , es necesario recordar que fue definido anteriormente como la varianza de la señal de ruido en la observación v_k , pero como este sistema tiene más de dos sensores, la matriz R contendrá la covarianza de ambos sensores. La diagonal de la matriz principal contendrá el valor de la varianza para ese sensor. Los elementos que no están en la diagonal principal de la matriz representan la cantidad de ruido del sensor que varía con respecto a la del otro. En la mayoría de aplicaciones, salvo casos específicos, tales valores son cero.

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \quad (97)$$

De esta forma se tienen todos los elementos en forma matricial para ser computados conjuntamente con el resto del algoritmo de Kalman.

CAPÍTULO 3

3. Metodología para la evaluación de rendimiento de estimadores no lineales basados en el filtro de Kalman

Durante el desarrollo de los capítulos preliminares de este libro, se ha expuesto y detallado la manera en la cual están contruidos algunos de los principales tipos de filtros de Kalman, y así mismo las implicaciones teóricas que puede traer la implementación de uno u otro tipo de algoritmo. El siguiente paso, por lo tanto, es establecer cómo se puede utilizar la teoría revisada y llevarla al caso específico de aplicación en señales biomecánicas.

La metodología descrita en este capítulo está dividida por etapas que conforman grupos de trabajo para el desarrollo de la investigación. Dichos paquetes de trabajo contienen actividades y el resultado del proceso. Mediante la suma de las actividades descritas en los paquetes de trabajo propuestos se obtienen los resultados para el desarrollo de la investigación, registrados en el capítulo cuarto.

Se expone a continuación el diseño de los pasos necesarios para efectuar la aplicación de los estimadores no lineales basados en el filtro de Kalman en señales biomecánicas, donde se presentarán las ideas clara y adecuadamente, facilitando la comprensión y asimilación del proceso experimental.

3.1 Tipo de Investigación

La metodología considera un tipo de investigación mixta de carácter experimental y correlacional, ya que observando y variando los parámetros implicados en el proceso de filtrado de las señales, así como las variables de medición del sistema y la naturaleza misma de las señales en estudio, se puede comparar el resultado de la aplicación del filtro versus la señal sin un previo tratamiento de los datos.

3.2 Método

El desarrollo de la investigación está dado en cuatro etapas, cada una de ellas abarca un tema de interés específico y riguroso para poder cumplir con los objetivos de esta investigación.

3.2.1 Identificación de los algoritmos para la estimación no lineal de posición y orientación de objetos en movimiento.

La determinación de los algoritmos de estimación no lineal en aplicaciones de posición y orientación de objetos en movimiento es necesario, ya que provee el fundamento de las técnicas de estimación y el desarrollo de técnicas específicas de filtrado.

Paquete de Trabajo 1: Identificación y fundamentación teórica

- Actividad 1** Consulta y documentación de información que abarque la temática de estimadores lineales y estimadores no lineales.
- Actividad 2** Consulta y documentación de información de referencia, como los términos propios de estadística y cálculo.

Resultado

Compendio de información que muestra la fundamentación de los estimadores, sus características y distintos tipos, reflejado en el capítulo uno de este libro.

3.2.2 Determinación de las características propias de los filtros de Kalman.

El correcto establecimiento de las características principales de los filtros de Kalman asegura su correcta implementación en la plataforma de captura de movimiento.

Paquete de Trabajo 2: Identificación y fundamentación del filtro de Kalman

- Actividad 1** Consulta y documentación de información que abarque la temática de filtros de Kalman.
- Actividad 2** Profundización en la temática concerniente a los filtros de Kalman *Unscented* y *Extendido*.
- Actividad 3** Análisis de las características propias de los filtros de Kalman *Unscented* y *Extendido*.
-

Continuación Paquete de Trabajo 2.

Actividad 4 Recopilación de información acerca de implementaciones de Filtros de Kalman realizadas para otros sistemas o dispositivos.

Resultado

Registro detallado y documentado de cada uno de los filtros caso de estudio, reflejado en el capítulo dos de este libro.

3.2.3 Implementación de un escenario basado en pluralidad de sensores de movimiento.

La creación de un escenario basado en pluralidad de sensores reúne los elementos de tipo electrónico y en sistemas de información necesarios para capturar la información que es objeto de análisis.

Paquete de Trabajo 3: Implementación del escenario de captura de movimiento

Actividad 1 Documentación de las características de los sensores de movimiento, incluyendo diversas tecnologías.

Actividad 2 Documentación de las características necesarias de procesamiento para la creación del escenario, escogiendo la alternativa más viable.

Actividad 3 Evaluación de las características de la MPU Invensense MPU-9150.

Actividad 4 Interconexión de las MPU para la recolección de datos.

Actividad 5 Verificación del funcionamiento del sistema con pluralidad de sensores.

Resultado

Plataforma de captura de movimiento basado en pluralidad de sensores IMU/MPU de tecnología MEMS.

3.2.4 Implementación de los filtros y preparación del entorno.

Mediante la aplicación del conocimiento específico de la ingeniería electrónica en procesamiento digital de señales, se elabora e implementa los filtros de acuerdo a las características específicas de cada uno.

Se propone un sistema de referencia basado en una pluralidad de sensores y otro de referencia.

Paquete de Trabajo 4: Implementación de los filtros

- Actividad 1** Análisis de algoritmos de Filtro de Kalman implementados digitalmente.
- Actividad 2** Implementación de los filtros de Kalman en un lenguaje acorde al escenario basado en la pluralidad de sensores.
- Actividad 3** Verificación del funcionamiento preliminar de los filtros de Kalman.

Resultado

Implementación algorítmica de los filtros de Kalman de manera adecuada, coherente y funcional con el sistema de captura de movimiento basado en pluralidad de sensores.

3.2.5 Implementación de un escenario de referencia.

La creación de un escenario de referencia brinda la posibilidad de crear simulaciones que reflejan comportamientos característicos de las señales a estudiar, y sustentan los análisis desarrollados a partir de los datos generados por medio de ésta.

Paquete de Trabajo 5: Escenario de Referencia

- Actividad 1** Recopilación de información acerca de los movimientos de flexión y extensión en los miembros superiores del cuerpo humano y sus características básicas.
- Actividad 2** Documentación de las características de diversos servomotores para proporcionar el movimiento.
- Actividad 3** Determinación de los materiales necesarios para la construcción del escenario.
- Actividad 4** Verificación del funcionamiento del sistema de referencia.

Resultado

Escenario de referencia que permite realizar la comparación de los filtros frente al sistema basado en la pluralidad de sensores.

3.2.6 Análisis de los datos a través de la raíz cuadrada del error cuadrático medio.

Los datos generados a partir de los protocolos de pruebas son procesados para determinar la eficiencia de cada filtro aplicado, por lo cual se adopta la medición del RMSE como parámetro indicador de eficiencia.

Paquete de Trabajo 6: Análisis de los datos a través del RMSE

- Actividad 1** Selección de las técnicas de correlación apropiadas para el análisis de los datos obtenidos.
- Actividad 2** Análisis de cada muestra de datos recolectada por medio del escenario basado en pluralidad de sensores para determinar el RMSE versus el escenario de referencia propuesto.

Resultado

Conclusión acerca de la efectividad de los filtros de Kalman implementados en el sistema de captura de datos.

3.2.7 Análisis de la complejidad computacional de los filtros.

Se analizan los algoritmos con base a las estructuras de programación para determinar el valor de complejidad computacional.

Paquete de Trabajo 7: Análisis de complejidad computacional

- Actividad 1** Documentación y recopilación acerca de las técnicas de análisis de algoritmos computacionales.
- Actividad 2** Utilización de un software para el análisis del código fuente escrito en C++.
- Actividad 3** Análisis de resultados derivados del código fuente.

Resultado

Determinación de la complejidad computacional promedio para el EKF y el UKF.

3.2.8 Recopilación y presentación de resultados.

Una vez generada la documentación de la experimentación y el cumplimiento de los objetivos, se expone la compilación de todos los resultados y conclusiones finales de la investigación.

Paquete de Trabajo 8: Conclusión

- Actividad 1** Organización, documentación y presentación de resultados.

Resultado

Consolidación del libro que evidencia el origen, objeto y certeza de la investigación realizada.

3.3 Criterios de Validez y Confiabilidad

Para analizar el rendimiento de los filtros en las pruebas definidas, es necesario tener una medida estándar del error producido. El valor de RMSE es un indicador de validez experimental ya que permitirá evaluar el rendimiento del filtro a partir de la comparación directa con las señales de origen sin procesar. La repetitividad de los resultados permitirá comprobar que el comportamiento de los filtros es estable conservando las características básicas del escenario de prueba, sin importar el momento o lugar de la captura de la señal, lo que provee una sólida prueba de la veracidad de la información.

Adicionalmente, la confiabilidad estará dada en la medida de la exigencia de una respuesta óptima de los filtros en escenarios o situaciones de comprobación en donde se exageran o acentúan experimentalmente los problemas para crear entornos que en la cotidianidad no sucederá. Llevar las pruebas a un límite para el peor caso posible supone una estabilidad del filtro necesaria para afrontar cualquier situación desfavorable.

3.4 Variables e Indicadores

Se debe tener en consideración todas aquellas variables que influyen en el desarrollo metodológico y en los resultados de las pruebas, así como los indicadores que resaltan la evidencia concluyente sobre el análisis de los datos recolectados. Se presenta a continuación las variables e indicadores que hacen parte de esta investigación.

3.4.1 Velocidad angular del movimiento

Rapidez con la cual el brazo realiza los movimientos determinados en el protocolo de procedimientos. Su unidad de medida está dada en radianes por segundo [rad/s].

3.4.2 Frecuencia de Muestreo

Tasa a la cual son capturados los datos provenientes de los sensores. Su unidad de medida está dada en Hertz [Hz].

3.4.3 Tiempo de captura

Duración temporal de la señal capturada. Su unidad de medida está dada en Segundos [s].

3.4. Tipo de movimiento

Forma de onda descrita que se ajusta a los datos de tipo biomecánico que se generan en el proceso de captura.

3.4.5 Amplitud de los movimientos

Valores límite de Flexión y Extensión en los que está dado el movimiento. Se usa como medida de valores pico (máximos y mínimos). Su unidad de medida está dada en Grados Sexagesimales [°].

3.4.6 Desfase u *Offset*

Valor de desplazamiento constante de la forma de onda con respecto del cero de la señal. Está medido en las mismas unidades de la amplitud de los movimientos. En una forma de onda senoidal, un valor *offset* de cero indica que los valores máximos y mínimos de la señal estará dado por el valor de la amplitud de la onda.

3.4.7 Valores específicos de los parámetros del filtro

Son aquellos parámetros que permiten la inicialización del filtro, como son los valores de desviación estándar en la medida (r) y la desviación estándar en el proceso (q). Otros parámetros como son la ganancia del filtro de Kalman, las matrices de varianza y covarianza, entre otros, son calculados de forma automática por el filtro. (Véase Capítulo 2: Filtro de Kalman)

3.4.8 RMSE

Indicador de la cantidad de error presente en las señales recolectadas, teniendo como referencia una señal de entrada del sistema o una señal confiable recolectada junto a los datos. Para la definición matemática del RMSE, véase Capítulo 1: Fundamentación Teórica para la Implementación de Técnicas de Procesamiento de Señales.

3.5 Protocolos de Prueba

La experimentación por medio de la cual se obtienen los datos de prueba debe estar guiada por un diseño lógico que evidencie la correcta aplicación de los filtros, teniendo en cuenta las variables e indicadores propuestas en el diseño metodológico. En el desarrollo de los protocolos de prueba, se usan movimientos de tipo senoidal, ya que reflejan el movimiento de flexión y extensión realizado en las extremidades superiores generado por la articulación del codo, las velocidades angulares del movimiento están comprendidas entre 1 y 15 rad/s, teniendo en cuenta que dentro de ese rango se producen los movimientos del cuerpo humano, y finalmente se adopta una amplitud de 20° , un valor que puede ser cambiado en cualquier momento, ya que para la articulación del codo los rangos de abertura entre el antebrazo y el brazo van desde los 0° hasta aproximadamente los 165° en total.

3.5.1 Protocolo 1. Variación de los parámetros de desviación estándar

Se realizan cinco tomas de movimiento para cada velocidad angular de 1, 5, 10 y 15 rad/s, representando la característica de flexión y extensión, de amplitud $A=20^\circ$, $Offset=0^\circ$, frecuencia de muestreo $F_s=35$ Hz, forma de onda senoidal y tiempo de captura $T_c=20$ s. En cada toma se realiza la variación de los parámetros de desviación estándar en la medida (r) y desviación estándar en el proceso (q) para EKF y UKF con el fin de establecer los valores de r y q que sintonizan de manera óptima los filtros para las velocidades angulares específicas.

3.5.2 Protocolo 2. Determinación de la desviación estándar promediada

A partir de los valores óptimos de ambos filtros de Kalman para cada velocidad angular específica propuesta en el protocolo 1, se halla un valor de desviación estándar promediada para la medida (r) y desviación estándar promediada para el proceso (q) que permita la utilización de los filtros UKF y EKF para un movimiento en el cual la velocidad angular varíe en el rango de 0 a 15 rad/s.

3.5.3 Protocolo 3. Verificación de la eficiencia de los valores de desviación estándar promediada

Se realiza una toma de movimiento para cada velocidad angular de 1, 5, 10 y 15 rad/s en dos escenarios diferentes:

Escenario 1: se escogen los parámetros de desviación estándar en la medida (r) y desviación estándar en el proceso (q) óptimos para cada valor específico de velocidad angular hallados en el protocolo 1 para EKF y UKF.

Escenario 2: se escogen los parámetros de desviación estándar promediados para la medida (r) y desviación estándar promediados para el proceso (q).

Las características que comparten ambos escenarios son los siguientes:

Movimiento de flexión y extensión simulado, de amplitud $A=20^\circ$, $offset=0^\circ$, frecuencia de muestreo $F_s=35$ Hz, forma de onda senoidal y tiempo de captura $T_c=30$ s.

El propósito de este protocolo es comprobar si los valores de desviación estándar promediados para la medida (r) y desviación estándar promediados para el proceso (q) obtenidos en el protocolo 2 son óptimos para cualquier velocidad angular en el rango propuesto.

3.5.4 Protocolo 4. Obtención de los datos en periodos de tiempo específicos

Se realiza una toma de movimiento para cada tiempo de captura T_c de 10, 60, 600 y 3600 segundos, simulando un movimiento de flexión y extensión, con una amplitud $A=20^\circ$, $Offset=0^\circ$, frecuencia de muestreo $F_s=35$ Hz, forma de onda senoidal. Lo anterior se realiza en velocidades angulares de 1 y 15 rad/s.

El propósito de este protocolo es mostrar el valor del RMSE para cada filtro cuando se exponen a diferentes tiempos de uso.

CAPÍTULO 4

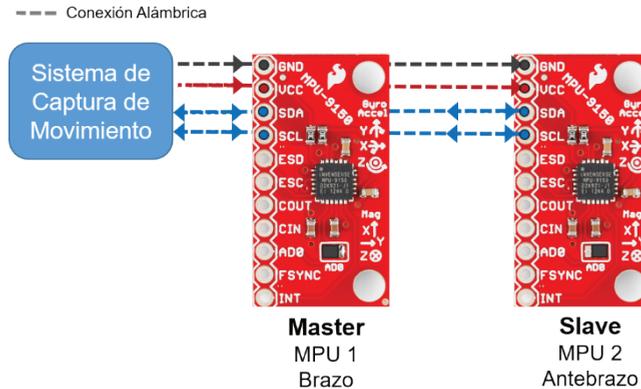
4. Resultados y Discusión

Por medio del desarrollo de la conceptualización teórica y el análisis del filtro de Kalman, capítulo uno y dos de este libro, respectivamente, se han cubierto las teorías, técnicas y conocimientos necesarios para lograr la identificación de los algoritmos para la estimación no lineal de posición y orientación de objetos en movimiento, partiendo de los estimadores estadísticos y arrojando como resultado que la elección del filtro de Kalman *Unscented* y filtro de Kalman Extendido como caso de estudio es apropiado debido a las características de eliminación o atenuación de error en las señales que ambos ofrecen, sumado a sus usos evidenciados en diferentes sistemas de recolección de datos y aplicación de la información en numerosos entornos.

Adicionalmente, se detalló las características propias de cada filtro de Kalman, así como la descripción algorítmica y funcional de estos, sentando las bases para lograr la implementación en un sistema de captura y procesamiento de la información, el cual se describe a continuación.

4.1 Escenario Basado en una Pluralidad de Sensores.

Para realizar una captura de datos de origen biomecánico o biomédico, se requiere del uso de una gama de sensores especiales capaces de detectar la variable deseada. Para el caso del movimiento en las extremidades superiores del cuerpo humano, se requiere el uso de las Unidades de Procesamiento de Movimiento para recolectar las muestras con las cuales se colocan a prueba los filtros. A continuación, se describe el escenario correspondiente a la instrumentación electrónica que permite la recolección de datos llevada a cabo en esta investigación.

Figura 19. Interconexión de las MPU.

Fuente: Autores.

Al tratarse de una comunicación digital por protocolo I²C, la interconexión de las dos MPU puede realizarse de forma serial, de modo que tanto la alimentación eléctrica como los datos sean transmitidos de esta forma. La selección de la unidad a utilizar se da por medio de la dirección asociada a cada MPU, y estará determinada por un selector AD0 en la parte frontal de la MPU. Ya que se usan dos unidades idénticas en paralelo, una de ellas actúa como controlador maestro (*Master*) de la otra unidad esclava (*Slave*). Por tanto, se emplea la dirección que provee Invensense por defecto, siendo 0x68 para la unidad *Master* y 0x69 para la unidad *Slave*. En la Figura 19 puede notarse la configuración de la posición en este selector.

4.1.2 Descripción del sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales.

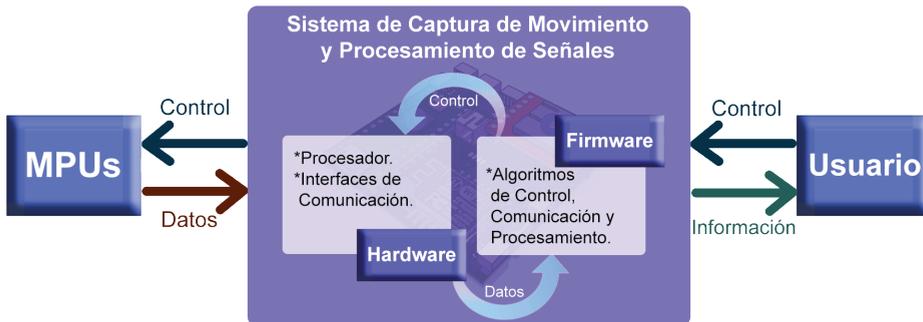
El sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales es un dispositivo que se responsabiliza, entre otras cosas, de suministrar la energía eléctrica, enviar las instrucciones a las MPU, requerir los datos de las mismas en forma de señales digitales, capturar los datos, realizar operaciones con las señales tales como la fusión de datos, transformación de cuaterniones a ángulos de Euler, ejecutar el procesamiento de los filtros de Kalman y entregar una respuesta en forma conveniente y eficaz, en este caso en forma de valores numéricos enviados a través de un puerto USB usando un protocolo de transmisión serial bidireccional.

Dicho sistema de captura de movimiento y captura de señales se compone principalmente de dos elementos:

- **Hardware Embebido**, el cual consta de un microcontrolador, interfaces de comunicación, regulación de energía eléctrica, etc. Para el desarrollo de un sistema funcional rápido, se optó por una placa de desarrollo Arduino Mega 2560 con miras a la implementación de un dispositivo embebido propio.
- **Firmware**, código presente en el hardware embebido que realiza las funciones descritas anteriormente. Para este caso, el código fuente del firmware está escrito en lenguaje C++, y se ensambla con el uso del compilador AVR-GCC para microcontroladores Atmel.

En el sistema de captura, mostrado en la Figura 20, se realiza la toma de datos en tiempo real con procesamiento de los datos en tiempo real, proporcionando una salida unificada y sincronizada. La frecuencia máxima de muestreo es 45 Hz por cada MPU, con un máximo de dos unidades (*Master* y *Slave*).

Figura 20. Sistema de captura de movimiento y procesamiento de señales



Fuente: Autores.

Siguiendo una secuencia de pasos ordenada, el sistema de captura recibe órdenes del usuario quien especifica qué funcionamiento debe tomar. Acto seguido e instantáneamente, el firmware del sistema procesa la orden y por medio del hardware embebido envía la señal de control específica a las MPU, los cuales a su vez devuelven la información del movimiento biomecánico efectuado.

Dicha información se captura a través del hardware embebido en donde se realiza su debido procesamiento, como la aplicación de los filtros, convirtiendo los datos en la información del movimiento. Una vez terminado

el procesamiento, el sistema envía al usuario la información recolectada y procesada mientras el ciclo se reinicia.

4.1.3 Descripción de la implementación de los algoritmos del filtro de Kalman.

La implementación de los algoritmos de filtro de Kalman, así como la fusión de datos, se realiza en lenguaje C++ para facilitar el proceso de programación y la eficiencia dentro del sistema de captura. El algoritmo del EKF como del UKF están basados en la implementación para MATLAB realizada por Cao [87], [99]. La adecuación del mismo para la implementación en tiempo real sobre el sistema de captura de movimiento usado en esta investigación está dada por los autores.

4.2 Escenario de Referencia para la Comparación de los Filtros.

Así como es necesario recolectar los datos biomecánicos con un sistema de captura adecuado, es fundamental construir una plataforma experimental que permita comprobar la eficiencia del uso de las MPU y generar datos simulando los movimientos básicos de flexión y extensión de las extremidades superiores del cuerpo humano. Para dicha plataforma experimental no se deja de lado la rigurosidad en su diseño, debido a que los datos provenientes de esta plataforma sirven como realimentación y punto de referencia para el análisis de datos subsecuente. A continuación, se describe el escenario de referencia que provee la simulación.

4.2.1 Descripción de la plataforma para la experimentación.

La plataforma de experimentación está pensada para simular de forma básica los movimientos de flexión y extensión.

La plataforma de experimentación consta de tres partes estructurales y un tipo de actuador.

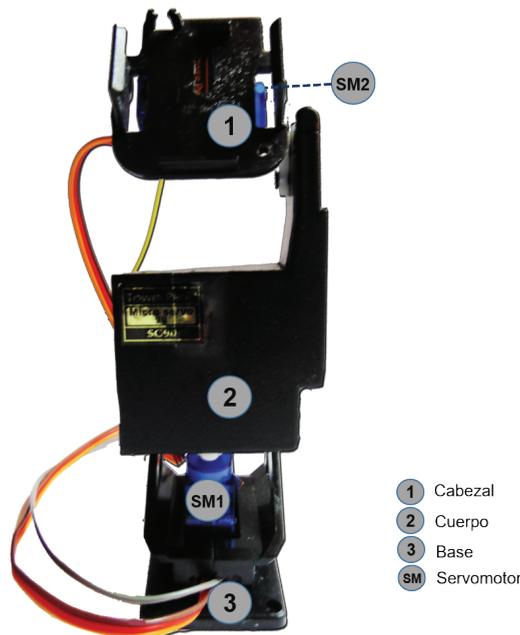
Cabezal	Elemento móvil que en su superficie puede alojar a una MPU-9150 y permite realizar el movimiento simulando la flexión o extensión, que representaría el segmento del antebrazo.
----------------	---

Cuerpo	Brinda soporte a las piezas móviles y además sirve como eje de apoyo a la MPU, representando el segmento del brazo.
Base	Soporta todo el sistema sobre una superficie de apoyo.
Actuadores (SM1 y SM2)	Servomotores que proveen la fuerza electromotriz que da el movimiento controlado a la estructura.

Está construido con material plástico que permite el correcto soporte de la MPU sin interferir en sus características eléctricas y además minimiza las vibraciones producidas por elementos externos al tener anclajes atornillados a la superficie de apoyo.

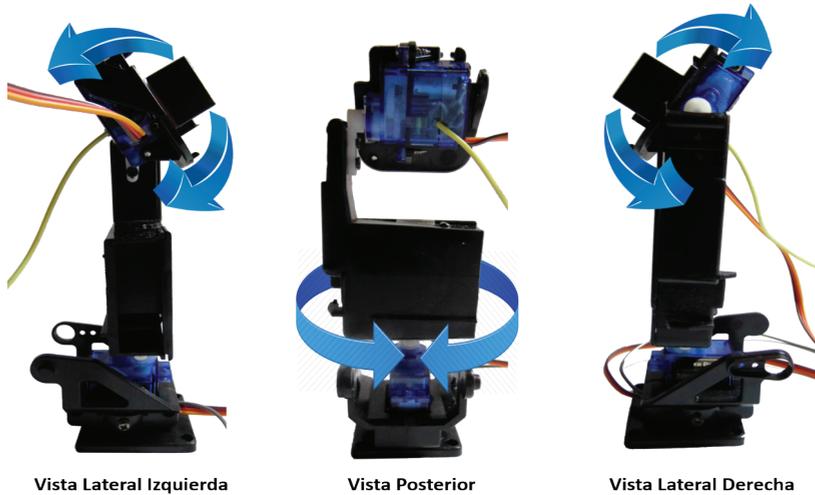
Esta plataforma, mostrada en las Figuras 21 y 22, está gobernada por el Toolbox Arduino en MATLAB SIMULINK y un sistema Arduino Mega 2560 independiente del sistema de captura, lo cual permite manipular con seguridad la plataforma de experimentación sin interferir con el sistema de captura de movimiento.

Figura 21. Plataforma para la experimentación y simulación del movimiento de flexión y extensión.



Vista Frontal.

Fuente: Autores.

Figura 22. Diferentes vistas de la plataforma y sus movimientos.

Fuente: Autores.

Los movimientos tenidos en cuenta para la toma de datos son los generados por el cabezal, entendiendo que el movimiento hacia arriba representa una flexión y hacia abajo una extensión. Los demás movimientos no se consideran para este caso.

Los servomotores que hacen el esfuerzo mecánico para mover la plataforma son marca TowerPro referencia SG-90. Cada uno de estos actuadores posee la libertad de movimiento en una sola dirección de 180° en total, 90° hacia cada lado, y cuenta con modulación de tipo analógica para la selección del ángulo deseado, piñonera plástica y conectores estándar. Sus características más relevantes se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Resumen de especificaciones del servomotor TowerPro SG-90.

Voltaje de Operación [v]	Torque [kgf/cm]	Velocidad [s/°]	Peso [g]	Ancho de Pulso [μs]	Banda Muerta [μs]
4.8	1.80	0.002	9	500 ~ 2400	10

Fuente: Hoja de especificaciones servomotor TowerPro SG-90 [100].

Ya que los servomotores proveen una velocidad considerablemente alta de desplazamiento, es posible simular barridos completos de 180° hasta 9 rad/s y de 90° hasta 17 rad/s, superando la velocidad de cualquier aplicación biomecánica promedio hasta en un 70%.

4.3 Análisis de las muestras recolectadas.

La rigurosidad en el análisis de los datos provenientes del sistema de captura determina el éxito de la investigación. Para este propósito, es necesario crear un *script* (pequeño programa informático representado como una lista de pasos ordenados, o archivo de procesamiento por lotes) usando MATLAB. Este *script* elabora un análisis semiautomático de la información suministrada como entrada de datos.

Se resalta que este *script* no altera la información capturada originalmente, ya que la manipulación indebida de los datos recolectados experimentalmente inválida el desarrollo de esta investigación. Se documentan las características más relevantes de este programa de análisis.

4.3.1 Información de entrada al sistema.

El *script* realizado para efectuar la tarea de análisis lee los datos en formato de texto plano, donde los valores están separados por comas y cada salto de línea representa una nueva muestra capturada.

El tipo de dato procesado por el *script* es de tipo numérico en unidades angulares, en este caso grados [$^\circ$]. Los valores separados por comas deben estar en el siguiente orden específico: valores sin procesar ni filtrar (*RAW*) en la primera columna, valor con el correctivo del Filtro de Kalman *Unscented* (UKF) en la segunda columna y finalmente valor con el correctivo del Filtro de Kalman Extendido (EKF) en la tercera columna.

Los valores sin procesar ni filtrar son leídos directamente de la MPU realizando la fusión de sensores que forman los ángulos de Euler. Como los archivos de texto que contienen los datos suelen ser de un tamaño considerable, el *script* lee el archivo en bruto y genera vectores internos para cada columna de datos, los cuales reciben el nombre de *RAWData*, *UKFData* y *EKFData*, respectivamente.

4.3.2 Elaboración automática de gráficos.

Este *script* tiene la capacidad de realizar dos gráficos de resumen principales. El primer gráfico de resumen contiene tres sub gráficos que permite una visualización directa de los datos por cada muestra recolectada, y un sub gráfico adicional que muestra todas las señales en el mismo plano de forma superpuesta. Este gráfico de resumen es útil para ver la forma de onda proveniente de la captura de datos (véase Figura 32).

En el segundo gráfico de resumen, cada sub gráfico muestra la forma de onda de la señal muestreada superpuesta con la señal de referencia del sistema (véase Figura 25). De esta forma es posible tener una visión del comportamiento de las señales recolectadas por el sistema de captura de movimiento en comparación con la señal de referencia, evidenciando de forma gráfica la existencia de sobrepicos, corrimientos de fase, desfases, entre otros problemas de ruido.

Una importante herramienta que posee este *script* es permitir que los ejes de los sub gráficos se encuentren enlazados entre sí, tanto de forma vertical como horizontal, lo cual permite aplicar opciones de acercamiento, alejamiento y desplazamiento simultáneamente en todas las vistas.

4.3.3 Selección automática de muestras representativas para el análisis.

Al cargar un archivo de datos, el *script* analiza automáticamente el número de muestras ideal que se tendrán en cuenta para el análisis de RMSE. En reiteradas ocasiones puede que los datos se produzcan después de un estado de reposo, para lo cual el programa realiza un escaneo rápido de las muestras tomadas y determina un intervalo óptimo de análisis, eliminando estas posibles incoherencias de la información.

El número de muestras que se tienen en cuenta para el análisis de RMSE está dado en la variable *ChoppedSamples*, mientras que los vectores que son analizados posteriormente se guardan como *ChoppedRAW*, *ChoppedUKF* y *ChoppedEKF*, siguiendo la notación usada anteriormente. El *script* dará prevalencia al inicio y final de la señal más cercano al punto cero de referencia, conservando el mayor número de muestras posibles.

4.3.4 Autocorrelación cruzada de muestras.

Una vez se ha determinado el intervalo óptimo de muestras para realizar el análisis de la cantidad de error, el programa automáticamente detecta desfases e imprecisiones en el componente frecuencial de las señales de entrada, acomodando la señal de comparación o referencia para ajustarse de manera más acertada y uniforme a la señal muestreada. Este paso se realiza para obtener un RMSE más justo en las mediciones. Las señales originales a ser analizadas no resultan alteradas.

4.3.5 Cálculo automático de parámetros para señales biomecánicas

Cuando se analizan señales biomecánicas reales, algunos parámetros son desconocidos si no se posee un sistema de referencia con el cual contrastar las señales capturadas. Los parámetros que puede estimar este *script* automáticamente son la amplitud de los movimientos, el desfase de la señal con respecto al cero absoluto, el valor de flexión y extensión máximo y la velocidad del movimiento.

4.3.6 Cálculo automático del RMSE.

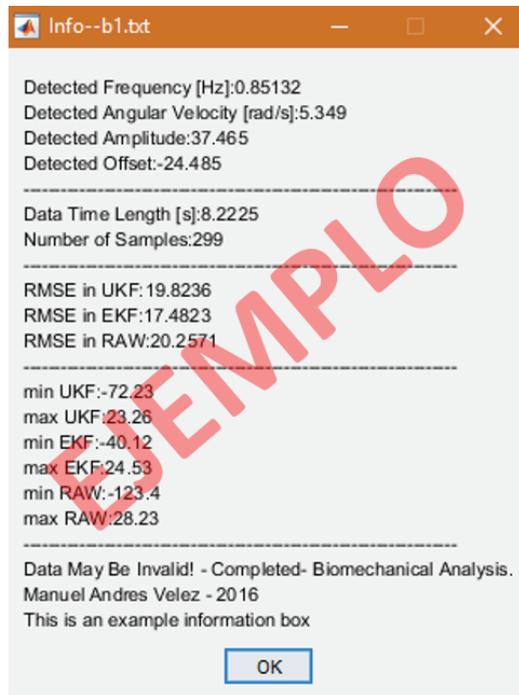
El *script* realiza el cálculo del RMSE con base a lo planteado en el desarrollo teórico y conceptual: Capítulo Uno, ecuación (3). Si el valor de RMSE es demasiado grande para una señal, se intentará evaluar el RMSE teniendo en cuenta un mejor ajuste de la señal de referencia.

En caso tal de no ser posible un RMSE acorde a los datos de entrada, bien sea porque la señal capturada es inválida o porque la señal de referencia es inválida, automáticamente el *script* envía una alerta indicando que los datos no pueden ser procesados en su totalidad, mostrando finalmente el mejor ajuste del RMSE obtenido de las señales.

4.3.7 Información de salida del sistema.

Incluyendo el valor de RMSE para las señales capturadas del movimiento biomecánico versus la referencia, el *script* de análisis muestra un resumen de todas las características descritas anteriormente. En la Figura 23 se muestra un ejemplo de la información de resumen que el programa brinda.

Figura 23. Ejemplo de la información de resumen que el programa de análisis brinda.



Fuente: Autores.

4.4 Simulación y análisis de la actividad biomecánica.

Se realiza la simulación del movimiento biomecánico usando la plataforma de experimentación planteada y siguiendo los protocolos de prueba establecidos en la metodología de la presente investigación. Un análisis exhaustivo de los datos recolectados es realizado por el *script* de procesamiento, del cual se obtiene una información concisa, relevante y característica, permitiendo establecer las conclusiones de la investigación en cuanto a la comparación del filtro de Kalman *Unscented* y el filtro de Kalman Extendido.

4.4.1 Resultados de la toma de datos establecida en el protocolo 1.

Se realiza la captura de datos en cinco tomas, cada una de ellas a velocidades angulares específicas, siendo estas 1, 5, 10 y 15 rad/s usando diversos valores

de desviación estándar en la medida (r) y en el proceso (q) para determinar el comportamiento más adecuado para el UKF y el EKF en cada velocidad.

El rango de valores para los parámetros r y q se estableció mediante análisis del comportamiento del sistema y de los MPU. Se obtuvieron los siguientes resultados en las tomas de datos para este protocolo.

Tabla 3. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 1 rad/s.

Protocolo 1: onda senoidal, $A=20^\circ$, $F_s=35\text{Hz}$, $T_c=20\text{s}$, velocidad angular 1 rad/s					
Toma	r	q	RMSE UKF	RMSE EKF	RMSE RAW
1	0.0115	0.00150	0.9767	4.0075	1.6284
2	0.0125	0.00140	1.2338	3.4927	1.5969
3	0.0135	0.00130	1.5570	3.3923	1.6773
4	0.0145	0.00120	1.7357	3.7051	1.6032
5	0.0155	0.00110	1.6331	2.2598	1.6573

Fuente: Autores.

Tabla 4. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 5 rad/s.

Protocolo 1: onda senoidal, $A=20^\circ$, $F_s=35\text{Hz}$, $T_c=20\text{s}$, velocidad angular 5 rad/s					
Toma	r	q	RMSE UKF	RMSE EKF	RMSE RAW
1	0.0115	0.00150	1.7185	2.1716	2.3441
2	0.0125	0.00140	1.6714	2.7123	2.3571
3	0.0135	0.00130	1.7778	3.9847	2.4511
4	0.0145	0.00120	1.8963	2.5083	2.2914
5	0.0155	0.00110	1.9724	2.6361	2.2015

Fuente: Autores.

Tabla 5. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 10 rad/s.

Protocolo 1: onda senoidal, $A=20^\circ$, $F_s=35\text{Hz}$, $T_c=20\text{s}$, velocidad angular 10 rad/s					
Toma	r	q	RMSE UKF	RMSE EKF	RMSE RAW
1	0.0115	0.00150	2.8260	2.9150	4.0095
2	0.0125	0.00140	2.7374	3.6058	3.9121
3	0.0135	0.00130	1.9749	3.5032	4.4946
4	0.0145	0.00120	2.6162	5.7471	4.0821
5	0.0155	0.00110	2.4627	4.3169	3.9325

Fuente: Autores.

Tabla 6. RMSE obtenido con diferentes valores para la desviación estándar en la medida (r) y el proceso (q) a una velocidad angular de 15 rad/s.

Protocolo 1: onda senoidal, $A=20^\circ$, $F_s=35\text{Hz}$, $T_c=20\text{s}$, velocidad angular 15 rad/s					
Toma	r	q	RMSE UKF	RMSE EKF	RMSE RAW
1	0.0115	0.00150	3.0604	3.9468	6.2643
2	0.0125	0.00140	2.7707	3.6852	6.2127
3	0.0135	0.00130	2.5218	2.7172	5.6735
4	0.0145	0.00120	3.3475	2.6614	5.1637
5	0.0155	0.00110	2.1974	3.1715	5.7678

Fuente: Autores.

Los valores sombreados dentro de cada tabla representan el RMSE más bajo obtenido para cada filtro, es decir, el resultado de mayor eficiencia al cual se asocian los valores de r y q correspondientes.

De lo anterior se deduce:

- Los valores de RMSE presentados en los datos que carecen de filtrado (*RAW*) no siempre son los más altos de la toma, como por ejemplo

la toma número dos de la Tabla 3, lo cual demuestra que los filtros sin estar correctamente sintonizados no pueden reducir de forma adecuada la cantidad de error en las señales que procesan, por lo cual es necesario hacer una sintonización de estos.

- Es posible observar que, en determinados casos, en especial para velocidades angulares menores de 5 rad/s, el valor de RMSE para el filtro de Kalman Extendido resulta ser mayor que el de los datos *RAW*, lo cual indica que, si bien el filtro puede estar cumpliendo con su labor, algunas de sus características propias como la deriva está afectando negativamente la respuesta que produce.
- A partir de la señal *RAW*, se observa que la cantidad de error crece a medida que incrementa la velocidad angular del movimiento, hallando una relación directa entre cantidad de error y la velocidad angular.
- Se establece una relación entre los parámetros de desviación estándar y la eficiencia del filtro para cada velocidad medida. Si se analiza una tabla individual de datos del protocolo 1, tanto el UKF como el EKF responden mejor a determinados valores de q y r que a otros, y este proceso de comparación permite realizar la sintonización que establece el valor de los parámetros más óptimos.
- Una selección específica de los parámetros de desviación estándar r y q que se adapte a una determinada velocidad angular resultará inválida para otro valor de velocidad angular, ya que dichos parámetros son dependientes también de la velocidad de los movimientos realizados.
- En general, el filtro con mejor comportamiento observado en cuanto a la reducción del RMSE se presenta en el filtro de Kalman *Unscented*. Los valores sombreados que están dentro de cada tabla y que exponen el resultado de mayor eficiencia para cada filtro siempre resulta menor para el UKF versus el EKF en todas las velocidades angulares elegidas.

De esta manera y dando cumplimiento a la meta del protocolo 1, los valores de los parámetros de desviación estándar que sintonizan de manera óptima los filtros, logrando una mayor reducción del RMSE para las velocidades angulares específicas propuestas, se relacionan en la Tabla 7. Adicionalmente se muestra en la Figura 24 el valor del RMSE obtenido con los parámetros

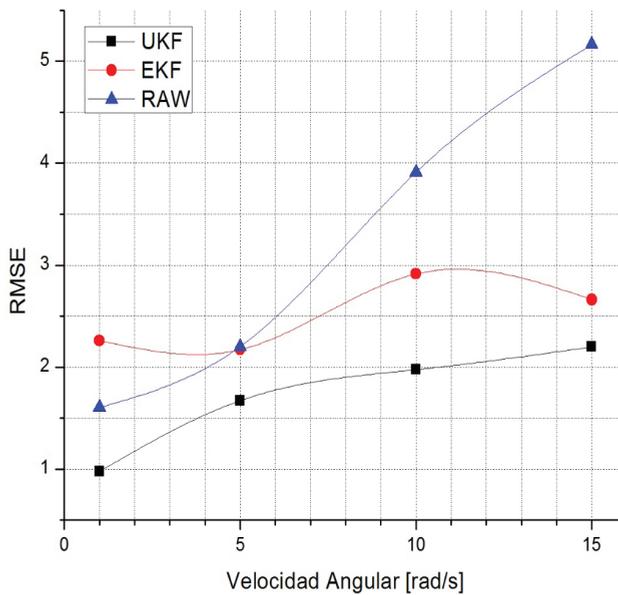
de desviación estándar óptimos para cada señal en las velocidades angulares seleccionadas.

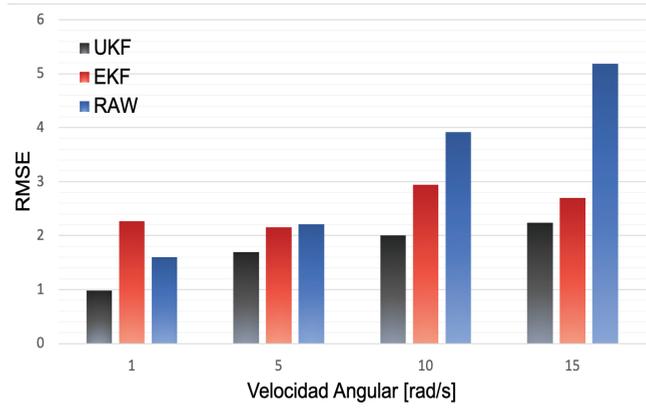
Tabla 7. Parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular específica.

Protocolo 1: desviaciones estándar óptimas para cada velocidad angular				
Velocidad Angular [rad/s]	UKF		EKF	
	r	q	r	q
1	0.0115	0.00150	0.0155	0.00110
5	0.0125	0.00140	0.0115	0.00150
10	0.0135	0.00130	0.0115	0.00150
15	0.0155	0.00110	0.0145	0.00120

Fuente: Autores.

Figura 24. Valor del RMSE obtenido con los parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular. Protocolo 1.





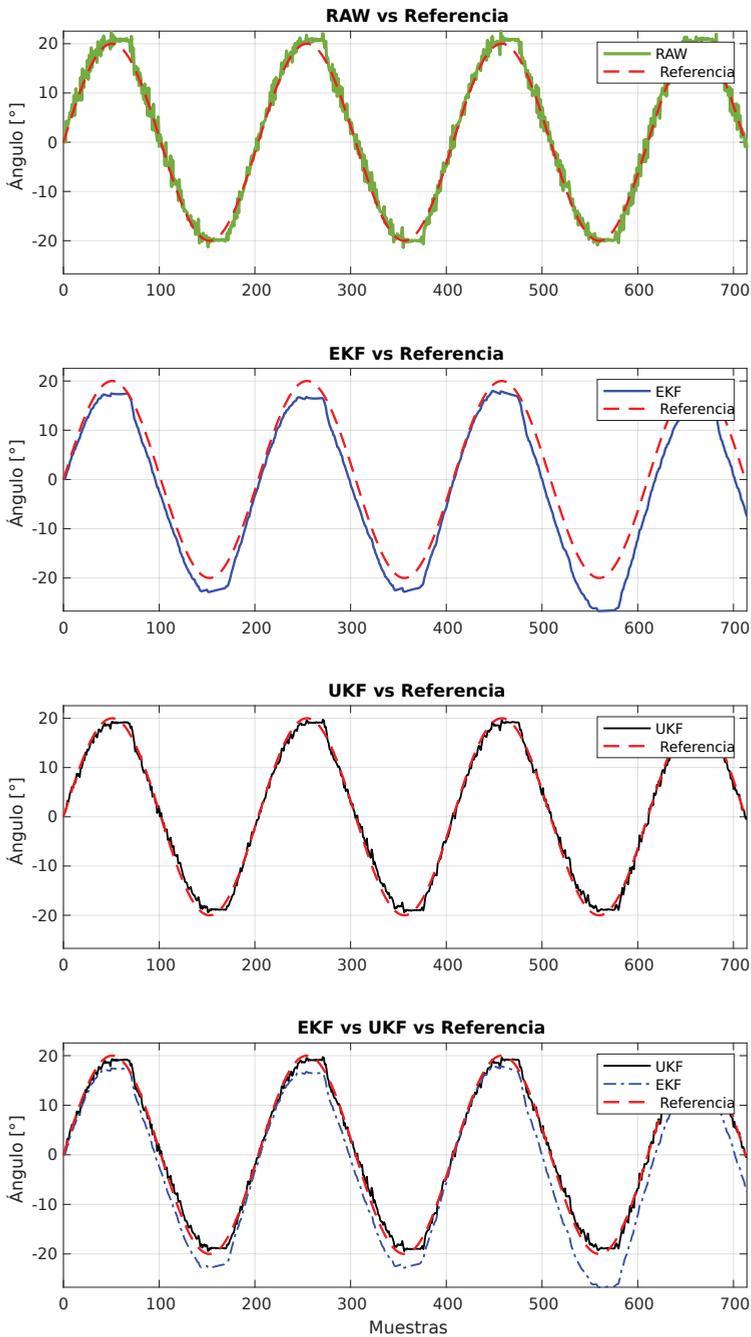
Fuente: Autores.

Mediante la visualización de los valores de RMSE obtenidos a diferentes velocidades angulares y usando los parámetros de filtro óptimos para cada velocidad, se complementa la lista de conclusiones de la toma de datos para este protocolo y confirma el análisis realizado.

Una comparación gráfica adicional de las señales simuladas versus la función de referencia del sistema (señal senoidal, amplitud $A=20^\circ$) en la Figura 25 y Figura 26, muestra que el EKF posee una desviación o lejanía con respecto a los valores reales de la señal que se puede deber a la introducción de la deriva propia de este filtro, lo cual reduce su eficiencia a pesar de que posea un buen nivel de suavizado en la forma de onda.

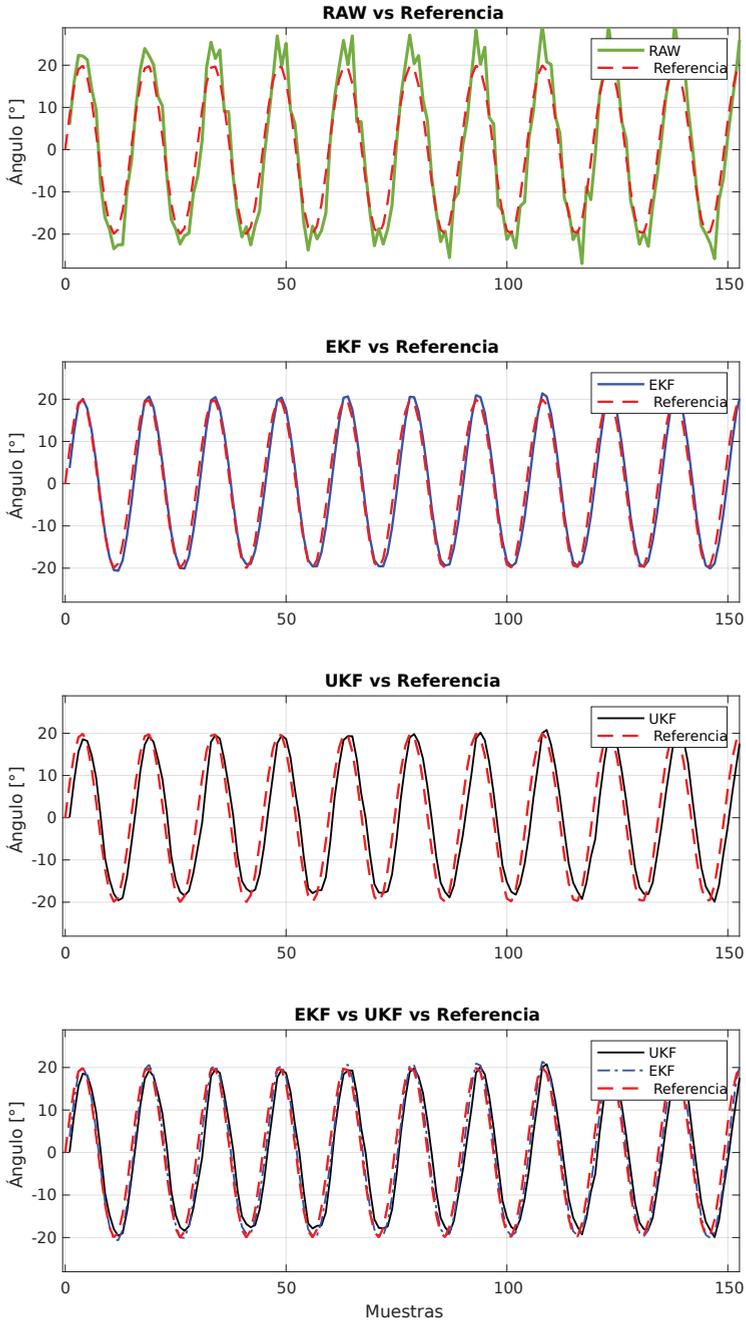
Por su parte, haciendo detalle en la Figura 25, el UKF presenta una aproximación más cercana a los valores reales, con la ventaja de la supresión de picos y ruidos vistos en la señal sin procesamiento.

Figura 25. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 1 rad/s. Protocolo 1.



Fuente: Autores.

Figura 26. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 10 rad/s. Protocolo 1.



Fuente: Autores.

4.4.2 Resultados de la toma de datos establecida en el protocolo 2.

En cumplimiento de la meta en el protocolo 2, se halla un valor de desviación estándar promediada para la medida ($\bar{x}r$) y desviación estándar promediada para el proceso ($\bar{x}q$).

Tabla 8. Parámetros de desviación estándar promediados.

Protocolo 2: parámetros de desviación estándar promediados				
Ítem	UKF		EKF	
	$\bar{x}ru$	$\bar{x}qu$	$\bar{x}re$	$\bar{x}qe$
Valor	0.013250	0.0013250	0.013250	0.0013250

Fuente: Autores.

Estos parámetros de desviación estándar promediados se hallan utilizando una media aritmética de los parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular específica, con el objetivo de poder usar un único valor de r y q válido para cualquier velocidad comprendida en el rango entre 1 y 15 rad/s.

Lograr obtener los parámetros óptimos en cada filtro para un rango de velocidades está justificado dentro de la investigación biomecánica, ya que los movimientos realizados por las extremidades superiores del cuerpo humano no son siempre a velocidades constantes, pero si se encuentran dentro de un rango determinado.

4.4.3 Resultados de la toma de datos establecida en el protocolo 3.

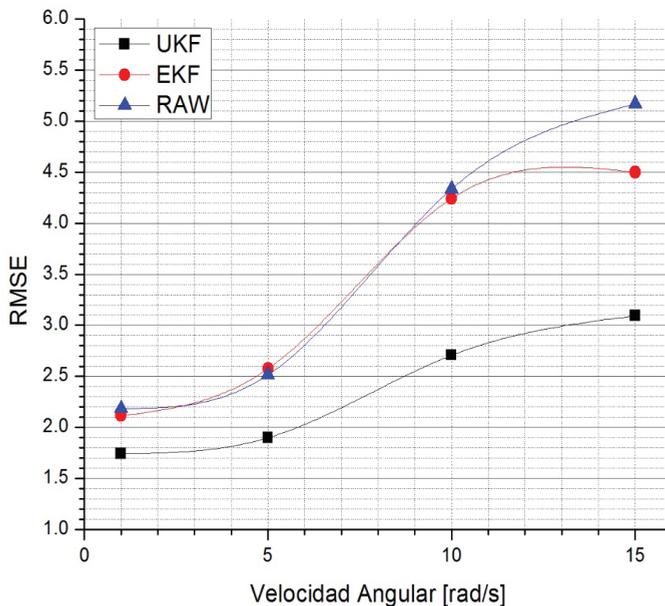
El protocolo 3 tiene por objetivo determinar si los valores encontrados de desviación estándar promediados son tan buenos como usar valores específicos para cada velocidad, pero con la ventaja de poder aplicar un único valor de r y q válido para cualquier velocidad comprendida en el rango entre 1 y 15 rad/s. El resultado de la toma de datos se presenta a continuación.

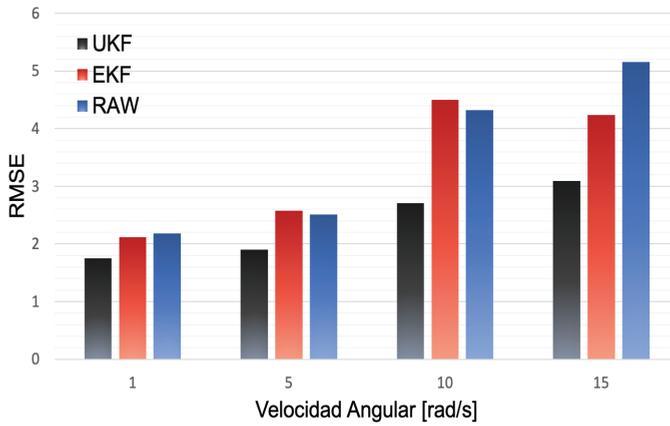
Tabla 9. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar específicas para cada velocidad en la medida y el proceso.

Protocolo 3: Se usan los valores de desviación estándar específicas para cada velocidad							
Velocidad Angular [rad/s]	UKF			EKF			RAW
	RMSE	r	q	RMSE	r	q	RMSE
1	1.7438	0.0115	0.00150	2.1145	0.0155	0.00110	2.1849
5	1.8993	0.0125	0.00140	2.5756	0.0115	0.00150	2.5151
10	2.7064	0.0135	0.00130	4.2424	0.0115	0.00150	4.3348
15	3.0938	0.0155	0.00110	4.4988	0.0145	0.00120	5.1685
\bar{x} RMSE	2.3608			3.3578			3.5508

Fuente: Autores.

Figura 27. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar específica para cada velocidad en la medida y el proceso





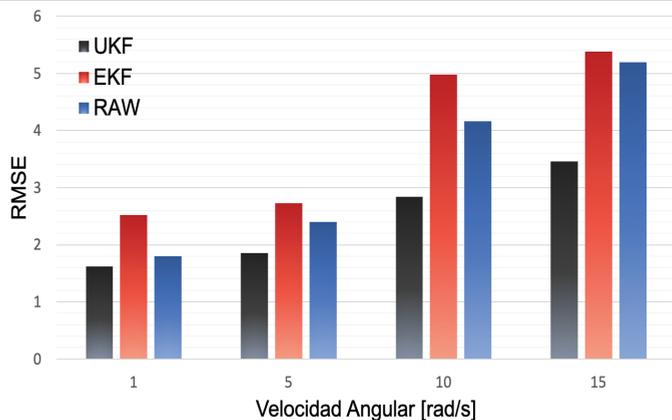
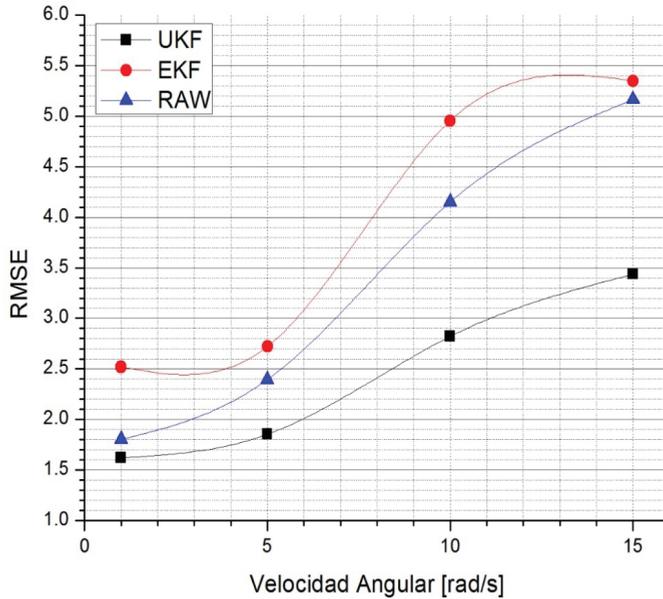
Fuente: Autores.

Tabla 10. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar promediados en la medida y el proceso.

Protocolo 3: Segunda Toma - Se usa el valor de desviación estándar promediada							
Velocidad Angular [rad/s]	UKF			EKF			RAW
	RMSE	\bar{x}_{ru}	\bar{x}_{qu}	RMSE	\bar{x}_{re}	\bar{x}_{qe}	RMSE
1	1.6219	0.01325	0.001325	2.5189	0.01325	0.001325	1.8019
5	1.8536			2.7221			2.3946
10	2.8211			4.9549			4.1503
15	3.4374			5.3494			5.1651
\bar{x} RMSE	2.4335			3.8863			3.3780

Fuente: Autores.

Figura 28. RMSE obtenido con diferentes valores de velocidad angular usando la desviación estándar promediados en la medida y el proceso.



Fuente: Autores.

Para complementar el análisis, se incluye en la Tabla 9 y 10, asociando la Figura 27 y 28, el promedio de los valores RMSE obtenidos para cada señal. De forma gráfica se puede examinar que, a pesar de que haya diferencia en el RMSE obtenido usando los parámetros del filtro específicos a la velocidad angular versus a los parámetros promediados, la diferencia no está fuertemente marcada.

Se realiza la comprobación numérica de dicha observación usando una diferencia entre los valores promedio del RMSE obtenidos usando los parámetros de desviación estándar óptimos para cada velocidad angular (escenario 1) versus los parámetros de desviación estándar promediado para el rango de velocidades (escenario 2).

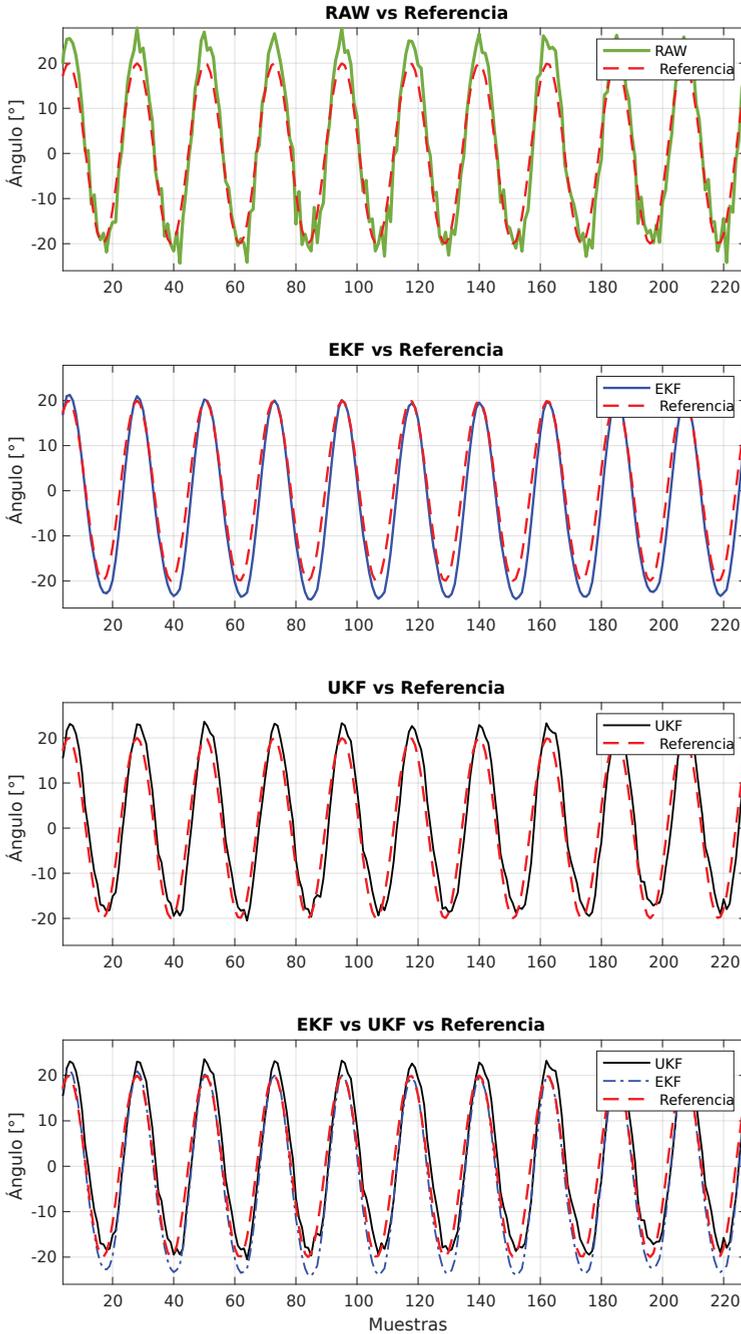
Tabla 11. Diferencia del RMSE promedio entre ambos escenarios del protocolo 3.

Ítem	\bar{x} RMSE UKF	\bar{x} RMSE EKF
Escenario 1	2.3608	3.3578
Escenario 2	2.4335	3.8863
Diferencia	0.0727	0.5285

Fuente: Autores.

- Se evidencia de forma numérica y analítica que, usando los parámetros de desviación estándar promediados para el rango de velocidades angulares, se obtiene una respuesta de los filtros moderadamente buena, equiparándose a los resultados obtenidos al emplear los parámetros de desviación estándar específicos para cada velocidad angular. Se considera que, para el análisis biomecánico en una aplicación real, la diferencia de 0.0727 grados en el filtro de Kalman *Unscented* y de 0.5285 grados en el filtro de Kalman Extendido no representa un error considerable en la información procesada.
- Como no hay una diferencia de error considerable entre ambas tomas, se establece el uso de los parámetros de desviación estándar promediados para el rango de velocidades angulares entre 1 y 15 rad/s, lo que permite fijar dichos valores para la recolección de datos sin importar la velocidad exacta a la cual se realice el movimiento, ideal para una aplicación real de captura de datos biomecánicos.
- Se observa que, independientemente de los parámetros usados para la sintonización del filtro, el filtro de Kalman *Unscented* sigue presentando menor RMSE en cualquier velocidad del movimiento biomecánico, indicando una ventaja sobre el filtro de Kalman Extendido.

Figura 29. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 15 rad/s. Protocolo 3 Escenario 2.



Fuente: Autores.

4.4.4 Resultados de la toma de datos establecida en el protocolo 4.

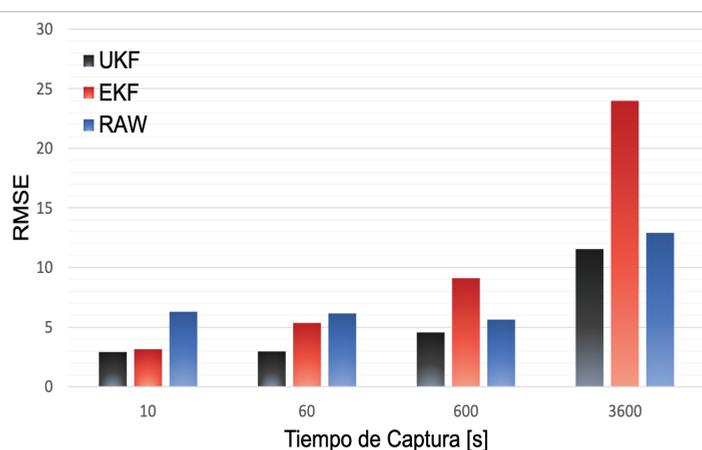
Tabla 12. Valor del RMSE obtenido en 1 y 15 rad/s con distintos tiempos de captura.

Protocolo 4: onda senoidal, $A=20^\circ$, $F_s=35\text{Hz}$, usando \bar{x}_r y \bar{x}_q						
Tiempo de Captura [s]	RMSE UKF		RMSE EKF		RMSE RAW	
	1 rad/s	15 rad/s	1 rad/s	15 rad/s	1 rad/s	15 rad/s
10	1.4414	2.8907	1.9481	3.1656	1.5302	6.3673
60	1.4284	2.9212	2.1654	5.3365	1.5705	6.1845
600	1.4163	4.4992	3.1621	9.1420	1.6442	5.6663
3600	2.8495	11.5380	3.0058	23.9760	3.0132	13.3716

Fuente: Autores.

El tiempo de captura incremental de los datos biomecánicos busca demostrar la estabilidad de los filtros a través de múltiples iteraciones, ya que, si bien muchas veces los datos son capturados en lapsos de tiempo relativamente cortos, hay muchas otras aplicaciones que requieren un monitoreo continuo de las señales.

Figura 30. Valor del RMSE obtenido a diferentes tiempos de captura de las señales a velocidad angular de 15 rad/s.

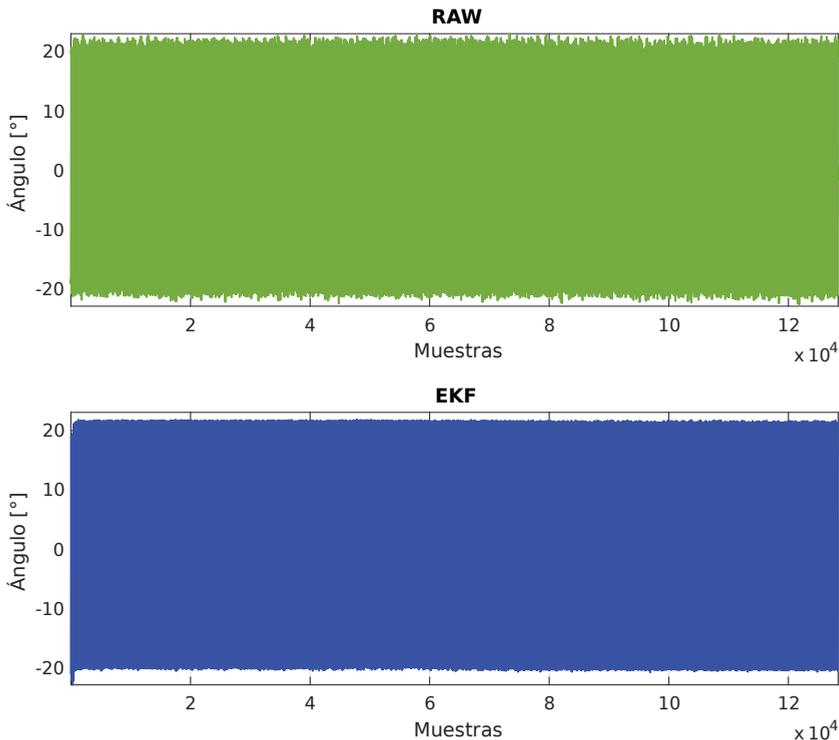


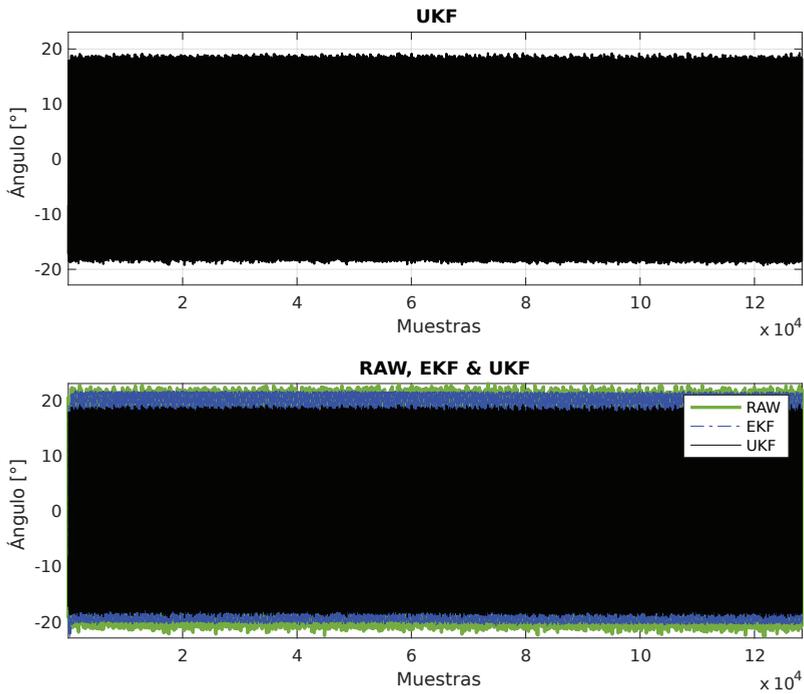
Fuente: Autores.

En este caso, el filtro de Kalman Extendido es el que presenta menor eficiencia en tiempos prolongados de captura, ya que se hace visible el problema de deriva que el mismo filtro genera, lo cual se comprueba con la visualización de las señales en la Figura 34 y 36. Sin embargo, se halla que el filtro de Kalman Extendido tiene una eficiencia similar, pero aún inferior que la del UKF únicamente para velocidades angulares bajas, en cualquier otro caso, el UKF resulta tener la mayor minimización del RMSE.

En términos comparativos de calidad del filtro en cuanto a minimización del RMSE y la estabilidad de su función con respecto al tiempo y al rango de frecuencias que van desde 1 a 15 rad/s, se puede concluir con toda seguridad que el filtro de Kalman *Unscented* es el más óptimo para ser usado en aplicaciones biomecánicas donde se haga captura de movimiento de flexión y extensión en los miembros superiores del cuerpo humano.

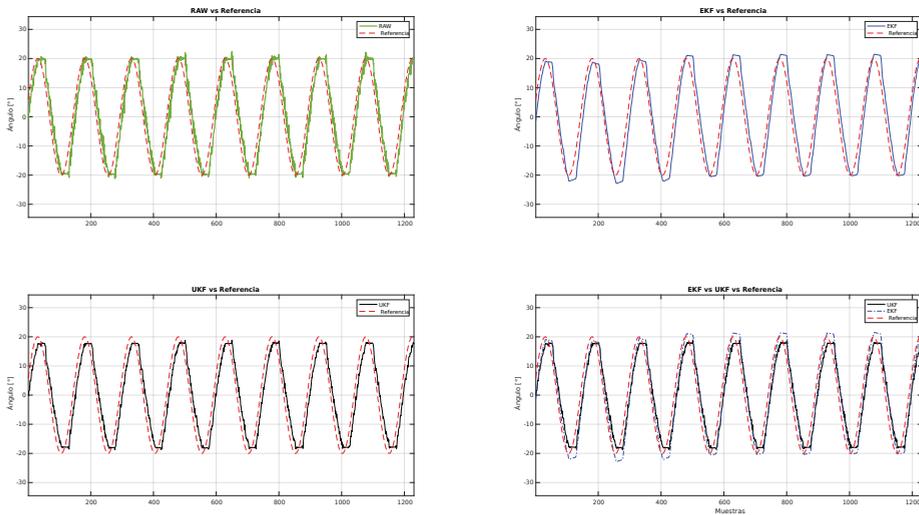
Figura 31. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.





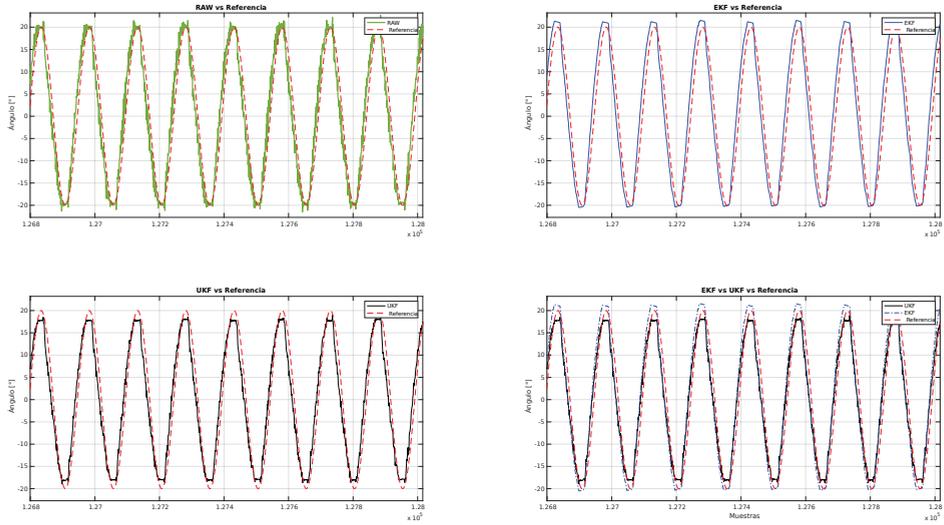
Fuente: Autores.

Figura 32. Detalle de la forma de onda al iniciar la captura, velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



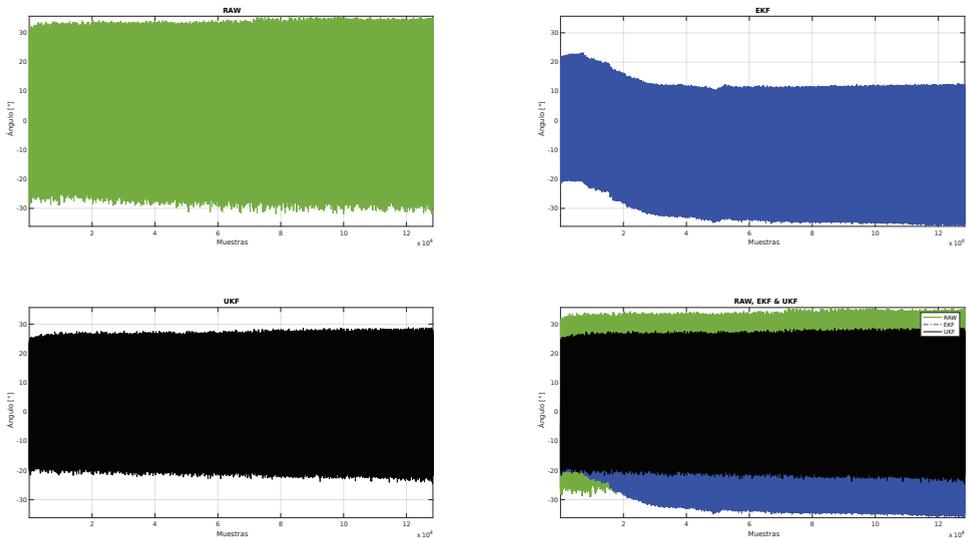
Fuente: Autores.

Figura 33. Detalle de la forma de onda al finalizar la captura, velocidad angular de 1 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



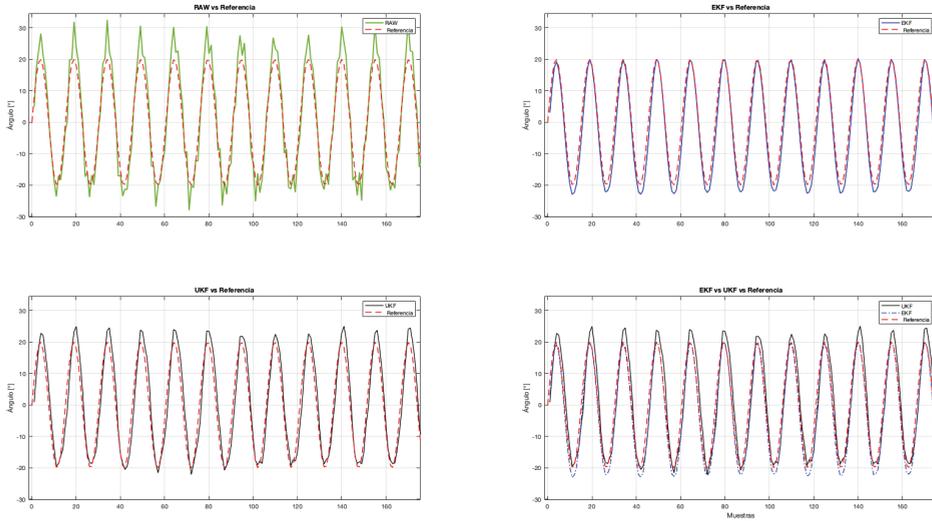
Fuente: Autores.

Figura 34. Visualización de la forma de onda a velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



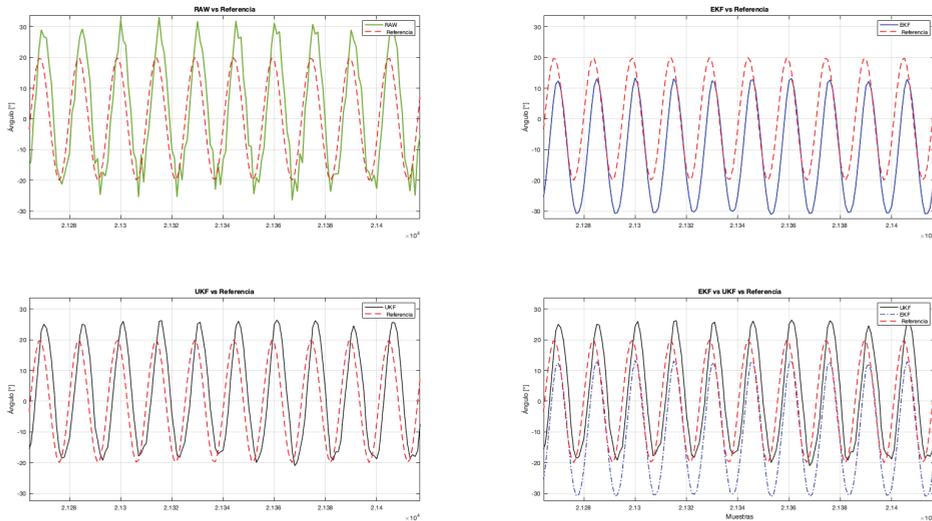
Fuente: Autores.

Figura 35. Detalle de la forma de onda al iniciar la captura, velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



Fuente: Autores.

Figura 36. Detalle de la forma de onda al finalizar la captura, velocidad angular de 15 rad/s y tiempo de captura 3600 s.



Fuente: Autores.

4.5 Captura y Análisis de Datos Biomecánicos Reales

Se realiza la captura del movimiento biomecánico real usando el sistema de captura de movimiento, siguiendo los protocolos de prueba establecidos en la metodología de la presente investigación. Un análisis exhaustivo de los datos recolectados es realizado por medio del *script* de procesamiento, del cual se obtienen conclusiones de la investigación en cuanto a la comparación de los filtros de Kalman *Unscented* y Extendido sobre la aplicación real del sistema.

4.5.1 Protocolo para la obtención de los datos biomecánicos.

Usando los parámetros de los filtros UKF y EKF sintonizados, se realizan cinco tomas de datos a diferentes velocidades para un movimiento real de flexión y extensión biomecánico, a una frecuencia de muestreo $F_s=35$ Hz con amplitud y tiempo de captura variables, con el propósito de analizar los valores de máxima flexión y extensión. En el registro de datos biomecánicos en aplicaciones como la rehabilitación física de personas, es habitual y de utilidad recolectar dichos valores.

4.5.2 Análisis de los datos biomecánicos.

Para el análisis de los datos biomecánicos reales, no es posible analizar el error en términos del RMSE puesto que no existe una señal con valores uniformes (velocidades angulares, amplitud articular) que pueda utilizarse como referencia. Se analizará en cambio los valores máximos de flexión y extensión alcanzados, sobre los cuales se determinará cual filtro obtuvo los datos más cercanos a la estimación real. Las tablas de los datos biomecánicos se presentan a continuación.

Tabla 13. Valores estimados para el movimiento biomecánico.

Estimación en datos biomecánicos				
Velocidad Angular [rad/s]	Amplitud Estimada [°]	Offset Estimado [°]	Valores Estimados	
			mín.	máx.
~0.5	23.15	-5.09	-28.23	18.06
~2	24.23	-0.54	-24.77	23.69

Continuación Tabla 13.

~4	35.19	-19.76	-54.95	15.43
~6	31.11	-11.07	-42.18	20.05
~8	28.66	-10.42	-39.08	18.24

Fuente: Autores.

Como no se dispone de una referencia, todos los parámetros de la Tabla 13 son estimados a partir de los datos reales de entrada. Para determinar la velocidad angular, el programa de análisis en MATLAB realiza una transformada de Fourier rápida que determina la frecuencia de las ondas generadas, y con este una aproximación a la velocidad del movimiento biomecánico generado en el brazo. Se analizaron los valores máximos y mínimos promedio de la señal, con la cual se obtiene la amplitud articular generada por la articulación del codo.

En la Tabla 14, se presenta los valores de máxima flexión y extensión de los datos biomecánicos aplicando los filtros de Kalman.

Tabla 14. Valores de máxima flexión y extensión de los datos biomecánicos capturados.

Datos Biomecánicos, Fs=35Hz, usando \bar{x} y \bar{x}_q						
Velocidad Angular [rad/s]	UKF		EKF		RAW	
	mín.	máx.	mín.	máx.	mín.	máx.
~0.5	-16.72	26.89	-9.21	38.43	-18.67	29.87
~2	-22.97	24.05	-24.03	25.14	-26.86	26.53
~4	-56.48	16.96	-51.39	17.45	-64.80	21.27
~6	-45.60	23.47	-33.88	24.92	-51.32	26.82
~8	-46.66	25.82	-18.89	30.85	-78.65	34.02

Fuente: Autores.

Cabe resaltar que las velocidades angulares están determinadas por el movimiento del brazo, y esta es variante.

Al comparar los máximos y mínimos de las señales capturadas y filtradas, versus los valores estimados hallados usando el programa de análisis en MATLAB, se obtiene la Tabla 15 de resultados.

Tabla 15. Diferencia entre los valores máximos y mínimos de las señales biomecánicas versus los valores estimados.

Evaluación del rendimiento con base a valores máximos y mínimos						
Angular Vel. [rad/s]	Diferencia UKF		Diferencia EKF		Diferencia RAW	
	mín.	máx.	mín.	máx.	mín.	máx.
~0.5	-11.51	-8.83	-19.02	-20.37	-9.56	-11.81
~2	-1.80	-0.36	-0.74	-1.45	2.09	-2.84
~4	1.53	-1.53	-3.56	-2.02	9.85	-5.84
~6	3.42	-3.42	-8.30	-4.87	9.14	-6.77
~8	7.58	-7.58	-20.19	-12.61	39.57	-15.78

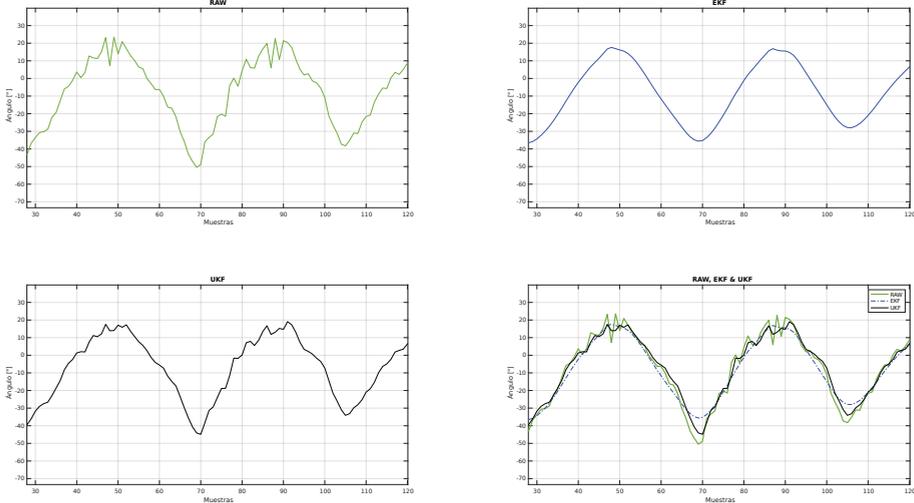
Fuente: Autores.

En el caso de la Tabla 15, el color sombreado denota los valores reales menos distantes de los valores estimados, dando un indicador de cuál de las señales es más ajustada al modelo en términos de sus valores pico.

Como es evidente, el filtro UKF sigue teniendo mejor rendimiento que el EKF, aun tratándose de señales biomecánicas.

Analizando los resultados de la Figura 37, se evidencia que el desempeño obtenido por el UKF supera al registrado por el EKF, teniendo como punto de partida la señal sin filtrar producida por los sensores.

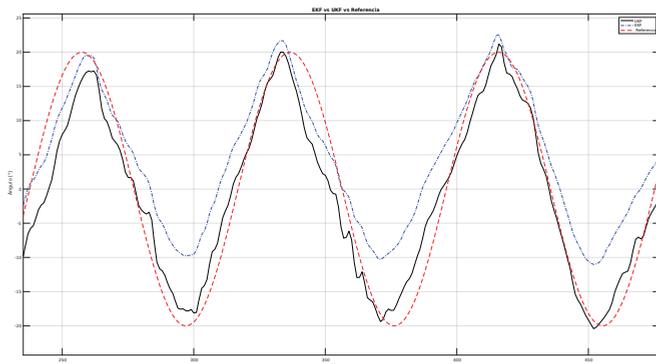
Figura 37. Forma de onda al capturar movimiento biomecánico de miembro superior (articulación del codo), velocidad angular aprox. de 6 rad/s y tiempo de captura 10 s.



Fuente: Autores.

Prosiguiendo con el análisis, en la Figura 38 se puede visualizar que en los valores de máxima flexión los filtros responden de manera similar al acercarse al valor de la señal estimada, mientras que, en los valores de máxima extensión, el UKF logra una mejor aproximación, concluyendo que este presenta un mejor desempeño.

Figura 38. Comparación de la forma de onda filtrada frente a la señal estimada, velocidad angular aprox. de 6 rad/s y tiempo de captura 10 s.



Fuente: Autores.

4.6 Análisis de Complejidad Computacional de los Algoritmos Filtro de Kalman *Unscented* y Extendido.

En el caso de esta investigación, el análisis de complejidad computacional de los algoritmos de filtrado da una idea de lo costoso que es para el procesador realizar las operaciones que permiten manipular la señal. Este análisis se realiza a través de la herramienta SourceMonitor^(*), la cual permite cargar los archivos de código fuente y analizar su complejidad de acuerdo con lo establecido en la sección de referencia de este libro: primer capítulo.

4.6.1 Análisis de complejidad del filtro de Kalman Extendido.

El filtro de Kalman Extendido está implementado mediante una librería con sus definiciones en un archivo externo, código fuente en C++. La Tabla 16 muestra un resumen de los parámetros que ayudan a determinar la complejidad computacional del filtro.

Tabla 16. Parámetros de complejidad Computacional medidos en el EKF.

LDC	PLCC	NDD	PDR	MPC	PMB	PPB	NDS	VDCM	VDC
221	18%	142	12%	13	3	1.91	91	12	5.60

Fuente: Autores.

Para 221 líneas de código que contiene el EKF, se encontró una complejidad computacional promedio de 5.60. El número de declaraciones juega un papel importante a la hora de calcular la complejidad computacional promedio, ya que determina el número de rutinas y funciones que comprenden el filtro. Para este análisis no se tuvo en cuenta las llamadas a funciones externas como conversión numérica, de constantes y operaciones matemáticas simples.

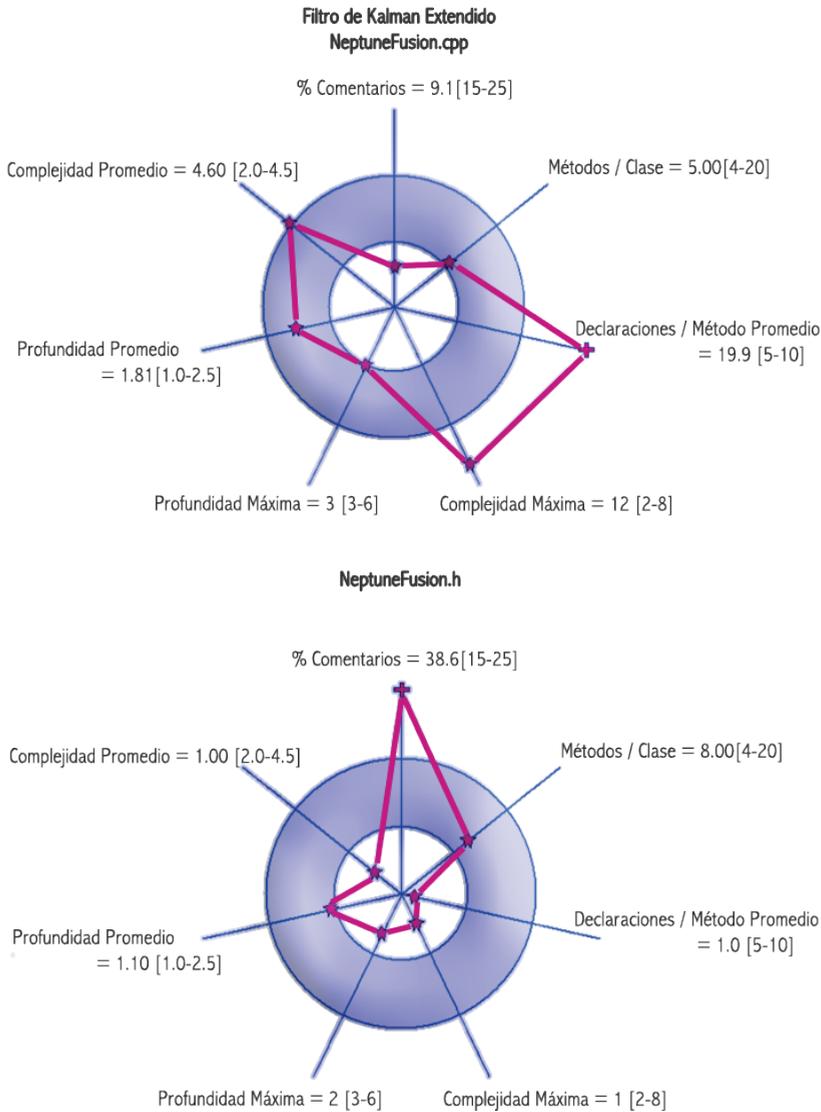
Cabe recordar que la evaluación de la complejidad de un algoritmo es una parte importante del diseño del mismo. Para este caso, el análisis de complejidad computacional toma relevancia ya que se busca que los filtros se ejecuten en tiempo real en un entorno de hardware embebido donde los recursos de procesamiento pueden ser limitados.

(*) Herramienta SourceMonitor, freeware desarrollado por Campwood Software. [103]

La evaluación de la complejidad computacional puede detectar algoritmos ineficientes antes de la implementación real, y es un paso en el proceso de calidad que no puede obviarse. Cuando se determinan los pasos más costosos (hablando computacionalmente) de un algoritmo complejo, el estudio de la complejidad permite enfocar estos pasos en el esfuerzo por mejorar la eficiencia de la implementación final [101]the book can be used as a reference for self-study for anyone interested in complexity, including physicists, mathematicians, and other scientists, as well as a textbook for a variety of courses and seminars. More than 300 exercises are included with a selected hint set. The book starts with a broad introduction to the field and progresses to advanced results. Contents include: definition of Turing machines and basic time and space complexity classes, probabilistic algorithms, interactive proofs, cryptography, quantum computation, lower bounds for concrete computational models (decision trees, communication complexity, constant depth, algebraic and monotone circuits, proof complexity).

En la Figura 39 presentada a continuación se puede apreciar el balance del código mediante una gráfica de Kiviat [102]the book can be used as a reference for self-study for anyone interested in complexity, including physicists, mathematicians, and other scientists, as well as a textbook for a variety of courses and seminars. More than 300 exercises are included with a selected hint set. The book starts with a broad introduction to the field and progresses to advanced results. Contents include: definition of Turing machines and basic time and space complexity classes, probabilistic algorithms, interactive proofs, cryptography, quantum computation, lower bounds for concrete computational models (decision trees, communication complexity, constant depth, algebraic and monotone circuits, proof complexity, la cual pondera los resultados para ofrecer una visión de la estructura del código basándose en el número de líneas de código. Se presenta una gráfica para el código del filtro y otra para el archivo de declaraciones, sin embargo, los resultados presentados en la tabla comprenden la suma de ambos.

Figura 39. Balance computacional del código del filtro de Kalman Extendido.



Fuente: Autores.

Los valores que se encuentran por dentro del borde interno del gráfico de Kiviati significan que se encuentran por debajo del estándar con respecto a las líneas de código del archivo, mientras que los valores por encima del borde externo significan que el parámetro está por encima del estándar con respecto a las líneas de código del archivo.

Lo ideal es que haya un balance alrededor del círculo dentro de la franja sombreada. Para el caso del filtro de Kalman Extendido se puede observar que tiene una función densa que representa el valor de complejidad máximo reportado, pero con respecto al número de líneas de código, todo el filtro tiene una complejidad al límite de los estándares.

Análisis de complejidad del filtro de Kalman *Unscented*.

El filtro de Kalman *Unscented* está implementado mediante una librería con sus definiciones en un archivo externo, código fuente en C++. La Tabla 17 muestra un resumen de los parámetros que ayudan a determinar la complejidad computacional del filtro.

Tabla 17. Parámetros de complejidad computacional medidos en el UKF.

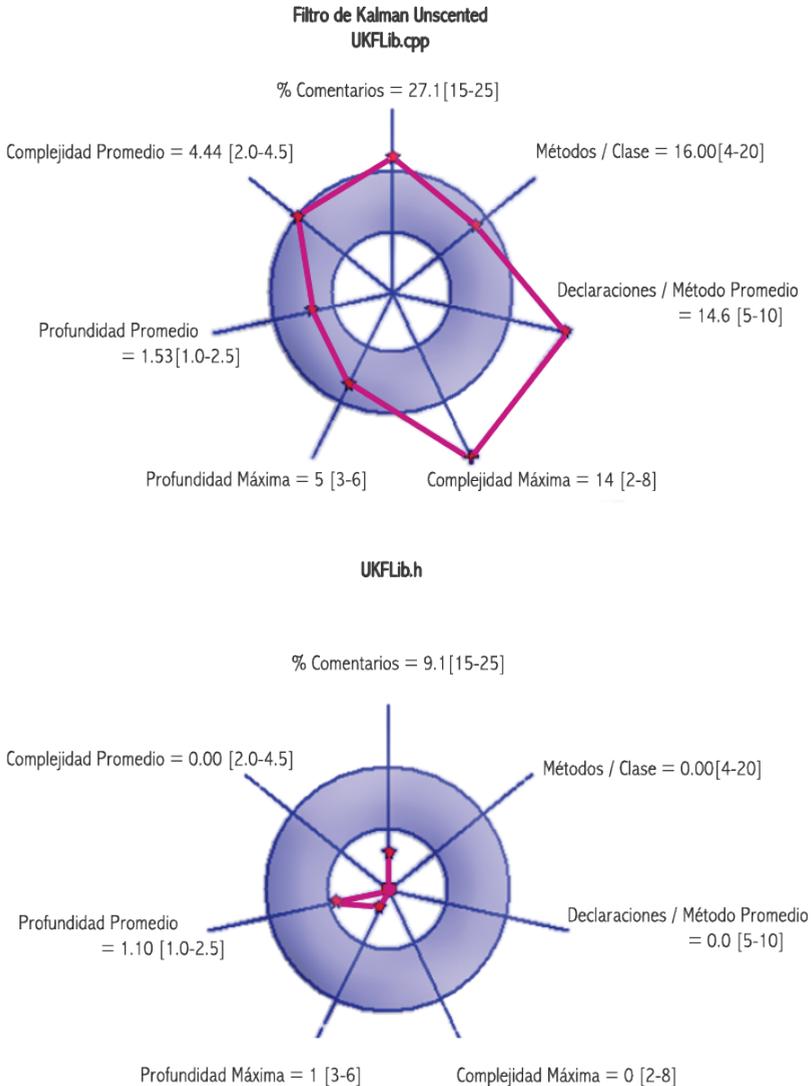
LDC	PLCC	NDD	PDR	MPC	PMB	PPB	NDS	VDCM	VDC
464	22%	275	22%	16	5	1.53	102	14	4.44

Fuente: Autores.

Para 464 líneas de código que contiene el UKF, se encontró una complejidad computacional promedio de 4.44. A pesar de que el número de líneas es elevado, la densidad no es tanta como la del EKF, y su complejidad por ende se reduce. Como dato importante se puede notar que el número de declaraciones (275 en total para 464 líneas versus 142 en total para 221 líneas en el EKF) es bastante grande, lo cual supone un tratamiento de la señal más elevado que en el EKF, pero sin consumir demasiados recursos computacionales.

En la Figura 40 presentada a continuación se puede apreciar el balance del código mediante una gráfica de Kiviat. Se presenta una gráfica para el código del filtro y otra para el archivo de declaraciones, sin embargo, los resultados presentados en la tabla comprenden la suma de ambos.

Figura 40. Balance computacional del filtro de Kalman *Unscented*.



Fuente: Autores.

Lo ideal es que haya un balance alrededor del círculo dentro de la franja sombreada [102]. Para el caso del filtro de Kalman Extendido se puede observar que tiene una función densa que representa el valor de complejidad máximo reportado, pero con respecto al número de líneas de código, todo el filtro tiene una complejidad al límite de los estándares, tal cual como en el EKF.

4.6.3 Análisis de complejidad conjunta de los filtros de Kalman.

Cuando se analizan los dos filtros de Kalman de forma conjunta, los algoritmos de en el sistema de captura de movimiento biomecánico representan apenas una pequeña fracción de la carga total del microcontrolador en el dispositivo embebido, ya que las funciones restantes se encargan de la comunicación con las MPU, la correcta transformación de la información y la presentación final de señales procesadas al usuario.

Se puede afirmar que el impacto del procesamiento de los filtros en el sistema de captura de movimiento es bajo en comparación con otras tareas críticas del sistema, lo cual permite que la etapa de filtrado se realice en tiempo real sin agregar retardo de tiempo de gran magnitud a la señal procesada resultante.

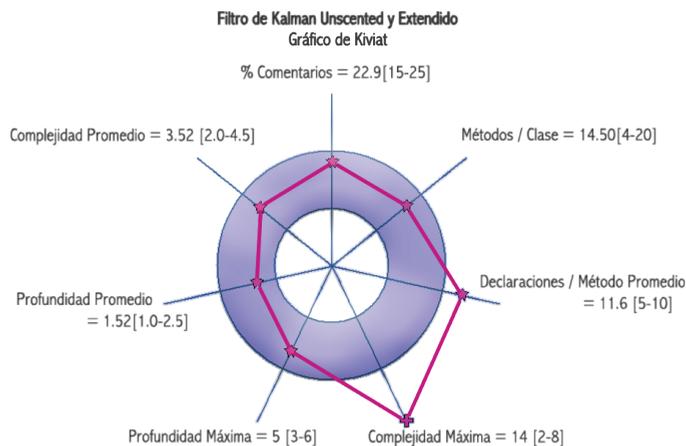
Se analizan los mismos parámetros tenidos en cuenta en cada prueba individual, los cuales se resumen en la Tabla 18 y la Figura 41.

Tabla 18. Parámetros de complejidad computacional conjunta.

LDC	PLCC	NDD	PDR	MPC	PMB	PPB	NDS	VDCM	VDC
685	23%	417	16%	14.5	5	1.52	193	14	3.52

Fuente: Autores.

Figura 41. Balance computacional de los Filtros de Kalman.



Fuente: Autores.

Los resultados anteriores muestran que, si bien la cantidad de líneas de código es elevada, la complejidad se reduce dado a que se compensan las funciones de ambos filtros. El diagrama de Kiviat muestra que, en relación al número de líneas de código, la implementación de los filtros es óptima en términos de complejidad computacional, ya que la mayoría de parámetros evaluados están dentro de la región sombreada de la gráfica.

Los dos parámetros por encima de los valores estándar son el número de máxima complejidad y el número de declaraciones por método, lo cual sugiere que pueden dividirse de una mejor manera las tareas de los filtros. El filtro que puede optimizarse de mejor manera es el UKF ya que presenta la función con la complejidad más alta de todas, finalmente lo que se busca es que la complejidad computacional no sea elevada en una sola implementación, y el procesador pueda optimizar más el uso de los recursos.

A nivel comparativo específico, el filtro de Kalman *Unscented* tiene más líneas de código con una complejidad menor, y esto se puede deber a que este filtro necesita más líneas de código para la generación y selección de los puntos Sigma, pero esto no representa un desafío mayor para el procesador. En cuanto al número de complejidad computacional promedio, se evidencia que el EKF presenta mayor costo, y numéricamente hablando, el uso del UKF tiene un ahorro del costo en complejidad computacional del 20.71% para la versión creada específicamente para la investigación.

CAPÍTULO 5

5. Conclusión

El uso de tecnologías recientes para la captura de movimiento biomecánico, tales como las MPU usados en el proyecto, permite una evaluación menos subjetiva cuando se trata de la valoración de movimientos relacionados con el cuerpo humano.

Se evidencia un mejor rendimiento del filtro de Kalman *Unscented* en comparación con el filtro de Kalman Extendido para el tratamiento de datos biomecánicos, específicamente en el movimiento de flexión y extensión de los miembros superiores en el cuerpo humano, teniendo en cuenta como parámetro la reducción del RMSE en la señal obtenida con respecto a la plataforma de referencia y con los movimientos efectuados por una persona.

El análisis de complejidad computacional mostró que el Filtro de Kalman *Unscented* presenta menos impacto en la ejecución del procesador al tener una complejidad computacional promedio menor a la del filtro de Kalman Extendido, más sin embargo ninguno de los dos filtros presenta un costo computacional elevado.

De este procesamiento de señales sumado a una nueva forma de captura de movimiento eficiente y adaptable a diversas aplicaciones, depende una gran capacidad de soportar y fomentar otras importantes aplicaciones en áreas diversas y de gran utilidad como la inteligencia artificial y la robótica. Con la captura y automatización de movimiento se pueden inferir y controlar comportamientos para obtener nuevas maneras de predicción y posterior autocorrección u optimización de las acciones de seres vivos y objetos previo a la propia ejecución del movimiento. Finalmente, se construye de esta forma procesos ágiles de realimentación para el desarrollo de objetos autónomos y autosuficientes en sus movimientos.

Referencias

- [1] O. Šprdlík, *Detection and Estimation of Human Movement Using Inertial Sensors: Applications in Neurology*. Praga: České vysoké učení technické v Praze. Vypočetní a informační centrum, 2012.
- [2] M. Hazewinkel, Ed., *Encyclopaedia of Mathematics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995.
- [3] E. T. Jaynes and G. L. Bretthorst, *Probability theory : the logic of science*. Cambridge University Press, 2003.
- [4] M. R. Kosorok, *Introduction to empirical processes and semiparametric inference*. Springer, 2010.
- [5] E. L. Lehmann and G. Casella, *Theory of Point Estimation*. Springer, 1998.
- [6] J. O. Berger, *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*. New York, NY: Springer New York, 1985.
- [7] T. Chai and R. R. Draxler, "Root mean square error (RMSE) or mean absolute error (MAE)? – Arguments against avoiding RMSE in the literature", *Geosci. Model Dev.*, vol. 7, no. 3, pp. 1247–1250, Jun. 2014.
- [8] L. M. Surhone, M. T. Timpledon, and S. F. Marseken, *Root Mean Square Deviation*. Saarbrücken: Betascript Publishing, 2010.
- [9] R. L. Chambers and C. J. Skinner, *Analysis of survey data*. John Wiley, 2003.
- [10] W. H. Press, *Numerical recipes : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2007.
- [11] C.-E. Särndal, B. Swensson, and J. H. Wretman, *Model assisted survey sampling*. Springer-Verlag, 1992.
- [12] N. A. Campbell and J. B. Reece, *Biology*. Benjamin Cummings, 2002.

- [13] K. J. Rothman, S. Greenland, and T. L. Lash, *Modern epidemiology*. Lippincott - Williams & Wilkins, 2008.
- [14] S. Axler, *Linear Algebra Done Right*. Cham: Springer International Publishing, 2015.
- [15] I. N. Herstein, *Topics in algebra*. Wiley, 1975.
- [16] V. P. Tuzlukov, *Signal processing noise*. CRC Press, 2002.
- [17] S. A. Kassam, *Signal Detection in Non-Gaussian Noise*. New York, NY: Springer New York, 1988.
- [18] D. K. Arrowsmith, C. M. Place, and D. K. Arrowsmith, *Dynamical systems : differential equations, maps, and chaotic behaviour*. Chapman & Hall, 1992.
- [19] M. W. Hirsch and S. Smale, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press, 1974.
- [20] D. C. Lay, S. R. Lay, and J. McDonald, *Linear algebra and its applications*.
- [21] S. M. Ross, *Introduction to probability models*. Academic Press, 2010.
- [22] R. W. Hamming, *The art of probability for scientists and engineers*. Addison-Wesley, 1991.
- [23] D. E. Knuth, *The art of computer programming*. Addison-Wesley, 1997.
- [24] R. A. Johnson and D. W. Wichern, *Applied multivariate statistical analysis*. Pearson Prentice Hall, 2007.
- [25] R. A. Kent, *Data construction and data analysis for survey research*. Palgrave, 2001.
- [26] A. AghaKouchak, E. Habib, and A. Bárdossy, "Modeling Radar Rainfall Estimation Uncertainties: Random Error Model", *J. Hydrol. Eng.*, vol. 15, no. 4, pp. 265–274, Apr. 2010.
- [27] J. Cohen and J. Cohen, *Applied multiple regression/correlation analysis for the behavioral sciences*. L. Erlbaum Associates, 2003.
- [28] S. Puntanen, "Linear Regression Analysis: Theory and Computing by Xin Yan, Xiao Gang Su", *Int. Stat. Rev.*, vol. 78, no. 1, pp. 144–144, Apr. 2010.
- [29] S. K. Mitter and N. J. Newton, "A Variational Approach to Nonlinear Estimation", *SIAM J. Control Optim.*, vol. 42, no. 5, pp. 1813–1833, 2003.

- [30] R. Manish, U. Inseok Hwang, and A. Professor, “Linear and Non-linear Estimation Techniques: Theory and Comparison”
- [31] R. Priemer, *Introductory signal processing*. World Scientific, 1991.
- [32] EMBS Engineering in Medicine and Biology Society, “Biomedical Signal Processing”, 2015. [Online]. Available: <https://www.embs.org/about-biomedical-engineering/our-areas-of-research/biomedical-signal-processing/>. [Accessed: 02-May-2018].
- [33] H.-H. Chang and J. M. F. Moura, “Biomedical Signal Processing”, *Biomed. Eng. Des. Handb.*, vol. 2, no. 1, pp. 559–579, 2010.
- [34] NY Castings and joe Gatt, “Motion Capture Actors: Body Movement Tells the Story”, 2016. [Online]. Available: <https://www.motionanalysis.com/industry/video-games-film-tv/>. [Accessed: 02-May-2018].
- [35] University Of Michigan, “Movements of the Upper Limb. Learning Modules - Medical Gross Anatomy”, Michigan, 2015.
- [36] S. Maruvada and S. S. Bhimji, *Anatomy, Upper Limb, Shoulder, Rotator Cuff*. StatPearls Publishing, 2018.
- [37] N. Lee, “Flexion & Extension: Sagittal Plane Movements. Anatomy Language: Part II”, 2014. [Online]. Available: <http://www.nolanlee.com/blog/anatomy-language-part-ii>. [Accessed: 03-May-2018].
- [38] M. T. O’Toole, *Mosby’s medical dictionary*. Elsevier, 2009.
- [39] S. M. Sze, *Semiconductor sensors*. Wiley, 1994.
- [40] OptiTrack, “OptiTrack - Motion Capture Systems”, 2018. [Online]. Available: <https://optitrack.com/>. [Accessed: 03-May-2018].
- [41] Microsoft Corporation, “Meet Kinect for Windows” [Online]. Available: <https://developer.microsoft.com/en-us/windows/kinect>. [Accessed: 02-May-2018].
- [42] D. K. Shaeffer, “MEMS inertial sensors: A tutorial overview”, *IEEE Commun. Mag.*, vol. 51, no. 4, pp. 100–109, Apr. 2013.
- [43] N. Yazdi, F. Ayazi, and K. Najafi, “Micromachined inertial sensors”, *Proc. IEEE*, vol. 86, no. 8, pp. 1640–1659, 1998.
- [44] Meta Motion, “Gypsy 5™ by Meta Motion” [Online]. Available: <http://metamotion.com/>. [Accessed: 02-May-2018].

- [45] J. B. Angell, S. C. Terry, and P. W. Barth, “Silicon Micromechanical Devices”, *Sci. Am.*, vol. 248, no. 4, pp. 44–55, Apr. 1983.
- [46] MEMS Exchange MNX. “What is MEMS Technology?”, 2013. [Online]. Available: <https://www.mems-exchange.org/MEMS/what-is.html>. [Accessed: 02-May-2018].
- [47] N. Maluf and K. Williams, *Introduction to microelectromechanical systems engineering*. Artech House, 2004.
- [48] M. J. Madou, *Fundamentals of microfabrication and nanotechnology*. CRC Press, 2012.
- [49] Techtarget, “What is MEMS (micro-electromechanical systems)?” [Online]. Available: <https://internetofthingsagenda.techtarget.com/definition/micro-electromechanical-systems-MEMS>. [Accessed: 02-May-2018].
- [50] D. Scharf, “Utah Division of Arts & Museums - State Of Utah Art Collections: MEMS Art”, 2017. [Online]. Available: <http://utahdcc.force.com/public/PtIArtifacts>. [Accessed: 03-May-2018].
- [51] A. Khenkin, “Sonic Nirvana: MEMS Accelerometers as Acoustic Pickups in Musical Instruments | Sensors Magazine”, 2009. [Online]. Available: <https://www.sensormag.com/embedded/sonic-nirvanamems-accelerometers-as-acoustic-pickups-musical-instruments>. [Accessed: 03-May-2018].
- [52] H. Nyquist, “Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors”, *Phys. Rev.*, vol. 32, no. 1, pp. 110–113, Jul. 1928.
- [53] R. Kargon, P. Achinstein, and W. T. Kelvin, *Kelvin’s Baltimore lectures and modern theoretical physics: historical and philosophical perspectives*. MIT Press, 1987.
- [54] C. Song, “Commercial vision of silicon based inertial sensors”, in *Proceedings of International Solid State Sensors and Actuators Conference (Transducers ’97)*, vol. 2, pp. 839–842.
- [55] EPSON Seikō Epuson Kabushiki-gaisha, “Gyro sensors: How they work and what’s ahead”, 2016. [Online]. Available: https://www5.epsondevice.com/en/information/technical_info/gyro/. [Accessed: 02-May-2018].
- [56] M. Looney, “A simple calibration for MEMS gyroscopes”, *Analog Devices*, 2010. [Online]. Available: <https://www.edn.com/design/>

- sensors/4363439/A-simple-calibration-for-MEMS-gyroscopes. [Accessed: 02-May-2018].
- [57] D. Budker and M. Romalis, “Optical magnetometry”, *Nat. Phys.*, vol. 3, no. 4, pp. 227–234, Apr. 2007.
- [58] Laboratorio de Sensores y detectores SanDLab. Politecnico de Milán., “Laboratorio de Sensores y detectores” [Online]. Available: <http://risorse.dei.polimi.it/sensorlab/Research.php/>. [Accessed: 03-May-2018].
- [59] J. Lenz and S. Edelstein, “Magnetic sensors and their applications”, *IEEE Sens. J.*, vol. 6, no. 3, pp. 631–649, Jun. 2006.
- [60] J. J. Uicker, G. R. Pennock, and J. E. Shigley, *Theory of machines and mechanisms*.
- [61] InvenSense, “TDK Invensense MPU-9150” [Online]. Available: <https://www.invensense.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/>. [Accessed: 02-May-2018].
- [62] J. van Leeuwen, *Handbook of theoretical computer science*. Elsevier, 1990.
- [63] G. Brassard and P. Bratley, *Fundamentos de algoritmia*. Prentice Hall, 1997.
- [64] A. Mohr, “Quantum Computing in Complexity Theory and Theory of Computation”
- [65] S. McConnell, *Code complete: A Practical Handbook of Software Construction, Second Edition*. Microsoft Press, 2004.
- [66] D. Du and K.-I. Ko, *Theory of computational complexity*. John Wiley & Sons Inc, 2000.
- [67] E. Gamma, *Design patterns : elements of reusable object-oriented software*. Addison-Wesley, 1995.
- [68] K. B. Bruce, *Foundations of object-oriented languages : types and semantics*. MIT Press, 2002.
- [69] J. Kukunas, *Power and performance : software analysis and optimization*. MK Publishing, 2014.
- [70] K. D. Stetzel, L. L. Aldrich, M. S. Trimboli, and G. L. Plett, “Electrochemical state and internal variables estimation using a reduced-order physics-based model of a lithium-ion cell and an extended Kalman filter”, *J. Power Sources*, vol. 278, pp. 490–505, Mar. 2015.

- [71] W. Khoder and B. Jida, “A Quaternion Scaled Unscented Kalman Estimator for Inertial Navigation States Determination Using INS/GPS/Magnetometer Fusion”, *J. Sens. Technol.*, vol. 4, no. 2, pp. 101–117, Apr. 2014.
- [72] E. Cuevas, D. Zaldivar, and R. Rojas, “Kalman filter for vision tracking”, 2005.
- [73] S. Dablemont, S. Van Belleghem, and M. Verleysen, “Forecasting high and low of financial time series by particle filters and Kalman filters” 2007.
- [74] T. Lacey and N. A. Thacker, “Tutorial: The Kalman Filter”, 1st ed., Manchester, 1998, pp. 133–140.
- [75] L. Kleeman, “Understanding and Applying Kalman Filtering”, *Dep. Electr. Comput. Syst. Eng.*, 2013.
- [76] R. Faragher, “Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation [Lecture Notes]”, *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 29, no. 5, pp. 128–132, Sep. 2012.
- [77] B. Esme, “Kalman Filter For Dummies”, 2009. [Online]. Available: <http://bilgin.esme.org/BitsAndBytes/KalmanFilterforDummies>. [Accessed: 02-May-2018].
- [78] H. Levys, “The Extended Kalman Filter: An Interactive Tutorial for Non-Experts”, 2010. [Online]. Available: https://home.wlu.edu/~levys/kalman_tutorial/. [Accessed: 02-May-2018].
- [79] A. A. I. Lange, “Fast Kalman Filtering of the GPS Carrier-Phases for Mobile Positioning and Atmospheric Tomography”, *Sci. Fundam. Asp. Galileo Program.*, 2009.
- [80] A. Monfort, J.-P. Renne, and G. Roussellet, “A Quadratic Kalman Filter”, *J. Econom.*, vol. 187, no. 1, pp. 43–56, Jul. 2015.
- [81] G. Evensen, “The Ensemble Kalman Filter: theoretical formulation and practical implementation”, *Ocean Dyn.*, vol. 53, no. 4, pp. 343–367, Nov. 2003.
- [82] S. Haykin and I. Arasaratnam, “Cubature Kalman Filters”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 54, no. 6, pp. 1254–1269, 2009.
- [83] W. Dang and L. L. Scharf, “Extensions to the Theory of Widely Linear Complex Kalman Filtering”, May 2011.

- [84] R. E. Kalman and R. S. Bucy, “New Results in Linear Filtering and Prediction Theory”, *J. Basic Eng.*, vol. 83, no. 1, p. 95, Mar. 1961.
- [85] B. A. McElhoe, “An Assessment of the Navigation and Course Corrections for a Manned Flyby of Mars or Venus”, *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. AES-2, no. 4, pp. 613–623, Jul. 1966.
- [86] S. Thrun, W. Burgard, and D. Fox, *Probabilistic robotics*. MIT Press, 2005.
- [87] Y. Cao, “Learning the Unscented Kalman Filter”, *MathWorks*, 2010. [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18217-learning-the-unscented-kalman-filter>. [Accessed: 02-May-2018].
- [88] G. E. Farin and D. Hansford, *Mathematical principles for scientific computing and visualization*. AK Peters, 2008.
- [89] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, “A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems”
- [90] G. A. Terejanu, “Unscented Kalman Filter Tutorial”, *Dep. Comput. Sci. Eng.*, 2009.
- [91] E. A. Wan and R. van der Merwe, “The Unscented Kalman Filter”, in *Kalman Filtering and Neural Networks*, New York, USA: John Wiley & Sons, Inc., pp. 221–280.
- [92] S. J. Julier and J. K. Uhlmann, “Unscented Filtering and Nonlinear Estimation”, *Proc. IEEE*, vol. 92, no. 3, pp. 401–422, Mar. 2004.
- [93] M. Callejas, M. A. Vélez-Guerrero, A. F. Ruíz-Olaya, and R. M. Gutiérrez, *Architecture proposal for a support system to upper limb telerehabilitation by capturing biomechanical signals*, vol. 24, no. 40. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2015.
- [94] N. Xiong and P. Svensson, “Multi-sensor management for information fusion: issues and approaches”, *Inf. Fusion*, vol. 3, no. 2, pp. 163–186, Jun. 2002.
- [95] B. Salina and P. Malathi, “An Efficient Data Fusion Architecture for Location Estimation Using FPGA”, *Intl. Journal of Eng. Research & Tech. (IJERT)*, vol. 3, no. 1, pp. 2634–2639, 2014.
- [96] A. Xu, “2-Step Temporal Bayesian Networks (2TBN): Filtering, Smoothing, and Beyond”, School of Computer Science, McGill University, Montreal, Canada.

- [97] T. Reineking, “Particle filtering in the Dempster–Shafer theory“, *Intl. Journal of Approximate Reasoning*, vol. 52, no. 8, pp. 1124–1135, 2011.
- [98] M. Grewal and A. Andrews, *Kalman filtering*. New York: Wiley, 2001.
- [99] Y. Cao, “Learning the Extended Kalman Filter”, *MathWorks*, 2008. [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18189-learning-the-extended-kalman-filter>. [Accessed: 02-May-2018].
- [100] TowerPro, “SG90 Digital | Tower Pro”, 2015. [Online]. Available: <http://www.towerpro.com.tw/product/sg90-7/>. [Accessed: 03-May-2018].
- [101] S. Arora and B. Barak, *Computational Complexity: A Modern Approach*. New Jersey: Princeton University, 2015.
- [102] R. W. Elliott, “Kiviat-graphs as a means for displaying performance data for on-line retrieval systems”, *J. Am. Soc. Inf. Sci.*, vol. 27, no. 3, pp. 178–182, May 1976.
- [103] SourceMonitor, “SourceMonitor V3.5”, 2018. [Online]. Available: <http://www.campwoodsw.com/sourcemonitor.html>. [Accessed: 03-May-2018].



Manuel Andrés Vélez-Guerrero

Ingeniero Electrónico y Magíster en Ingeniería Electrónica de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Es profesor catedrático, joven investigador y miembro del Grupo de Investigación en Software de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Ha participado también como semillero de investigación y becario por investigación del grupo. Sus intereses de investigación están encauzados al desarrollo de tecnología para la salud, el deporte y el entretenimiento; diseño de sistemas electrónicos embebidos, procesamiento digital de señales, y sistemas inteligentes.



Andrea Catherine Alarcón Aldana

Ingeniera de Sistemas y Computación de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tiene una especialización en Ingeniería de Software por la Universidad INCCA de Colombia y una Maestría en Software Libre por la Universidad Autónoma de Bucaramanga en convenio con la Universidad Oberta de Cataluña. Es profesora asistente y miembro del Grupo de Investigación en Software de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Sus intereses de investigación están orientados a la implementación de tecnologías en el área de la salud y la ingeniería de software, educación en ingeniería.

COLECCIÓN INVESTIGACIÓN N.º 134

Este libro es un aporte a la investigación de técnicas de procesamiento de señales digitales reuniendo los elementos teóricos fundamentales para la construcción y el diseño de filtros basados en el algoritmo de Rudolf E. Kalman. Además, se presenta la aplicación de conceptos teóricos a un caso de estudio, el cual presenta el tratamiento y la mejora de las señales biomecánicas producidas por el cuerpo humano. Se determina que la implementación de filtros eficientes proporciona mejores resultados en la generación de la información biomecánica, lo que minimiza los factores que dificultan el uso adecuado de los datos. El diseño e implementación de filtros digitales abre una amplia gama de desarrollos en cuyos beneficios resaltan la posibilidad de crear sistemas de recopilación de información más eficientes y el inicio de otras investigaciones destinadas a mejorar la transmisión de datos, la implementación de algoritmos en sistemas integrados y el procesamiento adecuado de datos digitales.



978-958-660-351-5

