

JOSÉ FRANCISCO LEGUIZAMÓN ROMERO

# Patrones de Interacción Comunicativa en el Aula de Matemáticas

ISBN: 978-958-660-805-3



## José Francisco Leguizamón Romero

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), tecnólogo en Sistematización de Datos de la Universidad Antonio Nariño, especialista en Matemáticas Avanzadas de la Universidad Nacional de Colombia, magíster en Educación énfasis en Docencia Universitaria de la Universidad Pedagógica Nacional y doctor en Ciencias de la Educación de la UPTC. Profesor titular de la UPTC. Director en varios periodos de la Licenciatura en Matemáticas (UPTC). Par evaluador reconocido por Minciencias. Miembro de los grupos de investigación PIRAMIDE y Dinámica Contable GIDICON categorizados en Minciencias. Conferencista en eventos nacionales e internacionales. Autor de libros y artículos en revistas indexadas.

francisco.leguizamom@uptc.edu.co  
<https://orcid.org/0000-0002-4131-9582>

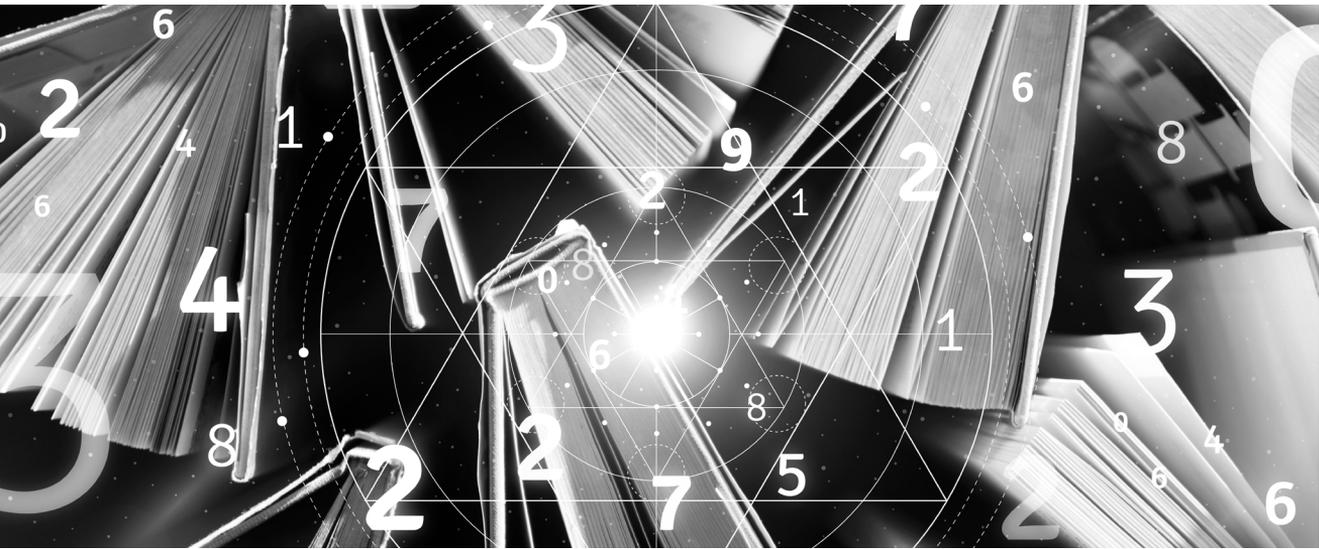
COLECCIÓN  
INVESTIGACIÓN

$$\sqrt[4]{4^n + \cos 2n!} \left( \frac{n^2 + n - 1}{n^2 - 2n + 3} \right)^5$$
$$n \geq n_0 : (x_n)$$

**PATRONES DE INTERACCIÓN  
COMUNICATIVA EN EL AULA DE  
MATEMÁTICAS**

JOSÉ FRANCISCO LEGUIZAMÓN ROMERO

# Patrones de interacción comunicativa en el aula de matemáticas



Colección Tesis Doctorales UPTC-RUDECOLOMBIA  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
Facultad de Ciencias de la Educación  
Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA  
Red de Universidades Estatales de Colombia  
2023

Patrones de interacción comunicativa en el aula de matemáticas / Patterns of Communicative Interaction in the Mathematics Classroom/ Leguizamón Romero, José Francisco. Tunja: Editorial UPTC, 2023, 260 p.

ISBN (impreso) 978-958-660-805-3

ISBN (ePub) 978-958-660-804-6

Incluye referencias bibliográficas.

1. Educación. 2. Matemáticas. 3. Práctica pedagógica. 4. Comunicación. 5. Enseñanza.

(Dewey 370/21) (THEMA PB - Matemáticas)



ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL  
DE ALTA CALIDAD  
MULTICAMPUS  
Reconocimiento otorgado en 2021 por el 7.º ciclo



Primera edición, 2023

200 ejemplares (impresos)

Patrones de interacción comunicativa en el aula de matemáticas

Patterns of Communicative Interaction in the Mathematics Classroom

ISBN (impreso) 978-958-660-805-3

ISBN (ePub) 978-958-660-804-6

Colección Tesis Doctorales

UPTC - RUDECOLOMBIA

Tomo N.º 17

Recepción: mayo 2022

Aprobación: enero 2023

© José Francisco Leguizamón Romero, 2023

© Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2023

© Red de Universidades Estatales de Colombia.

RUDECOLOMBIA, 2023

Editorial UPTC

La Colina, Bloque 7, Casa 5

Avenida Central del Norte N.º 39-115, Tunja, Boyacá

comite.editorial@uptc.edu.co

www.uptc.edu.co

**Rector UPTC**

Enrique Vera López

**Comité Editorial**

Dr. Carlos Mauricio Moreno Téllez

Dr. Jorge Andrés Sarmiento Rojas

Dra. Yolima Bolívar Suárez

Dra. Ruth Maribel Forero Castro

Mg. Pilar Jovanna Holguín Tovar

Dra. Nelsy Rocío González Gutiérrez

Mg. Edgar Nelson López López

**Editor en Jefe**

Dr. Oscar Pulido Cortés

**Coordinadora Editorial**

Andrea María Numpaque Acosta

**Corrección de Estilo**

Claudia Helena Amarillo Forero

**Diagramación e impresión**

**Editorial JOTAMAR LTDA.**

Calle 57 N.º 3 - 39.

Tunja - Boyacá - Colombia.

Libro financiado por el Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA. Este material publicado en papel y versión digital es propiedad de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Se permite la reproducción parcial citando la fuente y con la autorización expresa de los titulares del derecho de autor. Este libro es registrado en Depósito Legal, según lo establecido en la Ley 44 de 1993, el Decreto 460 del 16 de marzo de 1995, el Decreto 2150 de 1995 y el Decreto 358 de 2000.

Impreso y hecho en Colombia - Printed and made in Colombia

Citación: Leguizamón, José Francisco, *Patrones de Interacción Comunicativa en el Aula de Matemáticas*: Tunja, Editorial UPTC, Colección Tesis Doctorales UPTC-RUDECOLOMBIA. Tomo N.º 17, Facultad de Ciencias de la Educación, 2023.

**Colección Tesis Doctorales UPTC- RUDECOLOMBIA**  
**Tomo N°. 17**



**Facultad de Ciencias de la Educación**

Ph. D. Julio Aldemar Gómez Castañeda, Decano

**Directora de la colección**

Ph. D. Diana Elvira Soto Arango

Directora Académica

Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA

**Revisión editorial**

**Colectivo de Publicaciones del Doctorado en Ciencias de la Educación**  
**UPTC-RUDECOLOMBIA**

Diana Elvira Soto Arango, Ph. D.

Sandra Liliana Bernal Villate, Ph. D.

Bertha Ramos Holguín, Ph. D.

**Autor/a:**

José Francisco Leguizamón Romero

**Título:** Patrones de interacción comunicativa en el aula de matemáticas

**Imagen portada:**

Imagen clases de matemáticas

Autoría: Freepik

Las ideas expuestas en la obra son responsabilidad exclusiva del autor, la UPTC y el Doctorado en Ciencias de la Educación RUDECOLOMBIA no se hacen responsables en ningún caso de la autenticidad del escrito.



## Resumen

En este libro se analizan aspectos de la práctica profesional, en especial los patrones de interacción comunicativa de docentes de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC y su resignificación con base en la reflexión sobre su propia práctica. Para ello, se emplearon referentes desde cuatro grandes tópicos: las interacciones; los modelos pedagógicos y didácticos del profesor; el análisis didáctico de una clase, haciendo énfasis en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, el cual fue tomado como referente para este estudio; y la comunicación, entendida como una interacción social mediada por el lenguaje, en la que el objetivo de cada sujeto es entender y hacerse entender. Esta investigación corresponde a un estudio mixto con predominio cualitativo, enfoque descriptivo interpretativo y metodología de estudio de caso. El trabajo de campo consistió en actividades realizadas dentro del Grupo de Trabajo Colaborativo — compuesto por tres profesores y el investigador, todos de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC —, en las cuales se reflexionó sobre la práctica pedagógica de los participantes del grupo. Se llevó a cabo un análisis completo antes, durante y después del trabajo colaborativo, que permitió determinar aspectos de resignificación. Una de las conclusiones fundamentales de la investigación es que, al finalizar la labor con el grupo de trabajo colaborativo, los docentes lograron dar un nuevo significado a sus prácticas profesionales, pues pasaron de una tipología de clase con características unidireccionales a una con características reflexivas. También consiguieron resignificar los patrones de interacción comunicativa, puesto que en la primera fase se presentaron patrones centrados en el profesor, pero después estos se enfocaron en el estudiante.

**Palabras clave:** Educación, Matemáticas, Práctica Pedagógica, Comunicación, Enseñanza.

## Abstract

This book analyses aspects of professional practice, especially the patterns of communicative interaction of professors of the Bachelor of Mathematics at UPTC and their resignification based on reflection on their own practice. For this purpose, four main topics were used as reference points: interactions; the professors' pedagogical and didactic models; the didactic analysis of a class, emphasizing the onto-semiotic approach to mathematical cognition, which was taken as a reference for this study; and communication, understood as a social interaction mediated by language, in which the objective of each subject is to understand and be understood. This research corresponds to a mixed study with qualitative predominance, interpretive descriptive approach and case study methodology. The fieldwork consisted of activities carried out within the Collaborative Work Group, composed of three professors and the researcher, all with a Degree in Mathematics from the UPTC, in which they reflect on the pedagogical practice of the participants in the group. A complete analysis was carried out before, during and after the collaboration, which made it possible to identify aspects of resignification. One of the fundamental conclusions of the research is that, at the end of the work with the collaborative workgroup, the professors were able to give a new meaning to their professional practices, moving from a class typology with unidirectional characteristics to one with reflective characteristics. They also managed to resignify the patterns of communicative interaction, since in the first phase patterns were presented that centered on the professor, but later they focused on the student.

**Keywords:** Education, Mathematics, Pedagogical Practice, Communication, Teaching.

# Tabla de Contenido

## Introducción

### Capítulo 1.

#### Generalidades..... 23

1.1 La problemática..... 24

1.2 Justificación del estudio..... 33

### Capítulo 2.

#### Metodología..... 37

2.1 Fases de la investigación..... 38

2.2 Opciones metodológicas..... 38

2.3 Proceso metodológico..... 42

2.4 Sujetos investigados. Un estudio de casos..... 47

2.5 Métodos, instrumentos y procedimientos para la recolección  
de información..... 48

2.5.1 La observación..... 49

2.5.2 Observaciones de clases de matemáticas..... 50

2.5.3 La entrevista..... 50

2.5.4 Cuestionarios..... 50

2.5.5 Entrevista no estructurada..... 50

2.5.6 Entrevistas semiestructuradas..... 50

2.5.7 Reuniones de trabajo conjunto..... 51

2.6 Validez de los instrumentos y del análisis de la información..... 51

2.6.1 Credibilidad..... 51

2.6.2 Transferibilidad..... 52

2.6.3 Dependencia..... 52

2.6.4 Confirmabilidad..... 52

<b>Capítulo 3.</b>	
<b>Grupo de trabajo colaborativo.....</b>	<b>53</b>
3.1 Trabajo en contexto colaborativo.....	54
3.2 El grupo.....	59
3.3 Reflexiones y discusiones en el grupo.....	65
3.4 Reflexiones sobre el grupo.....	73
<b>Capítulo 4.</b>	
<b>Las interacciones en el aula de matemáticas.....</b>	<b>75</b>
4.1 Adaptaciones del interaccionismo simbólico a la educación matemática.....	77
4.2 Caracterización del interaccionismo simbólico y la educación matemática.....	79
4.2.1 Significado.....	79
4.2.2 Conocimiento matemático.....	79
4.2.3 Lenguaje.....	79
4.2.4 Aprendizaje.....	80
4.2.5 Enseñanza.....	80
4.3 Los patrones de interacción y comunicación.....	81
4.4 Interacción en que la intervención del profesor es discreta.....	98
4.5 Aspectos interaccionales en la teoría de situaciones didácticas.....	101
4.6 Tipos de interacción y modelo didáctico del profesor.....	104
4.7 Modelos didácticos del profesor.....	104
4.8 Análisis de interacción. Caso Fernando.....	111
4.9 Análisis de interacción. Caso Juan.....	127
<b>Capítulo 5.</b>	
<b>Análisis didáctico.....</b>	<b>143</b>
5.1 Acerca del análisis.....	145
5.2 Análisis didáctico en la educación matemática.....	147
5.3 Modelo de análisis didáctico del Grupo PNA de la Universidad de Granada.....	149
5.3.1 Análisis didáctico en relación con las capacidades del profesor de matemáticas.....	152
5.4 Algunos aspectos teóricos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática.....	154
5.5 Emergencia de los objetos matemáticos.....	157

5.5.1 Objeto institucional OI.....	157
5.5.2 Objetos matemáticos primarios.....	158
5.5.3 Objetos matemáticos secundarios.....	159
5.6 Formas de análisis del desarrollo de una clase de matemáticas.....	160
5.7 Identificación de prácticas matemáticas en una clase de matemáticas.....	162
5.8 Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.....	163
5.9 Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.....	165
5.10 Identificación del sistema de normas y metanormas.....	165
5.11 Valoración de la idoneidad didáctica.....	166
5.12 Modelo de análisis didáctico utilizado en esta investigación.....	168
5.13 Estudios empíricos relacionados con el modelo de análisis didáctico del EOS.....	168
5.14 Análisis didáctico. Caso Fernando.....	171
5.15 Análisis didáctico. Caso Juan.....	182
<b>Capítulo 6.</b>	
<b>La comunicación.....</b>	<b>193</b>
6.1 Algunos modelos explicativos de la comunicación.....	196
6.1.1 Modelo sistémico.....	196
6.1.2 El modelo lineal o telegráfico.....	196
6.1.3 Modelo orquestal de comunicación.....	197
6.2 Clases de comunicación.....	198
6.3 Semiótica y comunicación.....	199
6.3.1 Semiótica.....	199
6.3.2 Los signos.....	200
6.3.3 Los códigos.....	203
6.4 La comunicación en el aula de matemáticas.....	205
6.5 Comunicación y tendencias didácticas.....	205
6.6 Comunicación y control del aula.....	210
6.7 Contrato didáctico, normas sociomatemáticas y comunicación.....	211
6.8 Comunicación y discurso matemático.....	213
6.9 Modos de comunicación.....	214
6.10 Análisis de la comunicación. Caso Fernando.....	218
6.11 Análisis de la comunicación. Caso Juan.....	221
<b>Conclusiones.....</b>	<b>225</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>239</b>

## Lista de tablas

<b>Tabla 1.</b> Resultados de la evaluación de cada miembro del grupo a la clase del docente Fernando.....	64
<b>Tabla 2.</b> Patrones de extracción y discusión.....	86
<b>Tabla 3.</b> Clasificación de los patrones de interacción según Flanders.....	94
<b>Tabla 4.</b> Clasificación de los patrones de interacción.....	97
<b>Tabla 5.</b> Interacciones típicas de la clase.....	112
<b>Tabla 6.</b> Flujo de participación de la primera clase.....	119
<b>Tabla 7.</b> Flujo de participación de la tercera clase.....	125
<b>Tabla 8.</b> Interacciones del docente.....	128
<b>Tabla 9.</b> Flujo de participación de la primera clase.....	135
<b>Tabla 10.</b> Flujo de participación de la tercera clase.....	140
<b>Tabla 11.</b> Elementos y relaciones en la exploración de un concepto.....	152
<b>Tabla 12.</b> Análisis didáctico propuesto por el PNA.....	153
<b>Tabla 13.</b> Definiciones básicas del enfoque ontosemiótico.....	155
<b>Tabla 14.</b> Resultados del análisis de los criterios de idoneidad didáctica en las dos fases.....	172
<b>Tabla 15.</b> Análisis de idoneidad.....	173
<b>Tabla 16.</b> La práctica pedagógica del docente al finalizar el trabajo. Análisis por idoneidad.....	178

<b>Tabla 17.</b> Tipología del docente antes y después del trabajo colaborativo.....	183
<b>Tabla 18.</b> Análisis de idoneidad de la clase del profesor.....	184
<b>Tabla 19.</b> La práctica pedagógica del docente al finalizar el trabajo. Análisis por idoneidad.....	189
<b>Tabla 20.</b> Clases de comunicación según criterios varios.....	198
<b>Tabla 21.</b> Clasificación de los códigos propuesta por Guiraud.....	204
<b>Tabla 22.</b> Modos de comunicación.....	220
<b>Tabla 23.</b> Modos de comunicación.....	224
<b>Tabla 24.</b> Análisis de interacción en las clases iniciales de Fernando.....	226
<b>Tabla 25.</b> Análisis de interacción en las dos clases iniciales de Juan.....	227

## Lista de figuras

<b>Figura 1.</b> Elementos de la comunicación.....	32
<b>Figura 2.</b> Hexágono que representa la tendencia de la evaluación del grupo a la clase del docente Fernando.....	64
<b>Figura 3.</b> Interacciones en el aula de clase.....	82
<b>Figura 4.</b> Tendencia del profesor hacia un modelo didáctico.....	111
<b>Figura 5.</b> Mapa conceptual sobre sistemas de prácticas institucionales.....	156
<b>Figura 6.</b> Sistemas de prácticas personales.....	156
<b>Figura 7.</b> Configuración de objetos y procesos matemáticos desde el enfoque ontosemiótico.....	163
<b>Figura 8.</b> Interacción entre los objetos matemáticos propuestos por el enfoque ontosemiótico.....	164
<b>Figura 9.</b> Tendencia de las idoneidades de las dos fases.....	172
<b>Figura 10.</b> Idoneidades de Juan en la primera (negro) y segunda (rojo) fases.....	183
<b>Figura 11.</b> Mapa conceptual sobre los signos según Peirce (1974).....	201
<b>Figura 12.</b> Tipos de comunicación según Brendefur y Frykholm (2000).....	217

## Prólogo

Históricamente, el aprendizaje de las matemáticas ha sido muy problemático y las dificultades para los estudiantes han sido persistentes en todos los niveles educativos, lo cual se evidencia en la mortalidad académica y la deserción de los estudiantes, situación que grandes matemáticos de su época así lo manifestaban en documentos y declaraciones, como Félix Klein o Giuseppe Peano. Muchos educadores matemáticos como Hans Freudental, Guy Brousseau o Alan Bishop, por mencionar solo algunos, han adelantado investigaciones para tratar de superar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. La pregunta entonces es por qué esa situación no ha cambiado en el tiempo. Esto ha hecho que los investigadores en educación matemática se preocupen y estudien en profundidad la situación descrita, a pesar de que, como es bien conocido, los resultados de esas investigaciones no llegan al profesor en la mayoría de los casos, porque estas se hacen a espaldas de las realidades de la escuela.

Las razones de las dificultades de los alumnos y la matemafobia son muchas, pero, sin duda, una dificultad central está en los propios profesores y sus creencias anquilosadas y reproducidas de una generación a otra en aspectos como la supuesta transmisión lineal del conocimiento matemático, como cuerpo estático, acabado e inmutable, y en creer que para enseñar matemáticas solo se requiere saber matemáticas, además de estar convencidos de que lo que se hace, se hace bien, de la mejor forma. En esto radica la importancia de una investigación como la que se presenta en este libro, donde se muestra una posibilidad real de que el profesor abra la puerta de su sala y permita que otros opinen sobre su clase, que piense en lo que realiza, en su práctica, identifique sus fallas y sus carencias, y en la forma de resignificarla y transformarla.

Este libro presenta los resultados de una investigación doctoral en la UPTC que tuvo como objetivo determinar aspectos de la resignificación de la práctica de unos profesores de matemáticas desde la identificación de sus carencias y específicamente sobre los patrones de interacción comunicativa en sus clases. En el trabajo de campo muestra cómo —desde la constitución de un grupo colaborativo con los profesores involucrados en la investigación, donde se discute y reflexiona sobre la práctica pedagógica del profesor de matemáticas y se ponen en evidencia carencias y modelos de comunicación— es posible replantear esas prácticas y darles un nuevo significado y, por tanto, actuar de otra forma para transformar las rutinas. De forma más puntual, uno de los resultados de la investigación enfatiza que, al finalizar la labor con el grupo de trabajo colaborativo, los docentes lograron resignificar sus prácticas profesionales, pues cambiaron de una tipología de clase tradicional-tecnológica, centrada en el docente a través de una comunicación lineal y unidireccional, a una no tradicional-tecnológica, centrada en el estudiante; es decir, el docente pasó de presentar características unidireccionales de comunicación a prácticas reflexivas de estas, donde se da espacio para la discusión, la conjetura y la argumentación, características del pensamiento matemático. Este tipo de investigación debe continuar, si se pretende lograr la verdadera innovación de la práctica pedagógica del profesor de matemáticas y cambiar esa imagen nefasta de la matemática como el terror de los alumnos, a la que todos le temen; pues, como lo expresara Laurence Stenhouse, serán los profesores quienes, en últimas, transformarán la escuela, entendiéndola y develando así esa caja negra que es la clase, donde todos creen saber lo que allí sucede, pero que en el fondo no es así.

*Alfonso Jiménez Espinosa*



## Introducción

Algunas de las inquietudes persistentes en cualquier área académica han sido qué hacer para facilitar su aprendizaje y qué debe hacer el maestro para contribuir en este proceso. Concretamente, en matemáticas la utilización natural de su simbología es un asunto que acentúa el problema<sup>1</sup>. Sin duda, las matemáticas son una de las áreas más difíciles de aprender, por diferentes motivos, entre los que se destacan las concepciones del docente<sup>2</sup> —de las cuales depende en general su práctica pedagógica— y los roles que tanto docente como estudiante asumen en el aula.

Con relación al papel que tienen los alumnos y el profesor en los procesos de aprendizaje y enseñanza, respectivamente, se ha ido tomando conciencia de que estos están regidos por determinadas pautas de interacción que merecen ser investigadas por sí mismas<sup>3</sup>. Otro tópico cuyo estudio también despierta interés es la forma como el docente imparte sus clases y qué debería hacerse para mejorarlas. De lo anterior surgió la siguiente pregunta que orienta esta investigación: ¿de qué manera la toma de conciencia de aspectos relevantes de su práctica profesional, en especial de los patrones de interacción comunicativa, le permite al profesor resignificar sus prácticas de aula? Para responderla se realizó esta investigación, cuya memoria presenta seis capítulos, estructurados de la siguiente manera:

- .....
- 1 Un problema se toma como el cuestionamiento acerca de una situación determinada.
  - 2 José Francisco Leguizamón, Olga Yanneth Patiño y Publio Suárez, “Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula”. *Revista Educación Matemática* 27, n.º 3 (2015), 151-174.
  - 3 Arley Zamir Chaparro y José Francisco Leguizamón, “Interacciones sociales en el patio de recreo que tienen el potencial de apoyar el aprendizaje del concepto de probabilidad”. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* 8, n.º 3 (2015): 8- 24.

En el capítulo 1 se presenta el problema de investigación, contextualizado desde la experiencia del investigador. En esta parte se describen sus características y se justifica la relevancia de su estudio.

En el capítulo 2 se examina la metodología empleada en este documento. El tipo de investigación es mixto con diseño anidado o incrustado concurrente de modelo dominante<sup>4</sup>, el cual es el cualitativo, con enfoque descriptivo interpretativo y con metodología estudio de caso agregado<sup>5</sup>. En este acápite se describen las fases de la investigación, las características metodológicas generales, la metodología para cada objetivo, los sujetos investigados, los aspectos éticos, los instrumentos para la recolección de la información, y la validez de los instrumentos y del análisis de la información.

En el capítulo 3 se expone lo referente al grupo de trabajo colaborativo. Cabe anotar que uno de los aspectos fundamentales de esta investigación fue el trabajo en el grupo colaborativo (con 25 sesiones de trabajo), iniciado el 27 de marzo de 2015 y culminado (para el proyecto) el 23 de agosto de 2016. Ahora bien, inicialmente, se abordan algunos aspectos teóricos sobre el trabajo colaborativo y se describen características y particularidades del grupo. Después, se expresan las reflexiones acerca del trabajo desarrollado, la problematización propuesta para las reuniones y las cuestiones sobre la continuidad del trabajo colaborativo.

El capítulo 4 se divide en dos partes. En la primera se abordan inicialmente los referentes teóricos del interaccionismo, en cuatro secciones. En la primera sección se trata el interaccionismo en forma general y su relación con la matemática. En la segunda se estudian los patrones de interacción desde el punto de vista de varios autores como Voigt, Wood, Peressini y Knuth, Brendefur y Frykholm, Loska, Mercer, Sierpinska, Villalta y Martinic, Alrø y Skovsmose, y Schwarz, Dreyfus, Hadas y Hershkowitz. En la tercera sección se trata la interacción donde la intervención del profesor es discreta. Y la última sección se refiere a la relación entre la teoría de las situaciones y el interaccionismo simbólico; se

.....  
4 Roberto Hernández, Carlos Fernández y Pilar Baptista, *Metodología de la investigación* (México D.F.: McGraw Hill, 2014).

5 Robert Stake, "Case studies", en *Handbook of Qualitative Research*, editado por N. Denzin y Y. Lincoln (London: Sage, 1994), 236-247.

abordan aspectos como el contrato didáctico, el efecto Topaze y el efecto Jourdain. Luego se presentan los modelos pedagógicos y didácticos del profesor y el tipo de interacción que priorizan. Se han considerado tanto modelos genéricos de autores que no son del área de la educación matemática como otros modelos propuestos específicamente para los docentes de matemáticas. Se plantea la clasificación de modelos de profesor de matemáticas propuesta por Ernest. Después, se examina la tipología de modelos pedagógicos y didácticos propuesta por Porlán. Estas clasificaciones se complementan con el modelo de profesor constructivista, sugerido por el constructivismo de Piaget, la perspectiva sociocultural de Vygotsky y el interaccionismo de Bruner. En la segunda parte se analizan las interacciones del docente Fernando y del docente Juan. En ambos casos se examinan las interacciones de dos clases consideradas en la primera fase, las cuales se realizaron al iniciar el estudio, y luego dos clases de la fase dos, en donde se estudian las interacciones de los docentes después de haber trabajado en el grupo de trabajo colaborativo.

El capítulo 5 se divide en dos partes. La primera contiene el análisis didáctico<sup>6</sup>, en el cual se revisan diferentes modelos teóricos para examinar la práctica del profesor; se trata de los llamados modelos de análisis didáctico. Al finalizar esta parte se justifica la selección del modelo de análisis didáctico formulado por el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS), debido a su generalidad y, especialmente, porque propone dos tipos de análisis específicos (el análisis de las trayectorias<sup>7</sup> y configuraciones didácticas<sup>8</sup>, y el análisis de la dimensión normativa) que permiten describir y explicar las interacciones en el aula, y, además, porque también propone un tipo de análisis para la valoración de la interacción (idoneidad didáctica). En la segunda parte se muestran los

6 Análisis didáctico: "...el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos...". José González, "El análisis didáctico matemático como conjunto de medios para comprender y organizar los fenómenos de la educación matemática", (Ponencia en Seminario de Análisis Didáctico I. Universidad de Málaga, s.f.), <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2264663.pdf>

7 Trayectoria didáctica es la distribución a lo largo del tiempo de las configuraciones didácticas. Juan D. Godino, Ángel Contreras y Vicenç Font, "Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática", *Recherches en Didactiques des Mathematiques* 26, n.º 1 (2006): 39-88.

8 Configuración didáctica "es la secuencia interactiva de estados de las trayectorias que tienen lugar a propósito de una situación-problema (o tarea)". *Ibid.*, 27.

resultados del análisis didáctico realizado en las clases tanto del caso Fernando como del caso Juan, teniendo como parámetro los criterios del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS). Se conceptúa sobre dos clases de la fase uno y dos clases de la fase dos de cada uno de los docentes.

El capítulo 6 se refiere a la comunicación. En la parte inicial, se examina el concepto de comunicación según diversos autores y, a partir de los conceptos existentes, se construye el siguiente concepto que se asume para la investigación: *la comunicación es una interacción social mediada por el lenguaje y donde el objetivo de cada sujeto es entender y hacerse entender*. Después, se mencionan algunos modelos de comunicación de acuerdo con la evolución histórica del concepto: modelos sistémico, lineal y orquestal. Luego, se propone una de muchas clasificaciones de la comunicación<sup>9</sup>. Posteriormente, se trata la relación entre semiótica y comunicación, estudiando la semiótica desde diversos autores. También dentro del aula se abordan cuestiones como el control de la clase, el contrato didáctico, las normas sociomatemáticas y el discurso matemático como comunicación. Finalmente, se estudian los modos de comunicación desde el punto de vista de Brendefur y Frykholm<sup>10</sup>. En la segunda parte, se muestran los resultados del análisis de la comunicación en las clases tanto del caso Fernando como del caso Juan. En las dos fases, antes y después de que los docentes participaran en el grupo de trabajo colaborativo.

En último término, se exponen las conclusiones del estudio, a partir de la consecución de los objetivos propuestos. Una de las conclusiones fundamentales de la investigación es que, al finalizar la labor con el grupo de trabajo colaborativo, los docentes lograron resignificar<sup>11</sup> sus

.....  
9 Víctor Miguel Niño Rojas, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje* (Bogotá: Ecoe Ediciones, 1998).

10 Jonathan Brendefur y Jeffrey Frykholm, "Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two Preservice Teacher's Conceptions and Practices", *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, n.º 2 (2000): 125-153.

11 Resignificación es el proceso en el que generamos nuevos significados para lo que hacemos y sabemos. Jiménez, Alfonso, *Formación de profesores de matemática: aprendizajes recíprocos escuela-universidad* (Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2005).

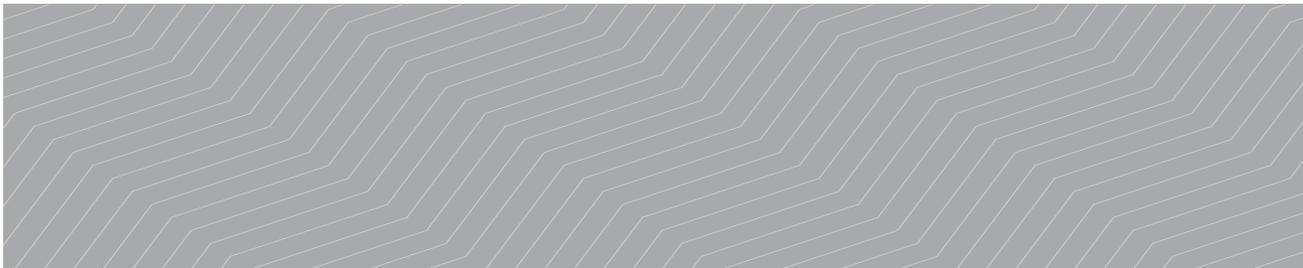
prácticas profesionales, pues cambiaron de una tipología de clase tradicional-tecnológica (centrada en el docente) a una no tradicional-tecnológica (centrada en el estudiante), es decir, el docente pasó de presentar características unidireccionales a reflexivas. Así mismo, consiguieron resignificar los patrones de interacción comunicativa; pues en la primera fase se presentaron patrones centrados en el profesor, que luego se transformaron en unos centrados en el estudiante.



En este apartado se presenta el problema de investigación, contextualizado tanto desde la experiencia del investigador como de forma general; además, se describen sus características y se justifica la relevancia de su estudio.

# CAPÍTULO 1.

## GENERALIDADES



## 1.1 El problema

Se inicia destacando aspectos de la experiencia del investigador con las clases de matemáticas, los cuales se describen desde tres perspectivas: como estudiante, como docente de educación básica y media, y como docente universitario.

El investigador estudió su bachillerato hasta quinto (hoy décimo) en la Escuela Normal Mixta de San Mateo (Escuela Normal Superior de San Mateo) y el grado sexto (undécimo) en la Escuela Normal de Varones de Tunja (Escuela Normal Superior Santiago de Tunja). Las clases de matemáticas que recibió eran de tipo trasmisionista, expositivas, con escasa participación de los estudiantes; en esta etapa, lo fundamental era el avance de los contenidos escolares. El trabajo desarrollado por los docentes se sustentaba en el modelo repetitivo, algorítmico; las tareas consistían en una gran cantidad de ejercicios con el mismo patrón y las evaluaciones se basaban en responder ejercicios del mismo tipo o recitar definiciones o propiedades, características de una clase tradicional<sup>12</sup>. La comunicación era unidireccional<sup>13</sup>, es decir, el docente es el transmisor y el alumno, el receptor.

En 1977, al iniciar su formación profesional en la UPTC en la Licenciatura en Matemáticas, el panorama de las clases de matemáticas impartidas en la universidad no cambió mucho; los docentes repetían lo que estaba en un texto, hacían énfasis en las demostraciones y propiedades, pero realmente no se veía nada de contextualización ni de aplicación.

.....  
12 Rafael Porlán, *Constructivismo y escuela. Hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación* (Sevilla: Diada Editorial, 1995).

13 Claude, Shannon y Warren Weaver, *The Mathematical Theory of Communication* (Illinois: University of Illinois Press, 1964). Dins Y. Winkin, *La nueva comunicación* (Barcelona: Kairós, 1949).

Su tendencia de enseñanza era autoritaria, el estudiante debía obedecer ciegamente al profesor, el aprendizaje se basaba en procesos de memorización y Repetición. Dice Ernest<sup>14</sup> que esa tendencia de enseñanza corresponde a un profesor que tiene características de entrenador, con un tipo de comunicación unidireccional.

En lo referente a la formación pedagógica recibida en la universidad, se hizo mucho énfasis en el planeamiento de la clase con objetivos de tres niveles: cognoscitivos, afectivos y psicomotores. Los pasos de la clase eran: iniciación, motivación, desarrollo, fijación o mecanización, evaluación y tarea. La tendencia didáctica enfocada se relaciona con lo que Porlán<sup>15</sup> denominó tendencia tecnológica, cuyo aspecto fundamental era cumplir con los objetivos propuestos. La formación pedagógica era descontextualizada, no había relación con las otras asignaturas del plan de estudios y básicamente se desarrollaba en tres materias: Ayudas Educativas, en la que se ilustraba la manera de utilizar diferentes materiales que facilitaban la enseñanza del tema por parte del docente; Micropráctica, se trabajaban estrategias de enseñanza, manejo de grupo, se hacían algunas simulaciones de clase con los compañeros y después se realizaba una clase con estudiantes de bachillerato, de la cual dependía el éxito o fracaso de la práctica en general. Por último, había una práctica integral que era una inmersión de tiempo completo en algún colegio, durante dos meses.

En lo que respecta a su experiencia como docente de matemáticas de educación básica y media, esta comienza en el año 1981 y es desarrollada durante ocho años. Allí su desempeño estaba basado en la formación que recibió, junto con las clases de los docentes universitarios que le parecieron más impactantes. Al mismo tiempo cursó la Especialización en Matemática Avanzada en la Universidad Nacional, donde nuevamente recibió clases en las que el docente era totalmente autoritario, no había suficiente participación de los estudiantes y la comunicación era unidireccional.

.....  
14 Paul Ernest, "The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model", *Journal of Education for Teaching* 15, n.º 1 (1989): 13-33. 10.1080/0260747890150102

15 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

Posteriormente, empezó a cuestionar la eficacia de la metodología que le habían enseñado y que luego asumió, ya que observaba que los estudiantes aparentemente aprendían, pero tiempo después parecía como si nunca se hubiera estudiado la materia. Adicionalmente, durante su formación universitaria tuvo el honor de tener como docente al maestro Manuel Suárez Martínez, cuya metodología era totalmente diferente, se dio cuenta de que este era un docente con tendencia constructivista, y por la experiencia vivida con él, comenzó a plantear cambios en su metodología, aunque no muy de fondo, pues el estilo comunicativo que caracterizaba sus clases era unidireccional.

En mayo de 1990 inició su experiencia docente universitaria en la UPTC, institución en la cual continúa trabajando hoy en día. Su vinculación fue como asesor docente, es decir, el encargado de orientar las prácticas pedagógicas en la Licenciatura en Matemáticas. En los primeros años, y siguiendo el contexto que se tenía en las demás licenciaturas, se orientaba hacia una práctica pedagógica desde la perspectiva de la tecnología educativa; seguía los mismos pasos en la realización de las clases que cuando era estudiante de la Licenciatura. Sin embargo, recordaba las fabulosas clases recibidas del maestro Manuel Suárez y empezó a inquietarse por lograr cambios. En ese momento comenzó a estudiar la Maestría en Educación en la Universidad Pedagógica Nacional, lo cual le ayudó a reflexionar sobre su práctica docente. El modelo del momento era el constructivismo (especialmente desde la epistemología genética de Piaget) y decidió tratar de orientar su trabajo hacia allí.

Desde entonces, está empeñado, junto con otros docentes, en tratar de cambiar la clase de matemáticas, orientando a los maestros en formación de la Licenciatura en Matemáticas hacia una clase diferente. Sin embargo, cuando se va a asesorar las prácticas de los maestros en formación en algunas instituciones educativas de básica y media, se observa que hay profesores titulares de las instituciones que los orientan hacia una estructura de clase tecnológica<sup>16</sup>, aspecto que se evidencia en las observaciones que los estudiantes escriben en los planeamientos de clase. Indagando con estos profesores sobre la situación, y según sus comentarios, las únicas clases con orientación diferente a la asumida

.....  
16 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

por ellos, recibidas en la Licenciatura, fueron básicamente las que tienen orientación pedagógica (las didácticas). Esto y el conocimiento del contexto lo llevaron a cuestionarse sobre las clases de la Licenciatura en Matemáticas, especialmente sobre la oportunidad de participación de los estudiantes. Vale decir que la clase sigue siendo de tipo unidireccional.

A lo largo de los años, la matemática ha tenido el triste honor de ser considerada como una de las asignaturas del currículo más difíciles de aprender desde el punto de vista de los estudiantes; opinión compartida por algunos padres de familia y hasta por algunos docentes. Este imaginario popular se debe en gran parte a que la matemática escolar se ve como una serie de conceptos abstractos, de desarrollo algorítmico, terminada, con demostraciones incomprensibles, definiciones mecánicas, pero sobre todo de un uso prematuro de la simbología<sup>17</sup>. Dicho imaginario se origina, en parte, por clases monótonas, repetitivas y con falta de significado, las cuales terminan dando una imagen negativa de la matemática en los estudiantes, imagen que acaba afectando los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina<sup>18</sup>.

A pesar de que es importante la forma en que el profesor enseña matemáticas, esta no es la única causa por la que el estudiante no las aprende, ya que el docente no es el único que interviene en el proceso. Ahora bien, los imaginarios del profesor son un aspecto muy relevante para tener en cuenta. Por ejemplo, tal como se manifiesta en Jiménez<sup>19</sup>, existen imaginarios entre los docentes donde el único requisito para ser un buen docente de matemáticas es saber matemáticas, sin tener en cuenta que tanto el currículo como las acciones y las concepciones del docente inciden en el aprendizaje del estudiante<sup>20</sup>. En estos imaginarios, el problema se reduce a que el profesor debe saber matemáticas, pero no se cuestiona qué tipo de matemáticas debe saber y enseñar, y “el problema no es sólo cuánta matemática se sabe, ni cuál es la mejor forma

17 Dirección General de Cultura y Educación, *Diseño curricular para la Educación Secundaria 5° año: orientación comunicación* (La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2011).

18 Bruno D'Amore, *Didáctica de las matemáticas* ( Bogotá: Editorial Magisterio, 2006).

19 Alfonso Jiménez, “La naturaleza de la matemática, las concepciones y su influencia en el salón de clase”, *Revista Educación y Ciencia* 13 (2010): 135-150.

20 D'Amore, *Didáctica de las matemáticas*.

de enseñarla, sino tener suficiente claridad sobre qué es realmente la matemática”<sup>21</sup>, tal y como lo señala Hersh, citado por Jiménez.

Las consideraciones anteriores ponen de manifiesto que la enseñanza de las matemáticas es un tema complejo en el que hay que tener en cuenta muchos aspectos. Y la práctica profesional<sup>22</sup>, aunque no totalmente, está orientada por el pensamiento del docente<sup>23</sup>. Uno de los aspectos más relevantes en esta práctica es la concepción del docente acerca de la naturaleza de las matemáticas, pues esta y la de las instituciones escolares influyen en su enseñanza, tal como han evidenciado diferentes investigaciones. Por ejemplo, Godino, Contreras y Font<sup>24</sup> afirman que “se reconoce la importancia que tiene una visión adecuada de la naturaleza de la matemática como condicionante de los distintos modelos de instrucción<sup>25</sup>, así como de la actuación de los profesores en clases”.

También es importante el conocimiento que tiene el docente de las capacidades y el rol que debe cumplir el estudiante en el aprendizaje. Con relación a este aspecto, Ponte, Boavida, Graça, y Abrantes<sup>26</sup> manifiestan que “[...] estas creencias y valores tienen que ver directamente con la naturaleza y finalidades de la disciplina, como cuerpo de saber y como práctica social y también como objeto de estudio”. Una de las creencias más arraigadas es que el estudiante se considera como un acumulador de información, cuyo aprendizaje depende exclusivamente de la actuación del docente; es decir, se le considera un usuario de las matemáticas

.....  
21 Jiménez, “La naturaleza de la matemática”, 135.

22 Se considera como práctica profesional la práctica pedagógica realizada por un docente en ejercicio, es decir, una persona ubicada en una institución educativa que desarrolla la labor de docente.

23 João Pedro da Ponte et al., *Didáctica da matemática*, ed. Pablo Flores (Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 1997), 20.

24 Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”, 38.

25 En este contexto se entiende como “*instrucción matemática* (o proceso de estudio dirigido) a los procesos de enseñanza y aprendizaje organizados, en los cuales intervienen unos determinados sistemas de prácticas matemáticas (conocimientos institucionales), unos sujetos (estudiantes) cuyo compromiso es la apropiación personal de dichas prácticas, el profesor o director del proceso de instrucción y unos recursos instruccionales”. Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”, 40.

26 Da Ponte et al., *Didáctica da matemática*, 20.

que debe aplicar técnicas, métodos, reglas y algoritmos, sin capacidad de ofrecer aportes personales<sup>27</sup>.

Con relación al papel que tienen los alumnos y el profesor en los procesos aprendizaje y enseñanza, respectivamente, se ha ido tomando consciencia de que estos están regidos por determinadas pautas de interacción que merecen ser investigadas por sí mismas. El estudio de los patrones instruccionales en el aula se ha desarrollado recientemente por la confluencia de investigaciones comparadas<sup>28</sup>. La hipótesis de que en cada país dominan patrones instruccionales específicos ha ido tomando fuerza a partir de los análisis de videos asociados a los estudios *Trends in International Mathematics and Science Study*<sup>29</sup>. Dichos trabajos produjeron evidencia respecto a la existencia de patrones instruccionales dominantes en diferentes países, para matemáticas y ciencias. Desde el punto de vista de los intereses de esta investigación, los estudios mencionados proveen información que permite afirmar que el patrón instruccional que se llama formalista<sup>30</sup> magistral tiene una fuerte presencia en muchos países y en particular en la enseñanza universitaria de las matemáticas.

En el ámbito latinoamericano, diversas investigaciones corroboran esta afirmación<sup>31</sup> al poner de manifiesto que muchos profesores de matemáticas basan su docencia en el enfoque formalista<sup>32</sup>. Su actividad

.....  
27 Mequé Edo, “La educación matemática en infantil”. *Educar. Revista de Educación*, n.º 32 (2005): 23-38.

28 David Clarke, Christine Keitel y Yoshinori Shimizu, *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider’s Perspective* (Rotterdam: Sense Publishers, 2006).

29 James W. Stigler, Ronald Gallimore y James Hiebert, “Using Video Surveys to Compare Classrooms and Teaching Across Cultures: Examples and Lessons from the TIMSS Video Studies”, *Educational Psychologist*, n.º 35 (2000): 87-100.

30 Se toma el término “formalista” para expresar descontextualizado, pues en este enfoque no hay más que reglas que permiten deducir fórmulas a partir de otras, en donde cada fórmula no se refiere a nada en especial. Vicenç Font, “Matemáticas y cosas. Una mirada desde la educación matemática”. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* 10, n.º 2 (2003).

31 Ana Beatriz Ramos, “Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales” (Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona, 2005).

32 Blanca Quevedo, *Epistemología: problemas de la filosofía de las matemáticas* (Maracaibo: Universidad del Zulia, 1998).

se centra en explicar las formas y las relaciones entre objetos matemáticos de base axiomática<sup>33</sup>, con presentación de conocimientos terminados que impiden las acciones, conjeturas e imaginación de los estudiantes; se usa de forma mecánica y con exceso de simbología, demasiada generalización y pocos procesos de abstracción, al igual que de forma totalmente descontextualizada.

Este tipo de enseñanza de las matemáticas se apoya también en las concepciones del docente sobre las capacidades de sus estudiantes y el papel pasivo que el alumno debe tener en el aprendizaje<sup>34</sup>. Esta manera de enseñar las matemáticas prioriza el saber sobre la relación personal con este, lo que implica un determinado tipo de comunicación que asigna un rol secundario y pasivo al sujeto que construye conocimiento<sup>35</sup>. El enfoque formalista-magistral privilegia un concepto de comunicación unidireccional, en donde lo importante es la transmisión de mensajes desde un emisor (profesor) hasta un receptor (estudiante), mediados por un canal y un código<sup>36</sup>, lo que no facilita la comprensión del mensaje y la participación del receptor.

Se acaba de mencionar un concepto básico en la enseñanza y el aprendizaje de cualquier área y en especial de la matemática: la comunicación. La comunicación en el aula de matemáticas es un aspecto prioritario y aunque son muchos los estudios que se han hecho al respecto, en la clase de hoy no se le concede la importancia que merece, no se le da relevancia a la forma como interactúan el profesor y los estudiantes y su incidencia positiva o negativa en el aprendizaje.

El problema de la comunicación en las clases es común a las diferentes áreas; sin embargo, se acentúa en el aula de matemáticas debido a la naturaleza abstracta de esta. Por lo anterior, a la hora de aprender o enseñar matemáticas la comunicación tiene unas características específicas que pueden dificultar su aprendizaje; al respecto Cockcroft afirma:

.....  
33 Fredy González, *Paradigma en la enseñanza de la matemática* (Maracay: Editorial Copiher, 1994).

34 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

35 D'Amore, *Didáctica de las matemáticas*.

36 Román Jakobson, "La lingüística y la poética", en *Estilo del lenguaje*, editado por T.A. Sebeok (Madrid: Cátedra, 1974), 123-173.

Las Matemáticas proporcionan un medio de comunicación de la información, conciso y sin ambigüedades porque hace un uso amplio de la notación simbólica. Sin embargo, es la necesidad de usar e interpretar esta notación y de entender las ideas y conceptos abstractos que le sirven de base, lo que resulta un escollo para mucha gente. En efecto, la notación simbólica que capacita a las matemáticas para que se usen como medio de comunicación, ayudando así a hacerlas ‘útiles’, puede también hacer las Matemáticas difíciles de entender y usar<sup>37</sup>.

El enfoque formalista-magistral privilegia un concepto de comunicación unidireccional, en que el docente no es consciente de las dificultades que puede generar en el alumno; la comunicación se asume como organización y transmisión de información que implica una metodología del profesor basada en la exposición de contenidos en forma algorítmica donde se persigue que el estudiante básicamente repita pasos<sup>38</sup>.

Si se adiciona a lo anterior el lenguaje utilizado por el docente en su discurso en el aula, el cual en el enfoque formalista es técnico y básicamente simbólico y que por ello es diferente al utilizado por el estudiante, va necesariamente a producir una dificultad en la comunicación, que genera un comportamiento pasivo del estudiante, el cual no va a participar y tampoco a hacer preguntas; espacios que de todas maneras el docente no brinda<sup>39</sup>.

Por otro lado, en una clase formalista es típica la interacción en la que el profesor es estructurante, tiende a seguir un patrón de estructura jerárquica<sup>40</sup>; también se corresponde con un patrón de interacción cíclico<sup>41</sup>,

.....  
37 Wilfred Cockroft, *Las matemáticas si cuentan* (Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C., 1985): 4.

38 Alfonso Jiménez, Nury Suárez y Sandra Galindo, “La comunicación: eje en la clase de matemáticas”, *Revista Praxis y Saber* 2, n.º 1 (2010): 173–202. Derek Edwards y Neil Mercer, *El conocimiento compartido: el desarrollo de la comprensión en el aula* (Barcelona: Paidós-MEC, 1988).

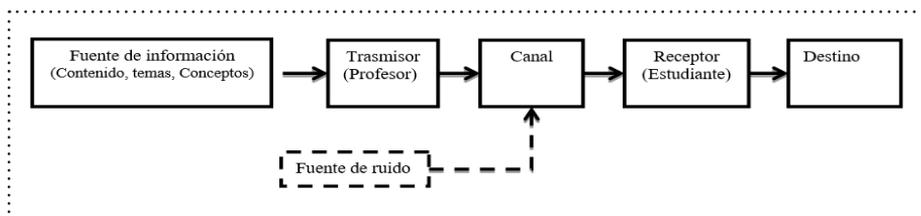
39 Alfonso Jiménez, *A pesquisa sobre comunicação em sala de aula de Matemática* (Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2011).

40 Luis Menezes, “Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta” (tesis de Maestría, Universidad de Lisboa, 1995).

41 Magdalene Lampert y Paul Cobb, “Communication and Language”, en *A Research*

en el que el profesor expone los procedimientos, luego plantea preguntas o problemas a los estudiantes, los cuales generalmente son extraídos del texto guía, recibe las respuestas de los estudiantes, evalúa y continúa el proceso de la clase. Lo anterior muestra que en el aula la autoridad está representada por el profesor<sup>42</sup>, quien establece una relación comunicativa asimétrica con los alumnos.

Igualmente, el enfoque formalista se corresponde con el modelo lineal o telegráfico de comunicación, también llamado modelo matemático, que se basa en la transmisión de contenidos, donde se destacan dos protagonistas: el emisor y el receptor. Es un modelo unidireccional, un proceso informativo en un solo sentido que, como lo menciona Galeano<sup>43</sup>, el modelo se aplica para cualquier mensaje independiente de su significación. Su esquema está compuesto por cinco elementos: fuente, transmisor, canal, receptor y destino, y tiene en cuenta el ruido que causa una perturbación.



**Figura 1.** Elementos de la comunicación  
Fuente: elaboración propia.

La comunicación en el aula puede interpretarse como el proceso de intercambio de mensajes entre docente y estudiantes, el cual es muy complejo; sin embargo, cuando se envía un mensaje, este no queda automáticamente comprendido de la misma forma que lo envía el emisor, sino que el receptor crea su propio significado respecto al mensaje.

*Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, editado por J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Shifter (Reston, VA: NCTM, 2003), 237-249.

42 Helle Alro y Ole Skovsmose, *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002).

43 Ernesto Galeano, *Modelos de comunicación* (España: Ediciones Macchi, 1997).

Dado que se reconoce que la comunicación<sup>44</sup> es una condición necesaria para que se produzcan los procesos de enseñanza y de aprendizaje<sup>45</sup>, sigue siendo importante la búsqueda de alternativas dentro del aula de matemáticas que lleven a mejorar el proceso comunicativo.

En esta investigación se quieren problematizar las prácticas de aula y los patrones de interacción comunicativa. Igualmente, se pretende identificar si es posible resignificar<sup>46</sup> la práctica profesional universitaria mediante el trabajo en grupo colaborativo.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, se formula la siguiente pregunta: ¿de qué manera la toma de conciencia<sup>47</sup> por parte del profesor de aspectos relevantes de su práctica profesional, en especial de los patrones de interacción comunicativa, permite resignificar sus prácticas de aula? Para tratar de responderla se propone caracterizar los modelos de clase de profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC; identificar los patrones de interacción comunicativa de algunos profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, a partir del análisis didáctico de sus clases; determinar elementos de la práctica pedagógica de algunos profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, en especial de la comunicación, susceptibles de ser replanteados; y caracterizar la resignificación de las prácticas docentes de los profesores participantes en el grupo colaborativo, mediante el estudio de su participación en el grupo y el análisis didáctico de clases posteriores.

## 1.2 Justificación del estudio

La motivación que llevó a seleccionar la comunicación en el aula de matemáticas como problema para ser analizado, fue inicialmente el

.....  
44 La comunicación es una interacción social mediada por el lenguaje en la que el objetivo de cada sujeto es entender y hacerse entender.

45 João Pedro da Ponte, “Da formação ao desenvolvimento profissional”, en *Actas do ProfMat 98* (Lisboa: APM, 1998), 27-44.

46 Resignificación es el proceso donde generamos nuevos significados para lo que hacemos y sabemos. Jiménez, *Formación de profesores de matemática*.

47 La toma de conciencia se asume como darse cuenta de una situación tras haber reflexionado sobre ella.

reconocimiento de la relevancia que tenía esta en la dificultad de los estudiantes para el aprendizaje de las matemáticas. Esta dificultad observada en las clases era también un problema para mis colegas de la UPTC, pero, además, luego de revisar literatura sobre el asunto de la comunicación en el aula, se evidenció que se trata de una cuestión significativa en Colombia y en el mundo, y en todos los niveles educativos<sup>48</sup>.

Dentro de los numerosos problemas que se presentan en la enseñanza de la matemática, uno de los asuntos que más llama la atención es justamente la comunicación en el aula de clase, ya que según Vilalba<sup>49</sup> cualquier actividad humana entre dos o más personas tiene siempre un carácter comunicativo, cualquiera que sea su dimensión. De por sí, en todas las áreas existen problemas comunicativos, pero, dado el lenguaje particular de la matemática, podría decirse que es un elemento más para que se priorice el estudio de la situación.

Al tópico de la comunicación en el área de matemáticas se le ha dado poca importancia, a tal punto que se la considera unidireccional, ya sea porque el docente básicamente resalta los procedimientos y cálculos mecánicos, o por el mismo lenguaje que utiliza en la clase. Estas son algunas de las razones por las que la comunicación verbal en la clase de matemáticas es prácticamente inexistente<sup>50</sup>. Pero esta situación en educación matemática ha venido cambiando a lo largo de los años.

Según Menezes<sup>51</sup>, en países como Estados Unidos, Inglaterra y Australia, el tema se ha venido trabajando asiduamente desde los años 80 y han

.....  
48 Ministerio de Educación Nacional, *Matemáticas. Lineamientos curriculares* (Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1998). National Council of Teachers of Mathematics, *Normas profissionais para o ensino da matemática*, trad. Por A. Canavarro et al. (Lisboa: APM/IIIE, 1994). Luis Menezes, “Investigar para ensinar matemática: contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional do professor” (Tesis de doctorado, Universidad de Lisboa, 2004).

49 Rodrigo Vilalba, *Teoria da comunicação: conceitos básicos* (São Paulo: Editora Ática, 2006).

50 Luis Menezes, “Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta” (tesis de maestría, Universidad de Lisboa, 1995).

51 Luis Menezes, “Investigar para ensinar matemática: contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional do professor” (tesis de doctorado, Universidad de Lisboa, 2004).

surgido referencias sobre la comunicación en documentos curriculares para la enseñanza de la matemática.

En el National Concilium Teaching of Mathematics (NTCM), importante asociación de profesores de matemáticas de Estados Unidos, se publicó *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, donde se destaca el papel fundamental de la comunicación en la construcción de las relaciones entre las nociones informales y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas.

En el caso colombiano, en los Lineamientos Curriculares se plantea la comunicación como uno de los procesos generales y se reconoce que una necesidad común inherente a todas las profesiones es la habilidad para comunicarse. También allí se resalta que la comunicación es vital para la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de los procesos matemáticos; no obstante, no se le ha puesto suficiente atención desde las prácticas de aula de matemáticas por las limitaciones de tiempo y, en parte, porque se considera que no es importante y que la responsabilidad les corresponde a otras áreas.

Además de las investigaciones sobre los procesos de comunicación en el aula de clases, autores como Steinbring, Bartolini y Sierpiska<sup>52</sup> han planteado la imperiosa necesidad, tanto para el maestro como para el investigador, de comprender la naturaleza del discurso matemático.

Adicionalmente, este estudio se centra de manera especial en el profesor, ya que en este contexto sigue siendo el protagonista de las situaciones de aula, y se lo reconoce ampliamente como el generador de cambios en las prácticas y clases de matemáticas<sup>53</sup>. Los docentes siguen siendo figuras centrales en la organización de los sistemas educativos, por lo que cualquier intento de mejora de estos pasa ineludiblemente por sus manos<sup>54</sup>. También se ha centrado en la reflexión del profesor, puesto que diversas investigaciones han venido mostrando la eficacia de crear

52 Heinz Steinbring, María Bartolini y Anna Sierpiska, “Language and Communication” (Tesis de maestría no publicada, Universidad Tecnológica Nacional, 1998).

53 João Pedro da Ponte, “O desenvolvimento profissional do professor de matemática”, *Educação Matemática* 31 (1994): 9-20.

54 Luis Menezes, “Investigar para ensinar matemática: contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional do professor” (tesis de doctorado, Universidad de Lisboa, 2004).

dispositivos para la reflexión del profesor sobre su propia práctica, para favorecer su desarrollo profesional y para la resignificación de esta<sup>55</sup>. Además, dicha reflexión se orientaría al análisis y la valoración de los patrones de interacción comunicativa, ya que tomar conciencia sobre ellos es un primer paso esencial del profesor para poder cambiar y mejorar su práctica docente.

Igualmente, la participación de profesores en proyectos de naturaleza colaborativa —aún escasos, pero que en los últimos años han ido aumentando— significa más posibilidades de favorecer su desarrollo profesional. Al respecto, Ponte<sup>56</sup> menciona la necesidad de cooperación que existe entre docentes e investigadores; los docentes deben asumir un papel protagónico en el grupo y dejar de ser solo ejecutores, ya que cuentan con su propia experiencia profesional. Se aclara que los grupos de trabajo colaborativo son menos estructurados que los cursos y exigen de los profesores mucho empeño durante un tiempo relativamente largo<sup>57</sup>. Estos proyectos pretenden llevar a los profesores a investigar sobre sus prácticas a partir de sus propios problemas. Este tipo de investigación es importante, porque es un instrumento valioso para la comprensión de la realidad, porque lleva a los profesores a plantear sus concepciones sobre algunos aspectos de la enseñanza<sup>58</sup> y, finalmente, porque obliga a profundizar en el papel de estos contextos de investigación en el desarrollo profesional del docente. Así mismo, estas investigaciones ayudan a romper con la idea que tienen muchos docentes de que enseñar e investigar son dos cosas diferentes y opuestas, y solo se ve la enseñanza como un espacio donde se aplican teorías, es decir, como un punto de llegada y no de partida<sup>59</sup>.

55 Alfonso Jiménez, “Quando professores da escola e da universidade se encontram: (re)significação e reciprocidade de saberes” (tesis de doctorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002).

56 João Pedro da Ponte, “Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva”, en *La formación del profesorado de ciencias y matemática en España y Portugal*, editado por L. Branco y V. Marcelo (Badajoz: Universidad de Extremadura, 1995), 187-202.

57 Ana María Boavida y João Pedro da Ponte, “Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas”, en *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (Lisboa: APM, 2002), 43-55.

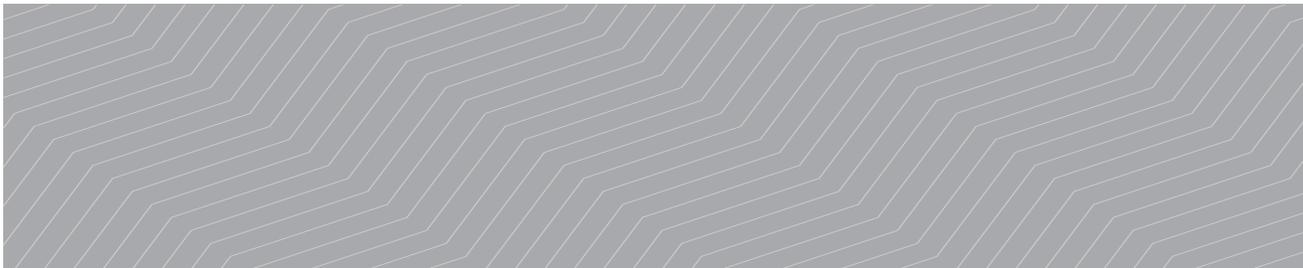
58 Jhon Elliott, *La investigación-acción en educación* (Madrid: Morata, 1990).

59 João Pedro da Ponte, “Da formação ao desenvolvimento profissional” en *Actas do ProfMat 98* (Lisboa: APM, 1998), 27-44.

El propósito de este capítulo es explicitar los aspectos metodológicos de esta investigación, las fases, las características metodológicas generales, la metodología para cada objetivo, los sujetos investigados, los aspectos éticos e instrumentos para la recolección de la información, y la validez de los instrumentos y del análisis de la información.

## CAPÍTULO 2.

### METODOLOGÍA



## 2.1 Fases de la investigación

La investigación se diseñó en dos fases. En la primera se problematizó una práctica pedagógica cotidiana de la UPTC (el modelo de clases) y en la segunda se reflexionó sobre esta manera de dar las clases y se estudió la posibilidad de resignificarlas<sup>60</sup>; vale mencionar que las dos fases se retroalimentan entre ellas.

Se inició seleccionando un grupo de dos profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, el cual se convirtió en el foco de la investigación que se propuso y con los que se hizo un estudio de casos.

El siguiente aspecto fue conseguir problematizar (y/o modificar) las prácticas y los patrones de interacción comunicativa en los profesores que participaron en el estudio de caso. Para ello, se analizaron clases de los docentes seleccionados y se organizó un grupo de trabajo colaborativo, que permitió reflexionar sobre sus clases y, a partir de allí, mejorar.

Una vez culminó la etapa del trabajo colaborativo, se buscaron evidencias para caracterizar la evolución de las prácticas docentes de los profesores estudiados. Dichas evidencias se obtuvieron de fuentes diferentes, como sus intervenciones y producciones en el grupo de trabajo colaborativo que permitió la reflexión sobre su propia práctica, y del análisis de algunas clases posteriores al trabajo colaborativo.

## 2.2 Opciones metodológicas

A continuación, se hace referencia al paradigma que fue asumido para la investigación, el enfoque mixto con predominio cualitativo, el cual fue descriptivo interpretativo.

.....  
60 Alfonso Jiménez, “Quando professores da escola e da universidade se encontram: (re)significação e reciprocidade de saberes”, (tesis de doctorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002).

Dado que los fenómenos y problemas que enfrentan las ciencias sociales y humanas son cada vez más complejos y diversos, se ha visto la necesidad de utilizar un enfoque mixto de investigación<sup>61</sup>. El método mixto logra una perspectiva más amplia y profunda de la situación por estudiar, lo que facilita una mejor exploración y explotación de los datos<sup>62</sup>.

Al respecto, Creswell<sup>63</sup> menciona que “un estudio de método mixto incluye la recolección y el análisis de datos tanto cualitativos como cuantitativos en un solo estudio, en el cual los datos se recogen concurrente o secuencialmente, se dan según cierta prioridad o dominancia”. Para esta investigación se utilizó un diseño anidado o incrustado concurrente de modelo dominante<sup>64</sup>, el modelo dominante es el interpretativo. La siguiente sección se dedica a su estudio.

Asumir un determinado paradigma de investigación no es gratuito ni se hace a la ligera, ya que el problema de investigación y el paradigma son interdependientes<sup>65</sup>, y lo primero que debe buscar el investigador es una armonización entre ellos de acuerdo con su visión investigadora.

Escoger el paradigma interpretativo tiene que ver con la temática de estudio, con el tipo de preguntas que se pretendan responder y con la plena conciencia de la importancia de este paradigma para la investigación que se pretende hacer. Este permite un estudio sistemático de una actividad específica, un programa, un acontecimiento, una persona, un proceso, una institución o grupo social<sup>66</sup>, pues lo que se pretende es conocer la realidad como es vista por los individuos que en ella intervienen.

61 Abbas Tashakkori y Charles Teddlie, *Handbook of Mixed Methods in Social & Behavioral Research* (California: Sage Publications, 2003).

62 Roberto Hernández, Carlos Fernández y Pilar Baptista, *Metodología de la investigación* (México D.F.: McGraw Hill, 2014).

63 Agustín Campos, *Métodos mixtos de investigación: integración de la investigación cualitativa y la investigación cuantitativa* (Bogotá: Editorial Magisterio, 2009), 34.

64 Hernández, Fernández y Baptista, *Metodología de la investigación*.

65 Anselm Strauss y Juliet Corbin, *Basics of Qualitative Research. Grounded Theory. Procedures and Techniques* (London: Sage, 1990).

66 Sharan Merriam, *Case Study Research in Education. A Qualitative Approach* (San Francisco: Jossey-Bass, 1998).

Según Erickson<sup>67</sup>, el paradigma procura develar las formas específicas según las cuales las acciones de las personas se desarrollan y confluyen consensuadamente en la acción social. En el caso del aula de matemáticas, hay que descubrir de qué manera las decisiones y acciones de cada participante como miembro del grupo configuran un ambiente de aprendizaje, pues lo que hay que estudiar es el sentido que da la relación de unos con otros y sus conformaciones sociales.

El enfoque interpretativo realza la explicación y comprensión global de las situaciones, al igual que la importancia que toma la intersubjetividad fruto de la interacción de múltiples actores sociales, entre los cuales se encuentra el investigador. Por ello, se acepta un enfoque relativista, en el que a partir de la interacción entre el investigador y el fenómeno observado, son construidos los resultados de investigación<sup>68</sup>. El paradigma interpretativo está incluido dentro de la investigación cualitativa, acerca de la cual Bogdan y Biklen<sup>69</sup> señalan su carácter descriptivo, donde se parte de los datos no de los supuestos, se da importancia al proceso de investigación y a los significados, los cuales no son intrínsecos a las situaciones, sino a una construcción social<sup>70</sup>.

Para Woods<sup>71</sup>, el planteamiento del enfoque interpretativo por parte de los investigadores es considerado una verdadera revolución, ya que es innegable en el entorno investigativo el aporte de este enfoque y en general del paradigma cualitativo en la educación. En relación con esto, existen ya muchos estudios en los que se analiza el día a día del docente, cómo realizan sus prácticas, las interpretan y reorganizan,

.....  
67 Frederick Erickson, "Qualitative methods in research on teaching", en *Handbook of Research on Teaching*, editado por M. C. Wittrock (New York: Macmillan, 1986), 119-161.

68 Egon Guba e Yvonna Lincoln, "Competing Paradigms in Qualitative Research", en *Handbook of Qualitative Research*, editado por N. Denzin e Y. Lincoln (London: Sage, 1994), 105-117.

69 Robert Bogdan y Sari Knopp Biklen, *Qualitative Research for Education: An Introduction to Theories and Methods* (Boston: Pearson Education, 2007).

70 Herbert Blumer, *Symbolic Interactionism: Perspective and Method* (Englewood Cliffs. NJ: PrenticeHall, 1969).

71 Peter Woods, *Investigar a arte de ensinar* (Porto: Porto Editora, 1999).

entre los que se cuentan los de Jiménez<sup>72</sup>, Menezes<sup>73</sup>, Guimarães<sup>74</sup>, Boavida<sup>75</sup>, Silva<sup>76</sup>, entre otros. Dentro del enfoque interpretativo son muy frecuentes el análisis de narrativas y el estudio de casos, el segundo es el escogido para este proyecto. Con el estudio de caso se pretende el registro y análisis intensivo y global de una determinada situación empírica, como lo plantean Merriam, Yin, Stake. Es característico un buen nivel de profundidad y de detalle, el contacto directo con las personas y situaciones, pero sobre todo el carácter dinámico e imprevisible de las situaciones, según lo afirma Silva.

El estudio de caso se refiere a la indagación de lo que emerge como único de esa situación particular y que contribuye a facilitar la comprensión de las situaciones de análisis<sup>77</sup>. Cuando el objetivo es una situación particular que se pretende estudiar, se puede denominar estudio de caso intrínseco; cuando el caso es utilizado para comprender una problemática más amplia, se trata de un estudio de caso instrumental; cuando el caso está compuesto por varios casos instrumentales, se llama estudio de caso agregado<sup>78</sup>. Para Merriam<sup>79</sup>, los estudios de caso cualitativos se caracterizan por ser particularistas, descriptivos, heurísticos e inductivos.

.....  
72 Alfonso Jiménez, “Quando professores da escola e da universidade se encontram: (re) significação e reciprocidade de saberes”, (Tesis de doctorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002).

73 Luis Menezes, “Investigar para ensinar matemática: contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional do professor (Tesis de doctorado, Universidade de Lisboa, 2004).

74 María de Fatima Guimarães. “A fidelidade à origem: O desenvolvimento de uma professora de Matemática”, (Tesis de doctorado, Universidade de Lisboa, 2005).

75 Ana María Roque Boavida. “A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração”, (Tesis de doctorado, Universidade de Lisboa, 2005).

76 Bento Silva, *Educação e comunicação* (Braga: Universidade do Minho, 2007).

77 João Pedro da Ponte, J. P., “Estudos de caso em educação matemática.” *Bolema*, n.º 25 (2006): 105-132.

78 Sharan Merriam, *Case Study Research in Education. A Qualitative Approach* (San Francisco: Jossey-Bass, 1998), 11.

79 Sharan Merriam, *Case Study Research in Education. A Qualitative Approach* (San Francisco: Jossey-Bass, 1998), 11.

Los estudios de caso son particularistas, porque centran su atención en una situación particular, evento, programa o actividad, y son especialmente útiles para analizar como determinados grupos enfrentan problemas particulares; pero el hecho de que el estudio de caso sea particularista no implica que al esclarecer un problema específico no se pueda solucionar un problema general. Descriptivo significa que el producto final del estudio de caso es una descripción rica y completa del fenómeno en estudio. Esto se basa en la utilización de muchas fuentes de datos que contribuyen a la creación de un sentido global de la situación. El investigador debe estar abierto a considerar múltiples posibilidades para dar sentido a lo observado y no analizar unos factores prefijados.

Son heurísticos, porque permiten que surjan nuevas relaciones al ayudar al investigador a comprender algo que se está estudiando; igualmente, pueden confirmar lo que se suponía o conocía, además de la comprensión del problema y el entorno en que surge.

Son inductivos, porque los conceptos resultan del análisis de los datos ubicados en un contexto y no de la verificación de hipótesis, es decir, se utiliza un enfoque inductivo, lo cual facilita la interpretación del investigador, que busca integrar todo lo anterior con sus propias vivencias y experiencias<sup>80</sup>.

## 2.3 Proceso metodológico

La metodología en general consistió en estudios de caso<sup>81</sup> elaborados en un contexto de reflexión sobre las prácticas (en especial sobre los patrones de interacción comunicativa) en el aula de matemáticas en el nivel universitario, involucrando profesores del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, que orientan diferentes asignaturas de matemáticas en el mismo programa.

Los estudios de caso de esta investigación son, por una parte, de tipo intrínseco (en el sentido de que es el estudio de una situación particular) y, por otra parte, de tipo instrumental (el caso es utilizado para comprender

.....  
80 João Pedro da Ponte, "O desenvolvimento profissional do professor de matemática".

81 Stake, "Case studies", 236-247.

una problemática más amplia). Por otra parte, se trata de un estudio de caso agregado, pues corresponde al estudio de varios casos instrumentales, en el que cada caso particular genera sus propias evidencias, aunque todos están conformando un mismo proyecto.

Así mismo, se llevó a cabo el análisis didáctico de ocho clases videogradas (cuatro por cada docente del grupo seleccionado y que conforman este estudio de caso agregado), utilizando el modelo de análisis de clases planteado por el enfoque ontosemiótico. La transcripción de la clase se dividió en diferentes segmentos, que se denominaron configuraciones didácticas; al respecto, la forma de determinar una configuración es la realización de una tarea, aunque queda a discreción del investigador la forma de agrupar las líneas de la transcripción en configuraciones didácticas<sup>82</sup>. Para el análisis didáctico de acuerdo con el EOS<sup>83</sup>, se plantearon cinco niveles de análisis sobre los procesos de instrucción: 1. Identificación de prácticas matemáticas, 2. Determinación de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, 3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, 4. Identificación del sistema de normas y metanormas, y 5. Valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción.

En cuanto a las tablas de indicadores de idoneidad, se aclara que los componentes e indicadores se tomaron textuales<sup>84</sup>; sin embargo, para poder mostrar una relación entre ellos se asumió la evaluación de cada indicador desde el ángulo bivalente de sí o no. De acuerdo con lo anterior, cada indicador recibió el puntaje de 0 % o 100 %; cada componente está compuesta por uno o varios indicadores, por lo cual la valoración de la componente es el promedio de sus indicadores. Para la idoneidad, igualmente se promediaron sus componentes. De la misma manera, desde el enfoque ontosemiótico<sup>85</sup> se toma el hexágono regular como una forma de observar las diferentes facetas de la práctica docente. Sin embargo, se

82 Juan Godino et al., “Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico”. *Enseñanza de las Ciencias* 27, n.º 1 (2009): 59-76.

83 Vicenç Font, Núria Planas y Juan Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”. *Infancia y Aprendizaje* 33, n.º 1 (2010): 89-105.

84 Juan Godino, “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática”. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* 22, n.º 2 (2002): 237-284.

85 Juan Godino, et al. “Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico”.

aclara que se cambió la manera de mostrar la información; se trazan tres hexágonos como referencia, el interno representa el 33 %, el medio el 66 % y el externo el 100 %, pero se pueden tomar valores de 0 % a 100 %. Lo más apropiado es aproximarse al 100 % en cada una de las idoneidades. En el análisis final por idoneidad, y de acuerdo con su nivel de logro, se tuvo en cuenta la siguiente clasificación emergente: aspectos por mejorar, resignificados y fortalezas. Se consideran fortalezas del profesor aquellos criterios que estaban inicialmente presentes en su práctica pedagógica y que los siguió manteniendo; un aspecto fue resignificado si inicialmente no lo tenía el docente, pero a través del trabajo colaborativo consiguió desarrollarlo; se tiene un aspecto por mejorar, si inicialmente no estaba presente en sus prácticas y al finalizar el trabajo colaborativo sigue sin estarlo.

Por otro lado, como para el análisis didáctico ya se había dividido la clase en configuraciones didácticas según el enfoque ontosemiótico<sup>86</sup>, el análisis de las interacciones se llevó a cabo configuración por configuración. Para lo anterior, se tomó la transcripción de cada clase, y cada línea se fue interpretando y asumiendo como una acción que representa una intencionalidad comunicativa, y de esta forma fueron emergiendo los diferentes patrones de interacción de cada docente por configuración; los cuales inicialmente se presentan en el análisis de la clase y posteriormente se tratan y clasifican dentro de los criterios del EOS, por frecuencias, configuración y tiempo, con el objetivo de identificar los patrones más usuales en el docente. En la discusión final de cada caso se identifican patrones de interacción comunicativa con base en clasificaciones planteadas en la teoría<sup>87</sup> y como

.....  
86 Vicenç Font., et al. "Modelo para el análisis didáctico en educación matemática". *Infancia y Aprendizaje* 33, n.º 1 (2010): 89-105.

87 Jörg Voigt, "Patterns and Routines in Classroom Interaction", *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6, n.º 1 (1985): 69-118. Terry Wood, "An Emerging Practice of Teaching" en *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, editado por P. Cobb and H. Bauersfeld (Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1995), 203-228; Dominic Peressini y Eric Knuth, "Why are You Talking When You Could Be Listening? The Role of Discourse and Reflection in the Professional Development of a Secondary Mathematics Teacher". *Teaching and Teacher Education* 14, n.º 1 (1998): 107-125. Jonathan Brendefur and Jeffrey Frykholm, "Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two Preservice Teacher's Conceptions and Practices". *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, n.º 2 (2000): 125-153; Helle Alro y Ole Skovsmose, *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002); Rainer Loska, "Teaching Without Instruction: The Neo-Socratic Method", en

comprobación de características de confrontación con los patrones emergentes del trabajo.

De la misma manera se trabajó la comunicación, pues se tomaron clasificaciones *a priori* (modelos explicativos de la comunicación, clasificación según Niño<sup>88</sup>, clasificación de signos, contrato didáctico, modos de comunicación) con otras emergentes (que surgen del trabajo). Para estas últimas, igual se dividió la clase en configuraciones, y de acuerdo con sus características se clasificaron en relación con lo propuesto por Brendefur y Frykholm<sup>89</sup>, para poder concluir con la clase en general.

Con el análisis didáctico se procuró facilitar la reflexión de los participantes en el estudio de caso agregado sobre sus prácticas profesionales para su posible mejora. En esta ocasión, la metodología utilizada consistió en la organización del grupo de trabajo colaborativo con los profesores que participaron en el estudio de caso agregado. Entre otros aspectos, se pretendió:

- Concientizar a los docentes sobre “lo que está sucediendo en sus clases” con el propósito de que lo familiar se convirtiera en problemático. Esta información se pudo documentar sistemáticamente a partir del análisis de las videograbaciones de sus clases.
- Comparar “lo que está sucediendo aquí” con “lo que está sucediendo en otros lugares”, en lo referente a prácticas pedagógicas. El trabajo colaborativo permitió presentar alternativas a sus clases mostrando otras maneras de explicar lo mismo que expusieron ellos.
- A través del grupo colaborativo respaldar los intentos de planear cambios. La información ofrecida permite a los docentes discutir sobre la posibilidad de resignificar sus prácticas y sus clases.

---

*Language and Communication in the Mathematics Classroom*, editado por H. Steinbring, M. Bartolini Bussi y A. Sierpiska (Reston, VA: NCTM, 1998), 235-246; Baruch Schwarz, Tommy Dreyfus, Nurit Hadas y Rina Hershkowitz, “Teacher Guidance of Knowledge Construction”. 28th Education, PME28. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, 2004; Anna Sierpiska y Stephen Lerman, “Epistemology of Mathematics and of Mathematics Education”, en *International Handbook of Mathematics Education*, editado por A. J. Bishop et al. (Dordrecht, NL: Kluwer, Academic Publ., 1996), 827- 876.

88 Víctor Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje* (Bogotá: Ecoe Ediciones, 1998).

89 Jonathan Brendefur and Jeffrey Frykholm, “Promoting mathematical communication in the classroom”.

- Facilitar la discusión colectiva. Este tipo de diálogo colectivo posibilita que el profesor en algunas ocasiones se adhiera al punto de vista de los participantes y en otras entre en confrontación, dando argumentos para apoyar o invalidar la pretensión de validez de sus compañeros. La organización del grupo procuró conseguir una situación de acción comunicativa, es decir, se pretendió una conversación entre iguales basada en presunciones de validez a fin de alcanzar un consenso racionalmente motivado. La estrategia metodológica de reflexión dirigida a profesores se ha utilizado en otras tesis doctorales, aunque con objetivos diferentes. Por ejemplo, en dos investigaciones sobre concepciones y creencias de los profesores<sup>90</sup>.

Para el desarrollo del trabajo del grupo se procuró generar una relación de equidad, en la que todos los miembros tuvieran la misma autoridad; la base fue el diálogo y el respeto por las ideas de los demás. Cada participante hacía su lectura de las situaciones, es decir, podía hacer su propia contribución basada en el conocimiento, las dificultades o las dudas. El propósito de este ejercicio es que los participantes aprendan sobre sí mismos, sobre los otros y sobre los aspectos del trabajo; sin embargo, no es necesario que todos aprendan lo mismo, “es la persona la que debe ser valorizada, y no su conocimiento o estado”<sup>91</sup>. Se debía generar un clima de seguridad y confianza entre los miembros del grupo, basada en principios como la honestidad, confianza, compromiso y respeto<sup>92</sup>, que brindara la oportunidad de compartir experiencias y un ambiente estimulante, con el objetivo de profundizar en el conocimiento, esto es, en el desarrollo de las prácticas profesionales de cada uno y haciendo énfasis en sus patrones de interacción comunicativa.

En general, se pretendió que el grupo reflexionara sobre las clases, teniendo como eje aquellos aspectos que interferían con la comunicación en la clase. Se procuró, con base en el análisis a los docentes, identificar

90 Mario Martínez, “Concepciones sobre la enseñanza de la resta: Un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado”, (Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona, 2003).

91 Margaret Olson, “Collaboration: An Epistemological Shift”, en H. Christiansen et al. *Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform*, editado por A. J. Bishop et al. (New York: Suny Press, 1997), 13-25.

92 Susan Drake y J. Basaraba, “School-University Research Partnership: In Search of the Essence”, en *Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform*, editado por H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Maeers (New York: Suny Press, 1997), 13-25.

tanto los aspectos facilitadores como los obstáculos de esa comunicación, para lo cual el punto de partida fue la identificación de dificultades por ellos mismos. Entre las actividades que el grupo realizó están la discusión de temas que se consideraron importantes para los miembros del grupo, el análisis de artículos, la planificación de clases y tareas, la reflexión sobre las prácticas de aula, especialmente sobre las prácticas comunicativas y formas de divulgación del trabajo. Igualmente, se quiso que la responsabilidad de las reuniones fuera compartida por todos los miembros del grupo, en particular que se fuera rotando la relatoría. También se hizo un archivo del grupo con todo el material que se consideró relevante.

Este trabajo colaborativo, pese a que fue idea inicialmente del investigador, tuvo todas las componentes para ser un trabajo totalmente colaborativo, por lo que cualquier actividad o decisión fue avalada por todos los miembros del grupo. Y en este trabajo, se recalca, todos tenían la misma autonomía para poner propuestas a consideración para ser consensuadas. En este momento, el doctorando aumentó considerablemente su nivel de implicación, ya que era un miembro más del grupo y, en consecuencia, su observación de la investigación fue claramente de tipo participante. Su función fue la participación en la primera parte (presentación de los resultados de la primera fase de la investigación, ejemplos de posibles clases alternativas, etc.) y menor en la segunda parte del seminario (facilitar la participación y el diálogo en el grupo).

## 2.4 Sujetos investigados. Un estudio de casos

Tal como se mencionó, los participantes de la investigación fueron algunos estudios de caso escogidos entre el grupo de profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC.

*La elección.* Un trabajo que destaca la colaboración tiene condiciones más favorables para ser desarrollado por un grupo con pocos miembros<sup>93</sup>, por eso se propuso trabajar con dos profesores de la

.....  
93 Bento Duarte da Silva, *Educação e comunicação* (Braga: Universidade do Minho, 2007).

Licenciatura en Matemáticas. Dado que el proyecto colaborativo es un trabajo exigente, un criterio de selección fue que los profesores tuvieran vivencias comunes y facilidad para programar los encuentros, así que trabajar en la misma escuela (Licenciatura en Matemáticas) pareció ser un elemento favorable para la ejecución del proyecto. El otro aspecto fundamental que se tuvo en cuenta para la elección de los profesores fue que tuvieran la voluntad de participar en el proyecto, ya que implicaba realizar tareas adicionales, dedicar tiempo para las actividades, así como para las reuniones de trabajo. Por lo anterior, los participantes escogidos para este estudio fueron Fernando y Juan, profesores de la Licenciatura en Matemáticas que se encuentran vinculados con carácter ocasional en la UPTC (tiempos de servicio diversos).

Se obtuvo el consentimiento informado de los participantes, de manera que ellos tuvieran claridad sobre los distintos aspectos del proceso, y se procuró que existiera consenso en todo momento. Los términos iniciales que se tomaron con los participantes fueron respetados durante la ejecución de la investigación. Además, se resaltó el beneficio tanto para el grupo como para la institución, se otorgó el consentimiento para el uso de cámaras o grabadoras, y se utilizaron pseudónimos para proteger la identidad de los participantes<sup>94</sup>.

Otro aspecto ético importante es el que tiene que ver con la fidelidad de los datos obtenidos; por ello, se mantuvo la autenticidad de los datos, así mostraran resultados contrarios a lo esperado<sup>95</sup>.

## 2.5 Métodos, instrumentos y procedimientos para la recolección de información

En la investigación cualitativa, el investigador tiene una importancia relevante como mediador, pues en esta clase de investigaciones él es una

.....  
94 Robert Bogdan y Sari Knopp Biklen, *Qualitative Research for Education: An Introduction to Theories and Methods* (Boston: Pearson Education, 2007).

95 Bogdan and Biklen, *Qualitative Research for Education*.

persona antes que una máquina o instrumento<sup>96</sup>. Las técnicas que se plantearon inicialmente para la recolección de información fueron la observación y la entrevista. Los procedimientos fueron cuestionarios, entrevistas semiestructuradas y no estructuradas.

**2.5.1 La observación.** Esta es una técnica de recolección de datos muy generalizada en estudios de tipo interpretativo y especialmente es considerada como la mejor para la recolección de datos en estudios de caso<sup>97</sup>. Según Ludke y André<sup>98</sup>, la observación permite una buena aproximación entre el investigador y el fenómeno base de estudio, lo que la hace la forma recomendable para estudiar los acontecimientos y procesos. La observación facilita que el observador se acerque al punto de vista de los participantes, ya que lo acompañan sus experiencias del contexto en que se desarrolla la acción.

Se resaltan dos extremos de la observación participante: cuando el observador es totalmente participante, es decir, es miembro integrante del grupo observado, y cuando es un espectador. Merriam<sup>99</sup>, de acuerdo con la relación entre el observador y su observado, clasifica la observación participante así: observador como participante y participante como observador.

En este proyecto se utilizó una observación participante, la que se realizó en diferentes contextos como aulas y reuniones. Según la clasificación de Merriam<sup>100</sup>, el papel del investigador fue de observador como participante, ya que su participación fue activa dentro del grupo de trabajo colaborativo, y de participante como observador en lo referente a las aulas, dado que su participación se limitó a la observación y al análisis de las actividades de aula sin intervenir directamente en estas. La forma de recolección de la información en este paradigma es descriptiva, generalmente basada en notas de campo y grabaciones de audio y video.

.....  
96 Egon Guba e Yvonna Lincoln, "Competing Paradigms in Qualitative Research", en *Handbook of Qualitative Research*, editado por N. Denzin e Y. Lincoln (London: Sage, 1994), 105-117.

97 Merriam, *Case Study Research in Education*, 11.

98 Menga Ludke e Marli André, *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas* (São Paulo: EPU, 1986).

99 Merriam, *Case Study Research in Education*, 11.

100 *Ibid.*

**2.5.2 Observaciones de clases de matemáticas.** La observación y el análisis de las clases son una forma importante de recolección de datos, en la que el contexto toma relevancia. En este caso, se grabaron dos clases de cada docente al iniciar el estudio (cuatro en total), una clase durante el trabajo colaborativo y nuevamente se grabaron dos clases de cada docente una vez se culminó el trabajo del grupo colaborativo (cuatro clases).

**2.5.3 La entrevista.** Al igual que la observación, es muy utilizada en los estudios cualitativos, en especial cuando se pretende entender el pensamiento humano. Facilita al investigador acceder a las perspectivas de otro sujeto, conocer sus valores y preferencias, sus actitudes y creencias; lo que le ayuda a entender la visión del mundo de otra persona, principalmente en aspectos que no son directamente observables<sup>101</sup>. Es útil particularmente cuando se desea hacer un estudio individualizado de los miembros de un grupo, pues complementa la información pertinente para la construcción del historial de cada profesor y permite conocer sus expectativas frente a la naturaleza de la matemática, frente a los alumnos y la profesión docente, entre otros aspectos<sup>102</sup>. Se buscó tener acceso a aquellos aspectos de los docentes que iban a ser objeto de estudio y que no fueron identificables a través de la observación o el cuestionario. En la entrevista se precisaron las posiciones individuales frente a una actividad o hecho, y se pudo hacer un sondeo a vivencias de la persona, ya sean experiencias positivas o negativas, o momentos específicos de su vida docente.

**2.5.4 Cuestionarios.** Se aplicaron dos cuestionarios a docentes, al inicio del proyecto.

**2.5.5 Entrevista no estructurada.** Se aplicó una al comenzar el proyecto, como complemento a la información recogida en los cuestionarios.

**2.5.6 Entrevistas semiestructuradas.** Se hicieron cinco: dos al inicio del proyecto, una dentro del desarrollo del trabajo colaborativo y dos al finalizar este proceso; se implementaron de acuerdo con un guion

.....  
101 Bogdan y Biklen, *Qualitative Research for Education*.

102 Judith Goetz y Margaret LeCompte, *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research* (New York: Academic Press, 1984).

previamente establecido y fueron grabadas para facilitar su posterior transcripción.

**2.5.7 Reuniones de trabajo conjunto.** Estas reuniones son tal vez la base de todo el proyecto, se iniciaron en marzo de 2015 y se celebraron en general cada ocho o quince días. En ellas, se examinaron y ejecutaron las actividades pertinentes, como discusión de artículos y textos relacionados con el tema de interés, análisis de clases, análisis de experiencias anteriores, planificación de tareas y actividades, entre otros tópicos. Aunque en estas reuniones se tomaron notas de campo, principalmente fueron grabadas, para posteriormente ser transcritas.

## 2.6 Validez de los instrumentos y del análisis de la información

En un proceso investigativo de carácter mixto es necesario referirse por separado a cada paradigma en cuanto a validez. En primer lugar, en lo cuantitativo, se aplicaron algunos instrumentos adaptados de trabajos anteriores, pero previamente fueron validados<sup>103</sup>. En general, el análisis cuantitativo se limita a extraer algunas frecuencias que sirven como apoyo a las inferencias de tipo cualitativo. En lo referente al paradigma cualitativo, se tomaron como referencia los cuatro criterios propuestos por Hernández, Fernández y Baptista, los cuales pretenden mostrar la veracidad en el proceso de investigación. Se aclara que estuvieron presentes en todo el desarrollo de la investigación.

**2.6.1 Credibilidad.** Para lograr credibilidad en la investigación, se mantuvo un diálogo permanente con los participantes en el estudio, lo que permitió determinar que la información que estaban brindando tenía que ver con la realidad de los docentes, es decir, ellos la identificaban como válida, al igual que el sentido que se le estaba dando al análisis. Se contrastó permanentemente lo obtenido en la investigación con el punto de vista de los docentes.

.....  
103 Miguel Díaz, *Encuesta sobre tendencias didácticas de los docentes*. Trabajo sin publicar, 2010, 6. Martínez, "Concepciones sobre la enseñanza de la resta".

**2.6.2 Transferibilidad.** Se refiere a la posibilidad de extender los resultados del estudio a otras poblaciones. Una vez culminado el estudio —el cual arrojó algunas conclusiones interesantes, como los patrones de interacción típicos de un docente de matemáticas, al igual que aspectos de resignificación de las prácticas profesionales, las cuales, se aclara, son válidas para los participantes del estudio— se deja en libertad al lector para determinar si es posible transferir los hallazgos a un contexto diferente.

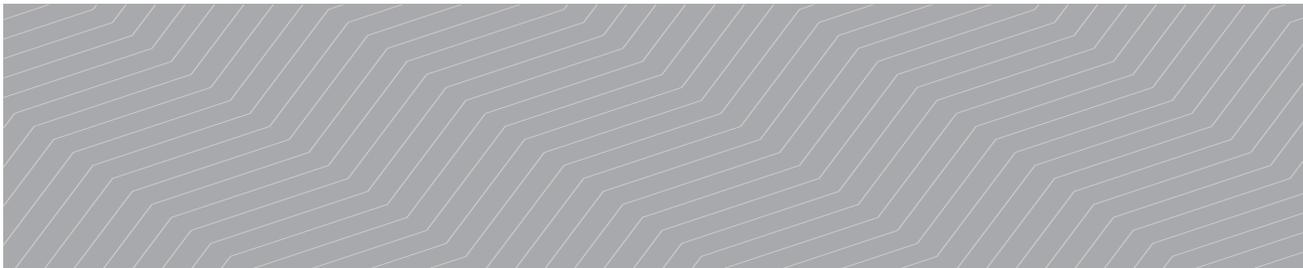
**2.6.3 Dependencia.** Este criterio se utilizó para identificar la consistencia de los resultados. Para el proceso de control, el investigador tuvo tres criterios. En primer lugar, todos los desarrollos y análisis fueron consultados con un experto (que es el director de la tesis); adicionalmente, cuando se tuvo la oportunidad, se discutió con otro experto, el doctor Vicenç Font, quien es el tutor internacional de este trabajo. Vale decir que ambos sirvieron de validadores externos. De la misma manera, los resultados y avances se iban discutiendo con el grupo de trabajo colaborativo, que desempeñó la función de validador interno. Igualmente, se realizaron artículos sobre resultados parciales, los cuales fueron publicados en revistas indexadas.

**2.6.4 Confirmabilidad.** Con el propósito de determinar si la información, interpretación y conclusiones eran pertinentes, se pidió a los expertos y al grupo de trabajo colaborativo que examinaran y controlaran la concordancia entre los datos, inferencias e interpretaciones realizadas por el investigador.

Este capítulo se dedica al estudio del grupo de trabajo colaborativo, considerando que uno de los aspectos fundamentales en esta investigación fue el trabajo realizado en este grupo, en 25 sesiones que comenzaron el 27 de marzo de 2015 y culminaron el 23 de agosto de 2016. Inicialmente, se abordan algunos aspectos teóricos sobre el trabajo colaborativo; después, sobre el grupo y también acerca de las reflexiones del trabajo efectuado, la problemática propuesta para abordar en las reuniones y la continuidad del trabajo colaborativo.

## CAPÍTULO 3.

### GRUPO DE TRABAJO COLABORATIVO



## 3.1 Trabajo en contexto colaborativo

Hay que destacar que la colaboración entre investigadores y profesores va tomando cada vez más importancia como una forma de transformar la educación<sup>104</sup>. Al respecto, Rubio y Jiménez<sup>105</sup>, citando a Scott, se refieren a la visión general del aprendizaje del siglo XXI, en la que se destacan, entre otros, atributos tales como la colaboración, imprescindible en las competencias actuales. Por su parte, Ponte<sup>106</sup> menciona la necesidad de cooperación entre docentes e investigadores; los docentes deben asumir un papel protagónico en el grupo y dejar de ser solo ejecutores, ya que cuentan con su propia experiencia profesional: éxitos, problemas, alegrías y tristezas, y esa es la realidad que se pretende conocer, comprender y mejorar. Investigar sobre la propia práctica es la mejor forma de desarrollo profesional, lo cual se considera un privilegio para los docentes participantes<sup>107</sup>. El objetivo en la conformación de grupos de trabajo colaborativo es obtener aprendizajes, tema que se trata a continuación.

El concepto de aprendizaje colaborativo surge a finales del siglo XX y tiene como marco teórico el constructivismo sociocultural; considera que para el ser humano es de su esencia trabajar y aprender juntos, pues todo aprendizaje es social y mediado, y aprender es un proceso

.....  
104 National Council of teachers of Mathematics, *Normas profissionais para o ensino da matemática*.

105 David Rubio Gaviria y Julián Ernesto Jiménez Guevara. 2021. "Constructivismo y tecnologías en educación. Entre la innovación y el aprender a aprender". *Revista Historia De La Educación Latinoamericana*, 23, n.º 36 (2001): 61-92. <https://doi.org/10.19053/01227238.12854>

106 Da Ponte, "Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva", 187-202.

107 João Pedro da Ponte, "Investigar a nossa própria prática", en *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, Editado por GTI, 5-28 (Lisboa: APM, 2002).

dialéctico y dialógico en el que las personas contrastan su punto de vista con los de otras hasta llegar a un consenso<sup>108</sup>.

El aprendizaje colaborativo se ha desarrollado desde variados enfoques que buscan aproximarse a su significado y simultáneamente con los grupos de aprendizaje, comunidades de aprendizaje, enseñanza entre pares y aprendizaje cooperativo.

Varios autores hablan sobre el aprendizaje colaborativo. Avendaño *et al.*<sup>109</sup> destacan la relación que debe existir entre el aprendizaje colaborativo y las tecnologías de la información y la comunicación (TIC). Para ellos, el aprendizaje colaborativo se puede desarrollar con más facilidad si cuenta con el apoyo de las TIC, especialmente en tiempos de crisis. Por otra parte, Driscoll y Vergara<sup>110</sup>, por ejemplo, opinan que para que haya aprendizaje colaborativo se debe trabajar en grupo y cooperar para el logro de un objetivo que individualmente no se podría lograr. Proponen cinco características del aprendizaje colaborativo: *responsabilidad individual*, cada uno, visto como individuo, es responsable de su desempeño dentro del grupo; *interdependencia positiva*, los miembros del grupo deben depender unos de otros para lograr una meta en común; *habilidades de colaboración*, como trabajo en equipo, liderazgo, solución de conflictos, tienen como meta el logro del objetivo común; *interacción promotora*, los miembros del grupo deben interactuar para lograr un clima agradable de trabajo y buenas relaciones interpersonales, y, de esta manera, establecer excelentes estrategias de aprendizaje; y *proceso de grupo*, en el que hay una autorregulación por parte del grupo que lleva a sus integrantes a reflexionar y evaluar periódicamente para adecuar su efectivo funcionamiento.

108 Luz María Zañartu, “Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de diálogo interpersonal y en red”. *Revista Contexto Educativo* 5, n.º 28 (2013). <http://es.slideshare.net/CeciliaBuffa/luz-mara-zaartu-correa-aprendizaje-colaborativo>. Enero 20 de 2015.

109 Marcy Driscoll y Adriana Vergara, *Nuevas tecnologías y su impacto en la educación del futuro*, en *Pensamiento educativo* (Santiago de Chile: Pontificia Universidad Católica, 1997).

110 Aquí debe quedar así: William Rodrigo Avendaño Castro, César A. Hernández S. y Raúl Prada Núñez. 2021. “Uso de las tecnología de información y comunicación como valor pedagógico en tiempos de crisis”. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana* 23, n.º 36 (2021): 135-159. <https://doi.org/10.19053/01227238.11619>.

Para Salinas<sup>111</sup>, aprendizaje colaborativo es la adquisición de destrezas y actitudes producto de la interacción del grupo. Para Panitz y Panitz<sup>112</sup>, es la construcción de consensos basados en la cooperación del grupo. En este aprendizaje, los participantes se comprometen a lograr una meta en común; es el grupo el que decide cómo realizar la tarea, cómo dividir el trabajo, qué tareas realizar<sup>113</sup>.

Algunos autores tienden a asumir estos dos conceptos como sinónimos, pero existen marcadas diferencias entre estos, pues el aprendizaje cooperativo responde al enfoque constructivista clásico (piagetiano) y el colaborativo, al enfoque sociocultural.

Como lo manifiesta Gros<sup>113</sup>, el aprendizaje cooperativo necesita de una división de tareas entre los miembros del grupo, donde cada uno responde por su parte y posteriormente hay socialización del trabajo realizado individualmente. Este contrasta con el aprendizaje competitivo, en el que cada estudiante para lograr sus objetivos particulares trabaja en contra del resto del grupo. En cuanto a la responsabilidad del aprendizaje, el cooperativo es estructurado por el profesor y el colaborativo recae básicamente en el estudiante.

Otro aspecto en el que se diferencian estos dos aprendizajes es por el tipo de conocimiento que manejan<sup>114</sup>. Hay un conocimiento fundamental representado por creencias que socialmente son aceptadas: gramática, ortografía, matemáticas, historia, entre otras. El conocimiento no fundamental es obtenido por medio del razonamiento y el cuestionamiento, y no por la memorización. En el aprendizaje colaborativo nadie

.....  
111 Jesús Salinas, “El aprendizaje colaborativo con los nuevos canales de comunicación”, en *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación*, editado por J. Cabero (Madrid: Síntesis, 2000), 199–227.

112 Theodore Panitz y Patricia Panitz, “Encouraging the Use of Collaborative Learning in Higher Education” en *Issues Facing International Education*, editado por J.J. Forest (NY, NY: Garland Publishing, 1998).

113 *Ibid.*

114 María Gómez y José Álvarez, *El trabajo colaborativo como indicador de calidad del Espacio Europeo de Educación Superior* (España: Universidad de Alicante, Editorial Marfil, 2011).

tiene la última palabra, el profesor se considera también un aprendiz, y este comienza justo cuando el cooperativo culmina.

Las personas no aprenden solo porque estén en el grupo, sino que al estarlo ejecutan interacciones que generan aprendizajes; es decir, que adicionalmente a los aprendizajes individuales, al estar en grupo se generan interacciones, como consensos y desacuerdos, que desarrollan procesos cognitivos como la internalización, la extracción, el conocimiento, entre otros, y es través de ellos que se aprende<sup>115</sup>.

Después de hacer un estudio sobre la composición de los grupos y el logro de objetivos, Webb, Ender y Lewis<sup>116</sup> llegaron a la conclusión de que el grupo que facilita más interacciones y explicaciones en la clase es el moderadamente heterogéneo (estudiantes con habilidades altas y medias, o medias y bajas). Según los autores, cuando se tienen estudiantes de los tres tipos de habilidades, generalmente se excluyen de la interacción los de habilidad media. Si se escogen grupos homogéneos de habilidades bajas, no tienen los dominios básicos para ayudarse colaborativamente; si, por el contrario, se escogen los de habilidades altas, estos no interactúan porque se supone que cada uno puede solucionar el problema por sí mismo.

Según Zañartu<sup>117</sup>, un grupo de trabajo se considera colaborativo si cumple con los siguientes requerimientos:

***Simetría de conocimientos del grupo.*** Se pueden considerar varios tipos de simetría: cuando se brindan las mismas posibilidades a cada estudiante (simetría de acción), si los estudiantes poseen más o menos el mismo nivel de habilidades o conocimientos (simetría de conocimiento), cuando los estudiantes tienen un mismo estatus frente al grupo (simetría de estatus). Una pequeña asimetría en cualquier caso se considera aceptable, pero podría generar conflictos en la interacción. En general, cuando un estudiante considera que otro es más capaz que

.....  
115 Noreen Webb, Philip Ender & Scott Lewis, "Problem-Solving Strategies and Group Processes in Small Groups". *American Educational Research Journal* 23 (1986): 243-261.

116 *Ibid.*

117 Zañartu, *Aprendizaje colaborativo*.

él en algún aspecto, el sentido de la interacción se daña porque se va a priorizar lo que dice el más capaz.

**Meta común.** Las metas compartidas pueden fijarse parcialmente al comenzar el trabajo, pero a medida que este avanza se deben ir reelaborando, consensuando, de tal manera que todos se sientan identificados con el desarrollo del trabajo.

**Grado de división del trabajo.** En la colaboración, el grupo trabaja unido, lo que no indica que esporádicamente se pueda dar una división del trabajo. Sin embargo, los roles dentro del grupo pueden cambiar rápidamente.

Algunas de las características del aprendizaje colaborativo<sup>118</sup> son:

**Interactividad.** El aprendizaje se produce mediante un intercambio de puntos de vista y de opiniones, por lo cual deben participar en la acción como mínimo dos personas. La clave está en el impacto de la interacción en el aprendizaje con el compañero, mas no la cantidad de interacciones. En definitiva, se aprende del intercambio de ideas, de la reflexión grupal.

**Sincronía.** Hace referencia a que no es posible generar conocimiento sin una respuesta simultánea que dé fundamento a la interacción y con ella se pueda construir y sostener una concepción consensuada de un problema. Sin embargo, al generarse un nuevo conocimiento se debe tener en cuenta la reflexión personal, ya que la construcción de conocimiento no solo es un proceso social, sino también de reflexión individual e interiorización.

**Negociación.** Proceso por el cual dos personas consciente o inconscientemente llegan a acuerdos con relación a una tarea o problema. En el caso de interacciones colaborativas, la negociación es uno de sus aspectos básicos. La negociación es parte de la interacción que permite una comprensión mutua; sin negociación no hay acuerdo y todo se convierte en un monólogo donde el papel del interlocutor es ser el receptor del mensaje. En la interacción colaborativa el profesor no se impone por medio de su autoridad, sino con la fuerza de los argumentos.

.....  
118 *Ibid.*

## 3.2 El grupo

La idea inicial fue convocar a dos profesores de la Licenciatura para conformar el grupo de trabajo colaborativo, para lo cual se hizo una invitación oral a diferentes profesores, pero dado que este trabajo requería de tiempo adicional, muchos declinaron la invitación. Finalmente, se constituyó el grupo con dos compañeros docentes que voluntariamente quisieron participar: Fernando y Juan<sup>119</sup>. Los dos se identifican con una tendencia tradicional tecnológica (según estudio presentado en el capítulo anterior) y mostraron interés en mejorar sus prácticas de aula. El docente Fernando ya venía colaborando como coordinador de un semillero de investigación y, al igual que el docente Juan, estaba culminando su trabajo de grado de Maestría en Educación. A cada uno por separado se le explicó en qué consistía el trabajo colaborativo y en forma general los objetivos perseguidos. Los dos fueron citados para una primera reunión, en la que se inició el trabajo del grupo colaborativo.

En la primera reunión se aprobó el proyecto que iba a guiar el trabajo del grupo en las sesiones del grupo colaborativo. Seguidamente, se abordó este proyecto.

La propuesta se presentó en el ámbito del área disciplinar de las matemáticas en el nivel universitario, con la meta de resignificar la práctica pedagógica haciendo énfasis en la comunicación, a través de un grupo de trabajo colaborativo.

Los objetivos para crear un grupo de trabajo colaborativo con profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC fueron: reflexionar sobre el trabajo docente que llevan a cabo, trabajar en colaboración con otros compañeros y desarrollar tareas que emerjan de la dinámica del trabajo.

Entre las actividades ejecutadas en las sesiones conjuntas se pueden citar:

- *Observación de clases (OC)*. Las clases videograbadas fueron observadas por los miembros del grupo fuera de las reuniones o algunas dentro de las reuniones.

.....  
119 Los nombres de los profesores fueron cambiados para preservar su identidad.

- *Evaluación de clases (EC)*. Algunas de las clases observadas se evaluaban de manera intuitiva; es decir, sin ninguna pauta; otras, mediante unos criterios teóricos determinados, o sea, pautadas.
- *Discusión de clases (DC)*. Con los conceptos recogidos en la observación de las clases, se discutía en el grupo sobre los diferentes aspectos trabajados en ellas.
- *Reflexión sobre temas que tenían que ver con educación matemática y la mejora de las prácticas pedagógicas, especialmente de aula (RT)*. Estas fueron propuestas por los miembros del grupo a medida que iba evolucionando su trabajo.
- *Reflexión sobre aspectos particulares de las clases de los profesores (RCP)*. Se daba junto con las reflexiones que se hacían en el grupo, especialmente sobre aspectos teóricos; así surgían conceptos de forma espontánea que ilustraban o aclaraban las discusiones teóricas mencionadas.
- *Reflexión sobre experiencias de los docentes (RE)*. Igualmente, dentro de la discusión del grupo se ponían en consideración aspectos de la práctica pedagógica de cada miembro del grupo.
- *Discusión sobre el trabajo colaborativo (DT)*. Se presentaba cuando dentro de las reuniones se abordaban aspectos que tenían que ver con el trabajo que venía desarrollando el grupo.
- *Análisis de lecturas (AL)*. Dentro del grupo se proponían lecturas, algunas de las cuales debían realizarse en tiempo extra y otras en las sesiones, para posteriormente ser discutidas por el grupo.
- *Discusión de trabajos de grado y tesis (DT)*. Considerando que los integrantes del grupo estaban realizando su trabajo de grado, en algunas oportunidades se proponían para discusión temas que hacían referencia a estos trabajos.
- *Aplicación o análisis de instrumentos (AI)*. En algunos casos se hicieron entrevistas o análisis de instrumentos aplicados para la tesis.
- *Preparación de clases (PC)*. Otra de las actividades ejecutadas por el grupo fue la preparación de una clase que cumpliera con las expectativas de una clase de calidad y, sobre todo, no tradicional-tecnológica.

- *Actividades no temáticas (ANT)*. En todos los grupos hay ocasiones en que la conversación no gira alrededor del tema que los reúne, sino acerca de tópicos alternos que, aunque son importantes para la discusión, no lo son para el desarrollo de los objetivos del grupo.

Para el esquema del trabajo del grupo se siguieron las siguientes fases, aunque no en forma lineal, pues respetando los criterios de trabajo colaborativo del grupo se trataban los temas por propuesta y con el aval de los diferentes miembros.

- *Primera fase*: comprensión de lo que es un grupo de trabajo colaborativo.
- *Segunda fase*: análisis de clases, desde la experiencia de cada miembro del grupo. *Tercera fase*: análisis y aplicación de los criterios de idoneidad del enfoque ontosemiótico en algunas clases.
- *Cuarta fase*: diseño de una clase por parte del grupo siguiendo los criterios del EOS, con apoyo en lecturas que favorecen una mejor interacción comunicativa en el aula de matemáticas.
- *Quinta fase*: aplicación y valoración de la clase realizada.

Como el objetivo específico del trabajo colaborativo fue mejorar las prácticas de aula, especialmente lo concerniente a la comunicación, se trabajó con las fases mencionadas. En primer lugar y de manera natural surgió la necesidad de documentarse sobre el trabajo colaborativo, ya que esa era la acción inicial del grupo. Posteriormente, y con el fin de identificar qué estaba haciendo cada uno en la práctica profesional, se analizaron clases sin ningún parámetro definido, sino según el punto de vista de cada uno sobre una buena clase. Luego vino la etapa de documentación sobre el análisis didáctico de clases, especialmente el trabajo que se hace desde el enfoque ontosemiótico, y se evaluaron algunas clases con estos parámetros. Finalmente, y tras bastantes discusiones, se decidió elaborar un bosquejo de clase que todos consideraron adecuada y para que alguno de los profesores la ejecutara; para ello fue elegido Fernando, quien dictó la clase, que fue videograbada y observada por el grupo en su totalidad para posteriormente ser evaluada con los criterios

de idoneidad del enfoque ontosemiótico<sup>120</sup>. Finalmente, los profesores contestaron una entrevista (EntJ4, 12 agosto 2016; EntF4, 18 julio 2016), en la que expresaron su idea de lo que es una buena clase de matemáticas y cómo se debe plantear la comunicación en ella.

Se acordó que las reuniones de trabajo se harían cada ocho días y, a pesar de las dificultades en cuanto a cruces de horario y reuniones de trabajo no programadas de algunos de los miembros, estas se pudieron cumplir. La agenda se daba a conocer vía correo electrónico, al igual que cualquier cambio sobre el día o la hora.

Es de aclarar que la agenda en ocasiones no se cumplía, pues cuando algún docente deseaba trabajar algún tema en particular, el grupo aceptaba este cambio, así no estuviera agendado; por ejemplo, un incidente en una clase, avances de trabajos de grado, lecturas propuestas por los docentes, prolongación de la actividad de la reunión anterior, entre otros.

Como grupo, siempre se procuró reflexionar sobre las clases y sobre el rol del docente en ellas, haciendo énfasis sobre los aspectos comunicativos. A medida que se avanzaba en las reuniones del grupo, se fue optimizando el tiempo, siempre valorando las opiniones de los compañeros docentes. Hay que tener en cuenta que las reuniones resultaban en discusiones académicas muy interesantes, dado el nivel de los componentes del grupo de trabajo colaborativo. Más adelante se mostrarán evidencias de los resultados de estas discusiones.

En las 25 reuniones del grupo, que se realizaron desde marzo de 2015 hasta agosto de 2016, se destacaron las discusiones sobre un documento, un tema, clases videograbadas, análisis de clases con pauta y sin pauta, reflexiones sobre el trabajo colaborativo y planificación de clases, entre otras.

Con la autorización verbal de Fernando para la participación del grupo, la grabación y el análisis de algunas clases, se comenzó a examinar la primera, sin pauta, es decir, sin parámetros previamente acordados para su análisis (TG9). De lo anterior surgió la necesidad de tener unos criterios

.....  
120 Marcel Pochulu y Vicenç Font. “Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 14, n.º 3 (2011): 361-394.

a fin de poder analizar una clase en detalle, para lo cual se propuso aplicarlos desde el enfoque ontosemiótico (TG10) y posteriormente, luego de observar una síntesis de la clase, se analizaron las dos clases con base en el análisis previo del investigador. A continuación, se presenta un registro del análisis de la clase:

La faceta más baja es la interacción, ¿por qué razón la interacción? Porque la comunicación que se establece con el estudiante corresponde al tipo de una clase tradicional. ¿Qué se le permite hacer al estudiante? Únicamente contestar sí o no, a veces una frase, o se formula la pregunta y el mismo docente la responde. Este fue el resumen de la primera clase (TG11).

Al respecto, el profesor Juan manifiesta: “(...) es que efectivamente no les damos la oportunidad a los estudiantes para que propongan sus problemas” (TG11). El profesor Fernando, quien orientó las clases, dijo: (...) no sé... de acuerdo con lo que hablan y lo que he trabajado, quiero verificar si estoy en lo cierto o no. Yo, en primer lugar, doy la explicación del tema, luego, los ejercicios, y es en este momento cuando tienen la oportunidad de intervenir (Fernando, TG11).

Como se puede apreciar, se comienzan a presentar algunos cuestionamientos sobre la práctica de aula. Posteriormente, el grupo en las sesiones 20, 21 y 22 preparó una clase para que la orientara el docente Fernando. El docente dictó la clase, la cual fue grabada en video, y el grupo durante una sesión y media (24 y 25) la observó e individualmente cada miembro la evaluó según los criterios del enfoque ontosemiótico<sup>121</sup>. A continuación, se presentan los resultados por idoneidad:

.....  
121 Marcel Pochulu y Vicenç Font, “Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa”.

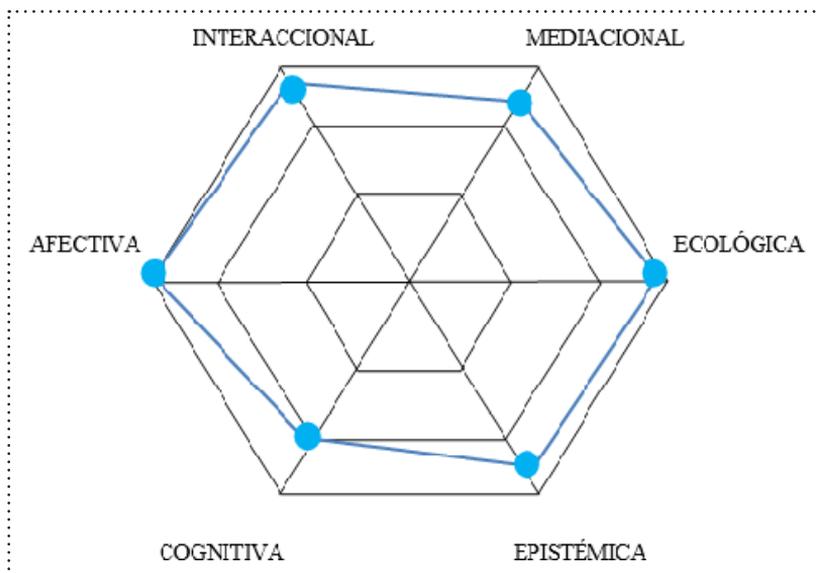
**Tabla 1.**

Resultados de la evaluación de cada miembro del grupo a la clase del docente Fernando

Idoneidad didáctica	Gustavo %	Juan %	Fernando %	Francisco %	Tendencia %
Idoneidad epistémica	83	100	83	90	89
Idoneidad cognitiva	75	75	75	67	73
Idoneidad afectiva	100	100	100	100	100
Idoneidad interaccional	100	100	100	75	94
Idoneidad mediacional	78	89	100	77	86
Idoneidad ecológica	100	100	90	100	98

**Fuente:** elaboración propia.

El hexágono que muestra la tendencia es:



**Figura 2.** Hexágono que representa la tendencia de la evaluación del grupo a la clase del docente Fernando

**Fuente:** elaboración propia.

Lo anterior implica que las facetas epistémica, interaccional, afectiva y ecológica están en un nivel excelente; la mediacional, muy buena, y la cognitiva, buena. En general, es una clase muy buena, el grupo de trabajo colaborativo, al igual que el docente Fernando, quien aplicó el plan, trabajaron muy bien para mejorar la calidad de la clase, en especial la faceta interaccional, que tiene que ver directamente con los patrones de interacción y que en análisis anteriores era crítica.

### 3.3 Reflexiones y discusiones en el grupo

En esta parte se muestra de qué manera se realizaban las reuniones del grupo de trabajo colaborativo; así mismo, se presentan los temas centrales de las discusiones y reflexiones del grupo sobre el trabajo desarrollado. A continuación, se presentan los temas variados que fueron tratados.

**En cuanto a la observación de clase**, ya se habló anteriormente. Se realizó en las sesiones 6, 11, 23 y 24; sin embargo, se vuelve a plantear, ya que se considera importante en el análisis didáctico de clases.

**La evaluación de clase** se trató reiterativamente dentro de las sesiones, 8, 11, 18, 23 y 25.

Es importante dentro del análisis didáctico, ya que va a motivar al profesor a resignificar sus prácticas<sup>122</sup>. Este concepto surge inicialmente de manera intuitiva, hay muchos ángulos desde donde asumirlo; posteriormente, ya desde el enfoque ontosemiótico se hace de una manera más detallada y profunda. Por ejemplo, se transcribe la conclusión del grupo acerca de la primera clase de Fernando:

“En forma general hay dos facetas que están más bajitas, la interaccional y la mediacional, o sea nos toca intentar mejorar ese par de aspectos; en lo que se refiere a la interaccional, aquí están los resultados, el porcentaje de la participación de los estudiantes fue del 13.5 %, contando los espacios donde los estudiantes están trabajando solos el ejercicio, entonces uniendo esos tiempos ¿qué significa esto?, que la participación de los estudiantes es casi nula” (Juan, TG18).

.....  
122 Alfonso Jiménez, “Quando professores da escola e da universidade se encontram: (re)significação e reciprocidade de saberes” (tesis de doctorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002).

Obsérvese que, a la vez que se analiza, se proponen acciones para mejorar las prácticas.

**En la discusión de clases** se reflexiona sobre diferentes aspectos inherentes a la práctica pedagógica; al respecto:

“Es que tendemos a no dejar participar al estudiante, por ejemplo, si vamos a hacer demostración, no dejamos que el estudiante plantee hipótesis acerca de la parte básica, sino que le presentamos de una vez los procedimientos, de esta manera no lo dejamos verdaderamente intervenir. Deberíamos dejar que él haga una aproximación intuitiva” (Juan, TG11).

También, la discusión de clases se presentó con respecto a lo sucedido en la clase preparada por el grupo (TG23)

Fernando:	Una estudiante sintió que le faltó mucho apoyo del profesor. Lo único que dijo fue que había sido mucho aprendizaje, que el aprendizaje había sido solamente autónomo, pero el resto de la clase salió contento, les gustó por el material que habían manipulado, que habían trabajado, entonces... para mí fue una labor gratificante; al comienzo, pues digo que habrá sus detalles al ver la grabación, sí hay sus... porque uno tiende a veces sin querer a...
Francisco:	Sí, ya tenemos una tipología ahí, y de hoy para mañana no la vamos a cambiar, ¿sí?... eso es muy complicado.
Juan:	Sí, la estudiante reconoció que el aprendizaje era autónomo, ya hay una tendencia porque hay un cambio de paradigma en lo interaccional, ¿cierto?

Y, posteriormente, en el análisis de la actividad, un miembro del grupo plantea también la discusión de clase (TG23, 2016):

Gustavo:	Es importante lo que decía Fernando, que a veces a ellos les queda muy difícil escribir lo que hablan; pues uno no puede estar todo el tiempo en todos los grupos. Pero él indica que, en los grupos que escuchó, se dio cuenta de que tenían buenas ideas, aunque no las lograron escribir; entonces eso es interesante, uno a veces se queda solo con lo que está escrito y deja de lado...
Francisco:	No, y ese es otro detalle que hay que tener presente: ¿por qué razón nuestro estudiante no está expresando lo que piensa? Pues cuando se le pidió una síntesis, ¿qué está ocurriendo allí? ¿Por qué no está escribiendo?
Juan:	(...) La comunicación se queda solamente de pronto en lo verbal.

Francisco:	Correcto, en lo verbal, sin escrito, significa que están flojos en la parte escrita, ese podría ser otro trabajo.
Juan:	Ahí podríamos analizar los niveles de comunicación.
Francisco:	Los niveles de comunicación, sí, exacto.
Juan:	El escrito y el verbal.
Francisco:	El escrito y el verbal, o sea, comparar; vea, ahí tenemos otro trabajo por delante, que es el comparativo entre la comunicación verbal y la comunicación escrita. Comparativo, porque aparentemente puede ser igual, pero resulta que no, cuando va uno a escribir ya se limita.

**Reflexionar sobre un tema** fue el aspecto más común en las reuniones, se describen algunos temas que se abordaron en el trabajo colaborativo: la interdependencia positiva, el método lancasteriano y la universidad; medios audiovisuales de acuerdo a la tendencia didáctica en que se estaba trabajando; aspectos positivos del método tradicional; en la tecnología educativa, la relación con la empresa; la evaluación, el tiempo, la preparación, la clase desde el constructivismo; aspectos comunicacionales, por ejemplo, el celular en el aula; análisis de la idoneidad epistémica en una clase; análisis sobre la evaluación en el aula de clase; normas sociomatemáticas y contrato didáctico; normas éticas; la comunicación; análisis de idoneidad cognitiva y mediacional; semiótica; comentarios sobre artículo publicado por Juan en una revista indexada; desconcentración de los estudiantes y pausas activas. Como ejemplo se plantea lo siguiente (TG8), hablando respecto del tiempo

Fernando:	Yo lo que le hubiera modificado un poquito a la clase tres sería que el chico explorara, que intentara hacer y uno estar detallando; al ver que ya está como fallando, ahí sí conducir el proceso, porque les entregó el material como para que trabajaran y empezó de una vez a explicarles y ellos todavía no habían comenzado a... eso es lo único que yo le haría.
Francisco:	Sí, pero hay un problema: el tiempo.
Fernando:	Bueno, el tiempo es una variable muy importante.
Francisco:	Es que es una variable muy fuerte que a nivel universitario no se maneja, pero algo que no se puede dejar; es lo que estamos a veces nosotros haciendo aquí en nuestras sesiones, que llegamos a cierta conclusión y listo, cortamos porque nos tocó irnos.
Gustavo:	Sí, para que al final se vea todo el producto.

Francisco:	Claro, que se vea que llegaron a alguna conclusión y si no, pues todos se fueron para diferentes lados y ya.
Fernando:	Sí, porque de las tres clases que mostraron, pues la tercera sería la clase ideal.

**La reflexión de aspectos particulares de las clases de los profesores** se presentó en las sesiones 5, 7, 8, 12, 13, 15, 18,19, 20 y 23. También fue de los aspectos más comunes y se deliberó especialmente sobre la forma de actuar del estudiante ante los retos; evaluación y pruebas externas; importancia de la distribución del tiempo en una clase; la evaluación que hace el estudiante al docente lo afecta cuando el estudiante tiene una concepción tradicional y el docente intenta algo diferente; aspectos comunicacionales, el uso del celular en clase; empate sobre el ciclo complementario de las normales y la universidad; casos especiales de la práctica pedagógica; situación problemática para que el estudiante aprenda el concepto “el plano”; aspectos de salud de los docentes; uso de medios educativos como GeoGebra y material real; confrontación del docente con una nueva metodología. Como ejemplo se presenta un fragmento de casos particulares de la práctica pedagógica (TR12):

Fernando:	Tenía una pregunta: ¿qué tan bueno es? Pasó en situación de clase en una evaluación cuando un chico utilizó el WhatsApp para soplar y en mensaje de voz le dijo paso a paso lo que iba a hacer. Pues claro, yo les llamé la atención, pero me causó curiosidad como una técnica para poder utilizar.
Francisco:	Sí... esa es una oportunidad.
Gustavo:	Un profe nos decía una vez que les dio el examen y les dejó cinco minutos para que hablaran entre todos y a los cinco minutos les cortó y ya, y cada uno solo.
Francisco:	Un compañero hizo ese ejercicio, básicamente cualquier cosa que haga un estudiante es una oportunidad de aprender, si lo enfocamos bien. Lo que tú dices es cierto, lo hizo porque quería ver, más bien hacer una especie de sociograma orientado a aspectos matemáticos en el grupo.

**La reflexión sobre experiencias de los docentes** se hizo en las sesiones 2, 3, 12, 13, 15 y 19. Conformación del grupo Semillitas Educativas<sup>123</sup>,

.....  
 123 El Grupo Semillitas Educativas es un semillero de investigación del grupo de investigación PIRÁMIDE de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC.

credibilidad del profesor, el día del profesor, exclusión del estudiante, lineamientos curriculares, uso adecuado de los medios educativos, especialmente de los tecnológicos y uso de textos. Se anexa un episodio de uso de las tecnologías (TG19).

Gustavo:	(...) o algún trabajo en el mismo, por ejemplo, en el GeoGebra que muestre que ahí mismo pueden digamos...
Fernando:	Pues lo pensé, lo llevé la primera vez, pero el problema... porque todos no llevaron computadores.
Gustavo:	De pronto para que el mismo programa les ayude.
Francisco:	Sí, por lo menos el programa ayuda a motivar.
Juan:	Ayuda a motivar, pero si no lo tienen todos, eso es un problema.
Fernando:	Porque se pueden atender allá cómo hacen y no lo pueden manipular y entonces...
Francisco:	En cambio, el video se les puede presentar a todos
Juan:	O que el GeoGebra tú lo manipules. Qué pasa si lo giramos aquí, si lo ponemos allá, cómo quedaría, por ejemplo, que pasa si queda paralelo...
Fernando:	¿Saben qué podríamos hacer? Mostrar el video para darles dirección; después con el video lo pueden ir pensando e ir haciendo y luego ya se verá en el GeoGebra más o menos qué es lo que pasa.
Francisco:	Entonces sería ya como para el cierre.
Fernando:	Para el cierre, o sea, para primero ir trabajando y viéndolo.

**La discusión sobre el trabajo colaborativo** se presentó en las sesiones 12, 15 y 23. Se habló inicialmente de un futuro proyecto, con una investigación longitudinal; de buscar el patrón de interacción individual o trasversal: recuento de lo trabajado en el grupo en las últimas sesiones; se discutió sobre el futuro del grupo, de lo cual se informa así (TG23):

Francisco:	Te felicito, de verdad que esa aplicación me pareció interesante. En lo que respecta al proyecto como tal, yo consideraría que lo cerraríamos en una próxima oportunidad con el análisis de la clase y lo que nos quedaría pendiente, si es que ustedes me permiten hacer otras dos sesiones de trabajo posteriores, ahora cuando comience el semestre; entonces ahí concluimos el proyecto; sin embargo, hay que analizar la continuidad del grupo y seguir trabajando y sobre todo seguir sacando temas para publicación, empezar a hacer publicaciones...
------------	--

**La discusión de trabajos de grado y tesis** se llevó a cabo en las sesiones 1, 15 y 16. Se hizo la presentación general del proyecto, se firmaron los consentimientos informados, se escogieron los pseudónimos, se fijó el horario para el trabajo colaborativo, se abordó preliminarmente el trabajo de grado del profesor Juan y de la tesis del investigador. Se presentan unos apartes (TG16) sobre la lectura del trabajo de grado del profesor Juan y se hicieron algunas sugerencias; al hacer un planteamiento que no tiene justificación, Juan comenta que está en un apartado anterior

Francisco:	¡Ah! ¿Eso está más atrás? Sí ¡ah no! no hay problema, porque esa puede ser una situación que te van a preguntar. Lo demás me parece muy bien, está muy bien enfocado, aquí hay arreglitos pero de semántica. Está la descripción, el trabajo que se hace, la abstracción... muy bien. Nos falta aquí en la parte final hacer las recomendaciones; entonces, entre otros aspectos, utilizar justamente lo que se encuentra en el patio, o sea, sugerirle al docente que observa más los recreos, atienda los detalles; uno, que no se necesita hacer una investigación a fondo para saber que están utilizando ciertas cosas que pueden ser útiles para su gente dentro de su clase; dos, hacer con cierta frecuencia los sociogramas para que ellos vean primero la habilidad; sociogramas de interacción que ya no tienen que ver con la matemática, sino con el gusto por trabajar con X o con Y, si?
Juan:	Por ejemplo, se puede hacer un sociograma de clase...
Francisco:	Porque tú puedes comparar... Este es un argumento que puede salir después, por ejemplo, se hace un sociograma orientado hacia la matemática, luego un sociograma general para ver la relación que se crea entre los dos, o sea, ver si hay variación o no; pues yo juraría que sí. En el sociograma con tema matemático volvemos a hacer lo que hizo otro docente, o sea que en un momento dado...(interrupción)
Francisco:	Entonces, les estaba comentando que la idea sería que en la sesión de hoy trabajemos un poquito... bueno, hablar un poco de la parte de comunicación.

**El análisis de lecturas** se realizó en las sesiones 2, 3, 5, 7, 8, 12, 14, 16, 18, 19 y 20. Lectura sobre trabajo colaborativo<sup>124</sup>, tendencias didácticas<sup>125</sup>; normas sociomatemáticas<sup>126</sup> y contrato didáctico desde

.....  
 124 Dario Fiorentini, "Learning and Professional Development of Mathematics Teacher in Research Communities". *Sisyphus. Journal of Education* 1, n.º 3 (2013): 152-181.

125 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

126 Ema Yackel y Paul Cobb, "Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics". *Journal for Research in Mathematics* 27, n.º 4 (1996): 458-477.

Brousseau<sup>127</sup>, D'Amore, Font, y Godino<sup>128</sup>, Planas<sup>129</sup>; criterios de idoneidad teniendo en cuenta a Pochulu y Font<sup>130</sup>, Font, Planas y Godino<sup>131</sup>, Godino<sup>132</sup>, entre otros. Lo siguiente corresponde a la discusión del grupo sobre una lectura acerca de la comunicación propuesta por el investigador (TG16).

Francisco:	Esa es la forma, es la comprensión de comunicación para este curso. Dice que se entiende la comunicación como una interacción social mediada por el lenguaje y donde el objetivo de cada sujeto es entender y hacerse entender.
Fernando:	Y sí, eso pasa porque a veces uno habla de una forma que uno no quiere...
Francisco:	Es que, como ya lo mencionamos aquí... claro realmente...
Fernando	Bueno, lo que yo quería decir ahí es que es lo que comúnmente pasa, uno a veces dice algo y la persona lo toma de otra forma, sin que uno esté pensando nunca en eso, es donde uno realmente... uno nunca comprende lo quería decir.
Francisco:	Pues es que hay una interacción social, pues sí, porque realmente de todas maneras cuando yo intento decirle algo a Juan, así él no me responde, porque yo noto que hay ya una interacción, o me pone cuidado o simplemente me ignora, pero de todas maneras hay algo que nos relaciona ahí, así no me conteste; ahora una interacción social, mediada por el lenguaje, porque ¿generalmente cómo nos entendemos los dos? Por el lenguaje, ya sea oral, escrito, gestual o el que sea, pero eso es el lenguaje con el cual nos vamos a poder comunicar. Por ejemplo, cuál es la diferencia entre una interacción corriente si él habla ruso y yo alemán, pues él me habla y yo lo escucho, pero no le entiendo nada, o sea, el lenguaje no está ahí.

.....  
127 Guy Brousseau, *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997).

128 Bruno D'Amore, Vicenc Font y Juan Godino, "La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática". *Paradigma* 28, n.º 2 (2007): 49-77.

129 Nuria Planas, "Análisis discursivo de interacciones sociales en un aula de matemáticas multiétnica". *Revista de Educación*, n.º 334 (2004): 59-74.

130 Pochulu y Font, "Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa".

131 Vicenç Font, Núria Planas y Juan Godino, "Modelo para el análisis didáctico en educación matemática".

132 Juan Godino, "Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática". *Recherches en Didactiques des Mathématiques* 22, n.º 2 (2002): 237-284.

Juan:	Hay otra cosa también y son los códigos del lenguaje, porque por ejemplo puede ser que desde lo que yo estoy comunicando, como cuando está uno en clase y dice, no sé, y uno lo está diciendo en el sentido de lo que quiere explicar y los chicos por allá están riendo porque están pensando otras cosas o le encuentran el doble sentido porque eso concuerda con códigos del lenguaje.
-------	--

**La aplicación o análisis de instrumentos** se presentó en la primera sesión, los demás instrumentos se aplicaron en tiempo fuera de las sesiones. Se hizo una entrevista semiestructurada (entrevista 2, 27 marzo 2015).

**La preparación de clases** se realizó en las sesiones 16, 18, 19, 20, 21 y 22. Tarea para Fernando sobre preparación de una clase, discusión sobre formas de grabar y temas; inicios sobre preparación de una clase por parte del grupo; escogencia del tema “plano”, búsqueda de la situación problemática, discusión metodológica, distribución del tiempo, forma de grabación, utilización de medios tecnológicos, concreción de la guía para estudiantes (TG 22).

Francisco:	Técnicamente ¿es deducir el ángulo entre los dos planos lo que se quiere?
Fernando:	Y llegar más o menos a la noción para que quede lo de los paralelos y perpendiculares.
Francisco:	Ah, entonces hay que quitarle lo de la general por ahí que escribiste, porque esos son los casos particulares.
Fernando:	Entonces, una de las ideas que había surgido, no sé si el profe te contó, por ejemplo, era coger imágenes de arquitectura como estas [las muestra impresas], otras que veíamos por aquí. Pero bueno.
Gustavo:	Como planos, tan chévere.
Francisco:	Pero bueno, cualquiera sirve, porque tú le puedes hacer el 3D.
Fernando:	Eran más o menos por ese estilo, y otra que había por ahí; entonces la idea era entregarle a cada uno de los grupos una imagen y que le hicieran el análisis, o sea, que se ubicaran en el plano, el tridimensional, y de ahí que ubicaran una cara del plano, sacaran la perpendicular y luego todo el estudio, que es donde, digamos, se armaría...
Francisco:	Sería, por ejemplo, que, si cogemos en la arquitectura... pues los dos planos casi siempre van a ser perpendiculares, los que tomen ellos.
Gustavo:	Por ejemplo, la otra que mostraba es como el techo.

Fernando:	Ese nos serviría por lo menos para el caso de... y ahí tocaría que ellos generaran, esta sería...
Francisco:	Porque miren cualquiera que escojan, salvo por ejemplo este plano, pero ellos no van a tomar ese plano, ellos van a seleccionar uno tradicional, entonces van a decir para mí el 3D o claro que aquí también está, mire; o la otra es insinuarles que tomen uno que no sea perpendicular, entonces...
Gustavo:	Eso, como mostrarles una foto y...

**Las actividades no temáticas** se relacionaron en las sesiones 5, 8 y 20. El modelo universitario de ascenso en el escalafón, la revisión de las diapositivas para la sustentación de la tesis de Fernando; discusión sobre el nuevo calendario semestral de la universidad. En el anexo 14 se presenta la tabla resumen de las sesiones del grupo de trabajo colaborativo, al igual que las transcripciones de las sesiones 3, 8, 20 y 21.

### 3.4 Reflexiones sobre el grupo

En las primeras reuniones se buscó acostumbrarse a las grabaciones y actuar con naturalidad, sabiendo de antemano que se tendría en cuenta el respeto hacia las opiniones de los demás; se podría no estar de acuerdo y opinar, pero con cortesía y respeto a la diferencia.

Los dos profesores tenían formas de pensar diferentes, lo que enriqueció el trabajo. Es de aclarar que, en general, salvo algunos desacuerdos sobre horarios, no se presentaron problemas en las reuniones. Por ser compañeros de trabajo, la participación del investigador en el grupo se asumió de manera natural, de ahí que el acoplamiento inicial para el trabajo haya sido rápido, aunque sin desconocer, de alguna manera, su liderazgo.

El enfoque que se les dio a las reuniones desde el comienzo fue partir de las prácticas y experiencias de todos, analizarlas desde un punto de vista crítico pero constructivo e ir relacionándolas con la teoría.

El tiempo fue aprovechado al máximo, la agenda para la siguiente sesión se consensuaba por correo, lo cual no implicaba que no se pudieran hacer cambios cuando los miembros del grupo querían plantear otras situaciones. Algunas tareas, como análisis de artículos y lecturas en general, se propusieron para lectura previa a los encuentros con el fin de

ganar tiempo; sin embargo, algunas otras se hacían durante la sesión. Lo mismo sucedió con algunos videos.

La dispersión temática era usual en las sesiones. Algunas veces se cambiaba de tema debido a un suceso de aula o alguna otra situación y se terminaba discutiendo sobre asuntos diferentes a los iniciales. Pero esto se consideraba normal, pues, de todos modos se estaba reflexionando sobre las propias prácticas profesionales, así que se dejaba que la discusión siguiera su curso. Por lo anterior, al iniciar una sesión sobre un tema que no era continuación del abordado en la semana anterior, se hacía una síntesis de lo tratado en ella, como ubicación para el grupo.

En general, hay que resaltar que el principal problema del trabajo colaborativo fue el tiempo, pues la falta de este hizo que en ocasiones los miembros del grupo no pudieran cumplir con sus tareas; por ejemplo, a veces debían ocuparse de lecturas o videos fuera de la sesión de trabajo, y cuando algunos no lo podían hacer, se destinaba la sesión para desarrollar esa actividad, con el fin de que todos pudieran participar. Otro asunto que no se cumplió fue la transcripción de cada sesión, la cual, en principio, debía rotarse entre los miembros del grupo, pero finalmente el investigador tuvo que hacer la gran mayoría de estas.

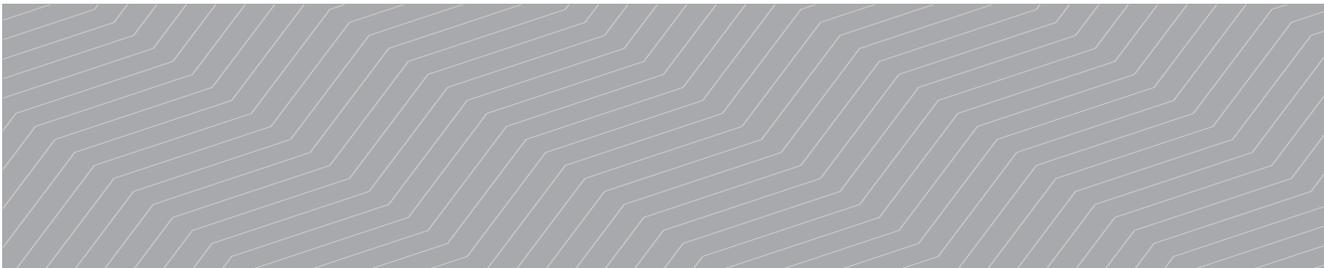
Este proyecto constituyó un aprendizaje para los miembros del grupo, fue una oportunidad de reflexionar sobre las acciones diarias; aunque esto no siempre se pudo hacer por falta de tiempo o de elementos, el investigador considera que sí se cumplió el objetivo de resignificar. Permitir que otros opinaran sobre las situaciones y actividades de clase hizo que se rompieran barreras y, a la vez, fue una oportunidad para llevar a cabo una autoevaluación, que tal vez es lo más valioso de resignificar una práctica<sup>133</sup>. Este trabajo permitió identificar tanto las fortalezas como los aspectos por mejorar en las prácticas profesionales, y especialmente los patrones de interacción comunicativa que eran proactivos y permitían una construcción de saberes para poder desarrollar una clase no centrada en el profesor. Otro factor importante tiene que ver con la continuidad del proyecto, aspecto acordado por unanimidad, ya que, por falta de tiempo, quedaron asuntos pendientes.

.....  
133 Alfonso Jiménez, "Quando professores da escola e da universidade se encontram: (re)significação e reciprocidade de saberes" (tesis de Doctorado, Universidade Estadual de Campinas, 2002).



# CAPÍTULO 4.

## LAS INTERACCIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICAS



Este capítulo tiene dos partes. La primera parte se divide en cuatro secciones. En la primera sección se examina la interacción de forma general y como corriente pedagógica, su adaptación a la educación matemática y la caracterización del interaccionismo dentro de la educación matemática. En la segunda sección se estudian los patrones de interacción y comunicación con base en el concepto de patrón de interacción; se presenta la clasificación de autores como Voigt, Wood, Peressini y Knuth, Brendefur y Frykholm, Loska, Mercer, Sierpínska, Villalta y Martinic, y Alrø y Skovsmose, así como la clasificación propuesta por Schwarz, Dreyfus, Hadas y Hershkowitz. En la tercera sección se trata la interacción en la que la intervención del profesor es discreta. En la última sección se estudia la relación entre la teoría de las situaciones y el interaccionismo simbólico, y se abordan aspectos como el contrato didáctico, el efecto Topaze y el efecto Jourdain.

En la segunda parte se analizan tanto las interacciones del docente Fernando como las del docente Juan. En ambos casos se examinan las interacciones de dos clases consideradas en la primera fase –las cuales se dictaron al iniciar el estudio–, y luego dos clases de la fase dos, en las que se toman en cuenta las interacciones de los docentes después de haber participado en el grupo de trabajo colaborativo.

Para comenzar, es importante aclarar que la interacción se considera la dinámica del proceso comunicativo y es muy importante en el estudio de la comunicación en el aula, como lo destacan algunas investigaciones<sup>134</sup>.

.....  
 134 Jonathan Brendefur y Jeffrey Frykholm, “Promoting mathematical communication in the classroom”; Paul Cobb, “Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies”, en *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, editado por P. Cobb y H. Bauersfeld (Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1995), 25-129; Jorg Voigt, “Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms”,

Dado que los procesos de interacción escolar se generan en ambientes socioculturales, Coll *et al.*<sup>135</sup> definen la interactividad como “la articulación de las actuaciones del profesor y los alumnos en torno a una tarea y un contenido determinados de enseñanza y aprendizaje”, en donde el conocimiento emerge del propio proceso de interacción. Cabe resaltar que la construcción de este está estrechamente relacionada con el contexto en que se adquiere.

El interaccionismo como corriente pedagógica, a diferencia del constructivismo piagetano y el de Vygotsky, sí fue generado pensando en la educación, pero no de manera particular a la matemática, por ello se abordará a continuación esta especificidad.

## 4.1 Adaptaciones del interaccionismo simbólico a la educación matemática

Una parte importante de la investigación en educación matemática se dedica a las relaciones entre profesor, estudiante y la tarea matemática en las clases de matemáticas, a fin de responder preguntas sobre la forma de compartir significados matemáticos sin que la continuidad de la clase se pierda y sobre la comprensión del estudiante respecto de las intervenciones del profesor<sup>136</sup>.

---

en *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, editado por P. Cobb y H. Bauersfeld (Hillsdale: Lawrence Erlbaum, 1995), 163-202; Terry Wood, “An Emerging Practice of Teaching”, en *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, editado por P. Cobb y H. Bauersfeld (Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 1995), 203-22; Terry Wood, “Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes: Funneling or Focusing?”, en *Language and Communication in Mathematics Classroom*, editado por H. Steinbring, M. G. Bartolini-Bussi y A. Sierpiska (Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1998), 167-177; Alfonso Jiménez, “Interaccionismo renovado en la clase de matemáticas”, (ponencia en XII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Armenia, 2011).

135 César Coll, Javier Onrubia y Teresa Mauri, “Ayudar a aprender en contextos educativos: el ejercicio de la influencia educativa y el análisis de la enseñanza”. *Revista de Educación*, n.º 346 (2008): 33-70.

136 Juan Godino y Salvador Llinares, “El interaccionismo simbólico en educación matemática”. *Revista Educación Matemática* 12, n.º 1 (2000): 70-92.

Para contestar estos interrogantes, Godino *et al.*<sup>137</sup> consideran necesario utilizar constructos teóricos procedentes de otras áreas como la etnometodología, el interaccionismo social y el análisis del discurso, pero haciéndoles algunas adecuaciones, ya que estas disciplinas no están interesadas en aspectos relacionados con enseñanza y aprendizaje de contenidos curriculares y menos con los de educación matemática. Esta perspectiva se basa en que la práctica en el aula de matemáticas es vista como un proceso orientado por reglas y convenios emergentes de la misma disciplina matemática y de la práctica, donde las dimensiones culturales y sociales son parte del aprendizaje matemático.

Según Sierpinska y Lerman<sup>138</sup>, el interaccionismo es una de las corrientes del desarrollo intelectual con una perspectiva sociocultural sobre las fuentes y el crecimiento del conocimiento, que tiene como objetivo de estudio las interacciones entre individuos dentro de una cultura.

De acuerdo con lo anterior, los fundamentos del interaccionismo se pueden sintetizar en la cultura del aula que está constituida por la interacción entre profesores y estudiantes; las reglas y convenios que emergen interactivamente, tanto los referentes a la disciplina como los de índole social; y la comunicación, la cual surge de la búsqueda de consensos y los significados compartidos.

El interaccionismo simbólico se ubica entre las perspectivas individualista y colectivista<sup>139</sup>. La individualista —cuyo representante es Piaget— proviene de la psicología cognitiva, en la que el sujeto construye su conocimiento matemático. En la perspectiva colectivista, relacionada con Vygotsky, el sujeto se vuelve objeto de prácticas culturales y el conocimiento matemático que se da es interiorizado. De esta manera, el interaccionismo simbólico toma en cuenta tanto los procesos individuales como los sociales a través de la negociación de las normas de aula, las cuales pueden ser de carácter general o específico de la matemática.

.....  
137 *Ibid.*

138 Anna Sierpinska y Stephen Lerman, “Epistemology of Mathematics and of Mathematics Education”, en *International Handbook of Mathematics Education*, editado por A. J. Bishop et al. (Dordrecht: Kluwer, Academic Publ., 1996), 827-876.

139 Heinrich Bauersfeld, “Theoretical Perspectives on Interaction in the Mathematics Classroom”, en *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, editado por R. Biehler et al. (Dordrecht: Kluwer Academic Pb, 1994), 133-146.

## 4.2 Caracterización del interaccionismo simbólico y la educación matemática

El interaccionismo simbólico<sup>140</sup> dentro de la educación matemática puede ser caracterizado de acuerdo con su expresión acerca del significado, del conocimiento matemático, de las formas de conocer, del lenguaje, el aprendizaje y la enseñanza, los cuales se tratan a continuación:

**4.2.1 Significado.** El desarrollo del significado se da en la interacción e interpretación entre los miembros de una cultura, ya que el ser humano se relaciona con lo que lo rodea, de acuerdo con lo que este entorno significa para él. Este significado surge de la interacción social que cada sujeto tiene con el otro, y se modifica mediante el proceso interpretativo que realiza cada individuo cuando se relaciona con su contexto<sup>141</sup>. Para ese proceso de interpretación es fundamental tener en cuenta las intenciones de los participantes, puesto que el significado está en el uso de las palabras, frases, signos y símbolos más que en sí mismos, de ahí la importancia que se le otorga al lenguaje.

**4.2.2 Conocimiento matemático.** La perspectiva interaccionista le otorga al conocimiento un carácter discursivo. La matemática es una forma particular de discurso, entendido este como el uso del lenguaje como medio para lograr unos fines cognitivos, sociales y otros. Respecto a las matemáticas, Godino *et al.*<sup>142</sup> las consideran como una forma de ver el mundo y de pensar sobre él; la clase de conocimiento matemático que los estudiantes desarrollan depende del tipo de comunicación que se establezca, de ahí la importancia de esta en el proceso educativo, donde se privilegia una práctica basada en convenciones sociales más que en verdades universales.

**4.2.3 Lenguaje.** Aunque el lenguaje del interaccionismo simbólico se distingue del utilizado en el constructivismo piagetiano y en la perspectiva de Vigotsky, comparte el sentido de que el lenguaje no es una

.....  
140 Juan Godino y Salvador Llinares, "El interaccionismo simbólico en educación matemática".

141 *Ibid.*

142 *Ibid.*

representación del mundo, sino un medio de comunicación que podría ser reemplazado por algún otro. Esto implica que en el interaccionismo simbólico dentro de la clase hay que hacer negociación continua de significados, para poder realizar una buena adaptación a los significados institucionales del contenido y aumentar la reflexión sobre los procesos constructivos personales<sup>143</sup>. También es importante explicitar que el lenguaje puede ser expresado en forma oral, escrita o gestual, y representado por términos, expresiones, notaciones y gráficos, como lo manifiestan Godino<sup>144</sup> y D' amore, Font y Godino<sup>145</sup>.

**4.2.4 Aprendizaje.** Para el interaccionismo, el aprendizaje comprende dos aspectos: un proceso de adaptación interactiva por medio de la participación activa en dicha cultura, y un proceso personal de formación. En la clase de matemáticas, la construcción personal de los significados se realiza en la interacción con la cultura de la clase, y el estudiante contribuye a su vez con la formación de esa cultura; es decir, que el aprendizaje no se entiende como un compromiso individual en el que la mente de la persona trata de adaptarse a un entorno ni tampoco es una enculturación a una cultura ya organizada<sup>146</sup>. Es bueno resaltar la particularización tanto de la cultura como del grupo que la construye, lo que constituye una práctica matemática diferente; es decir, “la práctica matemática en el aula es un proceso de matematización compartido que define una ‘subcultura’ específica para ese profesor, esos alumnos y esa aula”<sup>147</sup>.

**4.2.5 Enseñanza.** El profesor debe procurar organizar un ambiente interactivo y reflexivo con sus estudiantes, proponiendo secuencias realizables de actividades y construyendo de esta manera la cultura de la clase, más que transmitir o redescubrir un conocimiento dado de antemano. Para poder llegar a la construcción subjetiva y a las adaptaciones viables, el grupo requiere de la oportunidad para entablar discusiones y

.....  
143 *Ibid.*

144 *Ibid.*

145 D' amore, Font y Godino, “La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática”.

146 Godino y Llinares, “El interaccionismo simbólico en educación matemática”.

147 Bauersfeld, “Theoretical Perspectives on Interaction in the Mathematics Classroom”, 133-146.

negociación de significados. El uso de los medios educativos depende de las convenciones sociales compartidas. El estudiante alcanza su conocimiento matemático básicamente por su participación en las prácticas sociales del aula.

En este apartado se ha realizado la caracterización del interaccionismo simbólico y su relación con la educación matemática, pero dada la diversidad de culturas que se pueden generar producto de las diversas clases, es adecuado tratar de identificar regularidades que permitan comprender las interacciones en distintos contextos. Dichos patrones se estudiarán a continuación.

## 4.3 Los patrones de interacción y comunicación

Se puede asumir el patrón de interacción como aquellas regularidades que son interactivamente constituidas por el profesor y los estudiantes, y que tienen como objetivo llegar a significados compartidos obtenidos a través de negociación<sup>148</sup>. Según Voigt<sup>149</sup>, dada la ambigüedad y diferentes interpretaciones que se pueden presentar en la clase de matemáticas, la negociación de significados es muy frágil.

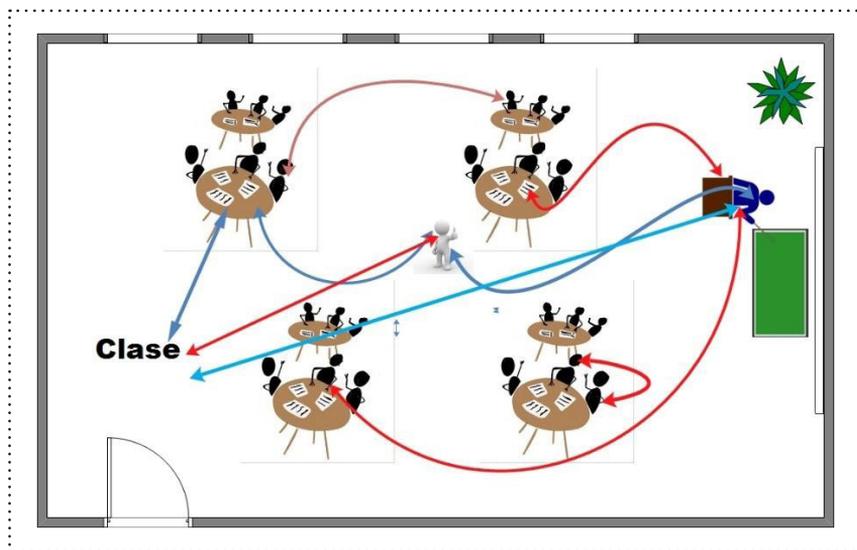
Para Wood<sup>150</sup>, un observador puede caracterizar los patrones de interacción y comunicación que se revelan en la clase de matemáticas, pues se identifican las distintas visiones sobre enseñanza y aprendizaje que son defendidas por los participantes; estos patrones son construidos durante las primeras clases mediante la negociación explícita o implícita de normas que van a regular las acciones de la clase y describen una forma de comunicación, permiten identificar el rol del docente, del estudiante y el de las actividades matemáticas que se realizan en el aula.

.....  
148 Godino y Llinares, “El interaccionismo simbólico en educación matemática”; Voigt, “Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms”, 163-202; Wood, “An Emerging Practice of Teaching”.

149 Voigt, “Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms”.

150 Wood, “Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes”.

Se pueden tomar diferentes enfoques para caracterizar las interacciones en el aula, por ello surge de forma natural analizar la relación entre los intervinientes en este proceso, es decir, interacción profesor-alumno, profesor-grupo, profesor-clase, alumno-alumno, alumno-grupo, alumno-clase, grupo-clase, teniendo en cuenta que son relaciones simétricas.



**Figura 3.** Interacciones en el aula de clase.

**Fuente:** elaboración propia.

En este estudio se parte del supuesto de que la mayor parte de las actividades que se ejecutan en el aula de matemáticas son definidas por el profesor, destacando que la tipificación de las interacciones en la clase básicamente está de acuerdo con la posición asumida por él. Por lo anterior, se identifican interacciones en que el docente asume claramente un rol estructurante (la conducción de un diálogo por turnos, por ejemplo) y, por otro lado, las interacciones donde el profesor asume un papel referencial (la asesoría eventual a los estudiantes que desarrollan una tarea en grupo).

La interacción en que el profesor es estructurante es muy común en las prácticas escolares y valorada por la enseñanza tradicional.

Generalmente, el docente tiende a seguir un patrón de estructura jerárquica<sup>151</sup>. Por ejemplo, Lampert y Cobb<sup>152</sup> se refieren a un patrón de interacción cíclico, en el cual el profesor expone los procedimientos, luego plantea preguntas o problemas generalmente extraídos del texto guía, recibe las respuestas de los estudiantes, evalúa y continúa el proceso de la clase.

Como este caso surgen otros más, como el propuesto por Lemke<sup>153</sup>, al que denominó diálogo triádico o secuencia triádica, en el que la intervención del alumno está entre dos intervenciones del profesor. Esta secuencia tiene la siguiente estructura: Iniciación (I), Respuesta (R), Evaluación (E), la cual, según el autor, tiene una mayor potencialidad en la medida en que no enfatiza solo en la evaluación ni en el mismo *feedback*, sino que tiene algo adicional y es que reta a los estudiantes para que continúen con su raciocinio, justificación o argumentación. También, la secuencia triádica puede ser tomada como forma de orientar los aprendizajes, conducir el conocimiento y la comprensión de los alumnos permitiendo al profesor “mantener el control del discurso y también controlar o ignorar determinadas respuestas”<sup>154</sup>. Existe la creencia por parte de los profesores de que por medio de la secuencia triádica pueden involucrar un mayor número de alumnos<sup>155</sup>; a pesar de esta participación, los estudiantes se limitan a respuestas muy cortas y a solicitud del profesor, lo que se traduce en una participación alta, pero de baja calidad. En la secuencia triádica los momentos de iniciación y conclusión generalmente son desarrollados por el docente.

.....  
151 Luis Menezes, “Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta” (tesis de Mestría, Universidade de Lisboa, 1995).

152 Magdalene Lampert y Paul Cobb, “Communication and Language”, en *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Shifter (Reston: NCTM, 2003), 237-249.

153 Jay L. Lemke, *Talking Science: Language, Learning, and Values* (Norwood: Ablex, 1990).

154 David Pimm, *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms* (London: Routledge, 1987).

155 Jay L. Lemke, *Talking science*.

Lo anterior lleva a resaltar la existencia de una autoridad en el aula<sup>156</sup>, es el profesor quien controla las actividades, hecho que genera una relación asimétrica entre alumnos y profesor. A este tipo de aula los autores mencionados atribuyen el nombre de aula absolutista, en donde se parte del principio de que existe una verdad absoluta que el profesor debe repetir y transmitir, corrigiendo los errores de los alumnos y orientándolos por los mejores caminos.

Otra forma habitual en el aula es la organización en tres fases: introducción, trabajo y conclusión-revisión<sup>157</sup>. En la fase inicial se nota claramente el control del profesor apelando para ello a la secuencia triádica. Cuando los alumnos son incentivados a plantear preguntas, estos pueden progresivamente asumir algún control<sup>158</sup>. Las preguntas formuladas por los alumnos generalmente están en la fase de trabajo y orientadas a resolver sus dudas; el hecho de que determinadas preguntas, si se hacen en la primera fase, pueden interrumpir la continuidad de la clase, aunque no es una norma explícita, sí está inserta en la cultura de una buena parte de las clases de matemáticas<sup>159</sup>. Los alumnos que vivencian una clase con esta estructura reconocen la autoridad del profesor especialmente en las fases de introducción y conclusión, ya que en la fase intermedia generalmente están presentes otras autoridades como la del texto, la de compañeros con mejor desempeño reconocido por el grupo y por el profesor<sup>160</sup>.

Las interacciones profesor-alumno-clase pueden variar de acuerdo con el aula. Por ejemplo, el profesor asume el papel de orientador y no de controlador en el aula, no se limita a la exposición de la materia y a la solución de ejercicios, lo que implica dar respuesta a preguntas abiertas y

.....  
156 Alro y Skovsmose, *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002).

157 Hugh Mehan, "The Structure of Classroom Events and Their Consequences for Student Performance", en *Children in and out of School: Ethnography and Education*, editado por P. Gilmore y A. Glatthorn (Washington, DC: Center for Applied Linguistics, 1982), 59-87.

158 Peter Woods, *Investigar a arte de ensinar* (Porto: Porto Editora, 1999).

159 Lemke, *Talking Science: Language, Learning, and Values*.

160 Alro y Skovsmose, *Dialogue and Learning in Mathematics Education*.

exploración de situaciones<sup>161</sup>. Las preguntas formuladas por el profesor toman importancia relevante, ya que bien orientadas pueden desarrollar capacidades de comunicación y raciocinio<sup>162</sup>; el modo y el momento en que se plantea la pregunta es importante, por ejemplo, si el profesor la formula al inicio de una interacción estaría condicionando las acciones siguientes.

La investigación en educación matemática identifica varios patrones de interacción, propuestos por distintos autores, como los siguientes:

Voigt<sup>163</sup> propone el patrón de elicitación o extracción y el patrón de discusión. En el **patrón de extracción**, Voigt plantea la combinación de dos afirmaciones aparentemente contradictorias. La extracción de un cuerpo bien definido de conocimientos matemáticos es yuxtapuesta a la propuesta de un aula de clase liberal y centrada en el estudiante. En este patrón el autor distingue tres fases:

- El profesor propone una tarea ambigua y los alumnos presentan diversas respuestas y soluciones que el profesor evalúa.
- Si las soluciones de los alumnos son muy divergentes, el profesor los guía hacia la respuesta a través de la formulación de pequeñas preguntas y extrayendo trozos de conocimiento. Voigt<sup>164</sup> plantea que este patrón se asimila con el “catecismo socrático”, en el que los pequeños pedazos de conocimiento son asociados a pequeños avances en razonamiento.
- El profesor y los alumnos reflexionan y evalúan sobre el resultado obtenido.

Este patrón generalmente se relaciona con clases tradicionales, pero sin incluir el tercer punto.

.....  
161 João Pedro da Ponte, Hélia Oliveira, María Helena Cunha e Irene Segurado *Histórias de investigações matemáticas* (Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998).

162 Luis Menezes, “Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta” (tesis de Mestría, Universidade de Lisboa, 1995).

163 Voigt, “Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms”, 163-202.

164 *Ibid.*, 163-202.

**El patrón de discusión.** Voigt<sup>165</sup> lo organiza de la siguiente manera:

- Los alumnos solucionan el problema propuesto por el profesor en pequeños grupos de trabajo.
- Los estudiantes presentan la solución y explican su proceso de resolución a toda la clase sin que el profesor haya tenido la preocupación de saber con anticipación el resultado al que el estudiante llegará.
- El profesor por medio de preguntas va clarificando partes de la explicación de los estudiantes, de tal manera que lentamente vaya emergiendo una solución que sea aceptada por todos.
- El profesor pregunta a otros estudiantes por distintas formas de solución y el proceso se reinicia.

Voigt<sup>166</sup> afirma que el profesor, cuando obtiene divergencia en las soluciones presentadas por los estudiantes, aplica automáticamente el patrón de extracción. A continuación, se presentan algunas diferencias entre los dos patrones propuestos por Voigt.

**Tabla 2.** Patrones de extracción y discusión

Patrón		
	Extracción	Discusión
Solución	Solucionar la tarea es el principal objetivo.	Solucionar la tarea es el inicio para un proceso de explicación.
Participación	En la participación, los alumnos tienen que seguir el proceso que el profesor enseñó.	En la participación, los alumnos pueden dar sus argumentos y contribuciones originales.
Competencias de los alumnos	Las competencias de los alumnos son implícitas u ocultas.	Las competencias de los alumnos son públicas.
Autonomía	La autonomía es nula, debe repetir los mismos pasos del profesor.	La autonomía es total, los estudiantes pueden aprender cómo argumentar matemáticamente.

**Fuente:** adaptado de Voigt<sup>167</sup>.

.....  
165 *Ibid.*, 163-202.

166 *Ibid.*, 163-202.

167 *Ibid.*, 163-202.

Paralelamente, Wood propone otros tres patrones de interacción: el patrón del embudo, el patrón de focalización y el tradicional.

En *el patrón del embudo*<sup>168</sup> se plantean estas fases:

- El profesor propone un problema a sus estudiantes, cuya solución ya conoce y desea verificar el conocimiento de sus alumnos.
- Los alumnos se muestran incapaces de resolverlo.
- El profesor va formulando preguntas más fáciles relacionadas con el problema, de tal manera que las respuestas se orienten a su solución.

En este patrón de interacción el aprendizaje del estudiante no es realmente significativo, pues las actividades intelectuales que exige del estudiante son de bajo nivel.

*El patrón de focalización* es al comienzo similar al anterior, salvo que en lugar de resolver el problema conduciendo al estudiante, el profesor enfoca su atención a través de preguntas en aquellos tópicos del problema que no han sido comprendidos por los estudiantes, permitiendo de esta manera la resolución del problema, así:

- El profesor propone a los estudiantes un problema con cierto nivel de dificultad.
- Ante las dificultades de los estudiantes, el profesor formula una serie de preguntas con el objetivo de focalizar la atención en un aspecto del problema que es clave para su comprensión y resolución.
- El profesor permite que un estudiante resuelva el problema, incentivando el raciocinio y la comunicación de sus ideas al resto de la clase.

.....  
 168 Terry Wood, "Patterns of Interaction and the Culture of the Mathematics Classroom". En *Perspectives on the Mathematics Classroom*, editado por S. Lerman, 149-168 (Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publ., 1994). Wood, "Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes", 167-178.

Wood<sup>169</sup> propone un patrón adicional que llamó *tradicional*, el cual se caracteriza por las siguientes fases:

- El profesor inicia con una pregunta.
- El alumno responde.
- El profesor evalúa la respuesta del alumno.

Este patrón es utilizado por algunos docentes de matemáticas y se caracteriza porque los alumnos asisten para poder posteriormente reproducir, a través de prácticas repetitivas o rutinarias, lo que aprendieron.

Coincidiendo con Rojas<sup>170</sup>, es bueno hacer algunas precisiones sobre los patrones propuestos, pues los autores Wood<sup>171</sup> y Voigt<sup>172</sup> describen dos posiciones encontradas. En la primera, tal vez teniendo en cuenta tendencias didácticas tradicionales, las actividades de clase están centradas en el profesor (patrón del embudo y patrón de extracción) y en la segunda posición contemplan actividades en las que los significados son construidos colectivamente, tal vez orientados por una tendencia interaccionista (patrón de focalización y patrón de discusión).

Otro aspecto por resaltar es que los patrones de uno y otro autor no coinciden; el patrón de extracción presentado por Voigt<sup>173</sup> propone adicionalmente una reflexión sobre lo realizado, que lo hace diferente al patrón del embudo presentado por Wood<sup>174</sup>. De la misma manera, en el patrón de extracción, las opiniones del estudiante son consideradas desde el comienzo del proceso, lo que lo diferencia del patrón

.....  
169 Wood, "Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes", 167-178.

170 Francisco Rojas, "Instrumentos discursivos para caracterizar la comunicación del profesor en el aula de matemáticas y las posibilidades de participación de estudiantes", (ponencia en XIII Conferencia interamericana de educación matemática CIAEM, Recife, Brasil, 2011).

171 Wood, "Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes", 167-178.

172 Voigt, "Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms", 163-202.

173 *Ibid.*, 163-202.

174 Wood, "Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes", 167-178.

de focalización. Según Rojas<sup>175</sup>, entre los dos patrones presentados por Wood<sup>176</sup> se encuentra el patrón de extracción de Voigt<sup>177</sup>. Por otro lado, en el patrón de discusión el profesor interviene con aportes que permiten construir el significado consensuado con los alumnos, criterio que no se tiene en el patrón de focalización.

Peressini y Knuth<sup>178</sup> presentan los patrones univocal y dialógico. Es importante tener en cuenta que, asociada a los patrones de interacción, del embudo y de focalización, está la comunicación univocal y dialógica, a la cual se hará referencia en otro apartado. Peressini y Knuth<sup>179</sup> hablan de los patrones de interacción univocal y dialógico con un sentido diferente; *el patrón univocal* tiene como único objetivo la transmisión de la información y *el dialógico* es un apoyo al pensamiento en el sentido de dar significado a través de la interacción.

En el mismo orden, Brendefur y Frykholm<sup>180</sup> presentan un modelo de cuatro niveles de comunicación: unidireccional, contributiva, reflexiva e instructiva; asociado a cada nivel de comunicación hay un patrón de interacción, los cuales se describen a continuación, teniendo en cuenta que los autores los consideran como inclusivos y como etapas progresivas de comunicación en el aula.

***Patrón unidireccional.*** Es el más común, el profesor habla casi siempre, hace preguntas cerradas y no da oportunidades a los alumnos de presentar sus ideas, pensamientos, estrategias.

***Patrón contributivo.*** Ya se muestra alguna participación de ideas, soluciones y estrategias, pero sin gran exigencia cognitiva. Aquí, las interacciones entre alumnos son más comunes.

.....  
175 Francisco Rojas, "Instrumentos discursivos para caracterizar la comunicación del profesor en el aula de matemáticas y las posibilidades de participación de estudiantes", (ponencia en XIII Conferencia interamericana de educación matemática CIAEM, Recife, Brasil, 2011.

176 Wood, "Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes", 167-178.

177 Voigt, "Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms", 163-202.

178 Peressini y Knuth, "Why are you talking when you could be listening?"

179 *Ibid.*, 107-125.

180 Brendefur y Jeffrey Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom".

**Patrón reflexivo.** Más allá de participación, se desarrollan conversaciones en torno a los contenidos y los propios discursos. Las conversaciones son utilizadas como apoyo para hacer exploraciones más profundas. Las reflexiones no surgen de forma espontánea por parte del alumno, son proporcionadas por la participación en la construcción del discurso del aula.

**Patrón instructivo.** El profesor, más que motivar la reflexión, procura modificar las comprensiones matemáticas de sus alumnos, así como su propia práctica. El pensamiento del alumno se vuelve público, mientras que el profesor se hace consciente de los procesos de pensamiento, limitaciones y capacidades de los alumnos, lo que afecta su propia práctica. La capacidad de reflexionar sobre su práctica puede llevarlo al cambio.

Loska<sup>181</sup> plantea las interacciones común y natural; presenta un método de enseñanza que denominó neosocrático en contraposición al conocido método socrático. Este autor considera que el método socrático se limita a una relación uno a uno, las preguntas formuladas son de respuesta breve, generalmente del tipo sí-no, donde el rol del alumno es seguir los pasos lógicos del pensamiento del profesor y responder una serie de preguntas que le son planteadas. El método neosocrático, por su parte, busca abarcar una buena cantidad de estudiantes y replantea el rol del profesor; sustenta que el docente no puede hacer juicios de valor respecto a la participación de los estudiantes en cuanto a sus contribuciones acerca de la temática en cuestión, sino que debe permitir la participación libre del estudiante. El alumno tiene la responsabilidad por el desarrollo de ideas y explicaciones a lo largo de la clase, sin importar el orden en que emerjan.

Junto a estos dos métodos de enseñanza, Loska<sup>182</sup> propone dos tipos de discusiones o interacciones que pueden ocurrir en el aula y a las que llamó común y natural.

**Discusión común.** Está asociada al método socrático, el profesor organiza el aula en forma lineal, haciendo que los alumnos sigan una ruta previamente fijada. Formula secuencias de intervenciones del

.....  
181 Loska, "Teaching without instruction".

182 *Ibid.*, 235-246.

tipo pregunta-respuesta, se aceptan las intervenciones de los estudiantes si están dentro de la guía propuesta.

**Discusión natural.** Tiene que ver con el método neosocrático, aquí el profesor, a pesar de tener un planeamiento general, no espera que las ideas surjan en un determinado orden, procura mantener abierta una discusión que pueda tener diferentes caminos y llevar a distintas conclusiones. El modo en que se distribuye el tiempo no es previsible en este tipo de clase.

Con base en Mercer<sup>183</sup> se plantean diferentes tipos de diálogo que se presentan en el aula: diálogo básico, prospectivo, crítico, reflexivo y de conferencia<sup>184</sup>. Este autor relaciona el concepto de diálogo con el concepto de compromiso.

**Diálogo básico.** Se procura establecer un conocimiento común. El profesor presenta un tema e intenta determinar si los alumnos aprendieron lo suficiente. El profesor orienta al alumno y se preocupa por la consolidación de su conocimiento.

**Diálogo prospectivo.** El profesor establece un punto de vista inicial para procurar el aprendizaje del estudiante, clarifica el problema sin apelar a intervenciones muy elaboradas y motiva a los estudiantes a participar.

**Diálogo crítico.** La preocupación de los participantes es comprender diferentes puntos de vista, elaborar y plantear nuevas ideas, desafiar, refutar y argumentar las opiniones de los demás. El profesor invita a plantear hipótesis y pruebas, elaborar y argumentar la construcción de conocimiento.

**Diálogo reflexivo.** Los participantes procuran integrar y generalizar argumentos válidos. Recapitulan y elaboran conclusiones sobre las acciones realizadas teniendo en cuenta más los procesos que los resultados. La característica típica es la de recapitular y evaluar las experiencias realizadas.

**Diálogo conferencia.** El compromiso es la transmisión del conocimiento. El profesor prepara y presenta una temática en la clase como si se tratara de una conferencia. Como alternativa, se propone

.....  
183 Neil Mercer, *The guided construction of knowledge. Talk amongst teachers and learners* (Clevedon, UK: Multilingual matters, 1995).

184 Baruch Schwarz, Tommy Dreyfus, Nurit Hadas y Rina Hershkowitz, "Teacher guidance of knowledge construction", (ponencia en 28th Education, PME28. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, 2004).

la lectura de un texto, en el que el profesor plantea preguntas previamente elaboradas. Hay preocupación permanente por la aclaración y exposición de contenidos.

De acuerdo con Schwarz et al.<sup>185</sup>, generalmente los profesores apelan a los diálogos básico y prospectivo, ya que no es fácil la utilización de diálogos argumentativos. Para desarrollar el diálogo crítico en el aula, el profesor debe tener una participación activa en la argumentación, procurando desarrollar la discusión, motivando la participación de los alumnos y preguntándoles para fundamentar y cuestionar los argumentos utilizados. Los autores resaltan la combinación del diálogo crítico y reflexivo en la clase.

Sierpinska<sup>186</sup> incluye dos patrones más de interacción y comunicación, a los cuales denominó *datsit!* (¡eso es!) y *arusure?* (¿estás seguro?), que Godino et al.<sup>187</sup> rebautizaron como patrones afirmativo e interrogativo, los cuales se describen a continuación.

**Patrón afirmativo.** Sierpinska propone los siguientes pasos:

- En clase el estudiante lee un referente teórico (definiciones y ejemplos).
- El profesor hace una revisión o repetición de lo leído y termina con una pregunta con el fin de que los alumnos encuentren la solución al problema.
- Un estudiante contesta.
- El profesor evalúa afirmativamente (eso es).

El profesor en este caso no cuestiona cómo obtuvo el estudiante la respuesta, sino que simplemente da la aprobación.

.....  
185 *Ibid.*

186 Anna Sierpinska, "Whither mathematics education?" en *Acta del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática*, editado por C. Alsina et al. (Sevilla: Sociedad Thales, 1996), 21-46.

187 Juan Godino y Salvador Llinares, "El interaccionismo simbólico en educación matemática".

**Patrón interrogativo.** Para este caso, Sierpinska propone un patrón con los siguientes pasos:

- En clase el estudiante lee un referente teórico (definiciones y ejemplos).
- El estudiante hace afirmaciones sobre lo leído.
- El profesor interroga sobre la afirmación del estudiante (¿estás seguro?)
- Hay trabajo conjunto entre estudiantes y profesor para buscar la respuesta a la duda del estudiante.

El estudiante analiza y se cuestiona sobre los referentes teóricos que le presenta el docente, muestra dudas, pero lo más importante es que el docente, en lugar de convencerlo directamente, trabaja junto con el estudiante hasta llegar a una negociación de significados. Godino *et al.*<sup>188</sup> manifiestan que este tipo de patrón, aunque es ideal, solo es aplicable en grupos pequeños de estudiantes interesados realmente en aprender y no solo en aprobar.

Según Villalta y Martinic<sup>189</sup>, las interacciones se pueden agrupar en tres modelos: transmisión, sistémico-instruccional y conversacional.

**Modelo de la transmisión.** Se relaciona con la forma de codificar y decodificar la información. La codificación que debe hacer el docente para entregar de forma clara la información a sus estudiantes y la decodificación que debe hacer el estudiante para entender el mensaje se asocian con el enfoque de directividad y no directividad de Flanders<sup>190</sup>, cuya categorización se presenta a continuación.

.....  
188 *Ibid.*, 70–92.

189 Marco Villalta y Sergio Martinic, “Modelos de estudio de la interacción didáctica en la sala de clase”, *Investigación y Postgrado*, 24, n.º 2 (2009): 61-76.

190 Ned Flanders, *Análisis de la interacción didáctica* (Madrid: Anaya, 1977).

**Tabla 3.** Clasificación de los patrones de interacción según Flanders

Categoría	Explicación
1. Pausas de silencio y habla simultáneas	Momentos durante los cuales se interrumpe el intercambio verbal entre los interlocutores (pausas de silencio) o se lleva a cabo de una manera confusa, debido a que dos o más participantes hablan simultáneamente.
2. Hablar sobre el estado de ánimo de los estudiantes	Hablar acerca de los temores, las angustias, las expectativas, las alegrías, los malestares, o cualquier otra sensación o sentimiento de sus alumnos.
3. Elogiar o recompensar a los estudiantes	Cuando un estudiante responde una pregunta, elabora bien un trabajo, realiza adecuadamente un procedimiento o lleva a cabo un comportamiento socialmente útil y recomendable como paradigma o ejemplo por seguir, el docente debe elogiarlo y destacarlo en una magnitud directamente proporcional al esfuerzo hecho por el alumno.
4. Retomar ideas de los estudiantes	Retomar las ideas expresadas por los alumnos, con el fin de analizarlas sin criticarlas ni elogiarlas, produce en el salón de clases efectos positivos.
5. Solicitar información a los estudiantes	Preguntas o expresiones del docente que esperan una respuesta de parte de los alumnos o del alumno señalado, sin criticar ni retomar ideas ni darles órdenes o instrucciones ni elogiar ni hacer referencia al estado de ánimo de los alumnos.
6. Dar información a los estudiantes	La intención es que el docente les proporcione información a los estudiantes. Típico de la clase tradicional.
7. Instrucciones u órdenes a los estudiantes	Se entiende por órdenes, instrucciones o <i>líneas de acción</i> toda expresión verbal de parte del maestro que le sirva a los estudiantes para saber qué hacer o cómo hacer algo, sin criticarlos ni elogiarlos ni retomar ideas expuestas antes por alguno de ellos.
8. Críticas y correcciones a los estudiantes	Se utilizan en clase expresiones verbales cuya intención es hacer sentir mal al estudiante, corregirlo, ponerle una calificación de reprobación o, incluso, amenazarlo con expulsarlo de clase o de la institución.
9. Respuestas del alumno limitadas a lo que se le pregunta	Toda expresión verbal de un alumno en que este se limite a contestar correcta o incorrectamente lo que le pregunte el docente.
10. Intervenciones verbales de iniciativa por parte del alumno	Toda expresión verbal de un alumno que no sea considerada como respuesta limitada exclusivamente a lo que el docente le ha preguntado, sin importar si su intervención es o no Correcta.

**Fuente:** Flanders<sup>191</sup>.

.....  
191 *Ibid.*

Aunque a este modelo se le atribuyen bondades, como reconocer que, si el docente refuerza positivamente la participación de los estudiantes, mejora el clima del aula, o que si se presentan los contenidos claramente, se mejora la comprensión de los estudiantes, también hay que reconocer que la interacción es unidireccional, pues el discurso del docente es el único considerado válido en el aula de clase y la didáctica ideal para este modelo es que se haga una buena transmisión de contenidos.

**Modelo sistémico-instruccional.** La didáctica aquí se entiende como una comunicación especializada cuyo objetivo es el logro de determinados procesos cognitivos. Un ejemplo de este tipo de propuestas es el modelo de instrucción efectiva propuesto por Slavin<sup>192</sup>, el cual consta de cuatro componentes: calidad de la instrucción, nivel apropiado de la instrucción, incentivo y motivación de los estudiantes, y tiempo; el estudio prueba que estas variables tienen impacto en los aprendizajes. Hay otras dos variables: eficiencia instructiva y tiempo ocupado. Este modelo pretende abordar las posibles formas de organización en la clase<sup>193</sup>, las cuales pueden ser modificadas por el profesor buscando facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Otra visión de la interacción didáctica la presenta Velasco<sup>194</sup>, quien la define como un proceso de razonamiento interpersonal en el aula entre profesor y estudiantes teniendo como meta promover aprendizajes. Adicional a los indicadores de procesos cognitivos de diferente complejidad, sugiere también indicadores sociales organizados en forma jerárquica según la complejidad de las operaciones cognitivas, que agrupa en cinco, en forma ascendente y relacionadas con el aprendizaje: recuerda, memoriza, localiza espacialmente; lee, compara, ordena; analiza, sintetiza, infiere, comprende; soluciona problemas, lanza hipótesis, estructura, evalúa, diseña; hace metacognición, conocimiento metacognitivo. Igualmente, hay consenso entre investigadores sobre la

.....  
192 Robert Slavin, *Salas de clase efectivas, escuelas efectivas: plataforma de investigación para una reforma educativa en América Latina, documento* (Santiago de Chile: PREAL, 1996).

193 *Ibid.*

194 Antonio Velasco, "Un sistema para el análisis de la interacción en el aula". *Revista Iberoamericana de Educación* 42, n.º 3 (2007): 1-12.

existencia de variables asociadas al aprendizaje: de la escuela, la comunidad y el hogar de los estudiantes<sup>195</sup>.

El modelo sistémico instruccional se enfoca en las variables de la clase que permiten obtener aprendizajes, pero resalta los procesos cognitivos y los aspectos organizacionales. Al estudiante le asigna una condición de aprendiz, pero a la vez interactivamente activo.

**Modelos conversacionales.** Las orientaciones constructivistas y socio-culturales con la participación de la filosofía del lenguaje posibilitan la integración de áreas como la etnometodología, etnografía, sociolingüística, semiótica, que hacen emerger una perspectiva socio-etnográfico-lingüística de la comunicación, que es la que sustenta los modelos conversacionales del análisis de la interacción en el aula.

Desde esta mirada, ya no se concibe la interacción en el aula como un hecho de transmisión de contenidos, sino como un proceso que se crea con la estructuración de las prácticas y las subjetividades de alumnos y profesores en la clase<sup>196</sup>. De acuerdo con lo anterior, las interacciones en el aula se ven como prácticas comunicativas en contextos culturalmente situados; como lo resalta Planas<sup>197</sup>, “el aula es una cultura con modelos comunes de interpretación de normas, acciones y creencias que se reconstruyen a través del discurso por medio de prácticas sociales”.

Según Villalta<sup>198</sup>, existe en la escuela un discurso instruccional que se determina por patrones distintivos de acuerdo con las formas como se utiliza el lenguaje en el aula. El análisis de estos discursos orienta sobre la manera como los instrumentos de mediación semiótica transforman

.....  
195 Rodrigo Cornejo y Jesús María Redondo, “Variables y factores asociados al aprendizaje escolar. Una discusión desde la investigación actual”. *Estudios Pedagógicos* 33, n.º 2 (2007): 155-175.

196 Sara Delamont, *La interacción didáctica* (Madrid: Cincel, 1984). Marco Villalta, “Una propuesta para el estudio de la interacción didáctica en la sala de clase”. *Estudios Pedagógicos* 35, n.º 1 (2009): 221-238.

197 Nuria Planas, “Análisis discursivo de interacciones sociales en un aula de matemáticas multiétnica”. *Revista de Educación*, n.º 334 (2004): 59-74.

198 Marco Villalta, “Una propuesta para el estudio de la interacción didáctica en la sala de clase”.

el funcionamiento cognitivo, determinado por la participación de los estudiantes en actividades específicas<sup>199</sup>. En este sentido, la didáctica se piensa como una construcción cultural en la que el profesor, en el encuentro de la clase, transmite, reflexiona y reconstruye, dejando atrás la concepción de herramienta para la transmisión de saberes.

Al igual que en la didáctica, la interacción también ha pasado por diferentes procesos: en el modelo transmisionista se entiende como una acción unidireccional; en el modelo sistémico-instruccional se ve como una interacción funcional al aprendizaje, y en el modelo conversacional se asume como una construcción de significados y procesos culturales<sup>200</sup>.

A continuación, se presenta una tabla donde se integran las clasificaciones propuestas por diferentes autores que, aunque tienen miradas distintas, todos coinciden en unos patrones de interacción usualmente desarrollados en el aula y en otros que, aunque con menor nivel de utilización, son considerados por investigadores como relevantes:

**Tabla 4.** Clasificación de los patrones de interacción

Autores	Patrones de interacción	
	Usuales en el aula	Relevantes para el aula
Voigt	Patrón de elicitación o extracción	Patrón de discusión
Wood	Patrón del embudo Patrón tradicional	Patrón de focalización
Sierpinska	Patrón afirmativo	Patrón interrogativo
Peressini y Knuth	Univocal	Dialógico
Loska	Discusión común	Discusión natural

.....  
199 Rosario Cubero, Mercedes Cubero, Andrés Santamaría, Manuel de la Mata, María Carmo-  
na y María Prados, “La educación a través de su discurso. Prácticas educativas y construc-  
ción discursiva del conocimiento en el aula”. *Revista de Educación*, n.º 346 (2008): 71-104.

200 *Ibid.*

**Tabla 4.** Clasificación de los patrones de interacción (continuación).

Brendefur y Frykholm	Patrón unidireccional Patrón contributivo	Patrón reflexivo Patrón instructivo
Alrø y Skovsmose	Aula absolutista	Aula dialógica
Schwarz, Dreyfus, Hadas y Hershkowitz	Diálogo básico Diálogo prospectivo Diálogo conferencia	Diálogo crítico Diálogo reflexivo
Villalta y Martinic	Transmisión, sistémico-instruccional	Conversacional

**Fuente:** elaboración propia.

## 4.4 Interacción en que la intervención del profesor es discreta

Esta clase de interacción se presenta en la clase cuando los alumnos están trabajando una tarea en grupo y la actuación del profesor es discreta. El profesor se desplaza por el aula, aclara dudas, hace preguntas; es decir, su papel es de generador de ambientes adecuados para desarrollar tareas y acompañar en este proceso a los alumnos. El rol del docente en este tipo de interacciones es muy importante, es un referencial en un doble sentido: de favorecer un medio para las interacciones más directas entre los alumnos y de representar a la comunidad científica, constituyendo una fuente de legitimación.

Ese papel depende del modo como el profesor afronta el desarrollo de las tareas, en especial las que realizan los estudiantes en grupo. Algunas veces, el profesor ve el trabajo en equipo como una forma de distribuir los alumnos en el aula, para que se ayuden y de esta manera transcurra el tiempo de clase. Esto es muy común en trabajo de pequeños grupos, especialmente de dos alumnos que están sentados en el mismo pupitre. En ese caso, el propósito de construir los grupos no es el desarrollo de la tarea en sí, sino una forma de compensar la falta de tiempo o la falta de material para la clase. Es necesario que el profesor considere el trabajo en grupo como importante en sí mismo. El profesor puede contribuir al desarrollo de las capacidades de trabajo

conjunto en los alumnos según dos criterios: cognitivos y sociales. Los cognitivos cuando se busca hablar sobre el trabajo realizado, discutir los resultados y conclusiones del grupo; en los sociales se pretende hablar sobre la forma como se desarrolla el trabajo<sup>201</sup>.

Una dificultad encontrada por el profesor en las clases con trabajo en grupo es el desconocimiento de lo que hace el grupo mientras él no está con ese grupo; esto se presenta porque el profesor le da más validez a lo que se hace en su presencia<sup>202</sup>. Sin embargo, hay docentes que valoran más el trabajo que hace el estudiante de forma independiente sin ninguna supervisión.

El hecho de que el profesor no participe en la mayoría de las acciones que desarrolla el grupo tiene bondades, pues no le compete ofrecer respuestas sino plantear preguntas y retos<sup>203</sup>. El profesor puede aprovechar para percibir si el grupo está trabajando como equipo, es decir, si todos contribuyen con sus ideas, se ayudan mutuamente, son capaces de solucionar sus desacuerdos, si el ambiente es saludable y si cada uno se preocupa por los demás compañeros. Adicionalmente, si el grupo trabaja sin la presencia del profesor, desarrolla su autonomía. En los grupos generalmente se ve al profesor como una autoridad, y su papel cuando se integra con ellos no se observa como el de compartir ideas, sino de responder a las preguntas que ellos formulan<sup>204</sup>.

A continuación, se trabajará un poco más en los tipos de interacción en los que la intervención del profesor es discreta, distinguiendo las interacciones alumno-alumno- grupo y alumno-grupo-clase.

La interacción alumno-alumno-grupo tiene lugar cuando dos o más alumnos se integran sin intervención del profesor. Estas interacciones son importantes para el crecimiento de los alumnos; sin embargo, la experiencia muestra que “la interacción entre los alumnos es casi

.....  
201 Lück Blunk, “Teacher talk about how to talk in small groups”, en *Talking mathematics in school: studies of teaching and learning*, editado por M. Lampert y M. L. Blunk (Cambridge: University Press, 1998), 190-212.

202 *Ibid.*

203 *Ibid.*

204 *Ibid.*

inexistente y poco valorizada por el profesor”<sup>205</sup>, reduciéndose en muchos casos a la resolución de preguntas a los problemas.

A través de la práctica de trabajo en grupo los alumnos pueden evaluar su tarea y aprender a confrontar con los compañeros aquello que pensaron individualmente y a participar con sus ideas. Después de esto, los alumnos están listos para la siguiente etapa, explicar sus ideas, argumentar y procurar convencer a los compañeros de sus opiniones.

Otro aspecto para resaltar es la constitución de los grupos; se le da importancia a la heterogeneidad considerándola como la mejor forma de maximizar los aprendizajes de los alumnos. La elaboración de trabajos en grupo es una oportunidad para que los alumnos pregunten, expliquen, verbalicen y obtengan opiniones de los compañeros de grupo. El trabajo en pequeños grupos se constituye en la forma natural para el desarrollo de la comunicación matemática<sup>206</sup>.

Según varios autores, las interacciones alumno-alumno en el aula, ya sea desarrollando un proyecto o solucionando un problema en grupo, son potencialmente más ricas que un aula con tareas más estructuradas y donde los alumnos trabajan individualmente<sup>207</sup>. Los alumnos se sienten más seguros para participar en pequeños grupos que en grupos grandes, pues la participación es más espontánea y ayuda a que todos los alumnos participen. Si en la discusión participa toda la clase, el alumno acaba por callarse por considerar que no es pertinente su comentario; esto sucede porque el alumno busca agradar al profesor<sup>208</sup>.

Igualmente, es importante resaltar que no basta que los alumnos trabajen en grupo, interactuando con los compañeros, para asumir que ocurre el aprendizaje<sup>209</sup>. Para Cobb, hay dos niveles de análisis en la

.....  
205 Da Ponte, “Da formação ao desenvolvimento profissional”, 27-44.

206 Alice Artzt, “Developing problem-solving behaviors by assessing communication in cooperative learning groups”, en *Communication in mathematics K-12 and beyond*, editado por P. Elliott y M. Kenney (Reston, VA: NCTM, 1996), 116-125.

207 Margarida César, “Interacções na aula de matemática: Um percurso de 20 anos de investigação e reflexão”, en *Interacções na aula de matemática*, editado por C. Monteiro et al. (Viseu: Secção de Educação e Matemática da SPCE, 2000), 13-34.

208 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education*.

209 Cobb, “Mathematical learning and small-group interaction: Four case studies”, 25-129.

interacción entre pares de alumnos: nivel de proceso <colaboración directa/indirecta>, y el nivel de resultado <univocal, multivocal>. Existe una colaboración directa cuando los alumnos resuelven la tarea en conjunto. En cambio, la colaboración es indirecta cuando los alumnos piensan o resuelven la tarea solos, no necesitan escucharse mutuamente, aunque en ocasiones los comentarios de un alumno influyen en lo que los otros hacen. El resultado se considera univocal si la opinión de un alumno prevalece sobre la de los demás. Ese alumno representa una autoridad con poder social o científico. Se trata de un resultado multivocal si se escuchan todos los miembros componentes del grupo, y tratan ellos mismos de llegar a consensos con opiniones divergentes.

La interacción alumno-grupo-clase se presenta cuando un alumno propone una situación individualizada a toda la clase; a su vez, la interacción grupo-clase surge cuando el representante del grupo o el grupo en su totalidad presentan el resultado del trabajo realizado al resto de los compañeros de la clase y se proporciona un espacio de discusión. En general, en estos espacios de interacción es importante que los alumnos escuchen a los compañeros, especialmente a los de grupos distintos, que sean capaces de interpretar lo que los compañeros expresan y cuestionarlos, si es el caso<sup>210</sup>.

## 4.5 Aspectos interaccionales en la teoría de situaciones didácticas

La teoría de las situaciones didácticas<sup>211</sup> nace como un modelo teórico cuyo objetivo era constituir una epistemología experimental de la matemática, independiente del interaccionismo simbólico, pero hay elementos comunes en los dos marcos teóricos; por ejemplo, las interacciones que Brousseau denominó “efecto Topaze” y “efecto Jourdain”, los cuales se pueden describir como patrones de interacción profesor-alumno-saber. Otro ejemplo sería la noción de contrato didáctico y las normas sociomatemáticas. A continuación, se analizan estos aspectos.

.....  
210 Blunk, “Teacher talk about how to talk in small groups”, 190-212.

211 Guy Brousseau, “Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques”. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7, n.º 2 (1986): 33-115.

Brousseau<sup>212</sup> afirma que un proyecto social exterior condiciona la relación didáctica entre profesor-alumnos-saber.

Se establece una relación que determina —explícitamente en una pequeña parte, pero sobre todo implícitamente— que cada participante, el profesor y el alumno, tiene la responsabilidad de administrar y de la cual será de una u otra forma responsable ante el otro. Este sistema de obligaciones recíprocas se parece a un contrato. Lo que interesa aquí es el contrato didáctico, es decir, la parte de ese contrato que es específico del “contenido”: el conocimiento matemático pretendido<sup>213</sup>.

Según Godino y Llinares<sup>214</sup>, las actuaciones del profesor y los alumnos deben cumplir con los siguientes aspectos: el docente debe generar las condiciones para que el alumno se apropie de un determinado conocimiento y reconozca cuándo sucede, el alumno debe someterse a las condiciones que el profesor proponga, la relación didáctica debe continuar pase lo que pase, el profesor debe garantizar que los conocimientos previos y las nuevas condiciones ofrecen la posibilidad al estudiante de apropiarse del nuevo conocimiento.

Lo fundamental del contrato didáctico no son las normas sociales, sino el proceso de búsqueda (negociación) de un contrato hipotético.

Al igual que en el interaccionismo simbólico, se distinguen las normas sociales de las sociomatemáticas; en la teoría de las situaciones didácticas el contrato didáctico forma parte del contrato pedagógico y del contrato escolar. Chevallard, Bosch y Gascón<sup>215</sup> tratan en profundidad estas temáticas.

Por otro lado, hay un patrón de interacción llamado “efecto Topaze”, el cual se caracteriza por las restricciones del sistema social en que se puede dar la enseñanza, lo cual implica la pérdida del sentido

.....  
212 Blunk, “Teacher talk about how to talk in small groups”, 190-212.

213 *Ibid.*

214 Godino y Llinares, “El interaccionismo simbólico en educación matemática”.

215 Yves Chevallard, Marianna Bosch y Josep Gascón, *Estudiar matemáticas; el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje* (Barcelona: ICE Universidad Autónoma/Horsori, 1997).

matemático de los conocimientos pretendidos. Este efecto se caracteriza por lo siguiente:

- El profesor propone una tarea a los alumnos, la respuesta está más o menos predeterminada.
- El profesor negocia las condiciones en las que se producirá la relación didáctica y que le darán un sentido.
- Propone preguntas abiertas, con el fin de lograr que este sentido sea lo más rico y exacto que se pueda.
- Si el alumno fracasa, da informaciones suplementarias para hacer la respuesta más fácil.

Si los conocimientos pretendidos desaparecen completamente, se tiene el “efecto Topaze”<sup>216</sup>. Un caso particular del efecto Topaze es el “efecto Jourdain”, en el que el docente, para no entrar en debate con el estudiante sobre el conocimiento pretendido o con la constatación de un fracaso, acepta una respuesta trivial, desprovista de valor e incluso de sentido.

También en la teoría de las situaciones didácticas se describen otros patrones de interacción, el relacionado con el profesor y los recursos didácticos, que denomina “deslizamiento metacognitivo”, y el que relaciona al profesor con las propias situaciones, llamado “envejecimiento de las situaciones didácticas”<sup>217</sup>.

Godino y Llinares<sup>218</sup> afirman que la tipología misma de las situaciones didácticas (acción, formulación-comunicación, validación, institucionalización) puede ser tomada como una forma de interacción entre profesor-alumnos-saber-medio. Aunque en la teoría de las situaciones didácticas se tiene en cuenta el contrato didáctico y algunas normas sociales, en el fondo “la Teoría de las Situaciones Didácticas sigue viendo el aprendizaje como un acto individual, desco-

.....  
216 Brousseau, “Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques”.

217 *Ibid.*

218 Godino y Llinares, “El interaccionismo simbólico en educación matemática”.

nociendo la influencia social y de alguna forma aún se encaja dentro de las teorías cognitivistas”<sup>219</sup>.

## 4.6 Tipos de interacción y modelo didáctico del profesor

Una vez revisada la literatura sobre la interacción en el aula de matemáticas, en el siguiente apartado se caracterizan los diferentes modelos didácticos del profesor, dado que el tipo de interacción que el profesor prioriza en sus clases es uno de los criterios fundamentales para dicha caracterización.

## 4.7 Modelos didácticos del profesor

Uno de los aspectos claves para elaborar los llamados modelos o estilos pedagógicos y didácticos del profesor es el tipo de interacción que prioriza. En este capítulo se revisan las diversas clasificaciones de modelos pedagógicos y didácticos que ha generado la literatura, dedicando especial atención al tipo de interacción de cada modelo. En este caso en particular se han considerado tanto modelos genéricos del profesor propuestos por autores que no son del área de la educación matemática, como otros modelos propuestos específicamente para los profesores de matemáticas.

Inicialmente, se presenta la clasificación de modelos de profesor de matemáticas propuesta por Ernest. Luego, se aborda la tipología de modelos propuesta por Porlán. Estas clasificaciones se complementan con el modelo de profesor constructivista sugerido por el constructivismo de Piaget, la perspectiva sociocultural de Vygotsky y el interaccionismo de Bruner. Posteriormente, se explicita que un docente no se puede ubicar exactamente dentro de un modelo, pues tiene características de muchos, aunque tiene más tendencia hacia un modelo que a otro.

.....  
219 Alfonso Jiménez, “Interaccionismo renovado en la clase de matemáticas”, (ponencia en XII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Armenia, 2011).

Ernest<sup>220</sup> opina que, a la hora de enseñar matemáticas, los conocimientos de los conceptos matemáticos son importantes, pero lo que más determina las prácticas del docente de matemáticas son sus concepciones acerca de la naturaleza del área, sobre la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas y sobre el proceso de aprendizaje de esta; las cuales determinan las tendencias de enseñanza, de aprendizaje y los medios educativos que utiliza. Por lo anterior propone la siguiente clasificación:

***Profesor entrenador.*** La base de todo es la autoridad. Entiende la matemática como un conjunto de normas, reglas y verdades orientadas por la autoridad. Su objetivo es la fijación de habilidades y destrezas. Su tendencia de enseñanza es autoritaria, donde lo fundamental es el buen comportamiento del estudiante, el cual debe obedecer ciegamente al profesor. Su modelo de aprendizaje es basado en procesos de memorización y repetición. Los medios educativos son papel, lápiz y tablero. Hay un especial rechazo por el uso de la calculadora en el aula.

***Profesor tecnólogo.*** La matemática la concibe como conocimiento práctico, útil. El objetivo de la educación matemática es la aplicación del conocimiento a otras áreas como las ciencias naturales, sociales, tecnología e industria. La enseñanza busca el desarrollo de habilidades de los estudiantes a través de la transmisión de los contenidos por el docente y el aprendizaje se basa en la solución de problemas prácticos y el desarrollo de destrezas. Se prioriza el uso recursos tecnológicos como computador, calculadora y en general recursos que faciliten la experimentación.

***Profesor humanista.*** La matemática se asocia con conocimiento puro. En la educación matemática se tienen en cuenta la cultura y el desarrollo del pensamiento. La enseñanza se basa en la transmisión de estructuras, explicación de los contenidos, motivación del estudiante. El estudiante al aprender busca comprender los conceptos y sus aplicaciones. Básicamente, no prevalece la utilización de medios educativos, pues se usan los estrictamente necesarios.

.....  
220 Paul Ernest, "The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model". *Journal of Education for Teaching* 15, n.º 1 (1989): 13-33.

**Profesor progresista.** Se concibe la matemática como una estructura de conocimientos personalizados, donde se pretende utilizar la matemática como fuente de autorrealización y desarrollo de cada uno. La enseñanza se orienta al trabajo personal del estudiante y al desarrollo de su autonomía. El aprendizaje busca la creatividad, la exploración e indagación. No se enfatiza en un medio específico, se utiliza cualquiera que pueda servir para la formación de conceptos y estructuras.

**Profesor crítico.** La matemática se entiende como grupo de conocimientos permeados por la cultura y por tanto dependientes de un sistema social, los cuales, al igual que la cultura, están en continua dinámica de cambios. La educación matemática pretende el cambio social a través de cambios individuales. El profesor metodológicamente se centra en la discusión, pretende que el estudiante siempre esté cuestionando las verdades matemáticas. El aprendizaje aquí se concibe como la solución de problemas de la cotidianidad y la reflexión personal sobre las concepciones sociales de la matemática. No hay un material específico, sino que el estudiante lo utiliza de acuerdo con sus requerimientos.

Enseguida, se plantearán inicialmente aspectos de las tendencias didácticas, asumidas con la concepción de Porlán<sup>221</sup> complementada con el constructivismo clásico de Piaget, el enfoque sociocultural de Vygotsky y el interaccionismo de Bruner.

**Modelo tradicional.** También llamado obsesión por los contenidos. Se presenta porque el docente considera que hay una única forma de desarrollar el trabajo en el aula. Enseñar se asume como explicar los contenidos básicos a los estudiantes, tratando de definir sus significados y en algunas oportunidades presentando el ejemplo o la demostración. El docente se preocupa por desarrollar una serie de contenidos organizados secuencialmente, asumiendo que es el conocimiento que el estudiante necesita de la disciplina en un determinado grado. En la mayor parte de la clase el profesor explica y el alumno escribe la información; en algunos casos, por ejemplo, se habla acerca del tema o se formulan problemas de aplicación para plantear su comprobación o demostración.

.....  
221 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

Este modelo refleja de alguna manera a una gran cantidad de docentes y se debe a que “es la única forma como sabemos hacerlo”<sup>222</sup>, ¿por qué?, por diversas razones, es lo que el contexto institucional y la sociedad espera de ellos, es lo que se observaba en las clases en la época de estudiantes.

La transmisión verbal de conocimientos es una práctica generalizada, lo que no implica que sea la mejor, pues en la mayoría de los casos no consigue un adecuado aprendizaje. Para Porlán<sup>223</sup>, algunos aspectos negativos serían: se pierde la motivación de los estudiantes al establecer los temas de manera impositiva por parte del docente; se vende la idea de una matemática terminada, pues se plantean los contenidos como unidades de verdad; el profesor siempre culpa al estudiante por el fracaso de su aprendizaje, ya que la premisa es que si el profesor explica adecuadamente, el estudiante debe aprender; los estudiantes tienden a preparar mecánicamente las evaluaciones, ya que casi siempre con estas se busca la memorización por parte del estudiante.

**Modelo tecnológico.** Llamado también obsesión por los objetivos. Su pretensión inicial es superar algunos problemas que presenta el enfoque tradicional, especialmente el reduccionismo en los procesos didáctico y metodológico. Se destaca porque toda práctica educativa se realiza con una intención: el logro de unos objetivos; es decir, se apoya una mayor rigurosidad donde se clarifican las metas por obtener y las actividades que se han de desarrollar. Se enfatiza en las relaciones entre los conceptos y distintos grados de complejidad. En cuanto al aprendizaje, Porlán<sup>224</sup> plantea que sucede por un proceso de asimilación de conceptos con niveles crecientes de dificultad. Pretende hacer una evaluación objetiva del progreso de los aprendizajes del estudiante con el fin de determinar la recuperación de los aspectos no exitosos detectados en la prueba diagnóstica inicial, al igual que la realización de una prueba diagnóstica final; las pruebas objetivas se realizan en test de opciones múltiples. Al igual que el enfoque tradicional, presenta algunas fallas, como por ejemplo, la idea de eficacia se convierte en

.....  
222 *Ibid.*

223 *Ibid.*

224 *Ibid.*

una obsesión eficientista, rígida y uniformizadora<sup>225</sup>; los objetivos se tornan rígidos, si no se comprende que estos deben ser replanteados a la luz de las necesidades e intereses de los estudiantes; la evaluación, al ser de tipo cerrado, tiene la tendencia a favorecer aprendizajes mecánicos; genera problemas de rigidez en las prácticas, causados por las secuencias de actividades cerradas, así como falta de motivación.

**Modelo espontaneísta o activista.** Denominado igualmente obsesión por los alumnos. Busca posicionar al estudiante como el centro del proceso para que pueda tomar decisiones sobre qué y cómo aprender en un ambiente agradable y natural, lo que le permite realmente interesarse y también ser ente organizador. Lo anterior busca contrarrestar la posición de poder total asumida por el docente en los enfoques anteriores, donde en forma autoritaria decide qué, cómo, cuándo, con qué y por qué se debe aprender matemáticas sin tener en cuenta para nada la opinión del estudiante.

La labor del docente pasa a ser de orientador, coordinador de actividades de iniciativa del estudiante, apoyando la interacción y comunicación entre todos los alumnos, pero ante todo es un improvisador permanente, sin tomar en ningún momento conductas calificadoras o sancionadoras.

Al ser el estudiante el eje del proceso de enseñanza se asume como contrapuesto a las anteriores tendencias en las que el eje es el docente y pone de manifiesto uno de los problemas históricos de la educación: los estudiantes mentalmente separan los significados académicos de los significados de la vida cotidiana<sup>226</sup>.

Según Porlán, algunas de las características propias del enfoque espontaneísta son: no existe una programación definida ni contenidos claros y específicos; hay una completa negociación con los estudiantes de proyectos por trabajar, los cuales pueden ser orientados a todo el grupo o a pequeños grupos; se da especial importancia a las salidas

.....  
225 José Gimeno Sacristán, *La pedagogía por objetivos: obsesión por la eficiencia* (Madrid: Morata, 1982).

226 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

de observación, actividades de consenso y comunicación; el plan de trabajo se adecúa según los intereses de los estudiantes y periódicamente se celebran asambleas con el fin de discutir sobre la dinámica del aula.

Al igual que las tendencias anteriores, también tiene sus problemas, pues sin un diseño previo es imposible que los docentes exploten en su totalidad las potencialidades de los estudiantes. Como se priorizan exclusivamente los intereses de los estudiantes, es decir, se cambia la estructura de poder básicamente al estudiante, esto puede ser tan perjudicial como el caso contrario.

**Modelo constructivista.** Actualmente hay una tendencia a aceptar que el aprendizaje no es una simple reproducción del contenido que se ha de aprender, sino que implica un proceso de construcción o reconstrucción en el que las aportaciones de los alumnos desempeñan un papel decisivo. Este punto de vista sobre el aprendizaje conlleva la tendencia hacia una enseñanza en la que el papel del profesor es más complejo, ya que, además de favorecer en sus alumnos la construcción de significados, tiene que orientarla en la dirección que marcan los contenidos del aprendizaje. Aceptar que la enseñanza está mediada por la actividad constructiva de los alumnos obliga a sustituir la imagen clásica del profesor como transmisor de conocimientos por la imagen del profesor como orientador o guía. Pero, aceptar que los contenidos que han de construir los alumnos son el resultado de una elaboración social, obliga también a matizar la imagen del profesor-orientador y aceptar que también tiene como misión conectar los procesos de construcción de los alumnos con los significados colectivos culturalmente organizados<sup>227</sup>.

.....  
227 Anna Sierpinska, "Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism", en *Language and communication in the mathematics classroom*, editado por H. Steinbring, M. G. B. Bussi y A. Sierpinska, (Reston, VA: NCTM, 1998), 30-62.

Sin ánimo de ser exhaustivos, se puede decir que un modelo de profesor constructivista, que en particular atiende las aportaciones de Piaget<sup>228</sup>, Vygotsky<sup>229</sup> y Bruner<sup>230</sup>, entre otros, se caracteriza por:

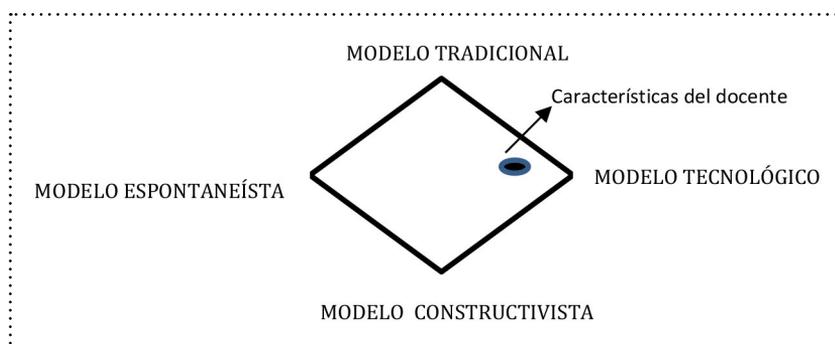
- Tener en cuenta los niveles de desarrollo evolutivo de los alumnos.
- Procurar un aprendizaje activo y significativo.
- Ser consciente de la importancia que tienen los conocimientos previos del alumno respecto al éxito de cualquier actividad de enseñanza/aprendizaje que se vaya a realizar.
- Valorar la importancia que tienen los aspectos afectivos sobre el aprendizaje.
- Tener presente las diferentes explicaciones que dan las distintas teorías psicopedagógicas sobre las dificultades que presentan los alumnos para aprender matemáticas.
- Saber que lo que un alumno es capaz de aprender por sí mismo, viene determinado por su nivel de desarrollo evolutivo y por sus conocimientos previos; pero esta capacidad de aprendizaje hay que diferenciarla de la capacidad de aprender con la ayuda y el estímulo de otras personas (no solo los profesores, también los amigos, padres, compañeros, etc.). La diferencia entre estos dos niveles de capacidad es lo que Vygotsky llama la “zona de desarrollo próximo”. Así pues, la enseñanza más eficaz es aquella que parte del desarrollo efectivo del alumno, no para amoldarse a él, sino para hacerlo progresar a través de la zona de desarrollo próximo, y de esa manera generar nuevas zonas de desarrollo próximo.
- Reconocer que existen unas interacciones sociales que permiten el desarrollo armónico de las clases de matemáticas, las cuales implícita o explícitamente orientan la actuación tanto del docente como de los estudiantes.

.....  
228 Jean Piaget, *Problemas de psicología genética* (Barcelona: Ariel, 1978).

229 Lev Vygotsky, *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*, traducido por María Margarita Rotger (México: Ediciones Fausto, 1995).

230 Jerome Bruner, *Hacia una teoría de la instrucción* (Havana, Cuba: Ediciones Revolucionarias, 1972).

En general, un docente tiene características de varios modelos, por ello se dice que tiene tendencia hacia un determinado modelo, porque la mayoría de sus características como docente se corresponden con ese modelo. Lo anterior se ilustra en la siguiente figura:



**Figura 4.** Tendencia del profesor hacia un modelo didáctico.

**Fuente:** elaboración propia.

## 4.8 Análisis de interacción. Caso Fernando

Vale resaltar que las interacciones que aparecen son propias del docente Fernando y fueron emergiendo del análisis de sus clases<sup>231</sup>.

La clase que inicialmente mostró Fernando fue de estructura jerárquica<sup>232</sup>, acorde con una tendencia tradicional-tecnológica<sup>233</sup>, y producto de ello emergieron unas interacciones propias de este tipo de aulas. El análisis a clases dictadas después de la participación del docente en el grupo de trabajo colaborativo mostró una tipología no tradicional-tecnológica e interacciones emergentes nuevas, y sobre todo que el tipo de interacción cambia en frecuencia. A continuación, se presentan las interacciones de Fernando en sus dos fases.

231 José Francisco Leguizamón Romero, “Patrones de interacción comunicativa. Un estudio de caso”. *Praxis y Saber* 8, n.º 16 (2017): 57-82.

232 Luis Menezes, “Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta” (tesis de Maestría, Universidade de Lisboa, 1995).

233 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

**Tabla 5.** Interacciones típicas de la clase

AB	Descripción	Fase 1	Fase 2
A	Aclaración del docente a todo el grupo, explicación corta	60	30
Ag	Agradecimiento del docente a un estudiante	1	1
Ant	Aclaración no temática por parte del profesor	8	40
Ap	Aprobación de la respuesta dada por el estudiante	8	23
An	Negación de la respuesta dada por el estudiante	0	1
Ar	Autorrespuesta del profesor, es decir, pregunta y responde su pregunta	16	7
c	Conclusión del estudiante	0	3
D	Dictado que hace el profesor a los estudiantes de problemas o Ejercicios	14	0
de	Discusión entre los estudiantes	4	4
Des	Desacuerdo del profesor ante respuesta dada por el estudiante	0	5
E	Explicación amplia del profesor	28	2
e	Explicación amplia del estudiante	0	12
ic	Intervención corta del estudiante, sin que se la haya solicitado el docente	23	5
ia	Intervención argumentada que hace el estudiante	4	0
int	Intervención no temática del estudiante	1	7
O	El profesor ordena la ejecución de una acción	9	21
Pa	Pregunta argumentada por parte del profesor	4	0
Pc	Pregunta corta del profesor dirigida a todo el grupo	111	31
pc	Pregunta corta por iniciativa propia del estudiante al profesor	21	30
Pcd	Pregunta corta y directa del profesor	4	0
Pm	Preguntas múltiples por parte del profesor	17	7
Pnt	Pregunta no temática del profesor	0	3
R	Repetición del profesor de lo que expresa el estudiante	14	3
Rc	Respuesta corta del profesor ante una pregunta del estudiante	9	11

Ra	Respuesta argumentada del profesor a una pregunta de un estudiante	2	6
rgc	Respuesta en coro de varios estudiantes, respuesta general corta	7	3
ria	Respuesta individual argumentada del estudiante	10	24
ric	Respuesta del estudiante, individual y corta	102	87
Rm	Respuesta de varios estudiantes, uno después del otro	0	5
Sc	Silencio corto de menos de un minuto	3	11
Sp	Silencio prolongado (más de un minuto)	7	1
ap	Aprobación por parte del estudiante de lo dicho por el docente	0	41
S T		487	424
<b>Después del trabajo colaborativo</b>			
a	Aclaración temática corta del estudiante	0	49
ant	Aclaración no temática del estudiante	0	70
ar	Autorrespuesta del estudiante, pregunta y responde su pregunta	0	13
co	Consenso de grupo de estudiantes acerca de una tarea matemática o no	0	6
cop	Complemento a la opinión de un compañero	0	44
des	Desacuerdo del estudiante frente a la opinión de los compañeros	0	45
ed	Expresión de duda ante lo que afirma el compañero	0	5
ex	Expresión sin sentido completo	0	49
l	Lectura de un texto, taller o guía por el estudiante	0	62
o	Opinión del estudiante respecto de un tema matemático	0	266
Pcc	Pregunta corta del profesor dirigida al pequeño grupo	0	37
pcc	Pregunta corta del estudiante a sus compañeros	0	109
pccm	Pregunta corta múltiple, varias seguidas del mismo estudiante	0	5
pnt	Pregunta no temática del estudiante	0	9
q	Queja del estudiante respecto del docente	0	4

**Tabla 5.** Interacciones típicas de la clase (continuación).

r	Repetición de lo que dice el compañero	0	23
rdes	Reafirmación a un desacuerdo	0	3
Rp	Repetición del profesor de lo que él mismo dice	0	1
rp	Repetición del estudiante de lo que dice el profesor	0	1
Sd	Saludo del docente	0	1
so	Solicitud de un estudiante a un compañero	0	25
S TO	Subtotal	0	827
TOT	Total	487	1251

**Fuente:** elaboración propia.

De los análisis a las clases se puede inferir lo siguiente.

Las clases del docente se distribuyeron inicialmente en 8 configuraciones didácticas, las posteriores, en 7; lo cual muestra su tendencia a un desarrollo temático demasiado amplio. Se considera que son demasiadas tareas para una sesión de clase, lo cual se evidenció en el análisis didáctico de las clases.

En la primera fase, la totalidad de las configuraciones fueron catalogadas de tipo magistral<sup>234</sup>, lo cual implica una clase tradicional-tecnológica. En la segunda fase, el 31 % de las configuraciones fueron consideradas de tipo magistral y las restantes como dialógicas<sup>235</sup>, de lo que se infiere un tipo de clase participativo, que privilegia el diálogo y el consenso, lo cual significa una clase de tipo no tradicional-tecnológica<sup>236</sup>.

Igualmente, se pueden observar los patrones de interacción según diversos autores. Para el patrón de interacción cíclico<sup>237</sup>, la evidencia se presenta en el fragmento de transcripción de la primera clase (Tr1F).

.....  
234 Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”, 38.

235 *Ibid.*

236 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

237 Magdalene Lampert y Paul Cobb, Communication and language, en *A research companion to Principles and standards for school mathematics*, editado por J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Shifter (Reston, VA: NCTM, 2003), 237-249.

[26]	P	Eee. ¿Qué fue lo que dijiste primero, una función...?	Hace la señal con la mano al estudiante de que continúe
[27]	A3	Compuesta	
[28]	P	Y será que a una función compuesta yo puedo aplicarle las mismas reglas de derivación que he venido trabajando	Con las manos señala el tablero
[29]	A (indefinido)	No	Contestan en coro
[30]	A5	Pues... se aplican, tienen que aplicarse	Lo dice en un tono fuerte con seguridad
[31]	P	Pues se aplican aquí ya me dijo... A5. Habría que aplicar la regla de la...	Señala con el dedo índice hacia el estudiante

En las líneas [26] a [28] se observa un ejemplo del diálogo triádico<sup>238</sup>, es decir, que el profesor posee el control del discurso<sup>239</sup> y orienta a los estudiantes hacia las respuestas correctas, es un aula absolutista<sup>240</sup>, igualmente en [26] a [31] se puede apreciar un enfoque de introducción, trabajo y conclusión-revisión<sup>241</sup>. Así mismo, en el siguiente trozo de transcripción de Fernando (Tr1F) se puede identificar el patrón de extracción<sup>242</sup>.

.....  
238 Jay L. Lemke, *Using language in the classroom* (Geelong, Vic.: Deakin University Press, 1985).

239 David Pimm, *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms* (London: Routledge, 1987).

240 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education*.

241 Mehan, "The structure of classroom events and their consequences for student performance", 59-87.

242 Voigt, "Patterns and routines in classroom interaction".

[94]	P	Bueno, ahora sí, yo escribo la siguiente función. Quiero que a esta función le hallen ¿cuál es la función interna? ¿Cuál es la función externa? Y que la derivemos. ¿Cuál es la función interna? A7 y ¿cuál es la función externa?	$f(x)=\sqrt{4x^3 - 5x + 2}$	El profesor deja un lapso de tiempo para que los alumnos trabajen el ejercicio.
[95]	A			Los alumnos aportan diferentes ideas.
[96]	P	Y entonces... si quiero derivarla, ¿cuál sería la forma de hacerlo? La expresamos primero ¿Cómo?		
[97]	A 3	A la un medio, como a la un medio. Cuatro x al cubo menos cinco x más dos, todo elevado a la un medio.	$f(x)=(4x^3 - 5x + 2)^{\frac{1}{2}}$	El profesor va escribiendo en el tablero.
[98]	P	Repite a la un medio y ya teniendo elevada a la un medio, ahora ¿qué proceso sigo? Aplico la regla de la... entonces cómo me queda... ¿me dicen por favor?	$f(x)=$	
[99]	A 2	Un medio factor de cuatro x al cubo menos cinco x más dos elevado a la menos un medio	$f(x)=\frac{1}{2}(4x^3 - 5x + 2)^{\frac{1}{2}}$	
[100]	P	Por		
[101]	A 2	Doce x al cuadrado menos cinco	$f(x)=\frac{1}{2}(4x^3 - 5x + 2)^{\frac{1}{2}}(12x^2 - 5)$	
[102]	P	Y...me quedaría así porque no se puede reducir, vamos a dejarla así.		
[103]	A 4	En el parcial también		Todos ríen.
[104]	A 5	Me parece que se puede trabajar con el exponente.		El profesor borra el sector derecho del tablero
[105]	P	Pues bueno ¿qué función tendría ahí?		

En esta transcripción también se puede determinar el patrón tradicional<sup>243</sup>, en esta clase lo que interesa es la transmisión de la información, es decir, se sigue un patrón univocal<sup>244</sup>; igualmente es considerada con un patrón unidireccional<sup>245</sup>. Esta característica, aunque es genérica, se puede observar en todo el fragmento [94] a [105]. En las siguientes líneas de transcripción, correspondientes a la segunda clase de Fernando (Tr2F), se puede identificar el patrón del embudo<sup>246</sup>.

[4]	P	Dice: “que si $x$ y $y$ son funciones derivables de $t$ , las cuales están relacionadas por la función $y=x^2+3$ hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x$ es igual a 1. Dado que $\frac{dx}{dt}=2$ cuando $x$ es igual a 1	... por la función $y=x^2+3$ hallar $\frac{dy}{dt}$ cuando $x=1$ . Dado que $\frac{dx}{dt}=2$ cuando $x=1$	El profesor continúa escribiendo el ejercicio en el tablero
[5]	P	Entonces en este caso nos está hablando de que tenemos que ver que si $x$ y $y$ son funciones derivables respecto en este caso a la variable $t$ , debemos relacionarlas con la función $y=x^2+3$ y hallar su derivada respecto a $t$ , cuando $x$ vale 1. Entonces tenemos nuestra ecuación que es... Conocemos regla de la cadena y derivación implícita, entonces tenemos que derivar esa función, implícitamente esa función respecto a qué variable... Entonces, en este caso tenemos la derivada de $y$ ... ... y la derivada de $t$ es...	$y=x^2+3$  $\frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$	El profesor escribe la función en el tablero.
[6]	E 2	Más cuatro		Donde un estudiante responde...

.....  
243 Wood, “An emerging practice of teaching”, 203-228. Wood, “Alternative patterns of communication in mathematics classes: funneling or focusing?”, 167-178.

244 Peressini y Knuth, “Why are you talking when you could be listening?”.

245 Brendefur y Frykholm, “Promoting mathematical communication in the classroom”.

246 Wood, “An emerging practice of teaching”, 203-228. Wood, “Alternative patterns of communication in mathematics classes”, 167-178.

[7]	p	Cero porque es una constante. Que conocemos acá, nos piden que halle- mos $\frac{dy}{dt}$ cuando $x=1$ . Conocemos $\frac{dx}{dt}$ y conocemos $x=1$ , entonces cual es la otra etapa Quiere decir que la función $\frac{dy}{dt}$ es igual a 4.	Reemplazar los valores $\frac{dy}{dt} = 2(1)(2) = 4$	El profesor corrige diciendo.
[8]	P	Ahora, eso es cuando solamente nos dan una función y que tenemos que derivarla respecto a otra y hallar sus párrafos, que era lo que tenía que ver con los ejercicios 8 y 9 de los que tenían que desarrollar, que deri- var respecto a otra variable.		

En lo anterior se observa que prima en el aula una discusión común<sup>247</sup>, es decir, que el docente es el que posee el uso de la palabra con pocas intervenciones de los estudiantes. Así mismo, el profesor prioriza la transmisión de la información y hace una exposición tipo conferencia<sup>248</sup>, lo que concuerda con los patrones afirmativo<sup>249</sup> y transmisionista<sup>250</sup>; esto se evidencia en [4] a [8], (Tr2F).

Se identificaron como patrones de interacción comunicativa, típicos del docente en su primera fase, los siguientes: la pregunta corta por parte del docente, al igual que la respuesta individual corta por parte del estudiante, las aclaraciones y explicaciones cortas del docente, la explicación amplia del docente y su autorrespuesta. Lo anterior nuevamente lleva a pensar que la clase es de tipo tradicional-tecnológica.

Una forma de mostrar el flujo de participación en el aula es presentada a continuación, cambiando el patrón de interacción por el autor del mismo, ya sea el docente o el estudiante. Para ello, se plantearán las interacciones de la primera clase del docente Fernando.

.....  
247 Loska, "Teaching without instruction", 235-246.

248 Schwarz et al., "Teacher guidance of knowledge construction".

249 Anna Sierpiska y Stephen Lerman, "Epistemology of mathematics and of mathematics education", en *International Handbook of Mathematics Education*, editado por A. J. Bishop et al. (Dordrecht, NL: Kluwer, Academic Publ., 1996), 827-876.

250 Villalta y Martinic, *Modelos de estudio de la interacción didáctica en la sala de clase*.



Se evidencia el protagonismo del docente en todas las configuraciones y, en todo caso, la gran mayoría de las intervenciones de los estudiantes corresponden a respuestas cortas de este. Lo anterior implica, por sus características de participación, que es una clase magistral<sup>251</sup> y, por ende, tradicional-tecnológica<sup>252</sup>.

En la segunda fase, las configuraciones fueron consideradas dialógicas<sup>253</sup>, es decir, es una clase participativa, en la que prima el diálogo y el consenso, lo cual genera una clase no tradicional-tecnológica<sup>254</sup>.

En esta aula se promueve la participación del estudiante y se considera que en algunos momentos los estudiantes asumen el control de la clase, básicamente cuando se desarrolla el trabajo en grupo, es decir, existe cierta autonomía por parte del estudiante<sup>255</sup>. Se identifica también que la autoridad del docente por instantes se transfiere al relator del grupo o al alumno que dentro del grupo posea el mayor respeto por sus conocimientos en el área<sup>256</sup>. El rol del docente es el de orientador y generador de ambientes de aprendizaje, totalmente opuesto al de la primera fase<sup>257</sup>. En el siguiente tramo de transcripción, correspondiente a la tercera clase de Fernando (Tr3F), donde se está discutiendo sobre el concepto de ley de composición interna, operación binaria y axioma, se pueden observar evidencias de las apreciaciones anteriores.

[116]	Profesor	Entonces, exacto, ¿cómo lo llamarían? Bueno, otro ejemplo, me salgo de lugar para ver si...
[117]	Relator	Yo entiendo profe, pero no sé cómo llamarlo
[118]	Profesor	Voy a dejarlo que lo piensen
[119]	Est1	Discusión de grupo

.....  
251 Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”.

252 Porlan, *Constructivismo y escuela*.

253 Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”, 38.

254 Porlan, *Constructivismo y escuela*.

255 Peter Woods, *Investigar a arte de ensinar* (Porto: Porto Editora, 1999).

256 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education*.

257 João Pedro da Ponte et al., *Histórias de investigações matemáticas* (Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998).

[120]	Relator	Es interno
[121]	Est2	¿Cómo?
[122]	Relator	Es un conjunto del subconjunto referencial, entonces es un subconjunto
[123]	Est2	No, ¿por qué?
[124]	Est3	Es un conjunto subconjunto del referencial
[125]	Profesor	¿Cuál es la otra?
[126]	Relator	¿Una operación binaria es la operación... ¿Cómo? Una operación binaria es la operación
[127]	Relator	Es la operación en un conjunto
[128]	Est1	Entre dos conjuntos
[129]	Relator	Una operación entre dos conjuntos
[130]	Relator	La cual está definida en un conjunto referencial
[131]	Profesor	Ya casi están ubicados
[132]	Relator	La cual está definida en un conjunto referencial... la cual tiene como resultado un conjunto interno del subconjunto de este conjunto referencial del mismo conjunto
[133]	Est1	Operación interna
[134]	Est3	¿Del mismo conjunto?
[135]	Relator	Del mismo y obtiene como resultado un subconjunto del mismo, o sea, del referencial
[136]	Est2	Eso es una operación interna
[137]	Relator	Sí, es una operación interna
[138]	Est3	¿Qué más hay por aquí?
[139]	Relator	Cuerpo y campo
[140]	Estudiantes	Risas
[141]	Est2	Bueno, ahí vamos
[142]	Estudiantes	Risas
[143]	Est1	Eso es una función
[144]	Est2	Compleja... eee... un conjunto en una relación
[145]	Relator	Cuerpo y campo
[146]	Est2	¿Qué es un axioma?
[147]	Est3	El axioma es algo como verdadero
[148]	Relator	¿Qué es un axioma?
[149]	Est2	Es una ley, una regla, una regla ya demostrada, siempre se va a cumplir, ya está demostrada

[150]	Est1	Entonces, un axioma es una regla que podemos seguir
[151]	Relator	¿Un axioma... Profe?
[152]	Relator	¿Qué es cuerpo y campo? No, primero axioma.
[153]	Relator	Un axioma es algo que ya está comprobado
[154]	Est2	Un teorema o algo así
[155]	Relator	Dejémoslo así y ahorita miramos el cuaderno
[156]	Relator	Qué es un axioma, un axioma es una ley, no, no, es algo que ya está
[157]	Est2	Es una norma que ya está
[158]	Relator	Es como más que todo una ley
[159]	Est1	Puede ser, es como una regla
[160]	Relator	Una regla ya demostrada que siempre se va a cumplir
[161]	Est1	Puede sacar la demostración, pero no sabe que ya está demostrada
[162]	Relator	Es como verdadero, ya está demostrada. Es como una regla que ya está demostrada

Se resalta que el docente interviene especialmente con preguntas, buscando mayor fluidez en el análisis que están realizando los estudiantes<sup>258</sup>, [116] y [125]. En la estructura de las clases de la segunda fase de Fernando, los estudiantes trabajan inicialmente en grupos, para luego socializar lo hecho con la respectiva complementación por parte del docente, lo que concuerda con el patrón de discusión<sup>259</sup> y el de focalización<sup>260</sup>. El objetivo de mejorar la interacción entre los estudiantes fue priorizar los conocimientos personales de estos, lo cual se asocia con un patrón dialógico<sup>261</sup> y también concuerda con los patrones contributivo y reflexivo<sup>262</sup>. Estas características se pueden observar en el anterior fragmento de transcripción.

.....  
258 Luis Menezes, “Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta” (tesis de Mestría, Universidade de Lisboa, 1995).

259 Voigt, “Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms”, 163-202.

260 Wood, “An emerging practice of teaching”, 203-228. Wood, “Alternative patterns of communication in mathematics classes”, 167-178.

261 Peressini y Knuth, “Why are you talking when you could be listening?”

262 *Ibid.*

El profesor aplicó la discusión natural<sup>263</sup> cuando planteó un taller y dejó en libertad a los estudiantes de discutir y llegar a múltiples conclusiones de acuerdo con lo que consideraran pertinente; su intención fue que los estudiantes argumentaran y refutaran las ideas de los demás, llegando a nuevas propuestas, lo cual está acorde con el diálogo crítico<sup>264</sup> y con el patrón interrogativo<sup>265</sup>, o sea, que lo pretendido en el aula fue promover aprendizajes mediante procesos de razonamiento entre docente y estudiantes<sup>266</sup>. Evidencia de lo anterior se encuentra en el siguiente fragmento correspondiente a la cuarta clase de Fernando (Tr4F).

[639]	Profesor	Quiero que socialicemos el primer punto, entonces le damos un giro hacia el lado del tablero. Entonces, en esta socialización vamos a identificar sobre el primer punto. Los que van en el tercer y cuarto punto saben qué es necesario del primer punto para poder complementar el segundo y el tercero. Entonces, quiero hacerlo al azar, un voluntario o voluntaria. ¿Entonces qué? Vamos, ¿me escuchan? Al primero que vamos a socializar 2 factores: primero, cuando ustedes leyeron va a pasar uno de los relatores; en ese caso casi fueron todos, solo hubo una persona que tuvo movimiento, qué dificultades encontró y cómo las sorteo en el grupo y a qué solución llegaron con el grupo. Así que vamos a empezar con el grupo de Est1 voluntario o voluntaria. Bueno, ahí son voluntarias.
[640]	Estudiantes	Est1
[641]	Profesor	Est1 la escogieron por democracia, ahí está el tablero, ahí están los marcadores. Primero, cuéntanos cuando leyeron la guía o la hojita con qué se enfrentaron ustedes, cuáles fueron las primeras dificultades que encontraron ahí y cómo lograron sortearlas. Entonces, escribe el enunciado que tienes ahí.
[642]	EST1	¿Se lo escribo o se lo leo?
[643]	Profesor	Escribe lo que dice ahí.

263 Loska, "Teaching without instruction: The neo-socratic method", 235-246.

264 Schwarz et al., "Teacher guidance of knowledge construction".

265 265 Anna Sierpinska, "Whither mathematics education?", en C. Alsina et al. *Acta del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática*, editado por H. Steinbring; M. Bartolini Bussi y A. Sierpinska (Sevilla: Sociedad Thales, 1996), 21-46.

266 Antonio Velasco, "Un sistema para el análisis de la interacción en el aula". *Revista Iberoamericana de Educación* 42, n.º 3 (2007): 1-12.

[644]	EST1	En R3 determinar si el vector X es igual a (2, 1, 5) en G, v1, v2 y v3 donde v1 es (1, 2, 1), v2 es igual a (1, 0,2) y v3 es igual a (1, 1 ,0). Para solucionar el ejercicio anterior identifique los elementos básicos, por ejemplo, en qué conjunto se está trabajando. En el conjunto R3 anteriormente como se expresaría el vector en relación con los vectores v1, v2 y v3?
[645]	Profesor	Entonces escribamos en el tablero.
[646]	EST1	¿Los vectores?
[647]	Profesor	Los vectores y los determinamos.
[648]	EST1	Los escribo.  Generador = V1=(1,2,1) V2=(1,0,2) V3=(1,1,0)  Generado = V(X)=(2,1,5)  $\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 & x + y + z = 2 \\ (1) = x (2) + y (0) + z (1) & & & & \{2x + z = 1 \\ 5 & 1 & 2 & 0 & x + 2y = 5 \end{matrix}$  x=1, y=2, z= -1
[649]	Profesor	Entonces, nos dice que en el ejercicio de ellas, que el vector v... que ese vector v (2, 1, 5) es generado por los vectores v1, v2 y v3, eso es lo que nos están diciendo, es lo que generó varias preguntas: qué conjunto era cierto para los grupos que tenían ese ejercicio. Estuvimos de acuerdo con la primera parte que ellas están haciendo. Listo, ahora después de que nos decían en qué conjunto estábamos trabajando, ¿cómo expresarían el vector v en relación con los otros 2 vectores? Con los 3 vectores, en este caso.
[650]	EST1	¿Como expresaría este, con este?
[651]	Profesor	Con este, sí señora.
[652]	EST1	Con los otros 3 vectores.
[653]	Profesor	¿Entonces que hicieron ahí? ¿Listo, Est7 esa estructura que ella hizo ahí en el tablero es coherente o no coherente? ¿Qué nos quiere decir?
[654]	EST7	Pues ahí está buscando, o sea, multiplicó los vectores de la... del... se me olvidó... ¿Organizo los valores de los escalares?
[655]	Estudiantes	Sí.
[656]	EST7	Y pues, para encontrar unas ecuaciones y para hacer un despeje de ecuaciones y al hacer el despeje encuentra ya los valores de cada escalar.





que todas las interacciones corresponden a acciones del estudiante, lo cual implica que el eje de la clase es el estudiante y que esta es no tradicional-tecnológica<sup>268</sup>. Se observa que hay un cambio de patrones de interacción comunicativa, pues el profesor pasa de tener unos patrones centrados en el profesor a unos centrados en el estudiante.

En la primera fase, el promedio de participación de los estudiantes fue de 13.49 %, lo que resalta el protagonismo del docente en el desarrollo de las clases, es decir, se trata de un aula absolutista<sup>269</sup>, lo cual es propio de una metodología tradicional-tecnológica<sup>270</sup>. El promedio de participación de los estudiantes en la segunda fase fue de 81.4 %, lo cual significa que se trata de una clase donde el estudiante en algunos momentos asume el control del aula<sup>271</sup>, lo que es propio de una metodología no tradicional-tecnológica.

Lo anterior se evidencia claramente en las tablas de flujo de participación de las clases analizadas. En general, el docente cambia de una clase donde el que más participa es el docente, a proponer una donde se prioriza la participación del estudiante.

## 4.9 Análisis de interacción. Caso Juan

Se resalta que las interacciones que aparecen son propias del docente Juan y fueron emergiendo del análisis de sus clases, que se realizó previamente y aparece en páginas anteriores de este proyecto. Cabe mencionar que el docente mostró inicialmente una clase de estructura jerárquica<sup>272</sup>, propia de una tipología de clase tradicional-tecnológica, y producto de ello emergieron unas interacciones propias de este tipo de clases. El análisis a clases dictadas después de la participación del docente mostró una tipología no tradicional-tecnológica e interacciones

.....  
268 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

269 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education*.

270 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

271 Wood, "Alternative patterns of communication in mathematics classes", 167-178.

272 Luis Menezes, "Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta" (tesis de Mestría, Universidade de Lisboa, 1995).

emergentes nuevas y, sobre todo, que cambia en frecuencia el tipo de interacción; por lo anterior, se determinaron interacciones propias de la tipología de clase del docente. A continuación, se presentan las interacciones de Juan en sus dos fases.

**Tabla 8.** Interacciones del docente

AB	Descripción	Fase 1	Fase 2
A	Aclaración del docente a todo el grupo, explicación corta	47	21
Ant	Aclaración no temática por parte del profesor	20	23
Ap	Aprobación de la respuesta dada por el estudiante	10	9
An	Negación de la respuesta dada por el estudiante	2	0
Ar	Autorrespuesta del profesor, es decir, pregunta y responde su pregunta	52	8
As	Asesoría del profesor	2	0
D	Dictado que hace el profesor a los estudiantes de problemas o ejercicios	4	0
E	Explicación amplia del profesor	46	2
E	Explicación amplia del estudiante	7	4
Ic	Intervención corta del estudiante sin que se la haya solicitado el docente	2	11
Ia	Intervención argumentada que hace el estudiante	1	0
Int	Intervención no temática del estudiante	1	0
O	El profesor ordena la ejecución de una acción	10	8
Pa	Pregunta argumentada por parte del profesor	4	1
Pc	Pregunta corta del profesor dirigida a todo el grupo	83	32
Pc	Pregunta corta al profesor por iniciativa propia del estudiante	8	10
Pm	Preguntas múltiples por parte del profesor	17	6
Pnt	Pregunta no temática del profesor	1	4
Pntd	Pregunta del docente, no temática y directa (menciona quien debe contestar)	0	3

**Tabla 8.** Interacciones del docente (continuación).

R	Repetición del profesor de lo que expresa el estudiante	5	0
Rc	Respuesta corta del profesor ante una pregunta del estudiante	4	5
Ra	Respuesta argumentada del profesor a una pregunta de un estudiante	3	1
Ria	Respuesta individual argumentada del estudiante	5	8
Ric	Respuesta del estudiante, individual y corta	30	82
Ap	Aprobación de lo dicho por el docente por parte del estudiante	0	5
Ti	Trabajo individual de los estudiantes	1	0
Tg	Trabajo grupal de los estudiantes	18	2
A	Aclaración temática corta del estudiante	0	29
Ant	Aclaración no temática del estudiante	0	53
Apc	Aprobación del estudiante a lo dicho por un compañero	0	22
Ar	Autorrespuesta del estudiante, pregunta y responde su pregunta	0	27
cop	Complemento a la opinión de un compañero	0	3
des	Desacuerdo del estudiante frente a la opinión de los compañeros	0	26
Ed	Expresión de duda ante lo que afirma el compañero	0	3
ent	Explicación no temática amplia del estudiante	0	1
Ex	Expresión sin sentido completo del estudiante	0	24
L	Lectura de un texto, taller o guía por el estudiante	0	2
O	Opinión del estudiante respecto de un tema matemático	0	126
Pcc	Pregunta corta del profesor dirigida al pequeño grupo	0	2
pcc	Pregunta corta del estudiante a sus compañeros	0	125
pccm	Pregunta corta múltiple, varias seguidas del mismo estudiante	0	18
pnt	Pregunta no temática del estudiante	0	18
R	Repetición de lo que dice el compañero	0	2
rdes	Reafirmación a un desacuerdo	0	1
rpnt	Repetición de la pregunta no temática por parte del estudiante	0	1
So	Solicitud de un estudiante a un compañero	0	8
TOT		383	733

**Fuente:** elaboración propia.

Las clases iniciales se distribuyeron en 4 y 5 configuraciones respectivamente, y las de la segunda fase, en 5 y 6 configuraciones. Lo que muestra un desarrollo sensato por parte del profesor, para el tiempo que se ha proyectado para estas clases. En la primera fase, todas las configuraciones fueron consideradas de tipo magistral<sup>273</sup>, por eso se concluye que se trata de una clase tradicional-tecnológica<sup>274</sup>.

Igualmente, se pueden observar los patrones de interacción según diversos autores. Se presentó el patrón de interacción cíclico<sup>275</sup>, cuya evidencia se presenta en el fragmento de transcripción de la primera clase (Tr1J).

[18]	p	Como resulta todo esto, entonces toda esa cuestión, entonces ¿ya tenemos la función volumen? ... ¿Cuál es la función volumen?		se dirige a sus guías en la mesa ... y pregunta
[19]	A2	Por largo, por ancho, por alto.		
[20]	P	Sí señor... la función volumen está dada para este caso... por l.a.h... Empecemos entonces todas la derivaditas parciales que están involucradas en la regla de la cadena.	Largo, alto y ancho (l. a . h)	
[21]	P	Entonces decimos que la rapidez de variación de volumen en un instante de tiempo está dada por $dv/dl$ ¿qué nos queda?		señala el tablero
[22]	A1	$a^*h$		
[23]	P	$A^*h$ ... si estoy derivando ... $a^*h$ se convierten en constante ¿cierto? ... bien por $dl / dt$ ... lo tengo ¿... si es $3c/seg$	$dl / dt$	Repite lo dicho
[24]	P	Bien... ¿quién es? $dv / da$		
[25]	A2	$l h$		El docente afirmó lo dicho por el estudiante
[26]	P	$da / dt$ ... tengo $da/dh$ si ¿quién es $2cm / s +$ quién es $da / dh$ ?		

.....  
273 Godino, Contreras y Font, "Análisis de procesos de instrucción, 38.

274 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

275 Lampert y Cobb, "Communication and language", 237-249.

[27]	A2	l* a	
[28]	p	Quien es $dh/dt$ $1\text{cm/s}$ ... listo ... haciendo el análisis dimensional en qué unidades nos debe dar la rapidez de volumen en un instante de tiempo determinado en ...?	Afirma lo que dijo el estudiante
[29]	P	$\text{cm}^3$ * debe ser de aquí, halamos la función, la formulita, para fines de cambio ¿cierto? ... ahora apliquémosle a esa fórmula las condiciones principales del ejercicio ...	Señala el tablero

También se pudo identificar el diálogo triádico<sup>276</sup> [24] a [27], el profesor mantiene el control del discurso<sup>277</sup>, corrige y orienta a los estudiantes hacia las respuestas correctas. Es un aula absolutista<sup>278</sup>. Así mismo, el trabajo del profesor se puede ver desde un enfoque de introducción, trabajo y conclusión-revisión<sup>279</sup>. Igualmente, se observó que se presentó el patrón de extracción<sup>280</sup>. El trozo de transcripción corresponde a la primera clase de Juan (Tr1J).

[31]	P	A*h es a*h es?		Repite la pregunta y luego responde
[32]	P	A esas 10 cm y h es 8 cm ... es decir, que son 80cm cuadrados y eso * 3 cm por segundo	10 cm y h es 8 cm $3\text{cm}^3$	Los estudiantes escriben en el cuaderno
[33]	P	¿Cuánto es l*h ... ahora sí?		Y repite la pregunta
[34]	A4	120		
[35]	A5	120		

276 Lemke, *Talking science: Language, learning, and values*.

277 David Pimm, *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms* (London: Routledge, 1987).

278 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education*.

279 Mehan, "The structure of classroom events and their consequences for student performance", 59-87.

280 Voigt, *Patterns and routines in classroom interaction*.

[36]	P	¿Quién es l*a..?	120cm ^2 *-2cm /s +	El docente escribe la respuesta en el tablero
[37]	p	150 verdad ¿150 cm^2?		Responde la pregunta
[38]	P	¿Señor?		Un estudiante hace una pregunta
[39]	A6	Pues ya como la multiplica ¿ahí para qué?		
[40]	P	uhm... bueno, pues quiero que se note completamente lo que sucede con las dimensiones cm/s ¿listo? ... entonces ahí ya simplemente tenemos que operar esas magnitudes y estará resuelto el ejercicio verdad ¿si bien ..		

En esta transcripción también se puede determinar el patrón del embudo, al igual que el patrón tradicional<sup>281</sup>; el aula es univocal, lo que interesa es la transmisión de la información<sup>282</sup>. La clase también es considerada con un patrón unidireccional<sup>283</sup>, y esta característica, aunque es genérica, se puede observar en el siguiente fragmento de transcripción, correspondiente a la segunda clase de Juan (Tr2J).

[1]	p	Bueno, entonces, entonces vamos a hablar un minuto sobre la fundamentación del software que en la clase de geometría estamos trabajando y que estamos llevando a cabo. Todo ha sido planeado, todo ha sido fundamentado desde el punto de vista de la teoría de las situaciones didácticas, ¿de acuerdo? Todo ha sido planeado desde ese punto de vista. El representante principal, el representante principal de esta teoría...		El profesor se desplaza hacia el tablero y toma un marcador
-----	---	---	--	---

.....  
281 Wood, "Alternative patterns of communication in mathematics classes: funneling or focusing?"; 167-178. Wood, "An emerging practice of teaching"; 203-228.

282 Peressini y Knuth, "Why are you talking when you could be listening?"

283 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom".

[2]	p	<p>El representante principal de esta teoría es Brousseau. Quien plantea toda una secuencia para hacer montajes de situaciones a partir de ciertos elementos y nosotros vamos a utilizar esa teoría para hacer la introducción de la utilización del software en la demostración de las propiedades de la geometría empírica. Bien, entonces vamos a ver cómo funciona esa teoría de las situaciones didácticas según Brousseau y que últimamente ha sido retomada por un autor que se llama Pier Lavander, quien habla muy bien de esto y lo enfoca también mucho al uso de las nuevas tecnologías, lo enfoca primordialmente al software no solo para la geometría, sino para el cálculo y para muchas otras ramas de la ciencia. Entonces, ellos plantean la situación de la siguiente manera</p>	Guy Brousseau	<p>Escribe en el tablero y mientras tanto llega un nuevo 74 clase y se sienta. Posteriormente, el profesor habla</p>
[3]	p	<p>Ellos, en primer lugar, hablan de una interacción entre el sujeto y el medio. Entre el sujeto y el medio, la interacción se da sin ninguna intención de aprender algo ni de enseñar algo, cuando esa interacción se da de esa manera sin esa intención de aprender o enseñar algo ellos la llaman una situación... una situación adidáctica, ellos la llaman una situación adidáctica; es simplemente una interacción, una interacción que se da cotidianamente en, por ejemplo, en ustedes y los elementos del entorno</p>	Sujeto → medio	<p>Escribe en el tablero, pausa de silencio mientras escribe en el tablero</p>
[4]	p	<p>No hay una situación, no hay una situación una idea de aprender algo, pero están interactuando con el medio y luego de esa interacción con el medio quedarán algunos elementos y esos elementos son conocidos como el saber, y el saber es algo que ustedes tienen, es algo impersonal y descontextualizado, entonces Guy Brousseau habla sobre la manipulación de esos elementos que hay ahí. Entonces, para que esa situación se transforme y tenga realmente un sentido... necesitamos que intervenga el docente, que intervenga el maestro, interviene el maestro y el maestro interviene modificando y manipulando el medio.</p>		<p>Llega un nuevo estudiante a la clase y se sienta</p>

	<p>En lo que nosotros estamos haciendo, entonces cuál es el medio en donde interviene el maestro y cuál es la interacción, pues el maestro obviamente... el medio en este caso es el software que estamos utilizando, el maestro interviene el medio, lo modifica, lo manipula, reconoce dentro de ese medio todas las restricciones y potencialidades, reconoce dentro de ese medio todas las restricciones y potencialidades y va con ese reconocimiento a la manipulación del medio. Entonces, le plantea un problema al sujeto, le plantea una situación problema y de esa manipulación que se da con todo el medio a partir de todos estos elementos y de las manipulaciones se produce lo que se conoce ahora como una situación... didáctica.</p> <p>Una situación didáctica en donde interviene el saber del estudiante, interviene el saber, el saber se reconoce como el saber sabio, todos tenemos un saber distinto, y vamos a hacer uso de ese saber para lograr un conocimiento. Para lograr un conocimiento, cuando el estudiante a través de toda esta situación didáctica puede pasar del saber sabio al conocimiento, el conocimiento ya es personal y contextualizado. Ya lo interioriza, lo relaciona con situaciones concretas, bien ya es personal y contextualizado. Y este proceso que se realiza en la transición del saber a conocimiento se llama una institucionalización. Y ¿cómo se va a dar todo esto? ¿Cómo se va a dar la transición entre el conocimiento y el saber? Bien. El maestro ha modificado el medio, ha puesto una situación problema, el sujeto interactúa con ese medio donde logra modificarlo para conseguir el conocimiento que se quiere.</p>	<p>Escribe en el tablero</p> <p>Muestra el gráfico que está elaborando, va manejando el gráfico a medida que habla</p>
--	---	--

Se puede observar que el profesor es el que tiene el uso de la palabra con pequeñas intervenciones de los estudiantes, es decir, que prima una discusión común en el aula<sup>284</sup>; así mismo, se le da mucha importancia a la transmisión de la información, el profesor hace una exposición tipo

.....  
 284 Loska, "Teaching without instruction: The neo-socratic method", 235-246.



Se evidencia el protagonismo del docente y las pocas intervenciones de los estudiantes (39), de las cuales 33 corresponden a respuestas de preguntas formuladas por el profesor. Lo anterior implica, por sus características de participación, que es una clase magistral<sup>288</sup>, y por estar centrada en el docente, que es tradicional-tecnológica<sup>289</sup>.

En la segunda fase, las configuraciones fueron consideradas dialógicas<sup>290</sup>, se infiere una clase participativa, donde se privilegia el diálogo y el consenso, lo cual implica que es no tradicional-tecnológica<sup>291</sup>. Adicionalmente, se pueden analizar los patrones de interacción desde diversos autores. En esta aula se incentiva a los estudiantes para que pregunten y, de alguna manera, en un lapso de tiempo asumen el control de la clase, especialmente cuando se realiza trabajo en grupo<sup>292</sup>; se ve también que por momentos la autoridad del docente es reemplazada por el relator del grupo o por el alumno más aventajado en matemáticas que esté en el grupo<sup>293</sup>. El rol del profesor cambió con respecto al asumido en la primera fase, convirtiéndose en un orientador y generador de ambientes de aula<sup>294</sup>. Lo anterior se comprueba en el siguiente fragmento de transcripción de la tercera clase de Juan (Tr3J).

[15]	Est 3	No hay que pasar las operaciones, ¿cierto que no? solo las tablas.
[16]	Est 2	No sé, pregúntale al profesor.
[17]	Est 1	¿Qué dice la hoja?
[18]	Est 3	Redacte las conclusiones.
[19]	Est 2	En este... como ves, debo hacer una caja, con una base cuadrada...
[20]	Est 1	¿Este qué dice? ...

.....  
288 Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”, 38.

289 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

290 Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”, 38.

291 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

292 Wood, “Alternative patterns of communication in mathematics classes”, 167-178.

293 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education*.

294 João Pedro da Ponte, Hélia Oliveira, María Helena Cunha e Irene Segurado, *Histórias de investigações matemáticas* (Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998).

[21]	Profesor	¿Cuál? (hace lectura rápida y entrecortada) ... entonces decimos que: este es X; digamos que este pedazo de aquí hasta aquí vendría siendo A menos dos X, sería este pedazo, este y este.
[22]	Est 2	No, es que dice en términos de X.
[23]	Profesor	¡Por eso! ...realizo una tabla de valores para la función, hago un cálculo aproximado de la función; es la gráfica ¿cierto?
[24]	Est 1	Ah, yo dije que no volvía a hacer gráfica, así que miren a ver cómo las hacen.
[25]	Profesor	¿Van a hacer gráfica?
[26]	Est 1	Sí, pero...
[27]	Profesor	Si es que la distancia...la idea es que no alcancé a sacarlos, que era darles la tarjetica... yo, por ejemplo, a ustedes les voy a dar... que esto acá la tarjetica tiene una medida de seis centímetros.
[28]	Est 4	Ah, ok; ¿pero no nos da la medida X? o sea...
[29]	Est 3	Tenemos que hallar la medida X.... acerque la regla por favor...
[30]	Est 1	Yo no la tengo.
[31]	Est 3	Él dice seis centímetros, ¿sí? un centímetro, dos centímetros, dos cuatro, cinco, seis...
[32]	Est 4	Acá abajo cabe eso, si son seis centímetros, entonces toca darle... entonces ya valdrían cuatro...
[33]	Est 3	Entonces, aquí serían seis centímetros, menos el valor de X.
[34]	Est 4	Dos X.

Igualmente, las preguntas del profesor buscaban una buena comunicación y aclarar dudas, para que hubiera más fluidez en el análisis que estaban haciendo los estudiantes<sup>295</sup> [21], [23], [25] y [27]. La estructura de las clases tercera y cuarta de Juan presentan un trabajo inicial en grupos y luego se efectúa una socialización, que es apoyada por el docente, lo cual se ajusta al patrón de discusión<sup>296</sup> y al de focalización<sup>297</sup>. Lo que se buscó al facilitar la interacción entre los estudiantes, fue darles sentido a los conocimientos personales de los estudiantes, es decir,

.....  
 295 Luis Menezes, “Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta” (tesis de Mestría, Universidade de Lisboa, 1995).

296 Voigt, “Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms”, 163-202.

297 Wood, “Alternative patterns of communication in mathematics classes”, 167-178.

el aula se puede asociar a un patrón dialógico<sup>298</sup>, así como a un patrón contributivo y reflexivo<sup>299</sup>. Estas características se pueden observar en el siguiente fragmento de transcripción, correspondiente a la cuarta clase de Juan (Tr4).

[6]	Estu1	Uy, mírala cómo quedó, mira cómo quedó... y esto... ¿si lo entiende?...
[7]	Estu2	¿Cómo te dio? ¿No te dio?... hice dos, tres... qué valores tiene...cuando vale uno, vale dos, menos dos, aquí dos, sí falta uno, es que aquí le hicieron falta... cuando vale dos, dos menos tres...?
[8]	Estu3	No, es que puedes sumar las que quieras...
[9]	Estu2	Cuando vale dos ¿dos menos tres, menos uno...?
[10]	Estu3	Puede ser, pero qué cuáles tres, no sea así, ahí está bien; pero esa sale... dos más raíz cuadrada de dos, cuánto te da? dos punto cuatro...
[11]	Estu2	¿Qué pasó? ¿quedó mal?
[12]	Estu1	Sí, ahí está bien... ¿el borrador qué lo hicieron?
[13]	Estu3	Me hizo pasar toda esta ficha para nada...
[14]	Estu2	Ya me iba a hacer cambiar todo (grosería).
[15]	Estu1	Cuando vale el uno ¿vale dos?
[16]	Estu2	Sí. Cuando vale dos, vale dos coma cuatro.
[17]	Estu1	Ya, no lo tenía todo mal; ¿la de dos punto cuatro sí tiene tabla de valores? Son dos tablas de valores. Venga a ver... ¿yo cuál estoy haciendo?
[18]	Estu2	Cuál es el dos coma cuatro?
[19]	Estu1	Espérame que lo estoy haciendo...
[20]	Estu2	¿X, menor que menos uno? ¿Será que así se entiende? o estará por líneas acá...
[21]	Estu1	Yo a esa clase no vine.

El profesor planteó un taller cuyo desarrollo era libre para los estudiantes, dejando abierta la discusión y permitiendo llegar a múltiples conclusiones, es decir, aplicó la discusión natural<sup>300</sup>. El objetivo de los estudiantes fue comprender las ideas de los demás, refutar y argumentarlas,

.....  
298 Peressini y Knuth, "Why are you talking when you could be listening?"

299 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom."

300 Loska, "Teaching without instruction: The neo-socratic method", 235-246.

plantear nuevas propuestas, es decir, se utilizó el diálogo crítico<sup>301</sup>, lo que corresponde a un patrón interrogativo<sup>302</sup>. Lo que se vivió en el aula fue un proceso de razonamiento entre profesor y estudiantes que buscaba promover aprendizajes<sup>303</sup>. Lo anterior se evidencia en las líneas siguientes (TrJ4).

[181]	Profesor	Ojo, lo primero que necesitan ustedes para poder aplicar... por ejemplo, ella, en el eje vertical.
[183]	Est5	Aquí t, como dice que va en función de t, entonces t pequeña iría aquí en función de X.
[184]	Profesor	Esa t pequeña qué significa.
[185]	Est5	Tiempo y esta sería la temperatura, para graficar sería... tendríamos que... pues digamos si el tiempo ...
[186]	Profesor	Ojo, lo que dice el compañero es importante sobre todo en el ejercicio séptimo que necesitaban hacer cambios de escala ¿cierto?
[187]	Est7	Digamos que es... de temperatura 58.
[188]	Profesor	En la representación gráfica cómo tendría que tomar las unidades, la escala que toma en el eje Y de cuánto tendría que sumar, por ejemplo.
[189]	Est6	De 10
[190]	Profesor	De 10 en 10, ¡listo!
[191]	Est5	¿No más?
[192]	Profesor	¿De a cuánto?
[193]	Est4	Yo diría de 10 en 10, entonces sería X, X a Y, entonces aquí sería T, y si T vale 0 entonces la temperatura sería 88.
[[194]	Profesor	Aproximados.
[195]	Est7	Si el tiempo vale 2, la temperatura sería 57, y si vale 4, entonces sería 63.
[196]	Profesor	¿Escuchamos?

.....  
301 Schwarz et al., "Teacher guidance of knowledge construction".

302 Sierpinska, "Whither mathematics education?", 21-46.

303 Velasco, "Un sistema para el análisis de la interacción en el aula".



Se evidencia ahora el protagonismo del estudiante y las pocas intervenciones del docente, lo cual implica, por sus características de participación, que es una clase dialógica<sup>304</sup>.

En la segunda fase, los patrones de interacción comunicativa propios del docente después de participar en el grupo de trabajo colaborativo son los siguientes: opinión del estudiante respecto de un tema matemático, pregunta corta del estudiante a sus compañeros, respuesta del estudiante —individual y corta—, aclaración no temática del estudiante, pregunta corta del profesor dirigida a todo el grupo y aclaración temática corta del estudiante. Se observa que todas las interacciones corresponden a acciones del estudiante, excepto la pregunta corta del profesor, que está dirigida a todo el grupo y que se dio justamente en la socialización, lo cual implica que el eje de la clase es el estudiante.

Se destaca que hay un cambio de patrones de interacción comunicativa, pues el profesor pasa de tener unos patrones centrados en el profesor a unos centrados en el estudiante. En la primera fase, el promedio de participación de los estudiantes en las dos clases fue de 35.76 %, aquí resalta el protagonismo del docente en el desarrollo de estas, es decir, se trata de un aula absolutista<sup>305</sup>, lo cual es propio de una metodología tradicional–tecnológica<sup>306</sup>.

En la segunda fase, el promedio de participación de los estudiantes en las dos clases fue de 81.7 %, se destaca el protagonismo del estudiante en el desarrollo de estas, o sea, se trata de un aula donde el estudiante en algunos momentos asume el control de la clase<sup>307</sup>, lo cual es propio de una metodología no tradicional-tecnológica. Lo anterior refleja la participación en tiempo de las clases de Juan, porque cambia de una clase en la que el que más participa es el docente, a una donde se prioriza la participación del estudiante.

.....  
304 Godino, Contreras y Font, "Análisis de procesos de instrucción", 38.

305 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education*.

306 Porlan, *Constructivismo y escuela*.

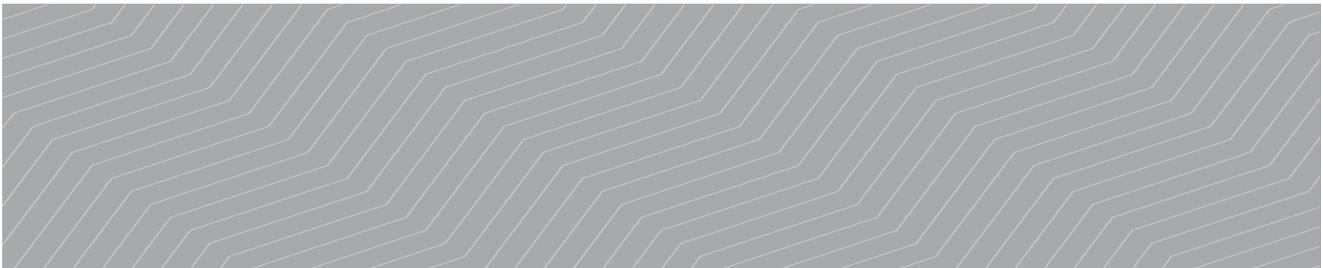
307 Woods, *Investigar a arte de ensinar*.





# CAPÍTULO 5.

## ANÁLISIS DIDÁCTICO



Una vez revisada la literatura sobre la interacción y los modelos didácticos del profesor, haciendo énfasis en el tipo de interacción que propicia cada modelo, se requirieron herramientas teóricas para analizar la práctica del profesor y poder catalogarla con tendencia hacia alguno de los modelos didácticos teóricos. En la primera parte de este apartado se revisan diferentes modelos teóricos para examinar la práctica del profesor, se trata de los llamados modelos de análisis didáctico. Por último, se explica que en esta investigación se opta por el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS dada su generalidad y, sobre todo, porque propone dos tipos de análisis específicos (el análisis de las interacciones y de las trayectorias didácticas, y el análisis de la dimensión normativa), que permiten describir y explicar las interacciones en el aula y, además, también propone un tipo de análisis para la valoración de la interacción (idoneidad didáctica). En la segunda parte, se muestran los resultados del análisis didáctico realizado en las clases tanto del caso Fernando como de Juan, teniendo como parámetro los criterios del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS.) Se conceptúa sobre dos clases de la fase uno y dos clases de la fase dos de cada uno de los docentes.

En los últimos diez años en educación matemática se están utilizando procedimientos, conceptos y términos, con significados diferentes de referencia al mismo ente, y cuya utilidad es cada vez más reconocida. Uno de ellos es el análisis didáctico (AD), que ha sido utilizado por algunos autores<sup>308</sup> para señalar “(...) el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos (...)”<sup>309</sup>.

.....  
 308 Hans Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1983). Luis Puig y Fernando Cerdán, *Resolución de problemas aritméticos escolares* (Madrid: Síntesis, 1983).

309 José Luis González, “El análisis didáctico matemático como conjunto de medios para

Aunque se encuentran en la literatura muchos puntos de vista y diferentes aspectos, se va a considerar para su análisis el enfoque del AD como instrumento para el análisis curricular, en el sentido de diseño, desarrollo del currículo y formación de profesores. Sin embargo, cabe aclarar que el AD también ha sido tomado como metodología de investigación<sup>310</sup>.

## 5.1 Acerca del análisis

Existen dos conceptos cuyos significados van de la mano, pero son complementarios, por un lado, está el análisis y, por otro, la síntesis. Según el *Diccionario de la lengua española* en su edición de tricentenario, el análisis es “distinción y separación de las partes de algo para conocer su composición”, entre otras acepciones; mientras que la síntesis es “la composición de un todo por la reunión de sus partes”. El análisis siempre se ha asociado a la filosofía. Fue Sócrates quién planteó las bases del análisis como lo entendemos en la actualidad; a su vez, Platón adaptó la definición socrática en su método de división y Aristóteles en su concepción de análisis lo tomó como reducción en sus métodos silogísticos.

Igualmente, acerca de los significados de análisis y síntesis se encuentra lo siguiente en el libro VII de la *Colección Matemática* de Pappus,

El análisis es el camino que parte de la cuestión que se busca, suponiéndola conocida, para llegar, por medio de las consecuencias que se deduzcan, a la síntesis de lo que se dio por conocido. Suponiendo obtenido, en efecto, lo que se busca se considera lo que se deriva de ello y lo que le precede, hasta que volviendo sobre los pasos dados, se llega a una cuestión que ya se conoce o pertenece al orden de los principios; y este camino se llama análisis porque es una inversión de la solución, mientras que en la síntesis, por el contrario, suponiendo la cuestión, finalmente, conocida por el análisis, disponiendo sus consecuencias y causas en su orden natural y enlazando unas y otras, se llega a construir lo que se busca; y este método es la síntesis.

---

comprender y organizar los fenómenos de la educación matemática”, (ponencia en Seminario de Análisis Didáctico I. Universidad de Málaga, s.f).

310 Jesús Gallardo y José Luis González, “El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática”, (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

Hay dos clases de análisis, el propio de la investigación, que se llama teórico, y el que aplica para encontrar lo que se propone, y que se llama problemático<sup>311</sup>.

Si se mira con detenimiento la forma de identificación de un objeto matemático, aún hoy día se tienen en cuenta estos aspectos, pues basados en conjeturas se hacen particularizaciones hasta lograr identificar bien el objeto y sus propiedades, es decir, se realiza un proceso de análisis, luego, a partir de lo hecho, se rearma el ente para poderlo explicar de una mejor forma y allí está el proceso de síntesis.

Los trabajos de Descartes al inicio de la revolución científica también muestran los procesos de análisis y síntesis, siempre precediendo el análisis a la síntesis.

Puede denominarse, en general, método al arte de disponer adecuadamente una secuencia de varios pensamientos bien para descubrir la verdad cuando la ignoramos o bien para darla a conocer a otros cuando ya es conocida. Así, hay dos clases de métodos; uno, permite descubrir la verdad y se denomina *análisis* o *método de resolución* y, también puede denominarse *método de invención*; el otro permite hacer entender la verdad a otras personas cuando la verdad ya ha sido descubierta. Este último se denomina *síntesis* o método de *composición*, pudiendo ser también conocido como *método de enseñanza*. El análisis, por lo general, sirve solamente para resolver alguna cuestión de ciencia y no para someter a este método el cuerpo completo de una ciencia<sup>312</sup>.

De acuerdo con lo anterior, los autores plantean una definición de lo que se entiende por método y proponen dos clases de métodos, el de resolución o invención correspondiente al análisis y el de composición o enseñanza que tiene que ver con la síntesis.

.....  
311 Luis Rico, "El método del análisis didáctico". *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n.º 33 (2013), 29.

312 Antoine Arnauld y Pierre Nicole, *La lógica o el arte de pensar* (Madrid: Alfaguara, 1987).

## 5.2 Análisis didáctico en la educación matemática

Las investigaciones sobre las competencias, los conocimientos matemáticos y el desarrollo profesional del profesor han adquirido relevancia internacional en los últimos años y han puesto de manifiesto su complejidad y las limitaciones del conocimiento producido por aquellas<sup>313</sup>. Por lo tanto, existe una necesidad creciente en el campo de la investigación de relacionar los modelos teóricos de la formación docente con la práctica docente, una necesidad que también está presente en los programas de formación y en la enseñanza de los proyectos de innovación.

La necesidad de herramientas teóricas para el análisis de la práctica docente se deriva, por ejemplo, del hecho de que no basta contemplar, en la formación de profesores, oportunidades para que estos reflexionen sobre su práctica, porque necesitan herramientas teóricas que permitan llamar la atención sobre aspectos importantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, la investigación ha proporcionado ejemplos para demostrar que estas herramientas teóricas pueden ser enseñadas a maestros y futuros maestros<sup>314</sup>.

Desde diferentes perspectivas de investigación, cada una relacionada directamente con las prácticas docentes, se hace hincapié en la manera en que el conocimiento de los maestros sobre el contenido matemático se pone de manifiesto mediante el empleo de buenas prácticas en sus clases. Entre ellas podemos destacar: 1) las obras de Rowland, Huckstep y Thwaites<sup>315</sup>, y su propuesta de cuatro categorías de conocimiento

.....  
313 Peter Sullivan y Terry Wood, *The international handbook of mathematics teacher education, volume 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2008).

314 Joaquín Giménez, Vicenc Font y Marsela Vanegas, “Designing professional tasks for didactical analysis as a research process”, en *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, editado por C. Margolinas (Oxford: ICMI studies, 2013), 581-590. María José Seckel, “Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática”, (tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, 2016).

315 Tim Rowland, Peter Huckstep y Anne Thwaites, “Elementary Teachers’ Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi”. *Journal of Mathematics Teacher Education* 8, n.º 3 (2005): 255-281.

(fundación, transformación, conexión y contingencia) que caracterizan el conocimiento de la enseñanza activa del maestro; 2) los aportes derivados de la Lesson Study Methodology<sup>316</sup>, que incluyen un modelo de análisis colaborativo empleado por los profesores para planificar, implementar, observar y reflexionar sobre sus clases de matemáticas; 3) las contribuciones de Davis<sup>317</sup> en el marco de su propuesta de estudio conceptual, que combina elementos de los dos enfoques relevantes para la investigación de la educación matemática: “concept analysis” y “lesson study”. Cada una de estas propuestas se centra comúnmente en la naturaleza específica concedida a los conocimientos matemáticos para la enseñanza. Este enfoque tiene ventajas sobre otras investigaciones de carácter más general, que diferencian el conocimiento didáctico general del conocimiento matemático como disciplina científica.

Las investigaciones anteriormente mencionadas tienen como objetivo común mejorar las prácticas matemáticas en el aula, centrándose en la complejidad *a priori* de los objetos matemáticos, o más bien en el conocimiento matemático del maestro que está en juego en el manejo de los complejos objetos matemáticos. Este es un propósito compartido por otros enfoques orientados al conocimiento profesional, cuyo objetivo es reconocer las acciones que permiten al profesor de matemáticas desarrollar con éxito su profesión. Por ejemplo, Mason<sup>318</sup> destaca la importancia de la competencia referida como “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes. Dicha competencia permite que el profesor de matemáticas vea contextos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que puede diferenciarse de la forma en que un profesor que no es de matemáticas vería la

.....  
 316 Clea Fernández y Makoto Yoshida, *Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development* (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2004).

317 Brent Davis, *For the Learning of Mathematics* (Alberta: FLM Publishing Association, 2008). Brent Davis y Moshe renert, “Profound Understanding of Emergent Mathematics: Broadening the Construct of Teachers’ Disciplinary Knowledge”. *Educational Studies in Mathematics* 82, n.º 2 (2013): 245-265.

318 John Mason, *Mathematics Teaching Practice A Guide for University and College Lecturers*. Chichester, UK: Horwood Publishing Series in Mathematics and Applications, 2002, 29.

situación<sup>319</sup>. Del mismo modo, otros autores hacen hincapié en la importancia de la competencia en el análisis didáctico<sup>320</sup>, que permiten al profesor identificar y organizar los múltiples significados del concepto que desea enseñar y, además, seleccionar esos significados para ser estudiados en los procesos de instrucción.

Para poder realizar sistemáticamente un análisis didáctico que permita la descripción, explicación y evaluación de los procesos de instrucción, es necesario contar con herramientas especialmente diseñadas para hacer frente a la complejidad tanto de las matemáticas como de los procesos de instrucción. Para abordar esta necesidad, la investigación en la educación matemática ha proporcionado marcos teóricos específicos que ofrecen herramientas de análisis. El enfoque ontosemiótico (EOS) de la enseñanza de matemáticas es uno de estos. A continuación, se desarrolla con más detalle el modelo de análisis didáctico de Rico y el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS.

## 5.3 Modelo de análisis didáctico del Grupo PNA de la Universidad de Granada

El concepto de AD desde una primera panorámica es planteado por Rico<sup>321</sup> y desarrollado entre otros por Gómez<sup>322</sup>; se enfoca en el nivel local de planificación, es decir, se da relevancia a la planeación considerada como uno de los aspectos importantes en el trabajo del profesor no solo de matemáticas, sino también de otras áreas del currículo, asumida como una competencia indispensable del profesor de

.....  
319 Ceneida Fernández, Salvador Llinares y Julia Valls, “Learning to Notice Students’ Mathematical Thinking Through On-line Discussions. ZDM”. *Mathematics Education*, 44 (2012): 747-759.

320 Pedro Gómez, “Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria”, (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

321 Luis Rico, “Los organizadores del currículo de matemáticas”, en *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, editado por L. Rico (Barcelona: Ice-Horsori, 1997), 39-59.

322 Pedro Gómez, *Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas*. Revista EMA, 2006.

matemáticas<sup>323</sup>. El docente debe poder desarrollar distintos tipos de planeación y tener en cuenta que para planear una unidad didáctica o una sesión de clase se debe basar en la exploración y estructuración de los diversos significados del ente matemático, resultado de la negociación y construcción de estos, apoyado en los organizadores del currículo planteados por Rico<sup>324</sup>.

La propuesta de Gómez<sup>325</sup> es analizar el significado de un concepto matemático desde tres dimensiones: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. La estructura conceptual alude a las relaciones del concepto con otros conceptos, dentro de la estructura matemática del propio concepto; los sistemas de representación son las formas como se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos; la fenomenología abarca los contextos, situaciones o problemas que podrían dar sentido al concepto.

Según Gómez<sup>326</sup>, el profesor puede basarse en el análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación para planificar una unidad didáctica o una sesión de clase. La identificación y organización de los diferentes significados de un concepto por parte del profesor tiene que ver con el análisis de contenido. El análisis cognitivo hace referencia a la descripción de las hipótesis que asume el docente relativas a la manera como los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento a partir de las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje propuestas. En el análisis de instrucción, el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que serán las actividades mencionadas anteriormente. El análisis de actuación alude a la identificación por parte del docente de las capacidades que los estudiantes han desarrollado, al igual que de las dificultades manifestadas por estos.

---

323 Luis Rico, "Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria". *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, (2004).

324 Luis Rico, *Los organizadores del currículo de matemáticas*, en *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, editado por L. Rico (Barcelona: Ice-Horsori, 1997), 39-59.

325 Pedro Gómez, "Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria" (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

326 Gómez, "Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas".

Gómez<sup>327</sup> define el análisis didáctico como “un procedimiento cíclico que incluye estos cuatro análisis, atiende a los condicionantes del contexto e identifica las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto”.

A continuación, describiremos el ciclo de AC del que habla Gómez<sup>328</sup>. Basado en los resultados obtenidos en el análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional, el profesor determina el contenido por tratar y los objetivos de aprendizaje que se desean lograr. Luego, el profesor inicia la planeación con el análisis de contenido, donde el resultado debe ser identificar y organizar los distintos significados del concepto asumido como foco de la instrucción, lo que es la base del análisis cognitivo, y la realización de este último sirve como fundamento para la revisión del análisis de contenido. Igual sucede con el análisis de instrucción, pues su formulación depende de los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, y también al realizarse surge la necesidad de revisar los anteriores análisis.

Lo dicho se traduce en lo siguiente: al realizar el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados del objeto, y teniéndolos en cuenta al igual que los objetivos que se ha fijado con anterioridad, determina las capacidades que se prospecta desarrollar en los estudiantes; a su vez, plantea hipótesis acerca de las posibles vías por las que se puede producir su aprendizaje cuando aborden las tareas. Con esta información, el profesor diseña, selecciona y evalúa las tareas. Por lo anterior, las tareas que componen las actividades deben estar acordes con los resultados de los tres análisis mencionados. Por otra parte, evaluar las tareas puede llevar al profesor a un nuevo ciclo de análisis antes de escoger las tareas definitivas. Finalmente, el profesor aplica estas actividades, y en esta etapa analiza las actuaciones de los estudiantes, que le proveen información que sirve como punto de inicio para un nuevo ciclo. Según Gómez<sup>329</sup>, el conocimiento didáctico es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

.....  
327 Pedro Gómez, “Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria” (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

328 *Ibid.*

329 *Ibid.*

Otro aspecto que resalta Gómez<sup>330</sup> es que el eje articulador de los análisis es una noción, y los organizadores del currículo expresan el significado técnico de esa noción. A cada noción le asignan un significado teórico, uno técnico y uno práctico. Lo anterior hace una analogía con las componentes de una competencia: ser, conocer y saber hacer<sup>331</sup>.

**Tabla 11.** Elementos y relaciones en la exploración de un concepto

Concepto matemático	Elementos	Objetos	Casos particulares de un concepto. Conforman la extensión del concepto.
		Conceptos	Predicados que son saturados por los objetos. Conforman estructuras matemáticas.
		Estructuras matemáticas	Conformadas por conceptos.
	Relaciones	Horizontales	Relaciones entre representaciones.
		Verticales	Relaciones entre los tres tipos de elementos.

**Fuente:** Gómez, *Análisis didáctico en la formación inicial*.

Según Gómez<sup>332</sup>, para la exploración de un concepto en matemáticas escolares se deben tener en cuenta los siguientes elementos y relaciones:

**5.3.1 Análisis didáctico en relación con las capacidades del profesor de matemáticas.**

Gómez<sup>333</sup> propone una forma para identificar las capacidades que contribuyen al desarrollo de la competencia de planificación del profesor de matemáticas, basada en la noción de análisis didáctico, lo cual se plantea en el siguiente cuadro:

.....  
330 Ministerio de Educación Nacional de Colombia, *Estándares en competencias* (Bogotá: MEN, 1998).

331 Gómez, "Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria" (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

332 *Ibid.*

333 Gómez, "Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria" (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

**Tabla 12.** Análisis didáctico propuesto por el PNA

Análisis	Capacidades
	Recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto
	Organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación
<b>Análisis de Contenido</b>	Seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales
	Seleccionar los significados relevantes para la instrucción al atender las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo)
	Las competencias que se quieren desarrollar
	Los focos de interés que se han de tratar
	Las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción
<b>Análisis cognitivo</b>	Las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción (que contribuyen a las competencias previamente identificadas y que delimitan los significados por tratar)
<b>Establecer</b>	Las tareas que conforman la instrucción (cuyo establecimiento involucra las capacidades que se enumeran en el análisis de instrucción)
	Las dificultades que los escolares pueden encontrar al realizar esas tareas
	Las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje
<b>Análisis de instrucción</b>	Identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden.
	Identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir
<b>Analizar una tarea con el propósito de</b>	Establecer los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando emprendan la tarea
	Evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información
<b>Análisis de actuación</b>	Comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula
	Establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula
	Caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la ejecución de las actividades
	Producir información relevante para una nueva planificación.

**Fuente:** Gómez, *Análisis didáctico en la formación inicial*.

## 5.4 Algunos aspectos teóricos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática

El enfoque ontosemiótico (EOS) surge con la formulación ontológica de objetos matemáticos que tienen en cuenta tres criterios de la matemática: resolución de problemas como actividad socialmente compartida, lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. El grupo de Godino y Font toma como concepto básico la situación problemática y define práctica, objeto y significado, resaltando la génesis institucional y personal del conocimiento matemático.

**Sistemas de prácticas referentes a tipos de problemas.** Se mencionó como punto de partida la resolución de problemas, por lo cual es importante plantear algunas apreciaciones de lo que se entiende por problema. Según Hoc<sup>334</sup>, “un problema es la representación de un sistema cognitivo construido a partir de una tarea, sin disponer inmediatamente de un procedimiento admisible para alcanzar el objetivo”. Otra postura por mencionar es la de Schoenfeld<sup>335</sup>, para el cual “un problema es una tarea difícil para el individuo que está tratando de hacerla”. Como se puede deducir de las posiciones anteriores, un problema es una encrucijada en la que hace falta ingenio para poder salir de ella. Para el caso matemático se pueden aplicar las anteriores definiciones con la particularidad de que las situaciones se refieren a entes matemáticos, lo que sí es claro es que solucionar un problema matemático va más allá de aplicar algoritmos y realizar operaciones.

Para facilitar la resolución de problemas matemáticos y el planteamiento de su teoría, Godino y Batanero<sup>336</sup> proponen algunas definiciones que se presentan en la Tabla 13.

.....  
334 María Luisa Chamorro, *Didáctica de las matemáticas para primaria* (Madrid: Pearson Educación, 2003).

335 Manuel Santos, *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos* (México: Trillas, 2007).

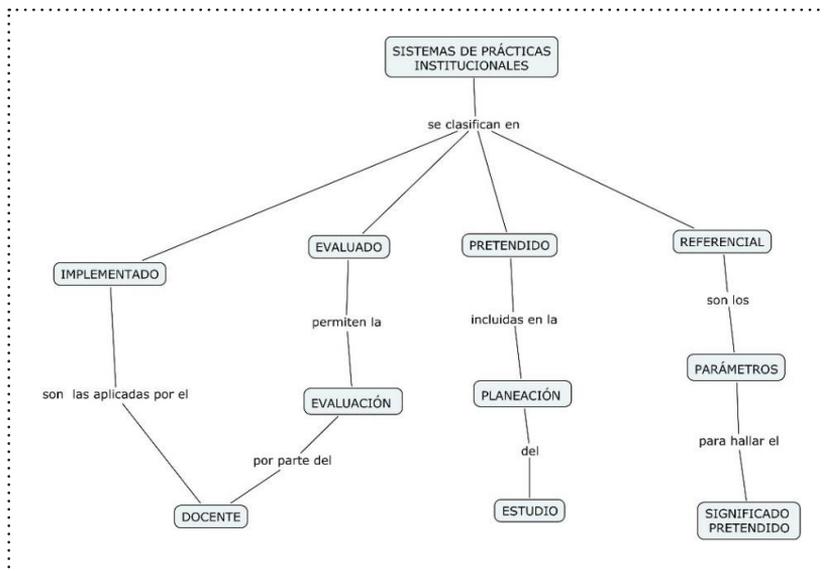
336 Juan Godino y Carmen Batanero, “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14, n.º 3 (1994): 325-355.

**Tabla 13.** Definiciones básicas del enfoque ontosemiótico

Práctica matemática	Se denomina práctica matemática toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.
Prácticas personales	Las prácticas personales pueden ser acciones observables o no realizadas por una persona con los mismos fines que la práctica matemática.
Práctica significativa	Ahora bien, es importante destacar que no siempre con la práctica matemática se logra el objetivo, sino que en algunas ocasiones se fracasa, por lo que Godino consideró indispensable plantear lo siguiente: Una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.
Institución	Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.
Institución matemática	Se denomina institución matemática (M) a las personas que pertenecen a una institución enfocada a la resolución de nuevos problemas matemáticos. Son, por tanto, los productores del “saber matemático”. Otras instituciones alrededor de las situaciones matemáticas son los “utilizadores” del saber matemático (matemáticos aplicados) y los “enseñantes” del saber matemático (la escuela del saber matemático).
Sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas. PI(C).	Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. Representaremos a este sistema por la notación PI(C). Como ejemplos de estas prácticas sociales que son observables están: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y procedimientos que son invariantes características del campo de problemas, argumentaciones, entre otras.
Sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas. Pp(C)	Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Se representa este sistema por la notación Pp(C)

**Fuente:** Godino, Batanero y Font, “The Onto-semiotic Approach...”

En los sistemas institucionales, Godino, Batanero y Font<sup>337</sup> proponen la siguiente tipología:



**Figura 5.** Mapa conceptual sobre sistemas de prácticas institucionales

**Fuente:** elaboración propia

Global: Todos los sistemas de prácticas personales que el sujeto manifieste respecto a un objeto.

Logrado: Todas las prácticas manifestadas que están acordes con el punto de vista institucional. Hay que tener en cuenta los significados iniciales y finales de los estudiantes.

Declarado: Todas las prácticas realizadas por el sujeto, teniendo en cuenta las pruebas institucionalmente propuestas (teniendo en cuenta las correctas y las incorrectas).

**Figura 6.** Sistemas de prácticas personales

**Fuente:** Godino, Batanero y Font, “The Onto-semiotic Approach...”

337 Godino, Batanero y Font, “The onto-semiotic approach to research in mathematics education”.

En el enfoque ontosemiótico se busca una adaptación progresiva de los significados personales a los institucionales. La enseñanza es vista como la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que valida los significados institucionales. El aprendizaje consiste en la apropiación de los significados institucionales por parte de los estudiantes.

## 5.5 Emergencia de los objetos matemáticos

En el enfoque ontosemiótico los objetos matemáticos son entes abstractos que surgen de los sistemas de prácticas ligadas a la solución de una tipología de problemas matemáticos<sup>338</sup>. Como sistemas, emergen las propiedades holísticas que hacen que el todo sea algo más que la suma de las partes y que se interrelacionan con todos los elementos del sistema<sup>339</sup>. Dado que el objeto es relativo respecto de las prácticas de cada institución, las cuales cambian de una institución a otra, Godino y Batanero<sup>340</sup> definen:

**5.5.1 Objeto institucional OI.** Es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de  $P_1(C)$ . Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de  $O_1$ . De acuerdo con lo anterior el objeto institucional es considerado conocimiento objetivo, pues fue culturalmente asumido por una institución y es el objeto de referencia para los objetos personales. Se aclara que puede ser distinto para instituciones diferentes. Los objetos personales son un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de  $P_p(C)$ ; es considerado subjetivo, ya que va emergiendo progresivamente y acorde con las experiencias y aprendizajes del sujeto.

.....  
338 Un problema es una encrucijada en la que hace falta ingenio para poder salir de ella. Para el caso matemático, las situaciones se refieren a entes matemáticos.

339 Se asume sistema como “un complejo de elementos en interacción”, según Ludwig von Bertalanffy, “An Outline of General System Theory”. *British Journal of the Philosophy of Science* 1, n.º 2 (1950), citado por Yves Winkin, *La nueva comunicación* (Barcelona: Kairós, 1981), 15.

340 Godino y Batanero, “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”.

Para el tratamiento de los objetos emergentes, Godino y Batanero<sup>341</sup> proponen una dicotomía para clasificarlos: los que se pueden determinar directamente en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, teoremas, corolarios) y los que emergen del contexto de los anteriores, de una acción (ver, operar, relacionar) sobre ellos.

**5.5.2 Objetos matemáticos primarios.** Son los primeros en la dicotomía, los que, a su vez, para facilitar su tratamiento, son clasificados así:

- Elementos lingüísticos. Son los términos, expresiones, notaciones, gráficos, los cuales son expresados por cualquiera de los giros lingüísticos: escrito, oral, gestual.
- Situaciones-problemas. Planteamientos en los que se indica la exigencia de un desarrollo.
- Conceptos-definición. Claramente identificables dentro de los textos, ya que de alguna manera describen el objeto emergente.
- Proposiciones. Determinan relaciones entre los conceptos.
- Procedimientos. Identifican las operaciones entre los conceptos: cálculos, operaciones, desarrollos algorítmicos.
- Argumentos. Expresiones que permiten explicar los problemas, conceptos, proposiciones o procedimientos.

Los seis tipos de entidades primarias surgen como contraposición a las entidades típicas (conceptuales y procedimentales), que no pueden describir en su totalidad los objetos intervinientes y emergentes del trabajo matemático. Los autores del enfoque ontosemiótico asumen que considerar una entidad como primaria es un aspecto relativo, ya que en cierta forma es dependiente de los juegos del lenguaje en que está inmersa. Los objetos matemáticos están relacionados entre sí formando configuraciones (redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y sus interrelaciones), las cuales, a su vez, pueden ser socioepistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales)<sup>342</sup>.

.....  
341 *Ibid.*

342 *Ibid.*

**5.5.3 Objetos matemáticos secundarios.** Es importante para la identificación de los objetos contextuales el significado de estos, entendiéndose que el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos<sup>343</sup>, por ello y basados en estos autores, se define a continuación el significado de los objetos institucionales y personales:

El significado de un objeto institucional OI es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge un OI en un momento dado. Simbólicamente, para un tiempo  $t$  y una institución  $I$ :  $S(OI) = PI(C)$ . Si  $I=M$ , se habla del significado matemático de un objeto.

En cuanto a los objetos personales, se considera que el significado de un objeto personal  $Op$  es el sistema de prácticas personales de una persona  $p$  para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto  $Op$  en un momento dado:  $S(Op) = Pp(C)$ . Dos aspectos contextuales que enmarcan los significados de los objetos matemáticos son la noción de institución y el juego de lenguaje; a partir de estos, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas y los emergentes de estas pueden ser clasificados como<sup>344</sup>:

- Personal-institucional. Son objetos considerados institucionales si son compartidos dentro de una institución, mientras que son objetos personales si son propios del sujeto.
- Ostensivo-no ostensivo. De acuerdo con el juego del lenguaje, se considera que un objeto es ostensivo cuando se puede mostrar a otras personas; es decir, es de dominio público, y si no lo es, se les puede mostrar a través de sus ostensivos asociados (símbolos, gráficos, formas de notación, entre otros). Para el caso, los objetos institucionales y personales son no ostensivos, ya que están en el pensamiento de las personas.
- Expresión-contenido. Los objetos matemáticos solo se pueden comprender como sujetos relacionados mediante funciones semióticas, entendidas como relaciones implicativas, donde el antecedente es una expresión o lo que se quiere significar y el consecuente es un contenido o significado.

.....  
343 *Ibid.*

344 Godino, “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática”.

- Extensivo-intensivo. Se resalta la utilización de un objeto como un caso particular o como un caso general.
- Unitario-sistémico. Dependiendo de la situación, los objetos matemáticos son asumidos como sistemas (deben descomponerse para su estudio en sus partes retomando sus relaciones y operaciones) o como objetos unitarios. Ejemplo, los números naturales.

Según Font<sup>345</sup>, solo hay dos maneras de entender la comprensión, como proceso mental y como competencia; criterios epistemológicos claramente opuestos. Los enfoques cognitivos en didáctica de la matemática la entienden como proceso mental, en el EOS se asume como competencia. La comprensión también se expresa en términos de funciones semióticas, ya que el conocimiento se entiende como el contenido de funciones semióticas.

## 5.6 Formas de análisis del desarrollo de una clase de matemáticas

Para este apartado se utilizó como referencia el ejemplo de análisis de una clase no significativa propuesto por Pochulu y Font<sup>346</sup>. Se pretendió clasificar a la clase y al profesor de acuerdo con las tipologías planteadas en el capítulo anterior: la propuesta por Ernest<sup>347</sup>, que clasifica al docente como entrenador, tecnólogo, humanista, progresista o crítico, y la clasificación de Porlán complementada con los criterios de Piaget, Vygotsky y Bruner, que proponen los modelos teóricos de profesor tradicional, tecnológico, espontaneísta y constructivista. Para lograr lo anterior se toma como referencia la teoría de las situaciones didácticas y la teoría antropológica de lo didáctico, caracterizadas por tener en cuenta

345 Vicenç Font, *Processos mentals versus competència* (Barcelona: Departament de Didáctica de los CCEE I de la Matemática de la UB, 2001).

346 Pochulu y Font, “Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 14, n.º 3 (2011): 361-394.

347 Paul Ernest, “The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model”. *Journal of Education for Teaching* 15, n.º 1 (1989): 13-33.

los puntos de vista socioculturales y, por ende, también un modelo integrador propio de la educación matemática, como es el enfoque ontosemiótico. Se utilizó, además, el modelo de análisis didáctico propuesto por el enfoque ontosemiótico<sup>348</sup>, el cual permitió analizar los pormenores de una clase de matemáticas.

Inicialmente, se analizó el contexto de la clase con aspectos como la institución (ubicación, pública o privada, estrato, número de estudiantes, etc.), el docente (antigüedad en docencia, selección, etc.), la clase (duración, grado, número de alumnos, etc.). Para el análisis de la clase, el enfoque ontosemiótico propone dividir el registro en configuraciones didácticas entendidas como “las interacciones profesor-alumno, a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos”<sup>349</sup>. Los mismos autores plantean que una configuración didáctica está compuesta por configuraciones epistémicas (tarea, reglas, argumentaciones, lenguajes), configuraciones docentes (asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación), configuraciones discentes (exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación), configuraciones cognitivas, afectivas y mediacionales. El cambio de configuración didáctica está dado por el cambio de realización de una tarea, sin embargo, es un criterio que se considera flexible y depende del investigador.

Como referente teórico para analizar las configuraciones didácticas, Godino, Contreras y Font plantean cuatro tipos de configuraciones: magistral, personal, adidáctica y dialógica. Se toma una configuración didáctica como magistral cuando el profesor asume una manera tradicional de enseñar matemáticas, en la que se hace una explicación de los contenidos por medios expositivos, desarrollo de ejemplos y ejercicios sobre la temática presentada; implícitamente, se le delega al estudiante la tarea de vivir los momentos de exploración, formulación y validación. Otro tipo de configuración es la personal, allí es el estudiante quien estudia sin intervención directa del docente, muestra que está capacitado para ello, lo cual es opuesto al caso tradicional, en que los estudiantes solucionan ejercicios tomados de libros o propuestos por el profesor. La

.....  
348 Vicenç Font, Nuria Planas and Juan Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”. *Infancia y Aprendizaje* 33, n.º 1 (2010): 89-105.

349 Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”.

configuración adidáctica, considerada de naturaleza teórica, se da cuando las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización determinan el rol del alumno en interacción con el medio. Por último, está la configuración dialógica, tomada como intermedia entre la adidáctica y la magistral, allí el estudiante explora la tarea y plantea alguna forma de solución, y el docente formula los problemas y valida las respuestas o formulaciones de los estudiantes, quedando el proceso de institucionalización como un diálogo contextualizado.

Igualmente, Font, Planas y Godino<sup>350</sup> proponen, para poder analizar de una forma completa un periodo de instrucción, cinco aspectos de análisis sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje: identificación de prácticas matemáticas, elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, identificación del sistema de normas y metanormas, y valoración de la idoneidad didáctica de la clase como tal.

## 5.7 Identificación de prácticas matemáticas realizadas en una clase de matemáticas

Es bueno iniciar esta sección recordando la definición de práctica matemática dentro del enfoque ontosemiótico, “consideramos la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas”<sup>351</sup>. Se busca ir desde la situación problema y las prácticas propias para su resolución hasta la identificación de objetos y procesos matemáticos que permiten tales prácticas. Pochulu y Font<sup>352</sup> manifiestan que este es un proceso que se debería dar como si

.....  
350 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

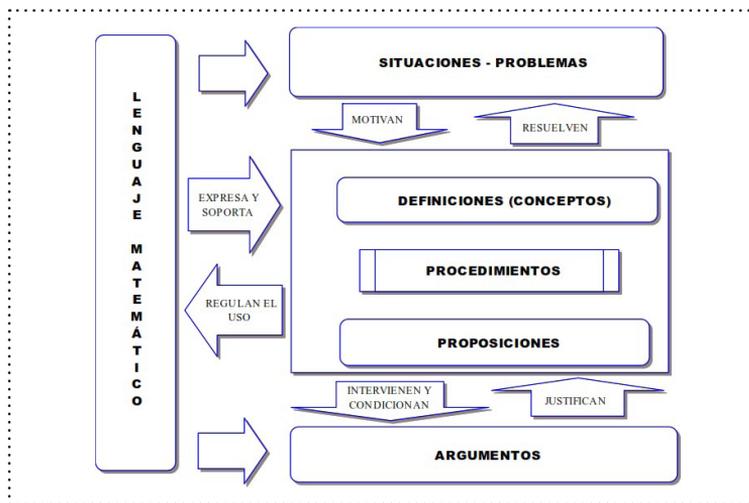
351 Godino y Batanero, “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”.

352 Marcel Pochulu y Vicenç Font, “Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 14, n.º 3 (2011): 361-394.

un profesor le comentara a otro lo que pasó en la clase, desde el punto de vista matemático. Hay que tener en cuenta que en una práctica inicialmente intervienen un agente y un medio, es decir, la persona o institución que realiza la práctica y el sitio de dicha práctica; igualmente, se requiere considerar otros tópicos como los valores e intenciones.

## 5.8 Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos

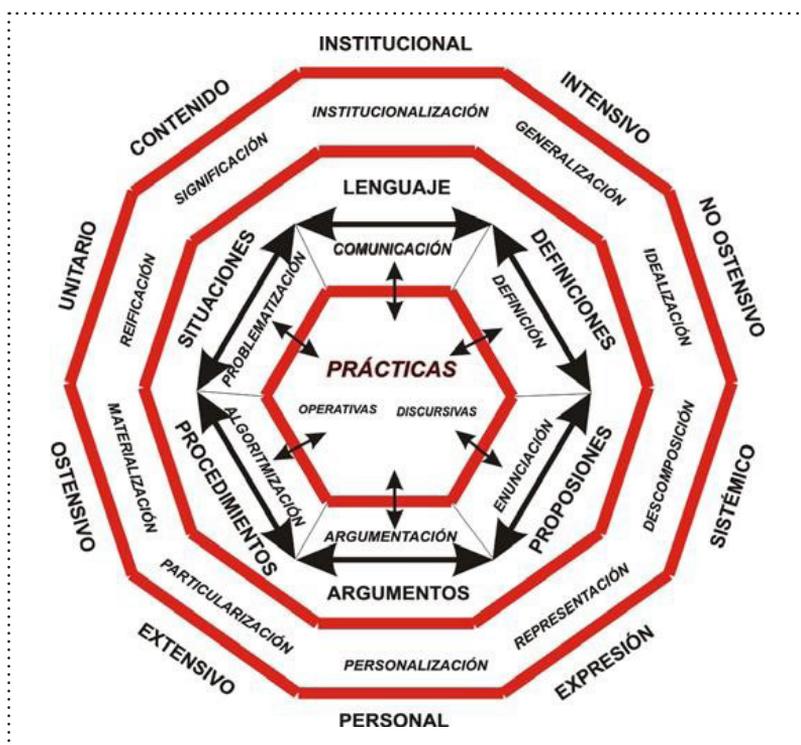
Se trata de determinar los objetos y procesos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas, al igual que los objetos y procesos emergentes de la realización de estas. Deben analizarse las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante. Se destaca el uso de lenguajes verbales y simbólicos como la parte ostensiva de los conceptos, proposiciones y procedimientos. En resumen, busca describir la complejidad de las prácticas matemáticas. El entramado que conforman estos objetos se presenta en la Figura 7.



**Figura 7.** Configuración de objetos y procesos matemáticos desde el enfoque ontosemiótico

**Fuente:** Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”

En la Figura 7 se presenta la forma de los objetos matemáticos, pero si lo que interesa es la dinámica entre ellos, es decir, su interacción, hay que utilizar la tipología propuesta por el enfoque ontosemiótico<sup>353</sup>.



**Figura 8.** Interacción entre los objetos matemáticos propuestos por el enfoque ontosemiótico  
**Fuente:** Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”

Lo que se pretende es modelar la actividad matemática tomando como base los sistemas de prácticas tanto operativas (lectura y producción de texto) como discursivas (reflexión sobre las prácticas operativas). En el primer nivel aparecen los tipos de objetos matemáticos: lenguaje, definiciones, proposiciones, argumentos, procedimientos y situaciones. En el último nivel (decágono) aparecen las cinco dimensiones duales con

353 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

las cuales se pueden analizar los objetos matemáticos: personal/institucional, unitaria/sistémica, expresión/contenido, ostensiva/no-ostensiva y extensiva/intensiva. En cuanto a los 16 procesos, en la Figura 7 se determina cuáles están relacionados con las dimensiones duales y cuáles con los objetos matemáticos<sup>354</sup>.

## 5.9 Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas

Se deben describir los patrones de interacción, los cuales se utilizan para tipificar las configuraciones didácticas y las trayectorias didácticas. Unas de las interacciones que hay que privilegiar son las que giran alrededor de los conflictos semióticos, los cuales son abordados desde el enfoque ontosemiótico como significados diferentes asignados a un mismo objeto por dos entidades, ya sean personas o instituciones; si se presentan entre instituciones, se llaman conflictos semióticos epistemológicos o epistémicos, y en caso contrario, es decir, si se presenta entre dos personas, se denomina conflicto semiótico de tipo cognitivo. Si el desfase significativo surge de una acción comunicativa, se trata de conflictos semióticos interaccionales.

## 5.10 Identificación del sistema de normas y metanormas

Este sistema soporta las configuraciones y las trayectorias didácticas; regula las distintas dimensiones de estos procesos (epistémica, afectiva, cognitiva, etc.). La actividad matemática también tiene un espíritu social, en cuanto a las interacciones sociales en el aula como base para la comunicación matemática. El aprendizaje matemático “está condicionado no sólo por conocimientos matemáticos y didácticos, sino

.....  
354 Vicenç Font and Angel Contreras, “The Problem of the Particular and Its Relation to the General in Mathematics Education”. *Educational Studies in Mathematics* 69, n.º 1 (2008): 33- 52. 10.1007/ s10649-008-9123-7

por algunas reglas llamadas *normas sociomatemáticas*<sup>355</sup> y las cláusulas del contrato didáctico<sup>356</sup>.

Desde el enfoque ontosemiótico se han desarrollado trabajos como los de D'Amore, Font y Godino<sup>357</sup>, y Godino, Font, Wilhelmi y Castro<sup>358</sup>, en los cuales se plantean clasificaciones de las normas según diferentes tópicos como el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), procesos de enseñanza y aprendizaje que abordan (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, etc.) y su origen (disciplina, escuela, aula, etc.), entre otros. Las normas epistémicas se encuentran en los elementos de las configuraciones de objetos que controlan las prácticas matemáticas en un entorno institucional. Se habla de normas metaepistémicas a las que algunos autores aluden como sociomatemáticas<sup>359</sup>. Finalmente, para analizar los conflictos es bueno estudiarlos desde la discordancia entre prácticas personales e institucionales, teniendo en cuenta que en algunos casos pueden ser prácticas desviadas, aunadas al uso de normas.

## 5.11 Valoración de la idoneidad didáctica

Hasta este momento con el análisis se responde a la pregunta ¿qué ha ocurrido aquí y por qué?, pero no se evalúa el proceso de clase como tal y mucho menos se proponen mejoras, cuestión que se soluciona en este apartado, el cual se encarga de la valoración de la idoneidad didáctica<sup>360</sup>. Estos autores proponen seis criterios para determinar la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje:

.....  
355 Yackel y Cobb, "Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics".

356 Pochulu y Font, "Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa".

357 D' amore, Font y Godino, "La dimensión metadidáctica".

358 Godino et al., "Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas".

359 Yackel y Cobb, "Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics".

360 Juan Godino, Delisa Bencomo, Vicenç Font and Miguel Wilhelmi, "Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas". *Paradigma* 27, n.º 2 (2006): 221-252.

**Idoneidad epistémica.** Para valorar los contenidos matemáticos enseñados, comparando los significados de referencia con los institucionales aplicados o planeados, según Alsina y Domingo<sup>361</sup> hay que analizar qué contenidos matemáticos aparecen y con qué frecuencia, al igual que identificar el modelo implícito que se presenta en cada actividad o serie de actividades.

**Idoneidad cognitiva.** Comprende dos momentos, pre y post ejecución de la actividad: antes de la clase, para valorar si lo que se pretende enseñar está al alcance del estudiante, y después de la clase, para identificar si los aprendizajes logrados se aproximan a los aprendizajes pretendidos, es decir, se mira el grado de proximidad entre los significados implementados o planeados y los cognitivos o personales iniciales de los estudiantes; Vygotsky<sup>362</sup> destaca que se trata de determinar en qué medida los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

**Identidad mediacional.** Para valorar los recursos materiales y temporales utilizados en la clase en cuanto a su disponibilidad y adecuación para el proceso, destacando que según Baroody<sup>363</sup> la utilización de materiales manipulativos no es una condición necesaria y suficiente para el éxito en el aprendizaje.

**Idoneidad emocional.** Para determinar el grado de interés o motivación del estudiante en la clase, aclarando que este puede depender de los factores internos a la clase o externos que tienen que ver con las vivencias de los estudiantes.

**Idoneidad interaccional.** Para valorar las interacciones de la clase, en el sentido de ser válidas por los alumnos en lo concerniente a resolver dudas y dificultades, lo cual se evalúa durante el proceso, y *a priori* se

.....  
361 Ángel Alsina y Marta Domingo, "Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13, n.º 1 (2010): 7-32. <https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v13n1/v13n1a2.pdf>

362 Lev Vygotsky, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Barcelona: Grijalbo, 1995).

363 Arthur Baroody, *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically* (New York: Macmillan, 1993).

identifican conflictos semióticos potenciales. En estudios realizados por Font, Planas y Godino<sup>364</sup>, y Planas e Iranzo<sup>365</sup> se plantean algunas sugerencias para mejorar esta idoneidad.

***Idoneidad ecológica.*** Para valorar la concordancia de la clase con el proyecto educativo de la institución, los procesos curriculares y el contexto social y profesional.

## 5.12 Modelo de análisis didáctico utilizado en esta investigación

Después de la revisión de la literatura sobre modelos de análisis didáctico de procesos de instrucción hecha en los párrafos anteriores, en esta investigación se ha optado por el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS, dada su generalidad y, sobre todo, porque propone dos tipos de análisis específicos (el análisis de las interacciones y de las trayectorias didácticas, y el análisis de la dimensión normativa) que permiten describir y explicar las interacciones en el aula, y también propone un tipo de análisis para la valoración de la interacción (idoneidad didáctica).

## 5.13 Estudios empíricos relacionados con el modelo de análisis didáctico del EOS

Utilizando como marco teórico los constructos del EOS se han realizado una serie de experimentos de diseño, estudios de tipo naturalista y cursos de formación, los cuales han permitido, por una parte, el desarrollo del modelo de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (CCDM) propuesto por dicho enfoque y, por otra parte, han permitido poner a prueba dicho modelo de CCDM en situaciones empíricas. En diferentes investigaciones y contextos de formación se han diseñado e implementado ciclos formativos para que los profesores (o futuros profesores) desarrollen las competencias del modelo CCDM

.....  
364 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

365 Planas e Iranzo, “Consideraciones metodológicas”.

y aprendan los conocimientos que se contemplan en él, por ejemplo, en Rubio<sup>366</sup>; Pochulu, Font y Rodríguez<sup>367</sup>, y Seckel<sup>368</sup>. Se trata de ciclos formativos en los que se pretende enseñar a los participantes algunos de (o todos) los tipos de análisis didáctico contemplados en el modelo de análisis didáctico, propuestos por el EOS<sup>369</sup>, ya que se supone que realizar estos tipos de análisis didácticos permite desarrollar la competencia clave de este modelo, la competencia de análisis e intervención didáctica, y también el aprendizaje de los diferentes tipos de conocimientos contemplados en el modelo de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Por esta razón, en numerosas ocasiones se han implementado ciclos formativos (muchos de ellos con un formato de taller) con el objetivo de enseñar el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS. Se trata de ciclos formativos (talleres) diseñados como entornos potentes de aprendizaje de manera que: 1) los asistentes tengan una participación activa a partir del análisis de episodios de aula; y 2) los tipos de análisis que propone dicho modelo emerjan de la puesta en común realizada en el gran grupo.

Dichos ciclos formativos (talleres) son considerados en el Office of State Assessment (OSA) *experimentos del desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor* (EDCCP) y son un tipo de *Teacher Development Experiment* (TDE). Según Simon<sup>370</sup>, los TDE estudian el desarrollo profesional del profesor en formación o en servicio, y se fundamentan

.....  
366 Norma Rubio, “Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos” (tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, 2012).

367 Marcel Pochulu, Vicenç Font y Mabel Rodríguez, “Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas”. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 19, n.º 1 (2016), 71-98. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33544735004>

368 María José Seckel, “Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática” (tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, 2016).

369 Luis Pino-Fan, Adriana Assis and Walter Castro, “Towards a Methodology for the Characterization of Teachers’ Didactic Mathematical Knowledge”. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* 11, n.º 6 (2015): 1429-1456.

370 Martín Simón, “Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment”, en *Handbook of research design in mathematics and science education*, editado por A. E. Kelly y R. A. Lesh (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000), 335-359.

en los principios de los experimentos de enseñanza<sup>371</sup>, lo que significa que un equipo de investigadores estudia el desarrollo del profesor a la vez que lo promueve como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención. Este tipo de investigaciones también contemplan el estudio de casos.

En los diferentes talleres para profesores o futuros profesores de matemáticas implementados (EDCCP) con el objetivo señalado —dos de las cuales están descritos en Rubio<sup>372</sup> y Seckel<sup>373</sup>— se han observado algunas regularidades que se formulan de la siguiente manera:

Los profesores o futuros profesores, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración. Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CCDM) del profesor de matemáticas (una parte del CCDM). Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (otro componente del modelo CCDM) propuestos por el EOS (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva).

La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad. Estas tendencias<sup>374</sup> se relacionan con el

.....  
371 Leslie Steffe y Patrick Thompson, “Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements”, en *Research design in mathematics and science education*, editado por R. Lesh y A. E. Kelly (Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000), 267-307.

372 Norma Rubio, “Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos” (tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, 2012).

373 María José Seckel, “Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática” (tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, 2016).

374 Miguel de Guzmán, “Enseñanza de las ciencias y las matemáticas”. *Revista Iberoamericana*

modelo CCDM, ya que ellas son la base para proponer algunos de los criterios de idoneidad didáctica. Por esta razón, para esta investigación se ha planteado organizar un grupo de trabajo colaborativo que desarrolle la reflexión de los participantes asumiendo que, en una primera fase, no era necesario dar herramientas teóricas *a priori* para guiar su reflexión, pues se esperaba que se iban a cumplir las cuatro regularidades señaladas. Dado que en la primera fase se generaron muchos de los componentes y descriptores de los criterios, en la segunda fase se dieron herramientas para pautar la reflexión, básicamente en forma de lectura de artículos previos o bien por una lectura hecha directamente en la sesión del grupo. En la tercera fase se aplicó la pauta a la clase de uno de los asistentes y se observó que muchos criterios no se cumplían.

En la cuarta fase se valoraron clases con esta pauta. En la quinta fase se diseñó una clase siguiendo la pauta. Finalmente, se implementó la clase diseñada y se valoró aplicando la pauta.

## 5.14 Análisis didáctico. Caso Fernando

La elaboración del análisis didáctico con los criterios del enfoque ontosemiótico refleja la situación de la clase en profundidad, permitiendo su descripción detallada, por lo cual el trabajo se concentrará en los criterios de idoneidad didáctica, dado que permiten determinar la calidad y las mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas<sup>375</sup>.

Se presentan en la Tabla 14 los resultados del análisis didáctico de Fernando, antes y después del trabajo colaborativo.

---

*de Educación*, n.º 43 (2007): 19-58.

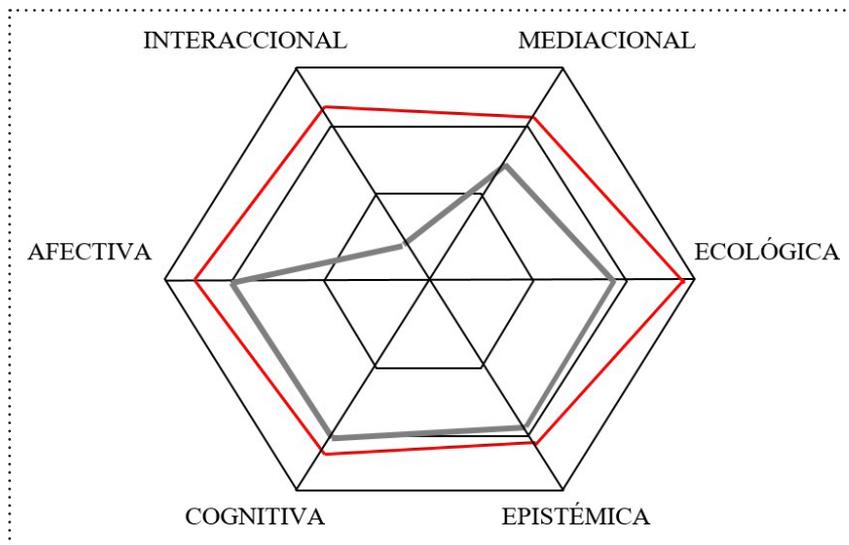
375 Adriana Breda, Vicenc Font and Valderez Marina do Rosário Lima, “Noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática”. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* 8, n.º 2 (2015): 1-41.

**Tabla 14.** Resultados del análisis de los criterios de idoneidad didáctica en las dos fases

Idoneidad didáctica	Antes del trabajo colaborativo %	Posterior al trabajo colaborativo %
Idoneidad epistémica	59.7	70
Idoneidad cognitiva	66.6	75
Idoneidad afectiva	66.6	83.3
Idoneidad interaccional	15.7	75
Idoneidad mediacional	49.95	72.2
Idoneidad ecológica	60	95

**Fuente:** elaboración propia.

La representación hexagonal sería:



**Figura 9.** Tendencia de las idoneidades de las dos fases

**Fuente:** adaptada del análisis del enfoque ontosemiótico de Godino, 2011; Font, Planas, Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”; Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, “Aproximación a la dimensión normativa...”.

En la primera fase se observa que las idoneidades más bajas del docente Fernando, en su orden, son la interaccional y la mediacional, pero la crítica por desarrollar para este docente es la idoneidad interaccional.

En la segunda fase (posterior al trabajo colaborativo), la idoneidad más baja es la epistémica seguida por la mediacional. Se resalta que hay resignificación en todas las idoneidades, especialmente hay que destacar que la idoneidad interaccional dejó de ser el punto crítico.

A continuación, se examina puntualmente por idoneidad:

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad

Componentes:	Descripción
<b>Idoneidad epistémica</b>	
Situaciones- Problemas	ATC: no se propusieron en la clase situaciones que permitieran generar problemas; en este caso el docente planteó todos los problemas para trabajar por parte del estudiante. Igualmente, no se sugirieron situaciones donde los alumnos tuvieran que generar o negociar procedimientos, definiciones o proposiciones. Tampoco se presentaron diferentes significados de los objetos matemáticos.
	DTC: sucedió la misma situación en cuanto a generación de problemas por parte de los estudiantes y planteamiento de diferentes significados de los objetos matemáticos.
	M: en este criterio no se mejoró en cuanto al planteamiento de problemas por parte de los estudiantes, al igual que sobre determinar diferentes significados de los objetos. Sin embargo, sí se propusieron situaciones donde los estudiantes tuvieron que generar o negociar procedimientos, definiciones o proposiciones
Lenguajes	ATC: fue adecuado el uso de diferentes modos de expresión matemática, tanto verbal, como gráfica y simbólica. El lenguaje es adecuado al nivel universitario que se está trabajando, así mismo, en la clase se propusieron actividades de interpretación y de expresión matemática.
	DTC: igualmente este aspecto fue similar.
	M: son aspectos positivos del docente que debe mantener.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	ATC: no se observaron fallas en el planteamiento de las definiciones y procedimientos, y están adaptados para el nivel universitario. Sin embargo, no se proponen situaciones en las que los alumnos tengan que generar o negociar Definiciones, proposiciones o procedimientos.
	DTC: se hace un buen planteamiento de las definiciones y procedimientos, adaptados al nivel universitario. Acá sí se propusieron situaciones de generación y negociación de conceptos.

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad (continuación).

Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	M: se mejoró el criterio de generación y negociación de conceptos.
Argumentos	ATC: las explicaciones fueron adecuadas al nivel universitario, pero no se promovieron situaciones donde el alumno pudiera argumentar.
	DTC: el docente tiene como fortaleza el adaptar las explicaciones para el nivel universitario, además propuso situaciones donde el alumno tuvo que argumentar.
	M: se mejoró en cuanto el profesor propuso situaciones donde el alumno tenía que argumentar mediante el trabajo en grupo y la socialización.
Relaciones	ATC: se relacionaron y conectaron los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.), pero no se abordaron los distintos significados de estos.
	DTC: igual.
	M: no se mejoró en cuanto a abordar los distintos significados de los objetos matemáticos.
<b>Idoneidad cognitiva</b>	
Conocimientos previos	ATC: los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y el profesor considera que los contenidos pretendidos se pueden alcanzar.
	DTC: igual
	M: es una fortaleza del docente.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	ATC: se incluyeron actividades de ampliación, y se promovió el logro de todos los estudiantes.
	DTC: igual.
	M: es una fortaleza del docente.
Aprendizaje:	ATC: no se mostró o identificó alguna forma que propusiera el docente como evaluación de los procesos y prácticas, que señalara entre otros aspectos la comprensión conceptual y proposicional. Como no hay evaluación, no pudimos fijarnos si en ella se tienen en cuenta los distintos niveles de comprensión y competencia por parte del estudiante, al igual que si los resultados de esta evaluación se usan para tomar decisiones.
	Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva.
	DTC: igual.
	M: no se mejoró en este aspecto, queda como criterio por mejorar.

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad (continuación).

<b>Idoneidad afectiva</b>	
Intereses y necesidades	ATC: se propusieron tareas que tenían interés para los alumnos y algunos problemas que mostraban la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.
	DTC: aunque las tareas fueron interesantes para los estudiantes, no se propusieron problemas contextualizados.
	M: se desmejoró, ya que en la segunda fase no se propusieron problemas de contexto; así que queda como aspecto por mejorar, ya que no es una práctica usual del profesor.
Actitudes	ATC: se favoreció la argumentación en situaciones de igualdad, mas no la participación real del estudiante, con los valores de responsabilidad y perseverancia.
	DTC: se respetó el proceso de argumentación independiente de la persona, adicionalmente se dio buena participación al estudiante para generar valores de responsabilidad y perseverancia.
	M: se mejoró, en el sentido de dar mayor participación al estudiante y dar oportunidad de desarrollo de valores como la responsabilidad y la perseverancia.
Emociones	ATC: se motivó al estudiante promoviendo el agrado por las matemáticas y fomentando su autoestima, pero no se resaltaron las cualidades estéticas y La precisión de las matemáticas.
	DTC: igual.
	M: no se mejoró el hecho de resaltar las cualidades y la precisión de la matemática, queda como aspecto por superar.
<b>Idoneidad interaccional</b>	
Interacción docente-discente	ATC: el profesor realizó una buena presentación del tema, sin embargo, no se hicieron preguntas adecuadas, sino esperando una respuesta corta del estudiante, tampoco se buscó llegar a consensos ni se usaron otros recursos retóricos para motivar a los estudiantes.
	DTC: se hizo una buena presentación del tema, la participación del estudiante fue adecuada, pero no se motivó a los estudiantes con otros recursos retóricos.
	M: se mejoró en cuanto a la participación del estudiante, pero siguen faltando recursos retóricos y argumentativos que mejoren la motivación del estudiante, queda como aspecto por mejorar.

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad (continuación).

Interacción entre alumnos	ATC: aunque se evitó la exclusión, no se buscó una participación significativa de los estudiantes, que favoreciera el diálogo y la comunicación entre ellos.
	DTC: se evitó la exclusión y se dio participación a los estudiantes, favoreciendo el diálogo y la comunicación entre ellos.
	M: se mejoró el criterio de dar participación a los estudiantes favoreciendo el diálogo y participación entre ellos.
Autonomía	ATC: dado que el profesor siempre explica todo en la clase, no da oportunidad de que el estudiante asuma la responsabilidad del estudio.
	DTC: el profesor hizo la clase participativa, dio oportunidad a que los estudiantes asumieran la responsabilidad de la clase, realizando actividades como plantear cuestiones y presentar soluciones; explorar ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usar una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos, etc.
	M: mejoró el aspecto comunicativo en general y en particular los procesos matemáticos que de ello se derivan.
Evaluación formativa	ATC: no se realizó una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
	DTC: igual.
	M: no mejoró el aspecto de la observación sistemática del progreso del alumno. Queda como aspecto por mejorar para el docente.
<b>Idoneidad mediacional</b>	
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores).	ATC: no se utilizaron materiales manipulativos e informáticos, y las definiciones y propiedades no fueron contextualizadas.
	DTC: se utilizaron materiales manipulativos (talleres, calculadoras), lo que permitió la contextualización de los objetos matemáticos.
	M: se mejoró en el criterio de utilizar materiales manipulativos que permitieran contextualizar los objetos matemáticos.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	ATC: el horario, la distribución de los estudiantes (forma matricial), al igual que su número, permitieron llevar a cabo la enseñanza pretendida.
	DTC: igual, excepto la distribución de los alumnos, pequeños grupos.
	M: es una fortaleza del docente.

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad (continuación).

Tiempo (de enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje).	ATC: uno de los problemas del docente es el tiempo, escoge una temática demasiado ambiciosa, por lo cual el tiempo no es suficiente para la enseñanza pretendida y no dedica tiempo especial a los contenidos más importantes o que son de más dificultad para el estudiante.
	DTC: igual.
	M: el aspecto de control de tiempo queda por mejorar.
<b>Idoneidad ecológica</b>	
Adaptación al currículo	ATC: los contenidos, su implementación y evaluación son coherentes con las directrices curriculares.
	DTC: igual.
	M: es fortaleza del profesor.
Apertura hacia la innovación didáctica	ATC: la clase no tiene que ver con la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva, al igual que no integra las tecnologías de la información y comunicación.
	DTC: se planteó una metodología que es innovadora, donde se utiliza material manipulativo.
	M: mejoró el criterio de nuevas metodologías y tecnologías en la clase de matemáticas.
Adaptación socioprofesional y cultural	ATC: los contenidos abordados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.
Educación en valores	ATC: se promovió la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.
Conexiones intra e Interdisciplinares	ATC: los contenidos abordados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.

**Nota:** ATC: antes del trabajo colaborativo. DTC: después del trabajo colaborativo. M: análisis de mejora.

**Fuente:** elaboración propia.

Se consideran fortalezas de Fernando aquellos criterios que estaban inicialmente dentro de su práctica pedagógica y los siguió manteniendo; un aspecto fue resignificado si inicialmente no lo tenía el docente, pero a través del trabajo colaborativo consiguió desarrollarlo. Hay un aspecto por mejorar, si inicialmente no estaba presente en las prácticas del profesor y al finalizar el trabajo colaborativo sigue sin estarlo. Lo anterior se detalla a continuación.

**Tabla 16.** La práctica pedagógica del docente al finalizar el trabajo. Análisis por idoneidad

<b>Idoneidad</b>	<b>Fortaleza</b>	<b>Resignificación</b>	<b>Aspectos por mejorar</b>
<i>Idoneidad epistémica</i>	Los lenguajes	Reglas y argumentos	Situaciones problema y relaciones.
<i>Idoneidad cognitiva</i>	Conocimientos previos y adaptaciones curriculares		Aprendizaje, lo que tiene que ver con la evaluación explícita de la clase.
<i>Idoneidad afectiva</i>		Actitudes	Intereses y necesidades, y emociones
<i>Idoneidad interaccional</i>		Interacción docente-discente, interacción entre alumnos y autonomía	Evaluación formativa
<i>Idoneidad mediacional</i>	Número de alumnos, horario y condiciones de aula	Recursos materiales	Tiempo, especialmente en la distribución de tareas
<i>Idoneidad ecológica</i>	Adaptación al currículo, adaptación socio profesional y cultural, y conexiones intra e interdisciplinarias	Apertura hacia la innovación didáctica	

**Fuente:** elaboración propia.

Se presentan a continuación algunos aspectos referentes a la idoneidad epistémica o la calidad de las matemáticas enseñadas. El profesor en las clases iniciales prácticamente no propone problemas (uno en las dos clases), lo anterior coincide con lo que piensa, pues plantea “en los ejercicios que involucro para trabajar, busco que se incluyan con enfoque de algoritmos y en ocasiones la resolución de problemas” (Ent2F, 27 marzo 2015), explicando de esta manera la poca importancia que

le da al planteamiento de problemas en el aula, lo cual está acorde con su metodología “se trabaja la explicación de la temática en el tablero y los estudiantes solucionan los ejercicios siguiendo un proceso similar al explicado” (Ent3F, 1 julio 2016); sin embargo, en la segunda fase, en las dos clases planteó situaciones problemáticas aunque sin utilizar el contexto<sup>376</sup>, lo cual coincide con su metodología después de reflexionar acerca de sus prácticas dentro del grupo de trabajo colaborativo, “el modelo de clase que propongo, está enfocado a la participación activa del estudiante en la solución de situaciones problema donde ponga en juego sus conocimientos previos y logre así construir los nuevos conceptos” (Ent4F, 18 noviembre 2016), pero aún no se preocupa por generar actividades en las que promueva que el estudiante plantee sus problemas.

El criterio sobre generación y negociación de conceptos fue resignificado por el profesor. En la primera fase, esta generación y negociación no existían, pues el docente pensaba que en la clase debía darse una “relación explicativa que hace el docente al estudiante, teniendo como parámetro que este puede preguntar en cualquier momento para aclarar sus dudas” (Ent2F, 27 marzo 2015), lo cual no dejaba lugar a una búsqueda de consenso. En la segunda fase, Fernando asumió un cambio, “especialmente en la concepción de que el estudiante aprende sólo si le explico, lo cual conlleva modificar las actividades y asumir que el estudiante puede aprender sin necesidad de que yo esté dentro de ese proceso” (Ent3F, 1 Julio 2016), lo cual permitió que en sus clases se fomentara el trabajo en grupo, la discusión y generación de conceptos.

En la idoneidad cognitiva, un aspecto por mejorar es la realización explícita de la evaluación y el dejar inferir cuál es su objetivo; este factor no ha sido aún interiorizado por el docente, al respecto manifiesta: “hay aspectos que necesito interiorizar y esto es un proceso que requiere de tiempo” (Ent3F, 1 julio 2016). Graduar los contenidos de acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes, teniendo como objetivo una mejor comprensión de los nuevos conceptos<sup>377</sup>, es una fortaleza del docente.

.....  
376 Alsina y Domingo, “Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural”.

377 Lev Vygotsky, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Barcelona: Grijalbo, 1988).

En la idoneidad afectiva, un aspecto por mejorar es el proponer tareas matemáticas que tengan que ver con el contexto, aunque es un criterio interiorizado por el docente. Inicialmente, decía que uno de los problemas de la enseñanza de la matemática “es brindar demasiada información al estudiante, esperando que comprenda las diferentes temáticas y desarrolle un proceso algorítmico, sin analizar a fondo su utilidad en un contexto determinado” (Ent2F, 27 marzo 2015), lo cual permite afirmar que existe una conciencia por parte del docente hacia la importancia del contexto en el problema de la clase. En la segunda fase, en cuanto a los conocimientos matemáticos, el docente plantea que “ya no los veo como entes totalmente abstractos, sino como que puede buscarse su representación en la realidad y así aplicar la matemática en su contexto” (Ent3F, 1 julio 2016), lo cual lleva nuevamente a pensar que Fernando cree en la importancia del contexto en la clase de matemáticas, sin embargo, no lo ha puesto en práctica. Un aspecto que logró resignificar el docente fue referente a las actitudes, pues inicialmente, por la estructura tradicional- tecnológica de la clase<sup>378</sup>, la participación del estudiante se limitó básicamente a respuestas cortas a preguntas del profesor, lo cual no daba lugar a mayores desarrollos participativos; al cambiar el docente su estilo de clase, proponiendo actividades de trabajo de grupo, permitió que los estudiantes interactuaran entre ellos con situaciones de igualdad y en fomento de valores. Respecto al rol del estudiante, el profesor manifestó: “Mi rol cambió, antiguamente mi papel era reproducir algorítmicamente los procesos explicados en el desarrollo de los ejercicios; actualmente, soy partícipe de la construcción de los conocimientos que se trabajan en el aula, permitiéndole al estudiante reflexionar sobre el proceso de aprendizaje que realiza en cada situación planteada, llevándolo a un verdadero reto” (Ent3F, 1 julio 2016).

En lo que respecta a la idoneidad interaccional, el aspecto que quedó por mejorar fue el de la evaluación formativa, lo cual ya se fundamentó en la idoneidad cognitiva. Un criterio que se resignificó fue la relación docente-estudiante; en la primera fase, el docente menciona que “es un proceso de escucha, donde se debe estar pendiente de las orientaciones que se brindan para no perder la idea de la explicación” (Ent2F, 27

.....  
378 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

marzo 2015), lo cual es coherente con la actuación del docente; en la segunda fase hace comentarios como el siguiente “he aprendido a mirar que la clase se puede trabajar más participativa, donde el estudiante realmente sea el eje de ella, y comprender que existen otras formas de enfocar la práctica pedagógica que dan mejores resultados en el proceso de aprendizaje del estudiante” (Ent3F, 1 Julio 2016). Lo anterior indica un cambio de paradigma en cuanto a la relación docente-estudiante, que se evidenció en la práctica.

Otro factor que se resignificó fue la relación estudiante-estudiante. Inicialmente, el docente prácticamente no daba mucha posibilidad de una interacción entre los estudiantes, consideraba que “entre los estudiantes debe presentarse una discusión interna que permita aclarar las dudas entre ellos” (Ent2F, 15 Julio 2014), no llegar a consensos sino solo aclarar dudas, pero no brindaba el espacio para ello; posteriormente, Fernando manifestó que “hoy día lo que se busca es llevar al estudiante a reflexionar sobre un concepto, el cual es contrastado con lo que piensan los compañeros y el profesor, orientados por una base teórica de cualquier texto o ayuda de internet” (Ent3F, 1 Julio 2016), lo que lleva a una manera diferente de actuar del docente, como se logró evidenciar en las últimas clases. Finalmente y como corolario de lo anterior, el criterio de autonomía del estudiante también se resignificó, puesto que, como se evidenció en las clases iniciales, fue casi nulo, pero en las posteriores ya se presentó este factor, “actualmente, si hay interacción entre ellos, al igual que con el docente aunque en menor escala, corroboración en los textos de trabajo e internet, permitiendo así la reflexión sobre la temática y conllevando un mejor proceso de aprendizaje” (Ent3F, 01 Julio 2016); de lo cual se infiere que a menor participación del profesor, mayor participación del estudiante y, por ende, mayor autonomía de este último<sup>379</sup>.

En lo relativo a la idoneidad mediacional, el manejo del tiempo, principalmente en lo que se refiere a la distribución de tareas, es un aspecto por mejorar de Fernando, el cual lo reconoce. Inicialmente, el docente afirmó “la organización del tiempo en la clase para la distribución de la

.....  
 379 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002).

temática, es uno de los aspectos que debo mejorar” (Ent2F, 27 marzo 2015), lo que implica que es consciente de la necesidad de resignificar este aspecto; sin embargo, una vez culminado el trabajo colaborativo, manifiesta: “debo evolucionar más en el control del tiempo de la clase, para dar campo a desarrollar diversas estrategias conducentes al aprendizaje de los conceptos por parte de los estudiantes” (Ent3F, 1 Julio 2016). Reconoce que este concepto no evolucionó lo esperado, por lo cual se considera como no resignificado. Así mismo, dice que “el estudiante puede aprender por sí mismo, con ayuda del profesor y de otros recursos” (Ent3F, 1 julio 2016). Da importancia al uso de recursos, en las primeras clases no utilizó material fuera del texto y el tablero, pero después sí utilizó fichas con talleres, los cuales entregó a cada grupo, teniendo en cuenta la importancia del uso de medios educativos<sup>380</sup>.

En la idoneidad ecológica, un aspecto que logró el docente resignificar fue la apertura hacia la innovación didáctica, ya que incluyó material manipulativo dentro de la clase y una metodología no tradicional-tecnológica<sup>381</sup>, “el modelo de clase que propongo está enfocado a la participación activa del estudiante en la solución de situaciones problema donde ponga en juego sus conocimientos previos y logre así construir los nuevos conceptos” (Ent4F, 18 julio 2016), lo que propende a una innovación metodológica, basada en la práctica reflexiva.

## 5.15 Análisis didáctico. Caso Juan

La elaboración del análisis didáctico con los criterios del enfoque ontosemiótico refleja la situación de la clase en profundidad, que permite hacer una descripción detallada de la clase; por lo cual, el trabajo se concentrará en los criterios de idoneidad didáctica, dado que posibilitan analizar la calidad y las mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas<sup>382</sup>.

.....  
380 Arthur Barrody, *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically* (New York: Macmillan, 1993).

381 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

382 Breda, Font y Valdez, “A noção de idoneidade didática”.

Se presenta en la tabla siguiente la tipología del docente Juan antes y después del trabajo colaborativo.

**Tabla 17.** Tipología del docente antes y después del trabajo colaborativo

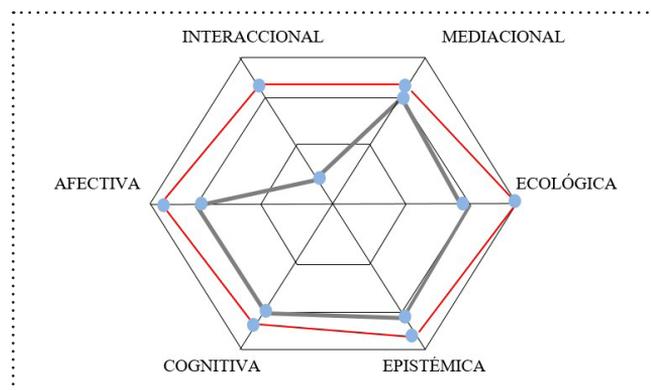
Idoneidad didáctica	Trabajo colaborativo	
	Antes %	Posterior %
Idoneidad epistémica	68.2	85
Idoneidad cognitiva	66.6	75
Idoneidad afectiva	66.6	91.7
Idoneidad interaccional	29,1	75
Idoneidad mediacional	72.15	75
Idoneidad ecológica	65	100

**Fuente:** elaboración propia.

En la primera fase se observa que las idoneidades más bajas del docente Juan, en su orden, son la interaccional y la ecológica, pero la idoneidad crítica por desarrollar para este docente es la interaccional.

En la segunda fase (posterior al trabajo colaborativo), este docente mejoró en todas las idoneidades; las más bajas son la cognitiva, interaccional y mediacional, pero no en un nivel crítico, ya que las tres están valoradas con 75 %, dejando de ser la idoneidad interaccional punto crítico.

La representación hexagonal sería:



**Figura 10.** Idoneidades de Juan, en la primera (negro) y segunda (rojo) fases  
**Fuente:** adaptada del análisis del enfoque ontosemiótico Godino, 2011; Font, Planas, Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”; Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, “Aproximación a la dimensión normativa...”

A continuación, se va a observar puntualmente por idoneidad:

**Tabla 18.** Análisis de idoneidad de la clase del profesor

Componentes	Descripción
<b>Idoneidad epistémica</b>	
Situaciones-problemas	ATC: el profesor planteó situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación de conceptos, aunque sí se plantearon problemas, no se permitió la generación de estos por parte de los estudiantes.
	DTC: sucedió lo mismo.
	M: al no mejorar en este criterio, el docente deberá tenerlo en cuenta.
Lenguajes	ATC: fue adecuado el uso de diferentes modos de expresión matemática, tanto verbal como gráfica y simbólica. El lenguaje es adecuado al nivel universitario que se está trabajando, pero en la clase no se propusieron actividades que facilitaran el desarrollo de la interpretación y de la expresión matemática.
	DTC: en estas clases sí se propusieron actividades de interpretación y los otros dos aspectos permanecieron igual.
	M: el uso de diferentes modos de expresión y la adecuación del lenguaje a nivel universitario son aspectos positivos del docente, se mejoró en que ya se preocupó por plantear actividades de interpretación y expresión matemática.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	ATC: no se observaron fallas en el planteamiento de las definiciones y procedimientos, y están adaptados para el nivel universitario. Sin embargo, no se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar Definiciones, proposiciones o procedimientos.
	DTC: se sigue haciendo un buen planteamiento de las definiciones y procedimientos, adaptados al nivel universitario. Acá sí se propusieron situaciones de generación y negociación de conceptos.
	M: se mejoró el criterio de generación y negociación de conceptos. Los demás son aspectos positivos del docente.
Argumentos	ATC: las explicaciones fueron adecuadas al nivel universitario, pero no se promovieron situaciones donde el alumno pudiera argumentar.

**Tabla 18.** Análisis de idoneidad de la clase del profesor (continuación).

Argumentos	DTC: el docente tiene como fortaleza el adaptar las explicaciones para el nivel universitario, además propuso situaciones donde el alumno tuvo que argumentar.
	M: Se mejoró en que el profesor propuso situaciones donde el alumno tenía que argumentar, mediante el trabajo en grupo y la socialización. Una fortaleza del docente es que adecúa los contenidos al nivel universitario.
Relaciones	ATC: se relacionaron y conectaron los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.), pero no se abordaron los distintos significados de estos.
	DTC: igual.
	M: aunque se relacionan los objetos matemáticos, no se mejoró en cuanto a abordar los distintos significados de los objetos matemáticos. El docente debe asumir como aspecto por mejorar este criterio.
<b>Idoneidad cognitiva</b>	
Conocimientos previos	ATC: los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y el profesor considera que los contenidos pretendidos se pueden alcanzar.
	DTC: igual.
	M: es una fortaleza del docente.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	ATC: se promovió el logro de todos los estudiantes y se incluyeron actividades de ampliación.
	DTC: igual.
	M: es un aspecto positivo del docente.
Aprendizaje:	ATC: no se mostró o identificó alguna forma que propusiera el docente como evaluación de los procesos y prácticas, que señalara entre otros aspectos la comprensión conceptual y proposicional. Como no hay evaluación, no pudimos fijarnos si en ella se tienen en cuenta los distintos niveles de comprensión y competencia por parte del estudiante ni si los resultados de esta evaluación se usan para tomar decisiones. Tampoco se evidenció un desarrollo de las competencias comunicativa y argumentativa.
	DTC: siguió igual en los primeros aspectos, pero planteó situaciones que permitieron un desarrollo de las competencias comunicativas y argumentativas.
	M: solo se mejoró este último aspecto. Lo demás queda como criterio por mejorar.

**Tabla 18.** Análisis de idoneidad de la clase del profesor (continuación).

<b>Idoneidad afectiva</b>	
Intereses y necesidades	ATC: se propusieron tareas que tenían interés para los alumnos, pero no situaciones que pudieran mostrar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.
	DTC: aunque las tareas fueron interesantes para los estudiantes, no se propusieron problemas contextualizados.
	M: permaneció igual, es decir, que sigue siendo un aspecto por mejorar el proponer situaciones problémicas contextualizadas.
Actitudes	ATC: se favoreció la argumentación en situaciones de igualdad, mas no la participación real del estudiante.
	DTC: se respetó el proceso de argumentación independiente de la persona; adicionalmente, se dio buena participación al estudiante para generar valores de responsabilidad y perseverancia.
	M: se mejoró en el sentido de dar mayor participación al estudiante y dar oportunidad de desarrollo de valores como la responsabilidad y la perseverancia.
Emociones	ATC: se motivó al estudiante por el agrado de las matemáticas, fomentando su autoestima y resaltando las cualidades estéticas y la precisión de las matemáticas.
	DTC: igual.
	M: es una fortaleza del docente.
<b>Idoneidad interaccional</b>	
Interacción docente-discente	ATC: el profesor realizó una buena presentación del tema; sin embargo, no se hicieron preguntas adecuadas, sino esperando una respuesta corta del estudiante, tampoco se buscó llegar a consensos ni se usaron otros recursos retóricos para motivar a los estudiantes.
	DTC: se invirtieron los papeles, se permitió la participación de los estudiantes en búsqueda de consenso, se utilizaron diversos recursos retóricos; no obstante, debido a la falta de organización del tiempo, no alcanzó a realizar una buena exposición del tema, como proceso de institucionalización.
	M: en general, se mejoró este criterio.
Interacción entrealumnos	ATC: aunque se evitó la exclusión, no se buscó una participación significativa de los estudiantes que favoreciera el diálogo y la comunicación entre ellos.

<b>Tabla 18.</b> Análisis de idoneidad de la clase del profesor (continuación).	
Interacción entre alumnos	DTC: se evitó la exclusión y se dio participación a los estudiantes, favoreciendo el diálogo y la comunicación entre ellos.
	M: se mejoró el criterio de dar participación a los estudiantes favoreciendo el diálogo entre ellos.
Autonomía	ATC: dado que el profesor siempre explica todo en la clase, no da oportunidad de que el estudiante asuma la responsabilidad del estudio.
	DTC: el profesor hizo la clase participativa, dio oportunidad a los estudiantes para que asumieran la responsabilidad de la clase realizando actividades como plantear cuestiones y presentar soluciones, explorar ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar, y que usaran una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos, etc.
	M: mejoró el aspecto comunicativo en general y en particular los procesos matemáticos que de ello se derivan.
Evaluación formativa	ATC: no se realizó una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
	DTC: igual.
	M: no mejoró el aspecto de la observación sistemática del progreso del alumno. Queda como aspecto por mejorar.
<b>Idoneidad mediacional</b>	
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)	ATC: no se utilizaron materiales manipulativos e informáticos ni las definiciones y propiedades fueron contextualizadas.
	DTC: se utilizaron materiales manipulativos (talleres, calculadoras), lo que permitió la contextualización de los objetos matemáticos.
	M: se mejoró en el criterio de utilizar materiales manipulativos que permitieran contextualizar los objetos matemáticos.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	ATC: el horario, la distribución de los estudiantes (forma matricial), al igual que su número, permitió llevar a cabo la enseñanza pretendida.
	DTC: igual, excepto la distribución de los alumnos, pequeños grupos.
	M: es una fortaleza del docente.

Tiempo (de enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	ATC: uno de los problemas del docente es el tiempo, escoge una temática demasiado ambiciosa, por lo cual el tiempo no es suficiente para la enseñanza pretendida, no dedicando tiempo especial a los contenidos más importantes o que son de más dificultad para el estudiante.
	DTC: igual.
	M: este aspecto es tal vez el de mayor importancia para el docente, el de control de tiempo, pero queda por mejorar.
<b>Idoneidad ecológica</b>	
Adaptación al currículo	ATC: los contenidos, su implementación y evaluación son coherentes con las directrices curriculares.
	DTC: igual.
	M: es fortaleza del profesor.
Apertura hacia innovación didáctica	ATC: la clase no tiene que ver con la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva, al igual que no integra las tecnologías de la información y comunicación.
	DTC: se planteó una metodología que es innovadora, donde se utiliza material manipulativo.
	M: mejoró el criterio de nuevas metodologías y tecnologías en la clase de matemáticas.
Adaptación socioprofesional y cultural	ATC: los contenidos abordados contribuyen con la formación socioprofesional de los estudiantes.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.
Educación en valores	ATC: no se promovió la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
	DTC: se realizaron actividades que favorecieran la formación en valores.
	M: se mejoró el hacer explícito la formación en valores.
Conexiones intra e interdisciplinarias	ATC: los contenidos abordados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.

**Nota:** ATC: antes del trabajo colaborativo. DTC: después del trabajo colaborativo. M: análisis de mejora

**Fuente:** elaboración propia.

Teniendo en cuenta que se consideran una fortaleza del docente aquellos criterios que tenía inicialmente dentro de su práctica pedagógica y los siguió manteniendo; un aspecto fue resignificado si inicialmente no lo tenía el docente, pero a través del trabajo colaborativo consiguió desarrollarlo; se considera un aspecto por mejorar, si inicialmente no estaba presente en las prácticas del docente y al finalizar el trabajo colaborativo sigue sin estarlo. En general, lo que muestra este análisis es lo siguiente:

**Tabla 19.** La práctica pedagógica del docente al finalizar el trabajo. Análisis por idoneidad

Idoneidad	Fortaleza	(re)significación	Aspectos por mejorar
<i>Idoneidad epistémica</i>		Los lenguajes; reglas y argumentos.	Situaciones problema y relaciones.
<i>Idoneidad cognitiva</i>	Conocimientos previos; adaptaciones curriculares	Aprendizaje	
<i>Idoneidad afectiva</i>	Emociones	Actitudes	Intereses y necesidades
<i>Idoneidad interaccional</i>		Interacción docente-discente, interacción entre alumnos, y autonomía.	Evaluación formativa
<i>Idoneidad mediadora</i>	Número de alumnos, horario y condiciones de aula	Recursos materiales	Tiempo, especialmente en la distribución de tareas.
<i>Idoneidad ecológica</i>	Adaptación al currículo; adaptación socio-profesional y cultural, y conexiones intra e interdisciplinarias	Apertura hacia la innovación didáctica; educación en valores.	

**Fuente:** elaboración propia.

Uno de los aspectos más complicados de valorar fue la idoneidad epistémica o la calidad de las matemáticas enseñadas, sin embargo, en cuanto a la resolución de problemas es de aclarar que el docente sí planteó problemas en sus clases, a pesar de que inicialmente pensaba que “muchos

de los contenidos que se les presentan a los estudiantes no dan tiempo para el trabajo de resolución de problemas (Ent2J, 27 marzo 2015), pero no logró finalmente que el estudiante planteara sus propias situaciones problemáticas ni que contextualizara los problemas planteados<sup>383</sup>; lo anterior lo menciona el docente al finalizar el proceso: (...) quedan muchos aspectos por mejorar, por ejemplo, en cuanto a la dimensión epistémica, pues hace falta la incorporación sistemática de situaciones problema que impliquen mayor esfuerzo por parte del estudiante para poner en juego tanto los saberes previos como su espíritu investigativo (EntJ3, 12 mayo 2016).

En la idoneidad cognitiva, un aspecto que quedó por mejorar fue la evaluación explícita y el dejar entrever cuál es el objetivo de esta. Al respecto, el docente afirmaba inicialmente, “debo cambiar mi paradigma sobre la evaluación, y hacer que los contenidos sean más prácticos, que los estudiantes los vean útiles” (Ent2J, 27 marzo 2015). Una de las fortalezas fue graduar los contenidos de acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes, de tal manera que pudieran estar dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante<sup>384</sup>.

En la idoneidad afectiva quedó igual un aspecto por mejorar, que está relacionado con el epistémico: proponer tareas matemáticas que tengan que ver con el contexto y, por lo tanto, mejoren la motivación del estudiante por su estudio, aunque al terminar el proyecto opina que “enseñar matemáticas va más allá de un simple ejercicio rutinario que le permite al estudiante desarrollar algunas estrategias mecánicas y algorítmicas, considera que las matemáticas poseen un componente práctico que le permite al estudiante relacionarlo con situaciones de la vida cotidiana” (EntJ3, 12 mayo 2016), lo cual lleva a pensar que hay una resignificación del concepto, pero no se alcanzó a plasmar en la práctica.

En lo referente a la idoneidad interaccional también quedó un aspecto por mejorar referente a la evaluación formativa, la cual está igualmente relacionada con la idoneidad cognitiva y allí se explicó la situación. Se resignificaron las interacciones entre los diferentes entes de la clase. Al

.....  
383 Alsina y Domingo, *Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural*.

384 Lev Vygotsky, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Barcelona: Grijalbo, 1988).

inicio del trabajo el profesor planteaba “la relación docente- estudiante debe ser cordial, en la que el profesor le responde de la manera más clara posible al estudiante y así resolver sus dudas” (Ent2J, 27 marzo 2015), y esta era la forma más clara de interacción presente dentro de la clase; pero después del trabajo colaborativo, el profesor opina al respecto, “en mi práctica docente veo dificultades en la dimensión interaccional, pues el estudiante sólo asume un rol pasivo y por tal razón no está plenamente comprometido con su propio aprendizaje” (EntJ3, 12 mayo 2016). En sus últimas clases tuvo muy en cuenta la interrelación estudiante-estudiante como fundamental, “La organización de los alumnos pasó de ser lineal o caótica, a ser por grupos de trabajo identificables” (EntJ3, 12 mayo 2016); tiene en cuenta que las concepciones de los estudiantes “son un punto de partida, sin embargo, es mediante el trabajo progresivo sobre las situaciones problema que se van transformando esas concepciones en conceptos institucionales” (EntJ3, 12 mayo 2016). También se identificaron conflictos cognitivos y se reflexionó sobre ellos, pues lo más importante es tratar de evitarlos<sup>385</sup>. Otro aspecto sobre el cual se trabajó en el grupo fue sobre las normas, las cuales permitieron el buen desarrollo de la clase<sup>386</sup>. Acerca de estos aspectos también se presentó una resignificación, por ejemplo, al respecto Juan menciona que (...) las reglas van surgiendo del grupo, porque si nos fijamos, uno no pone las mismas reglas para todas las clases ni para todos los grupos. Hay grupos muy activos, muy pilosos, que están sobre la temática. Hay otros que son perezosos, que no se concentran, entonces las actividades de la clase no pueden ser las mismas (TG14).

En lo que tiene que ver con la idoneidad mediacional hay un aspecto por mejorar, el manejo del tiempo, especialmente en lo referente a la distribución de tareas, aunque inicialmente el profesor afirmaba “ en cada clase se abordan conceptos de acuerdo con los contenidos programáticos previstos, se inicia mencionando los temas que se tratarán en el tiempo estimado de la clase y luego empieza el desarrollo de esta” (Ent2J, 27 marzo 2015), lo que aclara que destina un tiempo estimado para la clase, pero aun así, no lo pudo manejar. Al respecto, dice que

.....  
385 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

386 Planas y Iranzo, “Consideraciones metodológicas”.

“un aspecto que me ha sido especialmente difícil es el de ceder espacios a los estudiantes, pues algunos estudiantes consideran que la labor del profesor en el salón debe acaparar toda la atención en el tiempo de clase” (EntJ3, 12 mayo 2016), es decir, reconoce el problema. También manifiesta que “uno de los aspectos de mi práctica docente que me preocupa es el uso de mediaciones apropiadas, que le permitan al estudiante acercarse a la comprensión de conceptos matemáticos” (EntJ3, 12 mayo 2016), aunque según Barrody<sup>387</sup>, la utilización de materiales manipulativos no es una condición necesaria y suficiente para el éxito en el aprendizaje, pero sí aporta mucho; este fue uno de los aspectos que el profesor Juan logró resignificar.

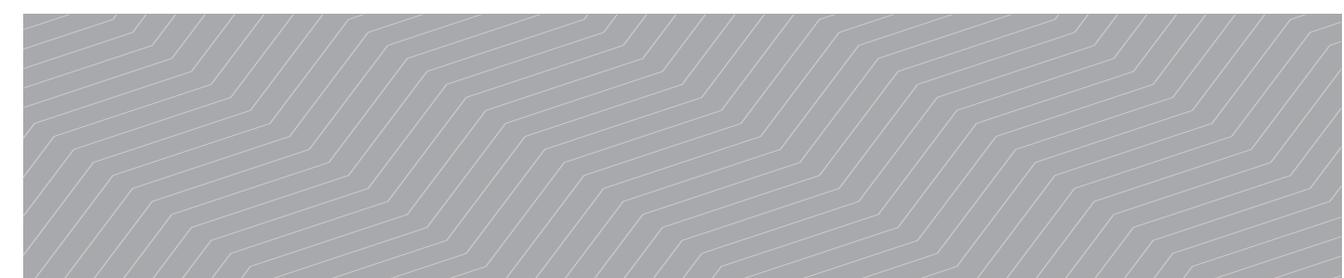
En la idoneidad ecológica, un aspecto que logró resignificar el docente fue la apertura hacia la innovación didáctica, ya que incluyó material manipulativo dentro de la clase y algunos de los elementos de las tecnologías de la información y la comunicación.

.....  
387 Arthur Barrody, *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically* (New York: Macmillan, 1993).



# CAPÍTULO 6.

## LA COMUNICACIÓN



Una vez asumido el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS para el análisis del proceso de instrucción, tal como se ha explicado anteriormente, se vio la necesidad, dadas las características de esta investigación, de complementarlo con análisis de aspectos comunicativos usando el modelo de Brendefur y Frykholm<sup>388</sup>, el cual destaca la comunicación unidireccional, contributiva, reflexiva e instructiva.

En la primera parte, se planteó el siguiente concepto de comunicación (desde diversos autores) para aplicarlo a este proyecto: la comunicación es una interacción social mediada por el lenguaje y donde el objetivo de cada sujeto es entender y hacerse entender. Luego, se mencionaron algunos modelos de comunicación de acuerdo con la evolución histórica del concepto: modelos sistémico, lineal y orquestal. Posteriormente, se expuso una de las muchas clasificaciones de la comunicación<sup>389</sup>. Después, se trató la relación entre semiótica y comunicación, estudiando la semiótica desde diversos autores. También dentro del aula se abordaron aspectos como el control de la clase, el contrato didáctico, las normas sociomatemáticas y el discurso matemático como comunicación. Finalmente, se estudiaron los modos de comunicación desde el punto de vista de Brendefur y Frykholm<sup>390</sup>.

En la segunda parte, se muestran los resultados del análisis de la comunicación realizado en las clases tanto del caso Fernando como del caso Juan; en las dos fases, antes y después de que los docentes participaran en el grupo de trabajo colaborativo.

La comunicación es un tema relativamente nuevo en educación matemática, que pocos pueden definir con claridad. La palabra comunicación entendida como la acción de comunicar, viene del latín *communis*,

.....  
388 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom".

389 Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*.

390 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom".

común, hacer común<sup>391</sup>, y se puede definir de múltiples formas. Menezes<sup>392</sup> dice que “comunicar es una forma de interacción social entre individuos y significa compartir”; Ponte<sup>393</sup>, por su parte, afirma que “la comunicación se entiende como la interacción entre los sujetos que hay en una clase, empleando una lengua propia”; Jiménez<sup>394</sup> define la comunicación como “la acción de tornar algo común para obtener un significado, o sea, un proceso que posibilita la comprensión mutua y el establecimiento de relaciones entre individuos o grupos”; para Vygotsky<sup>395</sup>, “la comunicación constituye un proceso complejo y bidireccional, que se da en el marco de relaciones, se expresa a través del lenguaje y regula el comportamiento humano tanto en el plano individual como social”; también, según Marc y Picard, se puede definir como el “conjunto de elementos en interacción en donde toda modificación de uno de ellos afecta las relaciones entre los otros elementos”<sup>396</sup>.

Por otra parte, en un marco en donde la actividad del docente busca el desarrollo cognitivo del estudiante, “la comunicación es una negociación de significados a través de la cual se construye el conocimiento compartido en el aula”<sup>397</sup>. El criterio de comunicación asumido por PISA de una propuesta de Niss<sup>398</sup>, es que la comunicación se entiende como un proceso en que la persona debe entender y hacerse entender en forma oral o escrita. Para este proyecto se entiende la comunicación como una interacción social mediada por el lenguaje y donde el objetivo de cada sujeto es entender y hacerse entender.

.....  
391 Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*.

392 Luis Menezes, “Matemática, Linguagem e comunicação”, en *Atas do Encontro Nacional de Professores de Matemática* (Portimão, Portugal: Escola Superior de Educação de Viseu, 1999).

393 João Pedro da Ponte, “Da formação ao desenvolvimento profissional”, en *Actas do ProfMat 98* (Lisboa: APM, 1988), 27-44.

394 Alfonso Jiménez, *A Pesquisa sobre Comunicação em sala de aula de Matemática. Informe de pesquisa de Pós-doutorado em Educação* (Campinas: UNICAMP, 2011).

395 Lev Vygotsky, *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*, traducido por María Margarita Rotger (México: Ediciones Fausto, 1995).

396 Edmond Marc y Dominique Picard, *La interacción social. Cultura, instituciones y comunicación* (Barcelona: Paidós, 1992).

397 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

398 Mogens Niss, “Competencies and Subject Description”. *Uddanneise*, n.º 9 (1999): 21-29.

## 6.1 Algunos modelos explicativos de la comunicación

De acuerdo como se fue desarrollando la comunicación a lo largo de la historia, se fueron planteando unos modelos que pretendieron explicar sus principales características. Por ello, enseguida se describen el modelo sistémico, el modelo lineal y el modelo orquestal.

**6.1.1 Modelo sistémico (modelo circular o retroactivo).** Fue propuesto por Norbert Winer, en donde utiliza el principio de *feed-back* aplicado a un proyecto de cibernética, y retomado por Bertalanffy<sup>399</sup> en la teoría general de sistemas, en la cual se reconocen los procesos autorreguladores, para ello cuenta con un mecanismo de *feed-back* o bucle de retroacción, el cual permite estabilizar el sistema<sup>400</sup> ya sea en su forma positiva o negativa.

En otras palabras, estos sistemas permiten la homeostasis, entendida como la tendencia del sistema a adaptarse a nuevas condiciones y mantener el equilibrio a pesar de estas. La comunicación vista desde este modelo implica que se asume como un conjunto de sistemas que se interrelacionan dinámicamente de forma intersubjetiva e intrasubjetiva<sup>401</sup>.

**6.1.2 El modelo lineal o telegráfico (modelo matemático).** La teoría matemática de la comunicación fue propuesta por Shanon y Weaver<sup>402</sup> y se basa en la transmisión de contenidos, es decir, es un modelo lineal de comunicación donde se destacan dos protagonistas: el emisor y el receptor; es un modelo unidireccional, es un proceso informativo en

.....  
399 Von Bertalanffy, "An Outline of General System Theory".

400 Dada la diversidad de acepciones acerca del concepto de sistema, para el estudio se asume sistema como "un complejo de elementos en interacción". Ludwig von Bertalanffy, "An Outline of General System Theory", citado por Yves Winkin, *La nueva comunicación* (Barcelona: Kairós, 1981), 15.

401 Fernando Poyatos, *La comunicación no verbal I. Cultura, lenguaje y conversación* (Madrid: Istmo, 1994).

402 Claude Shanon y Warren Weaver, *The Mathematical Theory of Communication* (Champaign, Illinois: University of Illinois Press, 1950).

un solo sentido que, como lo menciona Galeano<sup>403</sup>, el modelo se aplica para cualquier mensaje independiente de su significación; en otras palabras, permite identificar la cantidad de información de un mensaje dependiendo de la capacidad del medio, y se mide la velocidad de transmisión de un mensaje que puede ser disminuida por el ruido. Su esquema está compuesto por cinco elementos: una fuente, un transmisor, un canal, un receptor, un destino, y tiene en cuenta el ruido que causa una perturbación.

**6.1.3 Modelo orquestal de comunicación.** Fue propuesto por un grupo de investigadores de diferentes campos (antropología, sociología, psicología, entre otros) a partir de la observación del comportamiento del ser humano, en oposición al modelo de Shanon y de acuerdo con los criterios de Bateson y Ruesch<sup>404</sup>, basados en los principios de la teoría sistémica, asumiendo el proceso comunicativo con alto índice de complejidad y de múltiples contextos.

Su nombre se deriva de su mejor representación, que sería la imagen de una orquesta en funcionamiento, pues allí se ve una buena correspondencia entre los objetos y los conceptos, asumiendo la comunicación como un intercambio o puesta en común<sup>405</sup>.

La comunicación es un sistema abierto y, como tal, cumple tres principios básicos: el primero es el principio de totalidad, el cual se resume en la siguiente afirmación: el todo es algo más que la suma de las partes, es decir, que el todo posee características que no poseen las partes tomadas por separado. Luego viene el principio de la causalidad circular, en el que cada parte del sistema forma parte de acciones y retroacciones, implicándose unas a otras. El tercero es el principio de regulación, en el que se aclara que la comunicación no puede existir si no está basada en unas normas o reglas, las cuales permiten el equilibrio del sistema<sup>406</sup>.

.....  
403 Ernesto Galeano, *Modelos de comunicación* (Buenos Aires: Ediciones Macchi, 1997).

404 Gregory Bateson y Jurgen Ruesch, *Communication: The Social Matrix of Psychiatry* (New York: Norton, 1968).

405 Winkin, *La nueva comunicación*.

406 Edmond Marc y Dominique Picard, *La interacción social. Cultura, instituciones y comunicación* (Barcelona: Paidós, 1992).

## 6.2 Clases de comunicación

A lo largo del siglo XX, la clasificación de la comunicación en verbal y no verbal, aunque ambigua, es la más usual. La información verbal es considerada como fundamental en los procesos comunicativos, permite identificar elementos e intenciones que de otra forma no podrían ser detectados. Sin embargo, la comunicación no verbal o lenguaje corporal se irradia automática e instintivamente en el sistema nervioso simpático y parasimpático, o como lo expresa un dicho popular: “un gesto vale más que mil palabras”, se cree que allí se plasma la importancia que genera en la comunicación este tipo de información. Esta forma de comunicación se muestra, según Keidar<sup>407</sup>, por su postura, expresiones faciales, movimiento del cuerpo, uso del espacio, contacto físico, ambiente, paralinguaje, apariencia externa y vestido. Estos aspectos deben ser tomados en cuenta por un buen comunicador.

Hay una diversidad de formas de clasificar la comunicación, de acuerdo con distintos criterios y autores. A continuación, se presenta una clasificación tomada de Niño<sup>408</sup>, que ayuda a comprender algunas tipologías de la comunicación.

**Tabla 20.** Clases de comunicación según criterios varios

Criterio	Tipo	Caracterización
Participación del emisor y destinatario	Recíproca	Cambio continuo de roles entre emisor y destinatario
	Unilateral	Se desarrolla en una dirección, no hay cambio de rol
Emisor y destinatario	Interpersonal	Interrelación de persona a persona, casi siempre mediante el lenguaje oral
	Colectiva	Cuando el destinatario es una colectividad, el emisor puede ser una persona o institución

.....  
 407 Daniella Keidar, *La comunicación en el aula. Uso de la inteligencia emocional y la comunicación no verbal en la enseñanza de ética en las escuelas de medicina* (UNESCO, 2005).

408 Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*.

**Tabla 20.** Clases de comunicación según criterios varios (continuación).

Código	Lingüística	El medio es el lenguaje natural apoyado por los códigos paralingüísticos
	Extralingüística	Empleo de códigos distintos al lenguaje
Mensaje	Privada	Es cerrada, no trasciende el ámbito personal
	Pública	Es abierta, se dirige a un público
Estilo	Informal	Espontánea y libre, sin sujeción a patrones
	Formal	Se sujeta a patrones o exigencias, fuera de las del código
Radio de acción	Interna	No trasciende a la comunidad o institución
	Externa	Es abierta, llega a la comunidad o institución
Naturaleza del canal	Oral	Vocal-auditiva
	Audiovisual	Impresiona el oído y la vista
	Visual	Solo impresiona la vista
Extensión del canal	Directa	Implica presencialidad, se da por canales simples
	Indirecta	Hay que utilizar canales complejos, implican cadenas de medios
Dirección	Horizontal	Entre miembros de un mismo rango
	Vertical	Personas de distinto rango, mayor a menor o lo contrario

**Fuente:** Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*.

## 6.3 Semiótica y comunicación

**6.3.1 Semiótica.** Sobre la semiótica no existe una unificación de criterios acerca de si es ciencia o no, ni de la utilidad que brinda a otras disciplinas ni tampoco sobre si debe llamarse semiótica o semiología, ya que la denominación semiótica inicialmente se utilizó en Estados Unidos y el de semiología especialmente en Francia, pero hoy día parece primar el de semiótica.

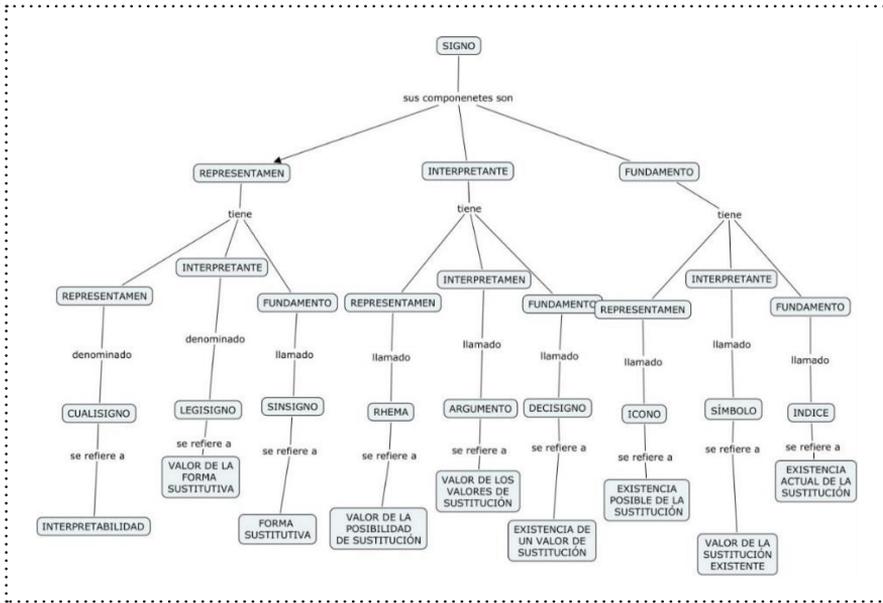
La semiótica viene enfocada hacia la medicina desde la escuela griega de Hipócrates, donde se interpretaban los signos como indicios, señas; sin embargo, fue Peirce en Estados Unidos hacia 1860 quien realmente le dio una codificación. Su pretensión fue construir una ciencia formal de los signos que afectara todo el ámbito humano, ya que su concepción era que todo es signo, pero independiente de la lingüística. En Francia surge la semiología con Saussure, quien la plantea en su *Curso de lingüística general*, optando por una posición contraria a la de Peirce. Hay que aclarar que la semiótica es más general que la lingüística, pues mientras la primera hace alusión a cualquier acción comunicativa, la segunda se centra en los principios que rigen las lenguas naturales.

**6.3.2 Los signos.** Tampoco hay unicidad de criterios respecto al concepto de signo; por ello, aquí se presentan los puntos de vista de Peirce y de Saussure, que son los autores que trabajaron el concepto inicialmente, al igual que Piaget y Vygotsky, que son ampliamente reconocidos en el ámbito pedagógico.

Peirce planteó una definición muy utilizada de signo, como “que es algo que está, para alguien, en el lugar de otra cosa en algún aspecto o disposición”<sup>409</sup>. Para Peirce, el ser humano percibe los signos de las cosas no las cosas, pues piensa y habla a través de signos; la forma de interpretar los signos es a través de otros signos manteniendo de esta manera una iteración recursiva infinita. Para él, los hombres se comunican por medio de signos, lo que considera muy práctico, “la comunicación humana no se basa en una presencia inmediata de las cosas, sino una referencia mediata o remota a una realidad por medio de signos”<sup>410</sup>, es decir, las referencias de las que habla tratan sobre otros signos de esa realidad, pero no de ella misma. Determina tres componentes para los signos: el *representamen*, que corresponde al símbolo como tal; el *interpretante*, que es la entidad o correlación mental que se da respecto al signo utilizado; y el *fundamento*, que es la realidad a la que apunta el signo. Estas componentes se vuelven recursivas, ya que cada una a su vez es un signo y por tanto tiene las tres componentes y así se desarrolla un proceso infinito (Figura 11).

.....  
409 Charles Peirce, *La ciencia de la semiótica* (Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1974).

410 *Ibid.*



**Figura 11.** Mapa conceptual sobre los signos según Peirce, *La ciencia de la semiótica*. **Fuente:** elaboración del autor.

Por la complejidad para el análisis de estos signos, se hace usualmente referencia únicamente a íconos, símbolos e índices. Para Peirce, el símbolo es un signo cuya relación con su fundamento o con la realidad es totalmente arbitraria; aspecto contrario para el ícono, pues su relación con el ente que se representa es casi natural, es decir, tiene una semejanza con lo que representa. Finalmente, el índice (indicio, señal) depende su existencia de aquello que lo origina<sup>411</sup>.

La semiótica de Peirce es una teoría de los signos independiente de la lingüística como ciencia y del lenguaje como fenómeno comunicacional relevante, todos los sistemas de signos son importantes y el lenguaje hablado es tomado como un caso particular. En general, la teoría semiótica de Peirce plantea algunas dificultades, pues ofrece sistemas fragmentados que en algunas ocasiones se contradicen. Retoma los temas con terminología diferente y relacionándolos de maneras distintas.

411 Charles Peirce, *La ciencia de la semiótica* (Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1974).

Saussure, que era de origen suizo, diferenciaba esencialmente entre lengua y palabra. Mientras que a la palabra la consideraba de orden subjetivo, a la lengua la concebía como “un sistema de signos que expresan ideas, comparable a la escritura, al alfabeto de los sordomudos, a los ritos simbólicos, a las formas de cortesía, a las señales militares, etc.”<sup>412</sup>.

Para Saussure, la lengua era el principal sistema de signos y, por ello, planteó la formación de una nueva ciencia, más general que la lingüística, que sería la teoría de los signos. El autor suizo concibió una ciencia que estudia la vida de los signos en el seno de la vida social, que sería parte de la psicología social y, por consiguiente, de la psicología general, a la que llamó semiología (del griego *semeion*, “signo”). Esta ciencia enseña en qué consisten los signos y cuáles son las leyes que los rigen<sup>413</sup>.

Los signos para Saussure son la unión de dos elementos: el concepto (significado) y la imagen acústica asociada (significante); él manifiesta que cuando alguien habla en una lengua desconocida, parece que se estuviera oyendo una serie de sonidos sin significado, que no es posible comprender ni analizar; pero si, por el contrario, se sabe lo que se habla y se pueden atribuir significados, se tendrán signos con significado. Lo anterior implica que el signo posee significado cuando está en un contexto y en relación con otros signos, o sea, es un elemento de un sistema. Las ideas de Saussure fueron continuadas por Hjelmslev<sup>414</sup> y luego por Eco<sup>415</sup>, entre otros.

La semiótica de Vygotsky surge desde el enfoque de la teoría marxista y en el tratamiento del pensamiento y su desarrollo. Para Vygotsky<sup>416</sup>, el signo sirve de mediación entre el individuo y su entorno, es decir, permite pasar de lo interpsicológico —lo cual se desarrolla entre

.....  
412 Ferdinand Saussure, *Cours de linguistique générale* (Paris: Payot, 1995).

413 *Ibid.*

414 Louis Hjelmslev, *Prolegomena to a Theory of Language* (Wisconsin: The University of Wisconsin Press, 1969).

415 Umberto Eco, *A theory of Semiotics* (Indiana: Indiana University Press, 1976).

416 Lev Vygotsky, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Barcelona: Grijalbo, 1988).

personas— a lo intrapsicológico —que permite su internalización—. Afirmó que el gesto va dirigido inicialmente hacia alguien y luego hacia sí mismo.

Vygotsky, al igual que Peirce, adoptó una ontología realista, rompió el esquema tradicional del idealismo y el racionalismo. Para él, el signo es asumido como un medio de transformación de las funciones psíquicas del individuo.

Respecto de los signos, Vygotsky<sup>417</sup> afirmó: “En los primeros trabajos ignorábamos que el significado es propio del signo (...) Partíamos del principio de la constancia del significado (...)”.

Piaget, por su parte, se cuestionó sobre el pensamiento como producto del lenguaje y como consecuencia definió el concepto de función semiótica. Utilizando una terminología matemática, consideró que el lenguaje era una condición necesaria pero no suficiente para el pensamiento<sup>418</sup>. Piaget evidenció la existencia de una inteligencia práctica antes de la aparición del lenguaje. Él definió la función semiótica “como la habilidad de representar algo a través de un signo o un símbolo o cualquier objeto”<sup>419</sup>, la cual inicia cuando se logra establecer una diferencia entre significado y significante, dando la posibilidad de que un solo significante pueda tener varios significados. Piaget siguió la orientación de Saussure, afirmando que “la inteligencia sensoriomotriz se prolonga, a través del signo, en representación conceptual”<sup>420</sup>.

**6.3.3 Los códigos.** Son grupos de signos organizados para la recepción y emisión de mensajes regidos por reglas, que se configuran en sistemas de comunicación; los cuales pueden ser simples cuando manejan una misma clase de signos y complejos cuando se manejan diferentes tipos de signos. Se presenta la clasificación propuesta por Guiraud<sup>421</sup>, en la Tabla 21.

.....  
417 Lev Vygotsky, *Obras escogidas* (Madrid: Visor, 1991).

418 Jean Piaget, *Problemas de psicología genética* (Barcelona: Ariel, 1978).

419 Jean Piaget, *Genetic Epistemology* (New York: W. W. Norton, 1970).

420 Jean Piaget, *La formation du symbole chez l'enfant* (Neuchatel: Delachaux et Niestlé, 1968).

421 Pierre Guiraud, *La semiología*, traducido por M. F. Poyrazian (Buenos Aires: Siglo XXI, 1972), 133.

**Tabla 21.** Clasificación de los códigos propuesta por Guiraud

Tipos	Clasificación	Descripción
Lingüísticos	Lenguaje natural o verbal	Código lingüístico formado por signos y reglas propias de la gramática que se asuma.
		Se desarrolla en una dirección, no hay cambio de rol
Paralingüísticos: están en relación con el lenguaje verbal	Relevos del lenguaje	Señales que puedan representar los sonidos de la lengua: escritura alfabética corriente, braille, morse, lenguaje de mudos.
	Los sustitutos del lenguaje	Signos con los que se pretende sustituir el lenguaje, los cuales tienen sus propias reglas: escritura ideográfica china, jeroglíficos, pinturas y las señales que se usen
	Auxiliares del lenguaje	Pretenden complementar la significación de los signos del lenguaje como la voz, entonación y expresión corporal, entre los últimos están: Kinésico: utilización de la mímica, como gestos, movimientos con las manos, una mirada, etc. Proxémico: silencio entre los interlocutores, movimiento del cuerpo, en general son aportes culturales.
	Lógicos	Instrumentos significativos de las experiencias humanas cognitivas, que permiten la interrelación del hombre con el mundo. Dentro de ellos se encuentran los códigos científicos o epistemológicos, los cuales apoyan la función del lenguaje natural en pro del conocimiento (origen y formación). Ej.: $\int f(x)dx$
Extralingüísticos: autonomía funcional con respecto al lenguaje	Sociales	Se utilizan para significar toda clase de interacción social y para el autor se clasifican en: signos de identidad; signos de cortesía; costumbres, hábitos y utensilios; ritos y reuniones; modas; juegos y diversiones; patrimonio político y cultural. Algunos en sí no son códigos, pero asumen este estatus en la medida en que la cultura les atribuya significación
	Estéticos	Se enfocan a significar la parte estética de la realidad, los cuales se orientan por la expresividad y la creatividad. Entre sus géneros se encuentran la literatura, pintura y música.

**Fuente:** Guiraud, *La semiología*.

## 6.4 La comunicación en el aula de matemáticas

Distintos autores —como Sfard<sup>422</sup>, Jiménez<sup>423</sup>, entre otros— han estudiado el aula como centro de los procesos de enseñanza y aprendizaje, en donde resaltan la comunicación como un elemento importante para el logro exitoso de estos procesos.

Estos autores consideran la matemática como un discurso que puede contribuir al aprendizaje de los estudiantes y al estudio de las regularidades que emergen de ese discurso del profesor y los alumnos en el aula —los patrones de comunicación—, lo que facilita la comprensión de las interacciones que allí ocurren.

## 6.5 Comunicación y tendencias didácticas

La comunicación en la clase de matemáticas puede ser abordada de diferentes maneras, dependiendo de la tendencia didáctica asumida para su interpretación, pues cada una se basa en supuestos epistemológicos diferentes. A continuación, se presenta la comunicación desde una aproximación constructivista, constructivismo sociocultural e interaccionismo simbólico.

***La comunicación desde la tendencia constructivista.*** Según Sierpinska<sup>424</sup>, para Piaget, el aprendizaje necesariamente debe ser activo para que sea efectivo y dependiente de la maduración biológica. En la teoría piagetiana el concepto de esquema desempeña un rol importante, entendido como las estructuras mentales con las que las personas se

.....  
422 Anna Sfard, “Mathematics as form of communicating” ( Proceedings of the 26 PME International Conference, Research Forum 2, 2002).

423 Alfonso Jiménez. *Pesquisa sobre Comunicação em sala de aula de Matemática. Informe de pesquisa de Pós- doutorado em Educação* (Campinas: UNICAMP, 2011).

424 Anna Sierpinska, “Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivism, sociocultural approaches, interactionism”, en *Language and communication in the mathematics classroom*, editado por H. Steinbring, M. G. B. Bussi y A. Sierpinska (Reston, VA: NCTM, 1998), 30-62.

adaptan intelectualmente y organizan el ambiente, mediadas por los procesos de acomodación y equilibración.

Los constructivistas consideran el lenguaje como una expresión del pensamiento y que el aprendizaje de la matemática no se desarrolla a través del lenguaje; así mismo, opinan que la maduración es un prerrequisito para la comunicación. Para Piaget, el habla del que aprende es egocéntrica y por ello no es viable el diálogo. Para los constructivistas el discurso docente es de enseñanza directa, pero los alumnos no pueden aprender a partir de este, ya que no están actuando sobre los objetos de conocimiento. Por lo anterior, desde la tendencia constructivista no es posible compartir el conocimiento matemático a través de la comunicación oral<sup>425</sup>, ya sea entre docente-alumno o alumno- alumno. Se concluye que hay mucha limitación para la comunicación desde esta tendencia.

***La comunicación en la tendencia sociocultural.*** El principal referente de la tendencia sociocultural es el psicólogo Lev Vygotsky, que, basado en las propuestas de Marx, resalta la importancia de las prácticas sociales en el aprendizaje. Esta tendencia permite un planteamiento diferente sobre la comunicación en el aula de matemáticas, ya que, en contraste con Piaget, el desarrollo de la persona se asimila como un proceso de enculturación, entendida como el proceso a través del cual los individuos a lo largo de su vida aprenden los elementos de su cultura de manera consciente o inconsciente, bajo estructuras formales e informales. Se enfatiza la construcción del conocimiento como una interacción mediada por diversas relaciones, pero resaltando que el conocimiento resulta de una acción del sujeto sobre el objeto de conocimiento.

Para Vygotsky, la interacción entre pares o con una persona más experimentada (caso del tutor o del docente) es un factor importante para obtener aprendizajes significativos. Este autor define la zona de desarrollo próximo (ZDP) como la distancia entre el desarrollo real del individuo y su desarrollo potencial, la cual toma importancia, toda vez que las interacciones entre pares o con un individuo más experimentado son el ambiente propicio para la comunicación. El desarrollo en Vygotsky no comprende solo el desarrollo de las estructuras cognitivas abstractas, sino

.....  
425 *Ibid.*

también de conceptos, entendidos como el significado de las palabras a través de las cuales el pensamiento adquiere existencia. Por lo anterior, este autor atribuye mucha importancia a la comunicación oral, resalta la importancia de los conocimientos previos o conceptos espontáneos, entendidos como los conceptos desarrollados en la cultura a la que el individuo pertenece, los cuales pueden relacionarse con los conocimientos científicos transmitidos por la escuela<sup>426</sup>.

Otro contraste de Vygotsky con Piaget es que aquel considera el lenguaje escrito como un factor importante para el desarrollo del pensamiento, donde el desarrollo del individuo precede a la comunicación en el lenguaje escrito. Para este autor, aunque el lenguaje escrito se basa en un sistema de signos escogidos arbitrariamente, es planeado consciente y voluntariamente. Mientras que para Piaget no es adecuado enseñar a los niños el simbolismo matemático, privilegiando sus propias representaciones, Vygotsky considera que una herramienta importante en el aprendizaje es el uso de símbolos ligados a las prácticas culturales<sup>427</sup>.

En la tendencia sociocultural, el lenguaje no es un obstáculo para la comunicación, es un instrumento de esta, pues es un sistema simbólico. Pese a que se valoriza el trabajo en la zona de desarrollo próximo, Vygotsky considera que los significados de los conceptos científicos no pueden ser negociados<sup>428</sup>; en el aula se busca el diálogo entre los saberes previos o espontáneos y los científicos, pero el único considerado negociable es el espontáneo.

A pesar de que la tendencia sociocultural brinda más posibilidades para la comunicación que el constructivismo clásico, se presenta dificultad para articular los conceptos científicos y espontáneos. Para que lo anterior sea posible, se requiere considerar otros elementos que no hacen parte de estos modelos teóricos.

.....  
426 Lev Vygotsky, *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*, traducción de María Margarita Rotger (México: Ediciones Fausto, 1995).

427 *Ibid.*

428 María Bussi, "Verbal interaction in the mathematics classroom: A Vygotskian análisis", en *Language and communication in the mathematics classroom*, editado por H. Steinbring, M. Bussi y A. Sierpínska (Reston, VA: NCTM, 1998), 65-84.

**La comunicación en la tendencia interaccionista.** En esta tendencia la comunicación se da de una forma más interactiva que en el caso constructivista radical, donde las teorías se refieren al sujeto que aprende. En Piaget, el sujeto actúa sobre los objetos de conocimiento para construirlos. En Vygotsky, el sujeto que aprende es ubicado social e históricamente en una cultura, donde también construye su conocimiento, y ese contexto sociocultural es importante para su aprendizaje. Ahora bien, si se quiere pensar en focalizar la comunicación de modo más efectivo, hay que enfocarse en una teoría que les dé más protagonismo a las interacciones sociales en el aprendizaje.

Las interacciones fueron estudiadas en profundidad por Jerome Bruner, quien desafió el behaviorismo, paradigma de aprendizaje a comienzos del siglo XX y que aún tiene fuerte influencia en nuestras aulas. En la teoría de Bruner, el aprendizaje es un proceso activo, en el que la persona, basada en la estructura cognitiva, es decir, en los conocimientos actuales y anteriores, construye nuevos conceptos. Esta estructura cognitiva permite al sujeto ir más allá de la información dada. Para este autor, el aprendizaje es un proceso que ocurre internamente y es mediado cognitivamente, no es un producto directo del ambiente, de las personas o de factores externos al que aprende<sup>429</sup>.

La teoría de Bruner, en contraposición con las de Piaget, fue desarrollada con objetivos educacionales, pues investigó y desarrolló una teoría de la instrucción que sugiere opciones para la acción del educador<sup>430</sup>. Sin embargo, gran parte del trabajo de Bruner está ligado con el desarrollo infantil al igual que le teoría piagetiana. Un aspecto que diferencia las mencionadas teorías es que en el interaccionismo se le concede un rol preponderante a la cultura, al lenguaje y las técnicas que permiten emerger los medios de representación, pues cuanto más rápido una persona tenga acceso a un medio cultural estimulante, más rápido será su desarrollo cognitivo<sup>431</sup>.

.....  
429 Jerome Bruner, *Going beyond the information given* (New York, NY: Norton, 1973).

430 Bruner, *Hacia una teoría de la instrucción*.

431 Ramiro Marques, *A Arte de Ensinar. Dos Clássicos aos Modelos Pedagógicos Contemporâneos* (Lisboa: Plátano Editora, 2001).

Bruner propuso tipificar el desarrollo cognitivo en tres etapas: la de respuestas motoras, hasta los dos años, la de representación icónica, de tres a nueve años, y a partir de los diez años la etapa de representación simbólica. En la primera etapa, el niño representa los acontecimientos pasados por medio de respuestas motoras adecuadas, aprende a través de la manipulación de objetos y busca el desarrollo de automatismos.

En la segunda etapa, la representación icónica se basa en la organización visual de percepciones e imágenes, el niño es capaz de reproducir los objetos, pero es totalmente dependiente de la memoria visual, concreta y específica. La tercera etapa, la representación simbólica, es la forma más elaborada de la representación de la realidad, el niño lo hace a través de un lenguaje simbólico de carácter abstracto. En esta etapa, la persona es capaz de hacer una lectura de la realidad y de transformarla<sup>432</sup>. Lo que llama la atención es que el paso por estas etapas puede ser acelerado mediante la inmersión del sujeto en un medio cultural y lingüístico rico e interesante; también se destaca la importancia que se le asigna a la estructura previa como factor esencial en el aprendizaje.

Según Sierpinska<sup>433</sup>, el interaccionismo da prioridad al lenguaje y a la interacción individuo-cultura; el origen y la validación del conocimiento no está en la observación objetiva del mundo, como piensan los empiristas, o en la racionalidad innata, como dicen los racionalistas, o en las estructuras lógico-matemáticas construidas a través de una secuencia de estadios de desarrollo, como piensan los constructivistas, pero sí en el lenguaje, pues el conocimiento tiene un carácter discursivo. El lenguaje es un instrumento de comunicación, mas no es la comunicación de pensamientos. El profesor de matemáticas, al abordar un concepto, no está comunicándolo a los alumnos, estos igualmente no están comunicando conceptos sociales, histórica y culturalmente construidos.

La comunicación vista desde el ángulo interaccionista está asociada a la escuela de filosofía del lenguaje, cuyos representantes son Wittgenstein, Austin, Searle, Grice y sus seguidores. No existe transmisión de conocimiento porque este no está en la mente del profesor. En el diálogo entre

.....  
432 *Ibid.*

433 Sierpinska, "Three epistemologies, three views of classroom communication".

el profesor y el alumno en el aula surge una interacción y el conocimiento matemático emerge de ella. El conocimiento es construido a través de las palabras, pues son las que indican la acción de los participantes, y el tipo de conocimiento depende de la clase de interacción que se dé, pues el significado está en el discurso. El interaccionismo ve la comunicación como precedente y preparando el terreno para la adquisición del lenguaje<sup>434</sup>.

## 6.6 Comunicación y control del aula

Para Ponte *et al.*<sup>435</sup> la comunicación matemática puede ser abordada desde tres enfoques: como medio de control, como objetivo curricular y para promover aprendizajes.

La comunicación matemática como medio de control puede enfocarse de diferentes maneras, pues es a través de la comunicación, de forma explícita o implícita, como el profesor mantiene o no el control de la situación de clase, para poder percibir el avance o las dificultades de los estudiantes. El discurso del profesor se entiende como una práctica social, en la que se utiliza un sistema lingüístico como medio de comunicación.

En la segunda perspectiva, la comunicación constituye un objetivo curricular de la matemática, pero no todos los profesores valoran este aspecto de la misma forma, ya que algunos dan más importancia a la comunicación oral y otros a la comunicación escrita.

En cuanto a la última perspectiva, la comunicación constituye un medio para promover aprendizajes de la matemática, pues la construcción de significados matemáticos evoluciona por etapas sucesivas, reguladas por el profesor. Sin embargo, para que esto suceda, el alumno debe sentirse en libertad de intervenir y también saberse autorregular para intervenir adecuadamente.

Por medio de preguntas el profesor controla el proceso de comunicación en el aula de matemáticas. En casos estudiados por Ponte *et al.*<sup>436</sup> se

.....  
434 *Ibid.*

435 João Pedro da Ponte, et al. "A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática".

436 *Ibid.*

pudieron identificar diferentes aspectos en los que se resalta el control de la comunicación realizada por el profesor. Hay casos en los cuales el docente privilegia el diálogo con sus estudiantes permitiendo la explicación de sus raciocinios, lo cual genera un ambiente positivo y agradable en la clase sin que el profesor pierda el control de esta; en otros casos, se hace explicación temática con un lenguaje escogido cuidadosamente para no generar indisciplina; otra estrategia utilizada por los docentes para controlar situaciones de indisciplina es mirar a los estudiantes fijamente sin decir nada para que reduzcan el ruido a un nivel aceptable; finalmente, hay casos en los cuales el profesor identifica reglas explícitas del contrato didáctico, por ejemplo, por norma el estudiante tiene que hablar, así que el docente va formulando preguntas para que los alumnos lleguen a donde se quiere.

El control de la comunicación en el aula por parte del profesor no implica que este esté interviniendo todo el tiempo. Significa, de acuerdo con lo expuesto por Ponte *et al.*<sup>437</sup>, que el profesor constituye un ambiente en donde los estudiantes saben qué pueden y qué no pueden hacer, lo cual posibilita que la clase transcurra de forma natural.

En general, para Ponte *et al.*, los profesores plantean la necesidad de controlar lo que pasa en el aula, sin perder de vista que el ambiente de clase debe ser agradable, lo cual permite que los estudiantes se sientan cómodos, de tal manera que puedan participar y plantear sus dudas.

## 6.7 Contrato didáctico, normas sociomatemáticas y comunicación

El aula, y en especial el aula de matemáticas, es un lugar en donde ocurren complejas interacciones entre profesor y alumnos, y la comunicación es uno de los elementos fundamentales de ese medio<sup>438</sup>.

El contrato didáctico establecido es uno de esos elementos decisivos para validar o no las diferentes prácticas de comunicación en el aula, el cual es comprendido como el conjunto de comportamientos del profesor que

.....  
437 *Ibid.*

438 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education*.

es esperado por los alumnos y el conjunto de comportamientos de los alumnos que es esperado por el profesor<sup>439</sup>. Este contrato es un conjunto de reglas especialmente implícitas, las cuales deben ser validadas por cada una de las partes.

La noción de contrato pedagógico establecido entre alumno y profesor con duración de un año, no se refiere a un conocimiento específico, se basa en la premisa de que el profesor está allí para enseñar algo y el estudiante para aprender ese algo, es decir, el uno representa el conocimiento para el otro, pues el conocimiento es el que legitima la relación<sup>440</sup>.

A partir de las ideas de Rousseau y Filloux, Brousseau<sup>441</sup> desarrolla la noción de contrato didáctico, dándole relevancia al conocimiento, pues afirma que con cada nuevo conocimiento el contrato didáctico es renovado, pero este aspecto en la mayoría de los casos pasa inadvertido. Adicionalmente, las reglas del contrato didáctico se hacen evidentes cuando este es trasgredido por alguno de los componentes de la relación didáctica. La comunicación oral entre profesor y estudiante es un aspecto que puede validar o no el contrato didáctico.

Para interpretar las interacciones en el aula de matemáticas, una noción importante, además del contrato didáctico, son las normas sociomatemáticas, las cuales difieren de las normas sociales en que son específicas de los aspectos matemáticos de las actividades de los alumnos; por ejemplo, lo que es considerado matemáticamente diferente, matemáticamente sofisticado, matemáticamente eficaz y matemáticamente elegante<sup>442</sup>. La diferencia matemática se refiere a un modo diferente de solucionar una situación problémica, es decir, se puede ver que las matemáticas son interactivamente construidas.

En las dos nociones, de contrato didáctico y normas sociomatemáticas, el profesor asume un papel central. Cuando el profesor cambia las reglas del contrato didáctico, implica una pérdida de significado en el concepto que

.....  
439 Brousseau, "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques".

440 Janine Filloux, *Du contract pédagogique* (Paris: Dunot, 1974).

441 Guy Brousseau, *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997).

442 Yackel y Cobb, "Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics".

se está trabajando<sup>443</sup>. El autor da nombre a esas rupturas: efecto Topaze, efecto Pigmalion, efecto Jourdain y el uso abusivo de analogías; estas se dan cuando el profesor devuelve al alumno la responsabilidad por la construcción del conocimiento.

## 6.8 Comunicación y discurso matemático

La matemática puede ser interpretada como una forma de comunicación, una forma de discurso, el cual es un indicador del aprendizaje de la matemática; por lo anterior, se asume que el aprendizaje de la persona se origina en la comunicación con otros, donde surge la necesidad de adaptar el modo discursivo al de otras personas<sup>444</sup>. Para esta autora existe más de un tipo de comunicación que puede ser considerada como matemática. Por ello existe la necesidad de considerar diferentes tipos de discurso matemático, especialmente atendiendo el discurso del diario vivir, el de la escuela y el de los matemáticos profesionales<sup>445</sup>.

Otra propiedad importante para considerar en el discurso matemático es la mediación visual, la cual lo distingue de otros tipos de comunicación. La mediación visual ocurre a través de herramientas mediadoras especiales, es decir, son aquellas con las cuales las personas se ayudan para comunicarse; por ejemplo, en el discurso coloquial los mediadores son imágenes de cosas materiales que existen independientes del discurso, mientras que los otros discursos matemáticos envuelven artefactos simbólicos creados justamente para esta forma especial de comunicación, como la notación geométrica o algebraica.

Según Barufi<sup>446</sup>, la herramienta fundamental que tiene el docente para lograr su objetivo no es una tecnología avanzada ni un programa interactivo, sino la presencia del profesor con las características propias de un actor,

.....  
443 Brousseau, “Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques”.

444 Sfard, “Mathematics as form of communicating”.

445 Peggy Rittenhouse, “The teacher’s role in mathematical conversation: Stepping in and stepping out”, en *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning*, editado por M. Lampert y M. L. Blunk (Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1998), 163-189.

446 Maria Cristina Bonomi Barufi, “A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral” (tesis de doctorado, Universidade de São Paulo, 1999).

director de orquesta, pero especialmente con su discurso. Para Lampert y Cobb<sup>447</sup>, el discurso que se da en el aula de matemáticas puede ser clasificado como discurso reflexivo, discurso calculatorio, discurso conceptual, discurso multivocal y *revoicing*.

Dado que la enseñanza de las matemáticas se da a través de la comunicación de ideas matemáticas, hay que tener en cuenta que la forma expedita para realizar esa comunicación es el lenguaje y en el aula de matemáticas se involucran elementos tanto del lenguaje natural como del lenguaje matemático<sup>448</sup>. Así, el lenguaje matemático es definido por Beyer<sup>449</sup> como “el código empleado por una persona para transmitirle a otras personas ideas matemáticas”; define igualmente cuatro dimensiones a las cuales pertenecen los mencionados códigos: dimensión verbal, que está conformada por expresiones del vocabulario matemático y expresiones propias de la matemática; dimensión simbólica, a la que pertenecen los símbolos matemáticos, dimensión gráfica y dimensión de materiales.

Estas dimensiones se intersectan con los niveles matemático, metamatemático y perimatemático. En el nivel matemático se encuentran los mensajes que incluyen objetos matemáticos. El nivel metamatemático comprende todos los mensajes que se pueden clasificar en un nivel que hace referencia a la matemática de la matemática. Y el perimatemático comprende mensajes cuyo objetivo es reforzar los significados de los mensajes de los niveles previos. Lo anterior expone una forma particular de analizar la comunicación en la clase de matemáticas.

## 6.9 Modos de comunicación

Brendefur y Frykholm<sup>450</sup> hacen énfasis en que para poder acceder al conocimiento matemático es necesario tener en cuenta las diversas formas de comunicación tanto verbales como escritas que permiten la interacción en

.....  
447 Lampert y Cobb, “Communication and language”, 237-249.

448 Elcy Bonilla, “La dimensión de la cultura en la investigación en matemática educativa”, en *Metodología para la enseñanza de la matemática*, compilado por L. Gutiérrez (Caracas: M.R. Editores, 1987), 16-33.

449 Walter Beyer, “El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula” (trabajo de grado de maestría no publicado, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, 1994).

450 Brendefur y Frykholm, “Promoting mathematical communication in the classroom”.

el aula; plantean cuatro categorías generales para organizar las diferentes perspectivas que se presentan dada la diversidad de interpretaciones que surgen de documentos como las normas NCTM<sup>451</sup>.

El primer tipo es la *comunicación unidireccional*, la más usual en nuestras instituciones educativas. Los maestros tienden a ser los protagonistas del proceso interaccional en el aula, que solo permiten mínimas oportunidades de participación a los estudiantes, formulando preguntas cerradas, haciendo ver las matemáticas como un ente terminado que debe ser transmitido por el docente y recibido pasivamente por el estudiante<sup>452</sup>, es decir, el profesor habla y el alumno escucha. Este modo comunicativo se asociaría con las tendencias de tipo racionalista<sup>453</sup>, donde se toma el conocimiento como un conjunto de verdades objetivas que pueden ser transmitidas a otros a través del lenguaje verbal mediante una adecuada codificación.

La segunda categoría es la *comunicación contributiva*, la cual se caracteriza porque se privilegia la interacción en el aula de forma participativa, aunque con puntos de discusión muy someros y de poca o ninguna profundidad. Según Cobb *et al.*<sup>454</sup> se presenta en las charlas informales que hacen los estudiantes cuando trabajan temas matemáticos. Brendefur y Frykholm<sup>455</sup> plantean que estas conversaciones son generalmente correctivas, “Así es como lo haces...”, en las que el docente se reserva la autonomía para la validación del conocimiento. También este tipo de comunicación se asociaría con una tendencia racionalista, en que el docente es el trasmisor del conocimiento con algunas pequeñas participaciones por parte de los estudiantes.

.....  
451 National Council of Teachers of Mathematics, *Curriculum and evaluation standards for school mathematics* (Reston, VA: NCTM, 1989).

452 Alba Thompson, “Teachers’ beliefs and conceptions: A synthesis of the research”, en *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, editado por D. A. Grouws (New York, NY: Macmillan, 1992), 127-146.

453 Alfonso Jiménez, *A Pesquisa sobre Comunicação em sala de aula de Matemática*.

454 Paul Cobb et al. “Reflective Discourse and Collective Reflection”. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28, n.º 3 (1997): 258-277.

455 Brendefur y Frykholm, “Promoting mathematical communication in the classroom.

La tercera es la *comunicación reflexiva*, que proviene del discurso reflexivo desarrollado por Cobb *et al.*<sup>456</sup>, en el cual relaciona el discurso del aula caracterizado por aproximar la acción a la reflexión, con el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes. Se basa en compartir ideas, soluciones, estrategias con los compañeros y con el docente, pero acá si hay conversaciones matemáticas, que son asumidas como base para posteriores discusiones, es decir, las acciones de los estudiantes y del docente fruto de las discusiones son objeto, a su vez, de discusión. Según Lampert<sup>457</sup>, este tipo de discurso se presenta cuando los estudiantes comprueban o refutan alguna conjetura planteada por los compañeros o por el docente. Menezes<sup>458</sup> manifiesta que esta clase de comunicación, al igual que la anterior, es dialógica, y resalta la interacción entre docente y alumnos. La comunicación reflexiva se asociaría con una tendencia interpretativista<sup>459</sup>.

La última categoría es la *comunicación instructiva*, la cual se apoya según Brendefur y Frykholm<sup>460</sup> en el trabajo de Steffe y D'Ambrosio<sup>461</sup>. Esta comunicación contiene las interacciones entre los estudiantes y profesores, pero es algo más, integra las ideas de los propios estudiantes; busca con las acciones del docente modificar la matemática de los estudiantes, tanto en el entendimiento matemático de los estudiantes como en comprender los procesos de pensamiento, fortalezas y debilidades de estos. Según Menezes<sup>462</sup>, las decisiones tomadas por el profesor sobre la ejecución de las actividades de enseñanza y aprendizaje son enlazadas con

.....  
456 Cobb et al. "Reflective discourse and collective reflection".

457 Magdalene Lampert, "When the Problem Is not the Question and the Solution Is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching". *American Educational Research Journal*, n.º 27 (1990): 29-63.

458 Luis Menezes, "Matemática, Linguagem e comunicação", en *Atas do Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat, 99)* (Portimão, Portugal: Associação de Professores de Portugal, 1999).

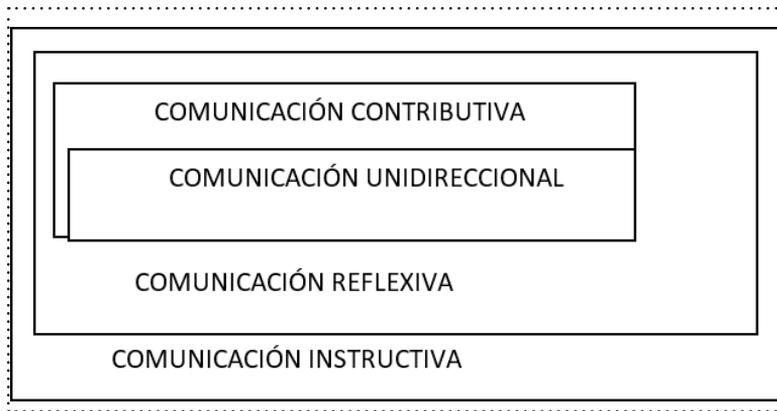
459 Jiménez. *A Pesquisa sobre comunicação*.

460 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom."

461 Leslie Steffe y Beatriz D'Ambrosio, "Toward a Working Model of Constructivist Teaching: A Reaction to Simon", *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 26 (1995): 114-145.

462 Luis Menezes, "Matemática, Linguagem e comunicação", en *Atas do Encontro Nacional de Professores de Matemática* (Portimão, Portugal: Escola Superior de Educação de Viseu, 1999).

el desarrollo de la comprensión de ideas de los alumnos a través de la comunicación. Este último tipo de comunicación se enfoca de una manera diferente que las tres anteriores, mientras que estas describen lo que el docente y los alumnos hacen, la comunicación instructiva describe lo que el profesor y los alumnos hacen para que los primeros tres tipos de comunicación se puedan ver de manera concreta en el aula de matemáticas. Según Jiménez<sup>463</sup>, este tipo de comunicación se presenta cuando en el aula se hace mucho más que compartir información, los estudiantes son introducidos en el discurso matemático.



**Figura 12.** Tipos de comunicación según Brendefur y Frykholm, “Promoting Mathematical Communication...”

**Fuente:** Elaboración propia con base en Brendefur y Frykholm.

En la Figura 12 se quiere expresar lo que Brendefur y Frykholm<sup>464</sup> plantean acerca de las cuatro perspectivas: que cada nivel externo incluye las características de los anteriores.

Para analizar el tipo de comunicación que se presenta en una clase de matemáticas hay que determinar la forma predominante, y al observar varias clases de un mismo docente se puede identificar su estilo comunicativo, es decir, el que mejor describe la forma de enseñanza del profesor.

.....  
463 Jiménez, A *Pesquisa sobre comunicação em sala de aula de Matemática*.

464 Brendefur y Frykholm, “Promoting mathematical communication in the classroom”.

## 6.10 Análisis de la comunicación. Caso Fernando

En este apartado se hace un análisis comparativo de las dos fases en cada subcategoría.

En lo referente a modelos explicativos de comunicación, en la primera fase, el modelo predominante en la clase del profesor Fernando es el modelo lineal o matemático<sup>465</sup>, pues la clase se basa en la transmisión de contenidos, es unidireccional, el profesor es quien propone las tareas y las desarrolla. Aunque en menor escala, se asume el modelo sistémico en lo referente a la retroalimentación<sup>466</sup>, ya que desarrolla ejercicios o problemas con el mismo patrón buscando que los estudiantes mecanicen el tema por trabajar. Igualmente, se tiene en cuenta el modelo orquestal en lo referente a la regulación<sup>467</sup>; se mostró que en estas clases se manejan algunas normas que permiten su buena ejecución.

La clase del profesor se asocia en la segunda fase con el modelo orquestal de comunicación, porque se aplican los tres principios que caracterizan a este modelo: el principio de la totalidad, pues se tuvo en cuenta inicialmente el trabajo en pequeños grupos, con rotación de estudiantes, buscando facilitar la confrontación de saberes, los cuales fueron socializados en el gran grupo al final de la clase. En segundo lugar, el principio de la causalidad circular, puesto que se presentaron acciones y retroacciones, ya que los grupos se implicaron unos a otros en la rotación y la socialización de la regulación también estuvo presente, pues la comunicación no puede existir si no hay normas, algunas de las cuales fueron planteadas por el profesor al inicio de la clase y durante la clase, y otras se asumieron implícitamente por los estudiantes y el profesor<sup>468</sup>.

Como se puede observar, el profesor pasa de un modelo explicativo de la comunicación básicamente lineal, con pocas componentes de los

.....  
465 Shanon y Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*.

466 Von Bertalanffy, "An outline of General System Theory".

467 Edmond Marc y Dominique Picard, *La interacción social. Cultura, instituciones y comunicación* (Barcelona: Paidós, 1992).

468 *Ibid.*

modelos sistémico y orquestal, a un modelo explicativo orquestal, lo cual significa que hay una mejora sustancial en la comunicación de su clase.

Teniendo en cuenta distintos criterios para la clasificación de la comunicación, en la primera fase se observa: de acuerdo con la participación, la comunicación es unilateral, se efectúa en una dirección; es colectiva y abierta, el docente se dirige a un público que son los estudiantes; es lingüística, el medio natural de comunicación es el lenguaje, con apoyo de códigos paralingüísticos; también es extralingüística, se emplean códigos distintos a la lengua natural, como la simbología matemática; es formal, ya que se sujeta a un patrón de clase definido, el tradicional-tecnológico. En cuanto al canal, la comunicación es audiovisual y directa; vertical, ya que se presenta de docente a estudiante, con poca participación de este último<sup>469</sup>.

La segunda fase coincide con la primera en que es colectiva y pública, es lingüística, con códigos paralingüísticos y también es extralingüística. Es informal en el trabajo de grupos y formal en la socialización. Es audiovisual y directa. Sin embargo, difiere en cuanto a la participación, la comunicación es recíproca, se presentan cambios de roles; interpersonal, pues hay permanente interrelación de los estudiantes; básicamente horizontal, ya que priman las interacciones entre estudiantes<sup>470</sup>. Se identifican cambios sustanciales especialmente en lo referente a la participación, se pasó de unilateral a recíproca, y de vertical a horizontal.

Para la clase, se consideró la comunicación como medio de control y como medio para percibir el avance o las dificultades de los estudiantes<sup>471</sup>. El profesor utiliza la comunicación para evitar la indisciplina de sus estudiantes y para facilitarles el aprendizaje de los conceptos matemáticos; este último aspecto también se tuvo en cuenta en la segunda fase. En este orden de ideas, tomar la comunicación como medio de control está implicando un contexto de clase tradicional-tecnológico.

.....  
469 Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*.

470 *Ibid.*

471 João Pedro da Ponte et al. *Histórias de investigações matemáticas* (Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998).

En cuanto al contrato didáctico<sup>472</sup>, en la primera fase, en una sección de clase se identificaron algunas normas de la clase, como las siguientes: la persona que esté escribiendo en el tablero debe hablar; el estudiante debe responder a las preguntas del profesor; el profesor propone los problemas por desarrollar; el profesor es el que resuelve los problemas con pequeños apoyos de los estudiantes; siempre que se termine el desarrollo de un problema, el profesor debe hacer un recuento; el profesor debe contestar las preguntas cortas de los estudiantes. Igualmente, en una sección de clase de la segunda fase se tienen normas como estas: la persona que tiene la última palabra es el docente, es decir, la autoridad, aunque no la esté ejerciendo directamente, la tiene el docente; el profesor no debe responder directamente las preguntas del estudiante sino sobre conclusiones que hayan sacado los estudiantes; el estudiante puede sacar textos y cuadernos para poder contestar el taller. En síntesis, se observa que se cambia de unas normas que se centran básicamente en el docente, a unas que tienen que ver con la relación docente-estudiante y estudiante-estudiante.

En la siguiente tabla se presentan las configuraciones didácticas<sup>473</sup> y a qué modo de comunicación pertenecen<sup>474</sup>.

**Tabla 22.** Modos de comunicación

Config	Clase 1	Clase 2	Clase 3	Clase 4
1	Unidireccional	Unidireccional	Unidireccional	Unidireccional
2	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva
3	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva
4	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva
5	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva

.....  
472 Brousseau, “Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques”.

473 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

474 Brendefur y Frykholm, “Promoting mathematical communication in the classroom”.

6	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva
7	Unidireccional	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva
8	Unidireccional	Unidireccional	Unidireccional	Unidireccional

**Fuente:** elaboración propia.

En la primera fase, se concluye que la comunicación en la clase de Fernando es unidireccional, de modo que las configuraciones de las dos clases son de este tipo de comunicación. Las interacciones planteadas son la actuación del docente, con muy pocas del estudiante y, en tal caso, de forma corta, lo aclara el hecho de que el promedio de participación del estudiante en la clase es del 13.49 %. En la segunda fase (clases tercera y cuarta), como se puede deducir de la tabla anterior, el tipo de comunicación del profesor es reflexiva, ya que el 68.75 % de las interacciones son reflexivas y el resto unidireccionales<sup>475</sup>. Es decir, esta clase es de tipo básicamente dialógico, con momentos magistrales.

El docente Fernando evoluciona de un modo de comunicación unidireccional a reflexivo, de una clase magistral a dialógica<sup>476</sup>; esto quiere decir que resignifica su modo de comunicación y su tipología de clase.

## 6.11 Análisis de la comunicación.

### Caso Juan

Se realiza un análisis comparativo de las dos fases en cada subcategoría.

En lo que se refiere a los modelos explicativos de comunicación, en la primera fase, la clase de Juan se basa en la transmisión de contenidos, es unidireccional, el profesor es quien propone las tareas y las ejecuta, por ello, el modelo explicativo predominante es el lineal<sup>477</sup>. Se hicieron

.....  
475 *Ibid.*

476 Godino, Contreras y Font, Análisis de procesos de instrucción.

477 Shanon y Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*.

ejercicios o problemas con el mismo patrón, buscando que los estudiantes mecanizaran el tema por trabajar, allí estuvo presente el modelo sistémico<sup>478</sup>. Adicionalmente, se mostró que en estas clases se manejan algunas normas que permiten la buena ejecución de estas, es decir, hay regulación, por lo cual y en este aspecto está presente el modelo orquestal<sup>479</sup>.

La clase del profesor en la segunda fase se caracterizó por lo siguiente: inicialmente, el trabajo en pequeños grupos, buscando facilitar la confrontación de saberes, los cuales fueron socializados en el gran grupo en la parte final de la clase. También es de destacar que hubo acciones y retroacciones al presentarse las interacciones entre los estudiantes e igualmente se destacaron normas de clase que permitieron el desarrollo de estas. Por lo anterior, se considera que se trabajó con el modelo orquestal de comunicación y que se aplicaron los tres principios que enfoca este modelo: el principio de la totalidad, el principio de la causalidad circular y el principio de regulación<sup>480</sup>. Como se puede observar, el profesor pasa de un modelo explicativo de la comunicación básicamente lineal, con pocas componentes de los modelos sistémico y orquestal, a un modelo explicativo orquestal, lo cual significa que hay una mejora sustancial en la comunicación de su clase.

En cuanto a la clasificación de la comunicación, en la primera fase, la comunicación se desarrolló en una dirección (unilateral), orientada hacia los estudiantes (colectiva y abierta), el medio de comunicación fue el lenguaje (lingüística), se utilizó simbología matemática (extralingüística); se sujeta a un patrón de clase definido, el tradicional tecnológico (formal), se da de docente a estudiante (vertical) y en cuanto al canal, la comunicación es audiovisual y directa<sup>481</sup>.

La segunda fase se diferencia de la primera en cuanto a la participación, la comunicación es recíproca, se presentaron cambios de roles; interpersonal, pues hay permanente interrelación entre los estudiantes; básicamente horizontal, ya que priman las interacciones entre estudiantes.

.....  
478 Von Bertalanffy, *An outline of General System Theory*.

479 Marc y Picard, *La interacción social*.

480 *Ibid.*

481 Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*.

Se identifican cambios significativos, especialmente en lo referente a la participación, se pasó de unilateral a recíproca, y de vertical a horizontal.

En los signos no se presentaron cambios en las dos fases. Se utilizaron símbolos, con muy pocos casos de íconos<sup>482</sup>; estos símbolos se trabajaron ubicados en un contexto y en relación con otros símbolos<sup>483</sup>. Igualmente, en las clases se utilizaron los códigos lingüísticos, el discurso del docente; los paralingüísticos como sustitutos del lenguaje; y los extralingüísticos lógicos y sociales<sup>484</sup>.

En su primera fase, en la clase el profesor utilizó la comunicación para evitar la indisciplina de sus estudiantes y para facilitarles el aprendizaje de los conceptos matemáticos, esto es, como medio para percibir el avance o las dificultades de los estudiantes y como medio de control<sup>485</sup>. Sin embargo, en la segunda fase, el docente solo utilizó la comunicación para promover aprendizajes<sup>486</sup>, es decir, al ser una clase participativa, el control de la clase se dio de manera natural, ya que los estudiantes se concentraron en discutir y avanzar sobre el desarrollo del tema.

En la fase inicial, de acuerdo con el contrato didáctico<sup>487</sup>, se pudieron identificar algunas normas de la clase: el profesor es el que propone los ejercicios y utiliza el tablero; el profesor debe desarrollar los problemas que propone; el profesor debe explicar cómo se soluciona un determinado tipo de problema; el estudiante debe contestar las preguntas cortas del profesor; el profesor es quien decide qué se debe trabajar en la clase, en este caso el que propone el problema por resolver; siempre que se haga una parte de la construcción hay que hacer *click* para validarla; todos deben comenzar a trabajar al tiempo.

En la segunda fase también se detectaron normas de clase, entre otras las siguientes: el estudiante debe confrontar las ideas de los compañeros; hay

.....  
482 Charles Peirce, *La ciencia de la semiótica* (Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1974).

483 Saussure, *Cours de linguistique générale*.

484 Guirard. *Códigos de comunicación no verbal*.

485 João Pedro da Ponte et al, "A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática".

486 *Ibid.*

487 Brousseau, "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques".

que llegar a consensos entre los miembros del grupo; se debe entregar un informe por cada grupo al finalizar la sesión; hay que ir llevando una ficha para poder entregar el informe al final. Se observa que se cambia de unas normas que se centran básicamente en el docente, a unas que tienen que ver con la relación docente-estudiante y estudiante-estudiante.

En la siguiente tabla se presentan las configuraciones didácticas<sup>488</sup> y a qué modo de comunicación pertenecen<sup>489</sup>.

**Tabla 23.** Modos de comunicación

Configuración	Clase			
	Primera	Segunda	Tercera	Cuarta
1	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva
2	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva
3	Unidireccional	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva
4	Unidireccional	Reflexiva	Reflexiva	Reflexiva
5		Reflexiva	Reflexiva	Reflexiva
6				Reflexiva

**Fuente:** elaboración propia.

Se observa que la mayoría de las configuraciones de las dos primeras clases son de tipo comunicativo unidireccional, las interacciones planteadas todas son de la actuación del docente, con muy pocas del estudiante y, en tal caso, de forma corta, como ya lo habíamos mencionado anteriormente. En la segunda fase (clases tercera y cuarta), como se puede deducir de la tabla anterior, el tipo de comunicación de la clase del profesor es reflexiva<sup>490</sup>. Esto significa que esta clase es de tipo básicamente dialógico, lo cual implica una clase cuyo eje es el estudiante, o sea, no tradicional-tecnológica.

El docente Juan pasa de un modo de comunicación unidireccional a uno reflexivo, pasa de una clase magistral a dialógica<sup>491</sup>; en otras palabras, mejora su modo de comunicación y su tipología de clase.

488 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

489 Brendefur y Frykholm, *Promoting mathematical communication in the classroom*.

490 Brendefur y Frykholm, *Promoting mathematical communication in the classroom*.

491 Godino, Contreras y Font, *Análisis de procesos de instrucción*.

## Conclusiones

Se presentan las principales conclusiones de esta investigación, las cuales provienen de un estudio de caso, específicamente del análisis didáctico a clases de matemáticas de dos profesores que participaron en un grupo de trabajo colaborativo buscando mejorar sus prácticas pedagógicas. Aunque los resultados del estudio de caso no pueden ser generalizados, se considera que pueden brindar elementos para que profesores de matemáticas resignifiquen sus prácticas profesionales, especialmente en lo relacionado con los patrones de interacción comunicativa y la comunicación en sí.

Una de las conclusiones fundamentales de la investigación es que, al finalizar la labor con el grupo de trabajo colaborativo, los docentes lograron resignificar sus prácticas profesionales, pues pasaron de una tipología de clase tradicional-tecnológica (centrada en el docente) a una no tradicional-tecnológica (centrada en el estudiante), es decir, el docente pasó de presentar características unidireccionales a reflexivas. Así mismo, también consiguieron resignificar los patrones de interacción comunicativa, pues en la primera fase se presentaron patrones de interacción comunicativa centrados en el profesor y después pasaron a unos centrados en el estudiante.

Inicialmente, se pretendió *identificar los patrones de interacción comunicativa de algunos profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, a partir del análisis didáctico de sus clases*. Aquí es importante resaltar la forma como se lograron analizar los patrones de interacción comunicativa. En primer lugar, se dividió la clase en configuraciones didácticas como lo asume el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática y posteriormente se analizaron los patrones emergentes de cada configuración, para luego cruzar la información de las diferentes configuraciones.

Con la información analizada se pudo concluir que las dos clases de Juan se distribuyeron en 4 y 5 configuraciones didácticas, lo cual muestra su tendencia a realizar un desarrollo temático prudente para una sesión de clase; mientras que las dos clases de Fernando se distribuyeron en 8 configuraciones didácticas, lo cual señala un desarrollo temático demasiado ambicioso, debido a que son muchas tareas para la sesión de clase. La totalidad de las configuraciones de las clases de los dos docentes fueron catalogadas de tipo magistral<sup>492</sup>. De lo anterior se concluye que se trata de una clase centrada en el docente, es decir, tradicional-tecnológica.

Se determinó una identificación amplia de los patrones de interacción comunicativa de cada docente, los cuales se plasman en las tablas 24 y 25, que muestran interacciones basadas en la actuación del docente; lo que permite plantear una primera aproximación para identificar una clase tradicional tecnológica con base en sus patrones de interacción.

**Tabla 24.** Análisis de interacción de las clases iniciales de Fernando

AB	Descripción	Clase		Total
		1	2	
A	Aclaración del docente, explicación corta	45	15	60
Ag	Agradecimiento del docente a un estudiante	1	0	1
Ant	Aclaración no temática por parte del profesor	4	4	8
Ap	Aprobación de la respuesta dada por el estudiante	7	1	8
Ar	Autorrespuesta del profesor, es decir, pregunta y responde su pregunta	10	6	16
D	Dictado que hace el profesor a los estudiantes de problemas o ejercicios	4	10	14
0De	Discusión entre los estudiantes	4	0	4
E	Explicación amplia del profesor	14	14	28
ia	Intervención argumentada que hace el estudiante	4	0	4
ic	Intervención corta del estudiante, sin que se la haya solicitado el docente	21	2	23
int	Intervención no temática del estudiante	0	1	1
O	El profesor ordena la ejecución de una acción	4	5	9
Pa	Pregunta argumentada por parte del profesor	1	3	4

.....  
492 *Ibid.*

**Tabla 24.** Análisis de interacción de las clases iniciales de Fernando (continuación).

Pc	Pregunta corta del profesor dirigida a todo el grupo	77	34	111
Pc	Pregunta corta por parte del estudiante por iniciativa propia	12	9	21
Pcd	Pregunta corta y directa del profesor	3	1	4
Pm	Preguntas múltiples por parte del profesor	17	0	17
R	Repetición del profesor de lo que expresa el estudiante	11	3	14
Ra	Respuesta argumentada del profesor a una pregunta de un estudiante	1	1	2
Rc	Respuesta corta del profesor ante una pregunta del estudiante	3	6	9
rgc	Respuesta en coro de varios estudiantes, respuesta general corta	7	0	7
ria	Respuesta individual argumentada del estudiante	9	1	10
ric	Respuesta del estudiante, individual y corta	73	29	102
Sc	Silencio corto de menos de un minuto	0	3	3
Sp	Silencio prolongado (más de un minuto)	3	4	7
<b>Total</b>		<b>335</b>	<b>152</b>	<b>487</b>

**Fuente:** elaboración propia.

**Tabla 25.** Análisis de interacción en las dos clases iniciales de Juan

AB	Descripción	C 1	C2	Total
A	Aclaración del docente, explicación corta	20	27	47
An,	Negación de la respuesta dada por el estudiante	1	1	2
Ant	Aclaración no temática por parte del profesor	10	10	20
Ap	Aprobación de la respuesta dada por el estudiante	4	6	10
Ar	Autorrespuesta del profesor, es decir, pregunta y responde su pregunta	26	26	52
As	Asesoría del profesor	0	2	2
D	Dictado que hace el profesor a los estudiantes de problemas o ejercicios	3	1	4
E	Explicación amplia del profesor	22	24	46
e:	Explicación amplia del estudiante	0	7	7
ia	Intervención argumentada que hace el estudiante	1	0	1

**Tabla 25.** Análisis de interacción en las dos clases iniciales de Juan (continuación).

ic	Intervención corta del estudiante, sin que se la haya solicitado el docente	1	1	2
int	Intervención no temática del estudiante	0	1	1
O	El profesor ordena la ejecución de una acción	4	6	10
Pa	Pregunta argumentada por parte del profesor	4	0	4
Pc	Pregunta corta del profesor dirigida a todo el grupo	51	32	83
pc	Pregunta corta por parte del estudiante por iniciativa propia	3	5	8
Pm	Preguntas múltiples por parte del profesor	10	7	17
Pnt	Pregunta no temática del profesor	1	0	1
R	Repetición del profesor de lo que expresa el estudiante	4	1	5
Ra	Respuesta argumentada del profesor a una pregunta de un estudiante	1	2	3
Rc	Respuesta corta del profesor ante una pregunta del estudiante	1	3	4
ria	Respuesta individual argumentada del estudiante	5	0	5
ric	Respuesta del estudiante, individual y corta	28	2	30
tg	Trabajo grupal de los estudiantes	0	18	18
ti	Trabajo individual de los estudiantes	1	0	1
Total		201	182	383

**Fuente:** elaboración propia.

Se identificaron como acciones de interacción comunicativa propias de Fernando y Juan, las siguientes: la pregunta corta por parte del docente, las autorrespuestas del profesor, las aclaraciones y explicaciones cortas del docente, explicación amplia del profesor y respuesta corta por parte del docente. Las anteriores interacciones nuevamente muestran unas clases centradas en el docente, lo que está acorde con los patrones de interacción de diversos autores evidenciados en esta primera fase: patrón de interacción cíclico<sup>493</sup>, diálogo triádico<sup>494</sup>, enfoque de

.....  
493 Lampert y Cobb, "Communication and language".

494 Jay L. Lemke. *Talking science: Language, learning, and values* (Norwood, NJ: Ablex, 1985).

introducción, trabajo y conclusión-revisión<sup>495</sup>, patrón de extracción<sup>496</sup>, del embudo y tradicional<sup>497</sup>, aula univocal<sup>498</sup>, patrón unidireccional<sup>499</sup>, discusión común<sup>500</sup>, exposición tipo conferencia<sup>501</sup>, patrones afirmativo<sup>502</sup> y transmisionista<sup>503</sup>; todos los patrones anteriores se caracterizan porque el eje del proceso es el docente.

El promedio de participación de los estudiantes en las clases de Juan fue del 35.76 %, y en las de Fernando, del 13.49 %; de lo que se puede destacar el protagonismo de los docentes en el desarrollo de estas, es decir, se trata de un aula absolutista<sup>504</sup>, lo cual es propio de una metodología tradicional-tecnológica.

También, al iniciar el estudio se pretendió *identificar elementos de la práctica pedagógica de algunos profesores de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, en especial de la comunicación, susceptibles de ser replanteados*. Es de aclarar que el análisis didáctico se hizo desde los criterios del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, por lo cual se presentan a continuación los resultados de la primera fase, en cuanto a las idoneidades didácticas.

Con la información analizada se pudo concluir que, en la primera clase, coincidieron los dos docentes en que las idoneidades más bajas son la interaccional y la epistémica, mientras que en la segunda es la interaccional; en promedio, las más bajas de Juan son la interaccional y la ecológica, y para Fernando, la interaccional y la mediacional, pero

.....  
495 Mehan, "The structure of classroom events", 59-87.

496 Voigt, "Patterns and routines in classroom interaction".

497 Wood, "Alternative patterns of communication". Wood, "An emerging practice of teaching".

498 Peressini y Knuth, "Why are you talking when you could be listening?".

499 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom.

500 Loska, "Teaching without instruction".

501 Schwarz et al., "Teacher guidance of knowledge construction".

502 Sierpinska y Lerman, "Epistemology of mathematics and of mathematics education".

503 Villalta y Martinic, *Modelos de estudio de la interacción didáctica en la sala de clase*.

504 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique*.

la idoneidad crítica por implementar por parte de los docentes fue la idoneidad interaccional. A continuación, se presentan en detalle los aspectos por desarrollar de acuerdo con cada idoneidad.

**Faceta epistémica.** (Porcentaje de logro: Fernando 59.7 % y Juan 68.2 %). No se propusieron en la clase situaciones que permitieran generar problemas, en este caso el docente planteó todos los problemas para trabajar por parte del estudiante. Igualmente, no se formularon situaciones en las que los alumnos tuvieran que generar o negociar procedimientos, definiciones o proposiciones. Tampoco actividades en las que el alumno argumentara, pues las explicaciones estaban a cargo del docente. Así mismo, no se privilegió el uso de diferentes significados de los objetos identificados en las prácticas matemáticas.

**Faceta cognitiva.** (Porcentaje de logro para los dos docentes: 66.6 %). No se mostró o identificó alguna forma que propusieran los docentes como evaluación de los procesos y prácticas, que señalara entre otros aspectos la comprensión conceptual y proposicional, el avance en las competencias comunicativa, argumentativa y metacognitiva, y la comprensión situacional. Como no hubo evaluación, no se pudo determinar si en ella se tienen en cuenta los distintos niveles de comprensión y competencia por parte del estudiante, al igual que si los resultados de esta evaluación se usan para tomar decisiones.

**Faceta afectiva.** (Porcentaje de logro para los dos docentes: 66.6 %). Aunque en la clase se propone la resolución de problemas, no se tuvieron en cuenta situaciones de contexto que permitieran vislumbrar la utilidad de la matemática en la vida cotidiana y profesional. No se promovió la participación en actividades, la perseverancia, responsabilidad, entre otros.

**Faceta interaccional.** (Porcentaje de logro: Fernando 15.7 % y Juan 29.1 %). No hubo observación sistemática del progreso del estudiante. Toda la responsabilidad de la clase la asumió el docente, por lo tanto, no se detectaron momentos de autonomía del estudiante, el cual tuvo poca participación, lo que no facilitó la comunicación en el aula. No hubo variedad de recursos argumentativos y retóricos, no se les dio mucha importancia a los argumentos de los estudiantes, por lo cual no se llegó a consensos, sino que primó la posición del profesor. No se plantearon situaciones para solucionar conflictos de los estudiantes.

**Faceta mediacional.** (Porcentaje de logro: Fernando 49.95 % y Juan 72.15 %). No se utilizaron materiales manipulativos para facilitar el aprendizaje de los conceptos de la clase. No se usaron formas para contextualizar las definiciones y propiedades de la clase. El tiempo no fue adecuado para el tema, pues esta era muy extenso; no se le dedicó tiempo especial a alguno de los contenidos por considerarlos más importantes o de más difícil comprensión.

**Faceta ecológica.** (Porcentaje de logro: Fernando 60 % y Juan 65 %). No se presentan aspectos que tengan que ver con la innovación, producto de la investigación y la práctica reflexiva. No se vio de forma explícita que los profesores hicieran énfasis en la formación en valores democráticos y el desarrollo del espíritu crítico de los estudiantes. No hay integración de nuevas tecnologías en el proyecto educativo.

Respecto a la comunicación, dado que las clases se basaban fundamentalmente en la pretendida transmisión de contenidos, el protagonismo lo tuvo el docente, quien proponía las tareas y, la mayoría de las veces, también las realizaba. Se considera que el modelo explicativo predominó en las clases de los profesores, esto es, un modelo lineal o matemático<sup>505</sup>. Las clases también tienen parte del modelo sistémico en lo referente a la retroalimentación<sup>506</sup>, puesto que siempre se hacían varios ejercicios o problemas con el mismo patrón, buscando que los estudiantes mecanizaran el tema que se trabajaba. Igualmente, se mostró que en estas clases se manejaban algunas normas que permitían su ejecución usual en cuanto a regulación se refiere, por lo cual se debía tener en cuenta también el modelo orquestal<sup>507</sup>.

Por la participación, la comunicación fue unilateral, ya que se dio en una dirección; colectiva y abierta, pues el docente se dirige a un público que son los estudiantes; lingüística, porque el medio natural de comunicación es el lenguaje con apoyo de códigos paralingüísticos; también es extralingüística, puesto que se emplean códigos distintos a la lengua natural, como la simbología matemática; es formal, pues se sujeta a un patrón de clase definido: el tradicional. En cuanto al canal, la comunicación es

.....  
505 Shanon y Weaver, *The Mathematical Theory of Communication*.

506 Von Bertalanffy, "An outline of General System Theory".

507 Marc y Picard, *La interacción social*.

audiovisual y directa; vertical, porque se da de docente a estudiante, con poca participación del estudiante<sup>508</sup>.

En estas clases se utilizaron especialmente los símbolos y en menor escala los íconos<sup>509</sup>. Los símbolos se manejaron en relación con otros símbolos y ubicados en un contexto; el profesor siempre intentó utilizarlos con significado<sup>510</sup>. Igualmente, se usaron los códigos lingüísticos, como el discurso del docente; los paralingüísticos como sustitutos del lenguaje y los extralingüísticos lógicos y sociales<sup>511</sup>.

En esta primera fase se consideró la comunicación como medio para percibir el avance o las dificultades de los estudiantes y como medio de control<sup>512</sup>. El profesor utilizó la comunicación para evitar la indisciplina de sus estudiantes y para facilitar el aprendizaje de los conceptos matemáticos de los mismos. De acuerdo con el contrato didáctico<sup>513</sup>, en las clases se pudieron identificar algunas normas, como las siguientes: el profesor es quien propone los ejercicios y utiliza el tablero; el profesor debe resolver los problemas que propone; el profesor es quien explica cómo se soluciona un determinado tipo de problema; el estudiante debe contestar las preguntas cortas del profesor; el profesor es quien decide qué se trabaja en la clase, en este caso el que propone el problema por solucionar; todos deben comenzar a trabajar al tiempo. Como estos casos hay varios dentro de las sesiones de clase y se encuentran en su respectivo análisis.

En las clases se analizaron las configuraciones didácticas<sup>514</sup> con las interacciones y, de acuerdo con ellas, a qué modo de comunicación se aproximaban los docentes<sup>515</sup>. Se pudo deducir que la comunicación típica de

.....  
508 Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*.

509 Peirce, *La ciencia de la semiótica*.

510 Saussure, *Cours de linguistique générale*.

511 Guiraud, *La semiología*, 133.

512 João Pedro da Ponte et al. "A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática".

513 Brousseau, "Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques".

514 Font, Planas y Godino, "Modelo para el análisis didáctico en educación matemática".

515 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom".

ellos fue la unidireccional, ya que todas las configuraciones de Fernando y casi todas las de Juan (excepto dos) corresponden a este modo de comunicación. Las interacciones planteadas fueron de la actuación del docente, con muy pocas participaciones del estudiante y, en tal caso, de forma corta; lo anterior se comprueba con el hecho de que el promedio de participación del estudiante en la clase es muy bajo (13.49 % en la clase de Fernando y 35.76 % en la de Juan).

Al finalizar la investigación se *caracterizó la resignificación de las prácticas docentes de los profesores participantes en el grupo colaborativo, mediante el estudio de su participación en el grupo y el análisis didáctico de clases posteriores*. A continuación, se hará un análisis por cada una de las categorías, teniendo en cuenta las clases después de que el docente participó en el grupo de trabajo colaborativo (segunda fase), con el fin de identificar factores que fueron resignificados por el profesor con respecto a sus prácticas en la clase de matemáticas. En primer lugar, se hace referencia al análisis didáctico de clases.

El docente Juan mejoró en todas las idoneidades, las más bajas son la cognitiva, interaccional y mediacional, pero no en un nivel crítico, ya que las tres están valoradas con 75 %. En cuanto al docente Fernando, la idoneidad más baja es la epistémica, seguida por la mediacional, con 70 % y 72 % respectivamente. Se resalta que para los dos docentes se presenta resignificación en todas las idoneidades; especialmente hay que destacar que la idoneidad interaccional dejó de ser punto crítico.

A continuación, se presenta el análisis por idoneidad.

***Idoneidad epistémica.*** En cuanto a las situaciones-problema, los profesores propusieron situaciones de ejercitación y aplicación de conceptos; aunque se plantearon problemas, ellos no permitieron la generación de estos por parte de los estudiantes. Por otra parte, no es usual el uso del contexto en la problematización ni abordar los diferentes significados de los conceptos. Lo anterior se presentó en las dos fases, razón por lo cual quedan como criterios por desarrollar. En los lenguajes, los docentes poseen fortalezas en la adecuación del lenguaje en el nivel universitario y en el uso de diferentes modos de expresión, lograron resignificar lo pertinente a plantear actividades de interpretación y expresión matemática. En las reglas, se hizo un buen planteamiento de definiciones y procedi-

mientos, adaptándolos al nivel universitario; se propusieron situaciones de generación y negociación de conceptos, aspecto que se logró resignificar. En los argumentos se perfeccionó, por cuanto el profesor propuso situaciones donde el alumno tenía que argumentar, como en el trabajo en grupo y la socialización. En lo relativo a las relaciones, quedó como aspecto por mejorar el abordar los distintos significados de los objetos matemáticos, a pesar de que se establecieron relaciones entre ellos.

***Idoneidad cognitiva.*** En cuanto a los conocimientos previos, este factor se considera una fortaleza de los docentes, pues se preocuparon por que los contenidos pretendidos se pudieran alcanzar y que los estudiantes contaran con las bases adecuadas para afrontarlos. En las adaptaciones curriculares a las diferencias individuales, los docentes procuraron el logro de todos los estudiantes e incluyeron actividades de ampliación; en síntesis, es una fortaleza. En lo referente al aprendizaje, los docentes no realizaron evaluaciones explícitas, por lo cual no se pudieron identificar los procesos pertinentes a ello, sin embargo, se resignificó el planteamiento de situaciones que permitieron un desarrollo de las competencias comunicativas y argumentativas.

***Idoneidad afectiva.*** Intereses y necesidades es un factor que tienen que mejorar los docentes, pues, aunque se propusieron tareas que tenían interés para los alumnos, estas no mostraron la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana. En las actitudes, se respetó el proceso de argumentación independiente de la persona; adicionalmente, se dio buena participación al estudiante para facilitar la generación de valores, aspecto que fue resignificado. El factor emociones es una fortaleza para Juan, pero no para Fernando, porque aunque Fernando motivó a los estudiantes promoviendo el agrado por las matemáticas y fomentando su autoestima, no resaltó las cualidades estéticas y la precisión de las matemáticas, lo cual quedó como aspecto por mejorar.

***Idoneidad interaccional.*** En lo referente a la interacción docente-discendente, en las clases de los dos docentes se permitió la participación de los estudiantes en búsqueda de consenso, criterio que se resignificó. En las aulas de Juan se utilizaron diversos recursos retóricos, lo cual no se vio en las de Fernando; por ello, para el primero, este aspecto es una fortaleza, mientras que para Fernando está por mejorar. En lo referente a la

interacción entre alumnos, en las clases de los dos docentes se evitó la exclusión y se dio participación a los estudiantes, favoreciendo el diálogo y la comunicación entre ellos, lo cual significa que esto fue resignificado. En la autonomía, los profesores hicieron la clase participativa, dieron la oportunidad a los estudiantes para que asumieran la responsabilidad de la clase realizando actividades como plantear cuestiones y presentar soluciones, explorar ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar, y usaran una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos. Se resignificó el proceso comunicativo en general y en particular los procesos matemáticos que de ello se derivan.

***Idoneidad mediacional.*** Se resignificó el criterio de utilizar materiales manipulativos que permitieran analizar los objetos matemáticos. El tiempo es uno de los problemas de los docentes, debido a que escogen una temática demasiado ambiciosa, por lo cual el tiempo no es suficiente para la enseñanza pretendida.

***Idoneidad ecológica.*** Los contenidos, su implementación y evaluación son coherentes con las directrices curriculares, contribuyen a la formación socioprofesional de los estudiantes y se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinarios; los criterios anteriores son fortalezas de los docentes. Se planteó una metodología innovadora, que utilizó material manipulativo, lo cual fue resignificado. En la clase de Fernando se promovió la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico, aspecto que se resignificó en la clase de Juan.

Se presentan ahora las conclusiones de los patrones de interacción comunicativa.

Para Juan, sus clases en la segunda fase fueron de 5 y 6 configuraciones didácticas respectivamente, lo cual es ya buen indicativo para una clase de calidad; sin embargo, el tiempo programado no fue adecuado, por lo tanto, quedaron algunas actividades pendientes para sesiones futuras. En cuanto a Fernando, las dos últimas clases del docente se distribuyeron en 8 configuraciones didácticas, sigue mostrando su tendencia a realizar un desarrollo temático demasiado ambicioso, pues son muchas tareas para una sesión de clase.

De las clases de Fernando, el 31 % de las configuraciones fueron consideradas de tipo magistral, las restantes dialógicas; de las clases de Juan, todas las configuraciones fueron consideradas dialógicas<sup>516</sup>. Se infiere que se trata de una clase participativa, en la que se privilegia el diálogo y el consenso, lo cual implica un aula de tipo no tradicional-tecnológica, es decir, se resignificó el tipo de clase de los docentes, al igual que los patrones de interacción comunicativa.

Se determinó una identificación amplia de los patrones de interacción comunicativa de los docentes Fernando y Juan en su segunda etapa. Lo anterior también plantea una primera aproximación para identificar una clase no tradicional-tecnológica con base en sus patrones de interacción.

Se establecieron como acciones de interacción comunicativa clásicas de los docentes después de participar en el grupo de trabajo colaborativo, las siguientes: opinión del estudiante respecto de un tema matemático (o), pregunta corta del estudiante a sus compañeros (pcc), respuesta del estudiante, individual y corta (ric), aclaración no temática del estudiante (ant), pregunta corta del profesor dirigida a todo el grupo (Pc) y lectura de un texto, taller o guía por el estudiante (l). Se observa que todas las interacciones corresponden a acciones del estudiante, excepto la pregunta corta del profesor dirigida a todo el grupo, que se presentó en la etapa de socialización, lo cual implica que el eje de la clase es el estudiante y la clase es no tradicional-tecnológica. Se destaca que existe una resignificación de los patrones de interacción utilizados en las dos fases, pues, mientras que en la primera estaban centrados en el docente, en la segunda están centrados en el estudiante, que fue el resultado de la reflexión de los docentes sobre sus prácticas. Lo anterior se confirma con el contraste de patrones de interacción de otros autores, los cuales se evidenciaron en la segunda fase: patrón de discusión<sup>517</sup>, de focalización<sup>518</sup>, dialógico<sup>519</sup>,

.....  
516 Godino, Contreras y Font, "Análisis de procesos de instrucción".

517 Voigt, "Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms".

518 Wood, "Alternative patterns of communication". Wood, "An emerging practice of teaching".

519 Peressini y Knuth, "Why are you talking when you could be listening?"

contributivo y reflexivo<sup>520</sup>, discusión natural<sup>521</sup>, diálogo crítico<sup>522</sup> y patrón interrogativo<sup>523</sup>; todos los patrones anteriores están centrados en la actuación del estudiante.

El promedio de participación de los estudiantes en las clases fue alto (81.7 % en las de Juan, 81.4 % en las de Fernando), se destaca el protagonismo del estudiante en el desarrollo de estas; es decir, se trata de un aula donde en algunos momentos asume el control de la clase<sup>524</sup>, lo cual es propio de una metodología no tradicional-tecnológica. Lo anterior implica que también se presentó una resignificación en cuanto a la participación del estudiante dentro de la clase.

Enseguida, se presentan específicamente las conclusiones sobre la comunicación.

Las clases de los profesores en la segunda fase se caracterizaron inicialmente por el trabajo en pequeños grupos, buscando facilitar la confrontación de saberes, los cuales fueron socializados en el gran grupo en la parte final. También es de destacar que existieron acciones y retroacciones al presentarse las interacciones entre los estudiantes; igualmente se destacaron normas de clase, que permitieron su desarrollo. Por lo anterior, se considera que se trabajó con el modelo orquestal de comunicación y que se aplicaron los tres principios característicos de este modelo: el principio de la totalidad, el principio de la causalidad circular y el principio de regulación<sup>525</sup>.

Como se puede observar, los profesores pasaron de un modelo explicativo de la comunicación básicamente lineal, con pocas componentes de los modelos sistémico y orquestal, a un modelo explicativo orquestal, lo que significa que hay una mejora sustancial en la comunicación de sus clases.

.....  
520 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom".

521 Loska, "Teaching without instruction".

522 Schwarz et al., "Teacher guidance of knowledge construction".

523 Sierpinska y Lerman, "Epistemology of mathematics and of mathematics education".

524 Woods, *Investigar a arte de ensinar*.

525 Marc y Picard, *La interacción social*.

La segunda fase coincide con la primera en que la comunicación es colectiva y pública, es lingüística con códigos paralingüísticos y también es extralingüística. Es informal en el trabajo de grupos y formal en la socialización. Es audiovisual y directa. Sin embargo, difiere en cuanto a la participación; la comunicación es recíproca, se presentan cambios de roles; es interpersonal, pues hay permanente interrelación entre los estudiantes; es básicamente horizontal, ya que priman las interacciones entre ellos<sup>526</sup>. En estas clases hubo una buena interacción entre el profesor y el alumno, y especialmente entre los alumnos. En este punto vale anotar que el conocimiento matemático surge de la confrontación de criterios. En este sentido también se mejora la comunicación.

Para las clases se consideró la comunicación como medio para percibir el avance o las dificultades de los estudiantes<sup>527</sup>. Igualmente, se tuvieron en cuenta normas que facilitaron el desarrollo de las aulas, pero se observó un cambio, pues al comienzo se tenían normas que se centraban básicamente en el docente y posteriormente se pasó a unas que tenían que ver con la relación docente-estudiante y estudiante-estudiante. En cuanto a los modos de comunicación, el tipo de comunicación de la clase del profesor Fernando es reflexivo, ya que el 68.75 % de las interacciones son reflexivas y el resto unidireccionales; para Juan, todas las interacciones son reflexivas<sup>528</sup>, o sea, que estas clases son dialógicas<sup>529</sup>, lo cual implica un aula que tiene como eje al estudiante, esto es, no tradicional-tecnológica<sup>530</sup>. Los docentes pasaron de un modo de comunicación unidireccional a uno reflexivo; en otras palabras, pasaron de un tipo de clase magistral a dialógico<sup>531</sup> y mejoraron su modo de comunicación y su tipología de clase.

.....  
526 Niño, *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*.

527 João Pedro da Ponte et al. "A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática".

528 Brendefur y Frykholm, "Promoting mathematical communication in the classroom".

529 Godino, Contreras y Font, "Análisis de procesos de instrucción".

530 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

531 Godino, Contreras y Font, "Análisis de procesos de instrucción".

## Bibliografía

- Alrø, Helle y Ole Skovsmose. *Dialogue and Learning in Mathematics Education: Intention, Reflection, Critique*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- Alsina, Ángel y Marta Domingo. “Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13, n.º 1 (2010): 7-32. <https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v13n1/v13n1a2.pdf>
- Amayuela, G., S. Colunga y Nivia Álvarez. “Docencia universitaria y comunicación educativa”. *Contextos Educativos. Revista Digital de Educación y Nuevas Tecnologías*, n.º 36 (2005).
- Arnauld, Antoine y Pierre Nicole. *La lógica o el arte de pensar*. Madrid: Alfaguara, 1987.
- Artzt, Alice. “Developing Problem-solving Behaviors by Assessing Communication in Cooperative Learning Groups”. En *Communication in Mathematics K-12 and Beyond*, editado por P. Elliott y M. Kenney, 116-125. Reston, VA: NCTM, 1996.
- Avendaño Castro, William Rodrigo, César A. Hernández S. y Raúl Prada Núñez. “Uso de las tecnología de información y comunicación como valor pedagógico en tiempos de crisis”. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana* 23, n.º 36 (2021): 135-159. <https://doi.org/10.19053/01227238.11619>.
- Badillo, Edelmira, Lourdes Figueiras, Vicenc Font y Mario Martínez. “Visualización gráfica y análisis comparativo de la práctica matemática en el aula”. *Enseñanza de las Ciencias*, n.º 31 (2013): 207-225. [https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc\\_a2013v31n3/edlc\\_a2013v31n3p207.pdf](https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2013v31n3/edlc_a2013v31n3p207.pdf)

- Baroody, Arthur. *Problem Solving, Reasoning, and Communicating, K-8: Helping Children Think Mathematically*. New York: Macmillan, 1993.
- Barufi, M. C. B. “A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral”. Tesis de doctorado, Universidade de São Paulo, 1999.
- Bateson, Gregory y Jürgen Ruesch. *Communication: The Social Matrix of Psychiatry*. New York: Norton, 1951.
- Bauersfeld, Heinrich. “Theoretical Perspectives on Interaction in the Mathematics Classroom”. En *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, editado por R. Biehler et al. Dordrecht, 133-146. NL: Kluwer Academic Pb., 1994.
- Bertalanffy, Ludwig von. “An Outline of General System Theory”. *British Journal of the Philosophy of Science* 1, n.º 2 (1950): 134-165. <https://doi.org/10.1093/bjps/I.2.134>
- Beyer, Walter. “El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula”. Tesis de maestría no publicada, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, 1994.
- Bishop, A. J. y F. Goffree. “Classroom Organization and Dynamics”. En *Perspectives on Mathematics Education*, editado por B. Christensen, A. G. Howson y M. Otte. Dordrecht: Reidel, 1986.
- Blumer, Herbert. *Symbolic Interactionism: Perspective and Method*. Englewood Cliffs, NJ: PrenticeHall, 1969.
- Blunk, M. L. “Teacher Talk About How to Talk in Small Groups”. En *Talking Mathematics in School: Studies of Teaching and Learning*, editado por M. Lampert y M. L. Blunk, 190-212. Cambridge: University Press, 1998.
- Boavida, Ana María. “A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração”. Tesis de doctorado, Universidade de Lisboa, 2005.
- Boavida, Ana María y Joao Pedro Da Ponte. “Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas”. En *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, 43-55. Lisboa: APM, 2002.

- Bogdan, Robert y Sari Biklen. *Qualitative Research for Education: An Introduction to Theories and Methods*. Boston: Pearson Education, 2007.
- Bonilla, E. “La dimensión de la cultura en la investigación en matemática educativa”. En *Metodología para la enseñanza de la matemática*, compilado por L. Gutiérrez, 16-33. Caracas: M.R. Editores, 1987.
- Breda, Adriana, Vicenç Font y Valderez Lima. “Noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática”. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* 8, n.º 2 (2015): 1-41.
- Brendefur, Jonathan y Jeffrey Frykholm. “Promoting Mathematical Communication in the Classroom: Two Preservice Teacher’s Conceptions and Practices”. *Journal of Mathematics Teacher Education* 3, n.º 2 (2000): 125-153.
- Brousseau, Guy. *À propos d’ingénierie didactique*. Nouvelle-Aquitaine, France: Univ. de Bordeaux I, Irem, 1982.
- Brousseau, Guy. “Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques”. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7, n.º 2 (1986): 33-115.
- Brousseau, Guy. *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- Brousseau, Guy y Michael Otte. “The Fragility of Knowledge”, en *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, editado por A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. van Dormolen, 13-36. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- Bruner, Jerome S. *The Process of Education*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1960.
- Bruner, Jerome S. *Hacia una teoría de la instrucción*. Havana, Cuba: Ediciones Revolucionarias, 1972.
- Bruner, Jerome S. *Going Beyond the Information Given*. New York, NY: Norton, 1973.

- Bruner, Jerome S. *Desarrollo cognitivo y educación*. Madrid: Ediciones Morata, 1988.
- Bruner, Jerome S. *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Traducido por Juan C. Gómez y José L. Linaza. Madrid: Alianza Editorial, 1990.
- Bussi, M., “Verbal Interaction in the Mathematics Classroom: A Vygotskian Analysis”. En *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, editado por H. Steinbring, M. Bussi y A. Sierpiska, 65-84. Reston, VA: NCTM, 1998.
- Campos, Agustín. *Métodos mixtos de investigación: integración de la investigación cualitativa y la investigación cuantitativa*. Bogotá: Editorial Magisterio, 2009.
- César, Margarida. “Interacções na aula de matemática: Um percurso de 20 anos de investigação e reflexão”. En *Interacções na aula de matemática*, editado por C. Monteiro, et al., 13-34. Viseu: Secção de Educação e Matemática da SPCE, 2000.
- Chamorro, Marí. *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación, 2003.
- Chaparro, Arley Zamir y José Francisco Leguizamón. “Interacciones sociales en el patio de recreo que tienen el potencial de apoyar el aprendizaje del concepto de probabilidad”. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* 8, n.º 3 (2015): 8- 24.
- Chevallard, Yves, Mariana Bosch y Josep Gascón. *Estudiar matemáticas; el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE Universidad Autónoma/Horsori, 1997.
- Clarke, David, Christine Keitel y Yoshinori Shimizu. *Mathematics Classrooms in Twelve Countries: The Insider's Perspective*. Rotterdam: Sense Publishers, 2006.
- Cobb, Paul. “Mathematical Learning and Small-Group Interaction: Four Case Studies”. En *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, editado por Paul Cobb y Heinrich Bauersfeld, 25-129. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1995.

- Cobb, Paul, Ada Boufi, Kay McClain y Joy Whitenack “Reflective Discourse and Collective Reflection”. *Journal of Research in Mathematics Education*, 28, n.º 3 (1997): 258–277.
- Cobb, Paul, Jere Confrey y Leona Schauble. “Design Experiments in Educational Research”. *Educational Researcher* 32, n.º 1 (2003): 9–13. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001009>
- Cockcroft, Wilfred. *Las matemáticas si cuentan*. Madrid: Servicio de Publicaciones del M.E.C., 1985.
- Coll, César, Javier Onrubia y Teresa Mauri. “Ayudar a aprender en contextos educativos: el ejercicio de la influencia educativa y el análisis de la enseñanza”. *Revista de Educación*, n.º 346 (2008): 33-70.
- Cornejo, Rodrigo y Jesús M. Redondo. “Variables y factores asociados al aprendizaje escolar. Una discusión desde la investigación actual”. *Estudios Pedagógicos* 33, n.º 2 (2007): 155-175.
- Cubero, Rosario, Mercedes Cubero, Andrés Santamaría, Manuel de La Mata, María José Ignacio y María del Mar Prados. “La educación a través de su discurso. Prácticas educativas y construcción discursiva del conocimiento en el aula”. *Revista de Educación*, n.º 346 (2008): 71-104.
- D’ Amore, Bruno. *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México: Reverté Ediciones, 2005.
- D’Amore, Bruno. *Didáctica de las matemáticas*. Bogotá: Editorial Magisterio, 2006.
- D’Amore, Bruno, Vicenç Font y Juan D. Godino. “La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática”. *Paradigma* 28, n.º 2 (2007): 49-77.
- Davis, Brent. *For the Learning of Mathematics*. Alberta: Publishing Association, 2008.
- Davis, Brent y Moshe Renert. “Profound Understanding of Emergent Mathematics: Broadening the Construct of Teachers’ Disciplinary Knowledge”. *Educational Studies in Mathematics* 82, n.º 2 (2013): 245-265.

- Delamont, Sara. *La interacción didáctica*. Madrid: Cincel, 1984.
- Díaz, M. “Encuesta sobre tendencias didácticas de los docentes”. Trabajo sin publicar, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad de Ciencias, 2010.
- Dirección General de Cultura y Educación. *Diseño curricular para la Educación Secundaria 5° año: orientación comunicación*. La Plata: Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires, 2011.
- Drake, S. y Basaraba, J. “School-University Research Partnership: In Search of the Essence”. En *Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform*, editado por H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Maeers, 13-25. New York, NY: SUNY Press, 1997.
- Driscoll, Marcy y Adriana Vergara. “Nuevas tecnologías y su impacto en la educación del futuro”. *Pensamiento Educativo. Revista de investigación Educativa Latinoamericana* 21, n.º 2 (1997).
- Eco, Umberto. *A Theory of Semiotics*. Indiana: Indiana University Press, 1976.
- Edo, Mequé. “La educación matemática en infantil”. *Educar. Revista de Educación*, n.º 32 (2005): 23-38.
- Edo, Mequé. “Educación matemática versus instrucción matemática en infantil”. *Education* 27, n.º 4 (2005): 458-477.
- Edwards, Derek y Neil Mercer. *El conocimiento compartido: el desarrollo de la comprensión en el aula*. Barcelona: Centro de Publicaciones del MEC, 1988.
- Elliott, John. *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata, 1990.
- Erickson, Frederik. “Qualitative Methods in Research on Teaching”. En *Handbook of Research on Teaching*, editado por M. C. Wittrock. New York, NY: Macmillan, 1989.
- Ernest, Paul. “The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model”. *Journal of Education for Teaching* 15, n.º 1 (1989): 13-33. 10.1080/0260747890150102

- Fernandez, Clea y Makoto Yoshida. *Lesson Study: A Case of a Japanese Approach to Improving Instruction Through School-based Teacher Development*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2004.
- Fernández, Ceneida, Salvador Llinares y Julia Valls. “Learning to Notice Students’ Mathematical Thinking Through On-line Discussions. ZDM”. *Mathematics Education*, 44 (2012): 747-759.
- Filloux, Janine. *Du contract pédagogique*. Paris: Dunot, 1974.
- Fiorentini, Darío. “Learning and Professional Development of Mathematics Teacher in Research Communities”. *Sisyphus. Journal of Education* 1, n.º 3 (2013): 152-181.
- Flanders, Ned. *Análisis de la interacción didáctica*. Madrid: Anaya, 1977.
- Font, Vicenç. *Processos mentals versus competencia*. Barcelona: Departament de Didáctica de los CCEE I de la Matemática de la UB, 2001.
- Font, Vicenç. “Matemáticas y cosas. Una mirada desde la educación matemática”. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* 10, n.º 2 (2003).
- Font, Vicenç y Ángel Contreras. “The Problem of the Particular and Its Relation to the General in Mathematics Education”. *Educational Studies in Mathematics* 69, n.º 1 (2008): 33- 52. 10.1007/ s10649-008-9123-7
- Font, Vicenç, Núria Planas y Juan D. Godino. “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”. *Infancia y Aprendizaje* 33, n.º 1 (2010): 89-105.
- Freudhenthal, Hans. *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1983.
- Galeano, Ernesto. *Modelos de comunicación*. Buenos Aires: Ediciones Macchi, 1997.
- Gallardo, Jesús y José Luis González. “El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática”. X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006.

- Giménez, Joaquin, Vicenç Font y Y. Vanegas. “Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a Research Process”. En *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, editado por C. Margolinas, 581-590. Oxford: ICMI studies, 2013.
- Gimeno, J. *La pedagogía por objetivos: obsesión por la eficiencia*. 6.<sup>a</sup> ed. Madrid: Morata, 1990.
- [http://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID\\_Gimeno\\_Sacristan\\_1\\_Unidad\\_2.pdf](http://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Gimeno_Sacristan_1_Unidad_2.pdf)
- Godino, Juan D. “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática”. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* 22, n.º 2 (2002): 237-284.
- Godino, Juan D., Ángel Contreras y Vicenç Font. “Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática”. *Recherches en Didactiques des Mathematiques* 26, n.º 1 (2006): 39-88.
- Godino, Juan D. y Carmen Batanero. “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14, n.º 3 (1994): 325-355.
- Godino, Juan D., Carmen Batanero y Vicenç Font. “The Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education”. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39, n.º 1 (2007): 127-135.
- Godino, Juan D., Delisa Bencomo, Vicenç Font y Miguel R. Wilhelmi. “Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas”. *Paradigma* 27, n.º 2 (2006): 221-252.
- Godino, Juan D. y Salvador Llinares. “El interaccionismo simbólico en educación matemática”. *Revista Educación Matemática* 12, n.º 1 (2000): 70-92.
- Godino, Juan D. “Indicadores de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME), Recife, Brasil, 2011.

- Godino, Juan D., Vicenç Font, Miguel R. Wilhelmi y Carlos de Castro. “Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico”. *Enseñanza de las Ciencias* 27, n.º 1 (2009): 59-76.
- Goetz, Judith y Margaret LeCompte. *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. New York, NY: Academic Press, 1984.
- Gómez, M. y Álvarez, J. *El trabajo colaborativo como indicador de calidad del espacio europeo de educación superior*. Vol 1. España: Universidad de Alicante, Editorial Marfil, 2011.
- Gómez, Pedro. “Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas” *Revista EMA*, (2002).
- Gómez, Pedro. “Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria”. X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006.
- González, Fredy. *Paradigma en la enseñanza de la matemática*. Maracay: Editorial COPIHER, 1994.
- González, José. “El análisis didáctico matemático como conjunto de medios para comprender y organizar los fenómenos de la educación matemática”. Seminario de Análisis Didáctico I. Universidad de Málaga, s.f. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2264663.pdf>
- Gros, Begoña. *El ordenador invisible*. Barcelona: Gedisa, 2000.
- Guba, Egon e Yvonna Lincoln. “Competing Paradigms in Qualitative Research”. En *Handbook of Qualitative Research*, editado por N. Denzin y Y. Lincoln, 105- 117. London: Sage, 1994.
- Guimarães, María de Fátima. “A fidelidade à origem: O desenvolvimento de uma professora de Matemática”. Tesis de doctorado, Universidade de Lisboa, 2005.
- Pierre Guiraud, *La semiología*, traducido por M. F. Poyrazian. Buenos Aires: Siglo XXI, 1972.
- Guzmán, Miguel de. “Enseñanza de las ciencias y las matemáticas”. *Revista Iberoamericana de Educación*, n.º 43 (2007): 19-58.

- Hernández, Roberto, Carlos Fernández y María Baptista. *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill, 2014.
- Hjelmslev, Louis. *Prolegomena to a Theory of Language*. Wisconsin: The University of Wisconsin Press, 1969.
- Hoffmann, Michael H. G., Johannes Lenhard y Falk Seeger. *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*. New York, USA: Springer, 2005.
- Jakobson, Roman. “La lingüística y la poética”. En *Estilo de/lenguaje*, editado por Thomas Sebeok, 123-173. Madrid: Cátedra, 1974.
- Jiménez, Alfonso. *Quando professores da escola e da universidade se encontram: (re)significação e reciprocidade de saberes*. Campinas: UNICAMP, 2002.
- Jiménez, Alfonso. *Formación de profesores de matemática: aprendizajes recíprocos escuela-universidad*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2005.
- Jiménez, Alfonso. “La naturaleza de la matemática, las concepciones y su influencia en el salón de clase”. *Revista Educación y Ciencia* 13 (2010): 135-150.
- Jiménez, Alfonso. *A Pesquisa sobre Comunicação em sala de aula de Matemática, Informe de pesquisa de Pos-doutorado em Educação*. Campinas: UNICAMP, 2011.
- Jiménez, Alfonso. “Interaccionismo renovado en la clase de matemáticas”. XII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Armenia, 2011.
- Jiménez, Alfonso, N. Suárez y S. Galindo. “La comunicación: eje en la clase de matemáticas”. *Revista Praxis y Saber* 2, n.º 1 (2010): 173–202.
- Keidar, Daniella. *La comunicación en el aula. Uso de la inteligencia emocional y la comunicación no verbal en la enseñanza de ética en las escuelas de medicina*. UNESCO, 2005.
- Lampert, Magdalene. “When the Problem Is not the Question and the Solution Is not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching”. *American Educational Research Journal*, n.º 27 (1990): 29–63.

- Lampert, Magdalene y Paul Cobb. “Communication and Language”. En *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, editado por J. Kilpatrick, W. G. Martin y D. Shifter, 237-249. Reston, VA: NCTM, 2003.
- Leguizamón, José Francisco. “Ideas previas resistentes al cambio conceptual en prerrequisitos del cálculo”. Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional, 1996.
- Leguizamón, José Francisco. “Patrones de interacción comunicativa. Un estudio de caso”. *Praxis y Saber* 8, n.º 16 (2017): 57-82.
- Leguizamón, José Francisco, Olga Yanneth Patiño y Publio Suárez. “Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula”. *Revista Educación Matemática* 27, n.º 3 (2015), 151-174.
- Lemke, Jay L. *Using language in the classroom*. Victoria, Australia: Deakin University Press, 1985.
- Lemke, Jay L. *Talking Science: Language, Learning, and Values*. Norwood, NJ: Ablex, 1990.
- Loska, R. “Teaching Without Instruction: The Neo-Socratic Method”. En *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, editado por H. Steinbring, M. Bartolini Bussi y A. Sierpiska, 235-246. Reston, VA: NCTM, 1998.
- Lüdke, Menga y Marli André. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986.
- Marc, Edmond y Dominique Picard. *La interacción social. Cultura, instituciones y comunicación*. Barcelona: Paidós, 1992.
- Marques, Ramiro. *A Arte de Ensinar. Dos Clássicos aos Modelos Pedagógicos Contemporâneos*. Lisboa: Plátano Editora, 2001.
- Martínez, Mario. “Concepciones sobre la enseñanza de la resta: Un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado”. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona, 2003.
- Mason, John H. *Mathematics Teaching Practice A Guide for University and College Lecturers*. Chichester, UK: Horwood Publishing Series in Mathematics and Applications, 2002.

- Medeiros, K. M. *O contrato didáctico e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula*. Tese de mestrado, Universidade Federal de Pernambuco- UFPE, 1999.
- Mehan, Hugh. “The Structure of Classroom Events and their Consequences for Student Performance”. En *Children in and out of School: Ethnography and Education*, editado por P. Gilmore y A. Glatthorn, 59-87. Washington, DC: Center for Applied Linguistics, 1982.
- Menezes, Luis. “Concepções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta”. Tesis de maestría, Universidade de Lisboa, 1995.
- Menezes, Luis. “Matemática, Linguagem e comunicação”. Atas do Encontro Nacional de Professores de Matemática (ProfMat, 99), Associação de Professores de Portugal, Portimão, Portugal, 1999. <http://www.educ.fc.ul/docentes/jponte>
- Menezes, Luis. “Investigar para ensinar matemática: contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional do professor”. Tesis de doctorado, Universidade de Lisboa, 2004.
- Mercer, Neil. *The Guided Construction of Knowledge. Talk Amongst Teachers and Learners*. Clevedon, UK: Multilingual Matters, 1995.
- Mercer, Neil y K. Littleton. *Dialogue and the Development of Children's Thinking: A Sociocultural Approach*. London, UK: Routledge, 2007.
- Merriam, Sharan B. *Case Study Research in Education. A Qualitative Approach*. San Francisco: Jossey- Bass, 1988.
- Ministerio de Educación Nacional. *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 1998.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. *Estándares en competencias*. Bogotá: MEN, 2013.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 1989.

- National Council of Teachers of Mathematics. *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 1991.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Program for Initial Preparation of K-4 Teachers with an Emphasis in Mathematics*. Reston, VA: NCTM, 1998.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Normas profissionais para o ensino da matemática*. Traducido por A. P. Canavarro et al. Lisboa: APM/IIE, 1994.
- Niño, Víctor. *Los procesos de la comunicación y del lenguaje*. Bogotá: Ecoe Ediciones, 1998.
- Niss, Mogens. "Competencies and Subject Description". *Uddanneise*, n.º 9 (1999): 21-29.
- Olson, M. "Collaboration: An Epistemological Shift". En *Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform*, editado por H. Christiansen et al., 13-25. New York, NY: Suny Press, 1997.
- Panitz, Theodor y Patricia Panitz. "Encouraging the Use of Collaborative Learning in Higher Education". en *Issues Facing International Education*, editado por J.J. Forest. NY, NY: Garland Publishing, 1998.
- Pappus. "Colección matemática". En *Científicos Griegos Tomo II*, editado por F. Vera. Madrid: Aguilar, 1970.
- Peirce, Charles. *La ciencia de la semiótica*. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión, 1974.
- Peressini, Dominic D. y Eric J. Knuth. "Why are You Talking When You Could Be Listening? The Role of Discourse and Reflection in the Professional Development of a Secondary Mathematics Teacher". *Teaching and Teacher Education* 14, n.º 1 (1998): 107-125.
- Piaget, Jean. *La formation du symbole chez l'enfant*. Neuchatel: Delachaux et Niestlé, 1968. Piaget, Jean. *Genetic Epistemology*. New York: W. W. Norton, 1970.
- Piaget, Jean. *Problemas de psicología genética*. Barcelona: Ariel, 1978.

- Pimm, David. *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*. London: Routledge, 1987.
- Pino-Fan, Luis Roberto, Adriana Assis y Walter Castro. "Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic Mathematical Knowledge". *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* 11, n.º 6 (2015): 1429-1456.
- Planas, Núria. "Análisis discursivo de interacciones sociales en un aula de matemáticas multiétnica". *Revista de Educación*, n.º 334 (2004): 59-74.
- Planas, Núria. "El papel del discurso en la construcción del discurso de la práctica matemática". *Cultura y Educación* 17, n.º 1 (2005): 19-34.
- Planas, Núria y Marta Civil. "Working with Mathematics Teachers and Immigrant Students: An Empowerment Perspective". *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2009. 10.1007/s10857-009-9116-1.
- Planas, Núria y Mequé Edo. "Interacción entre discursos en una situación de práctica matemática escolar". *Cultura y Educación* 20, n.º 4 (2008): 441-457.
- Planas, Núria y Núria Iranzo. "Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 12, n.º 2 (2009): 179-213.
- Pochulu, Marcel y Vicenç Font. "Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 14, n.º 3 (2011): 361-394.
- Pochulu, Marcel, Vicenç Font y Mabel Rodríguez. "Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas". *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 19, n.º 1 (2016), 71-98. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33544735004>
- Ponte, Joao Pedro. "O desenvolvimento profissional do professor de matemática". *Educação Matemática* 31 (1994): 9-20.

- Ponte, Joao Pedro. “Saberes profissionais, renovação curricular e prática lectiva”. En *La formación del profesorado de ciencias y matemática en España y Portugal*, editado por L. Branco y V. Marcelo, 187-202. Badajoz: Universidad de Extremadura, 1995.
- Ponte, Joao Pedro. “Da formação ao desenvolvimento profissional”. Actas do ProfMat 98, Lisboa, APM, 1998. [http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos\\_pt.htm](http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/artigos_pt.htm)
- Ponte, Joao Pedro. “Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional”. Conferência no IV Congresso da SPCE, Aveiro, 1998.
- Ponte, Joao Pedro. “Investigar a nossa própria prática”. En *Reflectir e investigar sobre a prática profissional*, 5-28. Lisboa: APM, 2002.
- Ponte, Joao Pedro. “Estudos de caso em educação matemática”. *Bolema*, n.º 25 (2006): 105-132.
- Ponte, Joao Pedro y Luz Manuel Santos. “Práticas lectivas num contexto de reforma curricular”. *Quadrante* 7, n.º 1 (1998): 3-32.
- Ponte, Joao Pedro y Lurdes Serrazina. *Didáctica da Matemática do 1º ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.
- Ponte, Joao Pedro, Ana Boavida, Margarida Graça y Paulo Abrantes. *Didáctica da matemática*. Traducido por Pablo Flores. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário, 1997.
- Ponte, Joao Pedro, A. Guerreiro, H. Cunha, J. Duarte, H. Martinho, C. Martins, L. Menezes, H. Menino, H. Pinto, L. Santos, J.M. Varandas, L. Veía y F. Viseu. “A comunicação nas práticas de jovens professores de Matemática”. *Revista Portuguesa de Educação* 20, n.º 2 (2007): 39-74.
- Ponte, J. P., H. Oliveira, M. H., Cunha y M. I. Segurado. *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.
- Porlán, Rafael. *Constructivismo y escuela. Hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación*. Sevilla: Diada Editorial, 1995.

- Poyatos, Fernando. *La comunicación no verbal I. Cultura, lenguaje y conversación*. Madrid: Istmo, 1994.
- Puig, Luis y Cerdán, Fernando. *Resolución de problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis, 1911.
- Quevedo, Blanca. *Epistemología: problemas de la filosofía de las matemáticas*. Maracaibo: Universidad del Zulia, 1998.
- Ramos, A., “Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales”. Tesis de doctorado, Universitat de Barcelona, 2005.
- Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española en su edición de tricentenario*. RAE. <http://dle.rae.es/?id=2Vga9Gy>
- Rico, Luis. “Los organizadores del currículo de matemáticas”. En *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, editado por L. Rico, 39-59. Barcelona: Ice-Horsori, 1997.
- Rico, Luis. “Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria”. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, (2004).
- Rico, Luis. “El método del análisis didáctico”. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n.º 33 (2013).
- Rittenhouse, P.S. “The Teacher’s Role in Mathematical Conversation: Stepping in and Stepping Out”. En *Talking Mathematics in School: Studies of Teaching and Learning*, editado por M. Lampert y M. L. Blunk, 163-189. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1998.
- Rojas, F. “Instrumentos discursivos para caracterizar la comunicación del profesor en el aula de matemáticas y las posibilidades de participación de estudiantes”. XIII Conferencia interamericana de educación matemática CIAEM, Recife, 2011.
- Rowland, Tim, Peter Huckstep y Anne Thwaites. “Elementary Teachers’ Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi”. *Journal of Mathematics Teacher Education* 8, n.º 3 (2005): 255-281.

- Rubio Gaviria, David y Julián Ernesto Jiménez Guevara. “Constructivismo y tecnologías en educación. Entre la innovación y el aprender a aprender”. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana* 23, n.º 36 (2001): 61-92. <https://doi.org/10.19053/01227238.12854>
- Rubio, Norma. “Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos”. (Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona), 2012.
- Salinas, Jesús. “El aprendizaje colaborativo con los nuevos canales de comunicación”. En *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación*, editado por Julio Cabero, 199-227. Madrid: Síntesis, 2000.
- Santos, Luz Manuel. *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas, 2007.
- Saussure, Ferdinand. *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot, 1995.
- Schwarz, Baruch, Tommy Dreyfus, Nurit Hadas y Rina Hershkowitz. “Teacher Guidance of Knowledge Construction”. 28th Education, PME28. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics, 2004.
- Seckel, María José. “Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática”. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, 2016.
- Sfard, Anna. “Mathematics as form of communicating”. Proceedings of the 26 PME International Conference, Research Forum 2, 2002.
- Sfard, Anna. *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- Shanon, Claude y Warren Weaver. *The Mathematical Theory of Communication*. Champaign, Illinois: University of Illinois Press, 1950.
- Sierpinska, Anna. “Whither Mathematics Education?”. En *Acta del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática*, editado por C. Alsina et al., 21-46. Sevilla: Sociedad. Thales, 1996.

- Sierpinska, Anna. “Three Epistemologies, Three Views of Classroom Communication: Constructivism, Sociocultural Approaches, Interactionism”. En *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, editado por H. Steinbring, M. G. B. Bussi y A. Sierpinska, 30-62. Reston, VA: NCTM, 1998.
- Sierpinska, Anna y Stephen Lerman. “Epistemology of mathematics and of mathematics education”. En *International Handbook of Mathematics Education*, editado por A. J. Bishop et al., 827-876. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publisher, 1996.
- Silva, Bento. *Educação e comunicação*. Braga: Universidade do Minho, 2007.
- Simon, M. “Research on the Development of Mathematics Teacher: The Teacher Development Experiment”. En *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, editado por A. E. Kelly y R. A. Lesh, 335-359. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000.
- Slavin, Robert. *Salas de clase efectivas, escuelas efectivas: plataforma de investigación para una reforma educativa en América latina*. Santiago de Chile: Unesco, 1996.
- Stahnke, Rebekka, Sven Schueler y Bettina Roesken-Winter. “Teachers’ Perception, Interpretation, and Decision-Making: A Systematic Review of Empirical Mathematics Education Research”. *ZDM. Mathematics Education* 48, n.º 1 (2016). 10.1007/s11858-016-0775
- Stake, Robert. “Case Studies”. En *Handbook of Qualitative Research*, editado por N. Denzin e Y. Lincoln, 236-247. London: Sage, 1994.
- Steffe, Leslie P. y Patrick W. Thompson. “Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements”. En *Research Design in Mathematics and Science Education*, editado por R. Lesh y A. E. Kelly, 267-307. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000.
- Steffe, Leslie P. y B. S. D’Ambrosio. “Toward a Working Model of Constructivist Teaching: A Reaction to Simon”. *Journal for Research in Mathematics Education*, n.º 26 (1995): 114-145.

- Steinbring, H., M. Bartolini Bussi y A. Sierpinskyka. *Language and Communication in Mathematics Classroom*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1998.
- Stigler, James, Ronald Gallimore y James Hiebert. "Using Video Surveys to Compare Classrooms and Teaching Across Cultures: Examples and Lessons from the TIMSS Video Studies". *Educational Psychologist*, n.º 35 (2000): 87-100.
- Strauss, Anselm y Juliet Corbin. *Basics of Qualitative Research. Grounded Theory. Procedures and Techniques*. London: Sage, 1990.
- Suárez, L. "Análisis de clases de matemáticas desde el enfoque ontosemiótico". Trabajo de grado de maestría en curso, Universidad Santo Tomás, 2016.
- Sullivan, Peter y Terry Wood. *The International Handbook of Mathematics Teacher Education, Volume 1. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2008.
- Tashakkori, Abbas y Charles Teddlie. *Handbook of Mixed Methods in Social & Behavioral Research*. California: Sage Publications, 2003.
- Thompson, A. G. "Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research". En *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, editado por D. A. Grouws, 127-146. New York, NY: Macmillan, 1992.
- Vargas, H. Análisis didáctico de clases de Física. (Trabajo de grado de maestría en curso, Universidad Santo Tomás), 2016.
- Velasco, Antonio. "Un sistema para el análisis de la interacción en el aula". *Revista Iberoamericana de Educación* 42, n.º 3 (2007): 1-12.
- Vilalba, Rodrigo. *Teoria da comunicação: conceitos básicos*. São Paulo: Editora Ática, 2006.
- Villalta, Marco Antonio. "Una propuesta para el estudio de la interacción didáctica en la sala de clase". *Estudios Pedagógicos* 35, n.º 1 (2009): 221-238.

- Villalta, Marco Antonio y Sergio Martinic. “Modelos de estudio de la interacción didáctica en la sala de clase”. *Investigación y Postgrado*, 24, n.º 2 (2009): 61-76.
- Voigt, Jorg. “Patterns and Routines in Classroom Interaction”. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6, n.º 1 (1985): 69-118.
- Voigt, Jorg. “Negotiation of Mathematical Meaning and Learning Mathematics”. *Educational Studies in Mathematics*, n.º 26 (1994): 275-298.
- Voigt, Jorg. “Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms”. En *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, editado por Paul Cobb y Heinrich Bauersfeld, 163-202. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1995.
- Vygotski, Lev. S. *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo, 1988.
- Vygotski, Lev S. *Obras Escogidas*. Vol. 1. Madrid: Visor, 1991.
- Vygotsky, Lev S. *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. Traducido por María Margarita Rotger. México: Ediciones Fausto, 1995.
- Winkin, Yves. *La nueva comunicación*. Barcelona: Kairós, 1981.
- Webb, Norim M., P. Ender y S. Lewis. “Problem-Solving Strategies and Group Processes in Small Groups”. *American Educational Research Journal* 23 (1986): 243-261.
- Wood, Terry. “Patterns of Interaction and the Culture of the Mathematics Classroom”. En *Perspectives on the Mathematics Classroom*, editado por S. Lerman, 149-168. Dordrecht, NL: Kluwer Academic Publ., 1994.
- Wood, Terry. “An Emerging Practice of Teaching”. En *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*, editado por Paul Cobb y Heinrich Bauersfeld, 203-228. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1995.
- Wood, Terry. “Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes: Funneling or Focusing?” En *Language and Communication in Mathematics Classroom*, editado por

- H. Steinbring, M. G. Bartolini-Bussi y A. Sierpinska, 167-178. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1998.
- Woods, Peter. *Investigar a arte de ensinar*. Traducido por Maria Isabel Real Fernandes de Sá e Maria José Álvarez Martins. Porto: Porto Editora, 1999.
- Yackel, Erna y Paul Cobb. "Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics". *Journal for Research in Mathematics* 27, n.º 4 (1996): 458-477.
- Yin, Robert K. *Case Study Research: Design and Methods*. London: Sage, 1989.
- Zañartu, Luz María. "Aprendizaje colaborativo: una nueva forma de diálogo interpersonal y en red". *Revista Contexto Educativo* 5, n.º 28 (2013). [http://www.deciencias.net/convivir/1.documentacion/D.cooperativo/AColaborativo\\_TIC\\_ACooperativo9p.pdf](http://www.deciencias.net/convivir/1.documentacion/D.cooperativo/AColaborativo_TIC_ACooperativo9p.pdf)
- Zubiría, Julián. *Los modelos pedagógicos: hacia una pedagogía dialogante*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 2006.
- Zubiría, Miguel. "Introducción a la Pedagogía Conceptual". Congreso Latinoamericano de Estudiantes de Psicología, 2007.



Esta obra se terminó de imprimir en noviembre de  
2023 en los talleres de Editorial Jotamar S.A.S.  
Tunja, Boyacá, Colombia.

---

Otros Títulos de la Colección  
Tesis Doctorales  
UPTC - RUDECOLOMBIA

**Tomo 13**

La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas.  
Zagalo Enrique Suárez Aguilar  
2019

**Tomo 14**

Una perspectiva investigativa en la formación de profesores de matemáticas.  
Lida Esperanza Riscanevo Espitia  
2019

**Tomo 15**

Deserción universitaria. Políticas y vivencias de docentes y estudiantes en una universidad colombiana.  
Sara Cristina Guerrero

**Tomo 16**

La educación superior en Colombia y su declive.  
Yurani Stella Ardila Franco

## Colección Tesis Doctorales UPTC-RUDECOLOMBIA, CADE-UPTC N° 17

En este libro se analizan aspectos de la práctica profesional, en especial los patrones de interacción comunicativa de docentes de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC y su resignificación a partir de la reflexión sobre su propia práctica. Para ello se asumieron referentes desde cuatro grandes tópicos: las interacciones; los modelos pedagógicos y didácticos del profesor; el análisis didáctico de una clase, haciendo énfasis en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, el cual fue tomado como referente para este estudio; y la comunicación, entendida como una interacción social mediada por el lenguaje y donde el objetivo de cada sujeto es entender y hacerse entender. Esta investigación corresponde a un estudio mixto, con predominio cualitativo, con enfoque descriptivo interpretativo y metodología estudio de caso. El trabajo de campo consistió en actividades realizadas en un Grupo de Trabajo Colaborativo, compuesto por tres profesores y el investigador, todos de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, donde se reflexionó sobre la práctica pedagógica de los participantes en el Grupo. Se realizó un análisis completo antes, durante y después del trabajo colaborativo, lo cual permitió determinar aspectos de resignificación. Una de las conclusiones fundamentales de la investigación es que, al finalizar la labor con el grupo de trabajo colaborativo, los docentes lograron resignificar sus prácticas profesionales, pues pasaron de una tipología de clase con características unidireccionales a reflexivas. Así mismo, también lograron resignificar los patrones de interacción comunicativa, donde en la primera fase se presentaron patrones centrados en el profesor, para pasar a unos centrados en el estudiante.



**Uptc**<sup>®</sup>  
Universidad Pedagógica y  
Tecnológica de Colombia

ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL  
DE ALTA CALIDAD  
MULTICAMPUS  
RESOLUCIÓN 023655 DE 2021 MEN / 6 AÑOS



**FACULTAD**  
CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN  
UPTC



9 789586 608053



$$\{x_n\} + \{y_n\} \stackrel{df}{=} \{x_n + y_n\}; \beta \quad \{x_n\} \subset \mathbb{R} \quad \downarrow n \rightarrow \infty \quad \{x_n\} + \{y_n\} \stackrel{df}{=} \{x_n + y_n\}; \beta \quad \{x_n\} \subset \mathbb{R} \quad \downarrow n \rightarrow \infty$$
$$\downarrow n \rightarrow \infty, y_n \quad \beta = g; x: \rho \quad n \cdot \sqrt{4} \cdot n \cdot \sqrt{13^n}; \quad \downarrow n \rightarrow \infty, y_n \quad \beta = g; x: \rho \quad n \cdot \sqrt{4} \cdot n \cdot \sqrt{13^n};$$