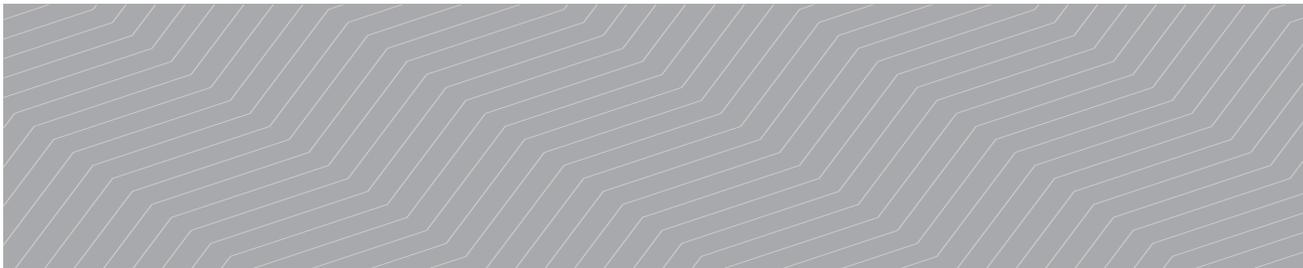




# CAPÍTULO 5.

## ANÁLISIS DIDÁCTICO



Una vez revisada la literatura sobre la interacción y los modelos didácticos del profesor, haciendo énfasis en el tipo de interacción que propicia cada modelo, se requirieron herramientas teóricas para analizar la práctica del profesor y poder catalogarla con tendencia hacia alguno de los modelos didácticos teóricos. En la primera parte de este apartado se revisan diferentes modelos teóricos para examinar la práctica del profesor, se trata de los llamados modelos de análisis didáctico. Por último, se explica que en esta investigación se opta por el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS dada su generalidad y, sobre todo, porque propone dos tipos de análisis específicos (el análisis de las interacciones y de las trayectorias didácticas, y el análisis de la dimensión normativa), que permiten describir y explicar las interacciones en el aula y, además, también propone un tipo de análisis para la valoración de la interacción (idoneidad didáctica). En la segunda parte, se muestran los resultados del análisis didáctico realizado en las clases tanto del caso Fernando como de Juan, teniendo como parámetro los criterios del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS.) Se conceptúa sobre dos clases de la fase uno y dos clases de la fase dos de cada uno de los docentes.

En los últimos diez años en educación matemática se están utilizando procedimientos, conceptos y términos, con significados diferentes de referencia al mismo ente, y cuya utilidad es cada vez más reconocida. Uno de ellos es el análisis didáctico (AD), que ha sido utilizado por algunos autores<sup>308</sup> para señalar “(...) el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos (...)”<sup>309</sup>.

.....  
 308 Hans Freudenthal, *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1983). Luis Puig y Fernando Cerdán, *Resolución de problemas aritméticos escolares* (Madrid: Síntesis, 1983).

309 José Luis González, “El análisis didáctico matemático como conjunto de medios para

Aunque se encuentran en la literatura muchos puntos de vista y diferentes aspectos, se va a considerar para su análisis el enfoque del AD como instrumento para el análisis curricular, en el sentido de diseño, desarrollo del currículo y formación de profesores. Sin embargo, cabe aclarar que el AD también ha sido tomado como metodología de investigación<sup>310</sup>.

## 5.1 Acerca del análisis

Existen dos conceptos cuyos significados van de la mano, pero son complementarios, por un lado, está el análisis y, por otro, la síntesis. Según el *Diccionario de la lengua española* en su edición de tricentenario, el análisis es “distinción y separación de las partes de algo para conocer su composición”, entre otras acepciones; mientras que la síntesis es “la composición de un todo por la reunión de sus partes”. El análisis siempre se ha asociado a la filosofía. Fue Sócrates quién planteó las bases del análisis como lo entendemos en la actualidad; a su vez, Platón adaptó la definición socrática en su método de división y Aristóteles en su concepción de análisis lo tomó como reducción en sus métodos silogísticos.

Igualmente, acerca de los significados de análisis y síntesis se encuentra lo siguiente en el libro VII de la *Colección Matemática* de Pappus,

El análisis es el camino que parte de la cuestión que se busca, suponiéndola conocida, para llegar, por medio de las consecuencias que se deduzcan, a la síntesis de lo que se dio por conocido. Suponiendo obtenido, en efecto, lo que se busca se considera lo que se deriva de ello y lo que le precede, hasta que volviendo sobre los pasos dados, se llega a una cuestión que ya se conoce o pertenece al orden de los principios; y este camino se llama análisis porque es una inversión de la solución, mientras que en la síntesis, por el contrario, suponiendo la cuestión, finalmente, conocida por el análisis, disponiendo sus consecuencias y causas en su orden natural y enlazando unas y otras, se llega a construir lo que se busca; y este método es la síntesis.

---

comprender y organizar los fenómenos de la educación matemática”, (ponencia en Seminario de Análisis Didáctico I. Universidad de Málaga, s.f).

310 Jesús Gallardo y José Luis González, “El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática”, (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

Hay dos clases de análisis, el propio de la investigación, que se llama teórico, y el que aplica para encontrar lo que se propone, y que se llama problemático<sup>311</sup>.

Si se mira con detenimiento la forma de identificación de un objeto matemático, aún hoy día se tienen en cuenta estos aspectos, pues basados en conjeturas se hacen particularizaciones hasta lograr identificar bien el objeto y sus propiedades, es decir, se realiza un proceso de análisis, luego, a partir de lo hecho, se rearma el ente para poderlo explicar de una mejor forma y allí está el proceso de síntesis.

Los trabajos de Descartes al inicio de la revolución científica también muestran los procesos de análisis y síntesis, siempre precediendo el análisis a la síntesis.

Puede denominarse, en general, método al arte de disponer adecuadamente una secuencia de varios pensamientos bien para descubrir la verdad cuando la ignoramos o bien para darla a conocer a otros cuando ya es conocida. Así, hay dos clases de métodos; uno, permite descubrir la verdad y se denomina *análisis* o *método de resolución* y, también puede denominarse *método de invención*; el otro permite hacer entender la verdad a otras personas cuando la verdad ya ha sido descubierta. Este último se denomina *síntesis* o método de *composición*, pudiendo ser también conocido como *método de enseñanza*. El análisis, por lo general, sirve solamente para resolver alguna cuestión de ciencia y no para someter a este método el cuerpo completo de una ciencia<sup>312</sup>.

De acuerdo con lo anterior, los autores plantean una definición de lo que se entiende por método y proponen dos clases de métodos, el de resolución o invención correspondiente al análisis y el de composición o enseñanza que tiene que ver con la síntesis.

.....  
311 Luis Rico, “El método del análisis didáctico”. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n.º 33 (2013), 29.

312 Antoine Arnauld y Pierre Nicole, *La lógica o el arte de pensar* (Madrid: Alfaguara, 1987).

## 5.2 Análisis didáctico en la educación matemática

Las investigaciones sobre las competencias, los conocimientos matemáticos y el desarrollo profesional del profesor han adquirido relevancia internacional en los últimos años y han puesto de manifiesto su complejidad y las limitaciones del conocimiento producido por aquellas<sup>313</sup>. Por lo tanto, existe una necesidad creciente en el campo de la investigación de relacionar los modelos teóricos de la formación docente con la práctica docente, una necesidad que también está presente en los programas de formación y en la enseñanza de los proyectos de innovación.

La necesidad de herramientas teóricas para el análisis de la práctica docente se deriva, por ejemplo, del hecho de que no basta contemplar, en la formación de profesores, oportunidades para que estos reflexionen sobre su práctica, porque necesitan herramientas teóricas que permitan llamar la atención sobre aspectos importantes de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, la investigación ha proporcionado ejemplos para demostrar que estas herramientas teóricas pueden ser enseñadas a maestros y futuros maestros<sup>314</sup>.

Desde diferentes perspectivas de investigación, cada una relacionada directamente con las prácticas docentes, se hace hincapié en la manera en que el conocimiento de los maestros sobre el contenido matemático se pone de manifiesto mediante el empleo de buenas prácticas en sus clases. Entre ellas podemos destacar: 1) las obras de Rowland, Huckstep y Thwaites<sup>315</sup>, y su propuesta de cuatro categorías de conocimiento

313 Peter Sullivan y Terry Wood, *The international handbook of mathematics teacher education, volume 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers, 2008).

314 Joaquín Giménez, Vicenc Font y Marsela Vanegas, “Designing professional tasks for didactical analysis as a research process”, en *Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22*, editado por C. Margolinas (Oxford: ICMI studies, 2013), 581-590. María José Seckel, “Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática”, (tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, 2016).

315 Tim Rowland, Peter Huckstep y Anne Thwaites, “Elementary Teachers’ Mathematics Subject Knowledge: The Knowledge Quartet and the Case of Naomi”. *Journal of Mathematics Teacher Education* 8, n.º 3 (2005): 255-281.

(fundación, transformación, conexión y contingencia) que caracterizan el conocimiento de la enseñanza activa del maestro; 2) los aportes derivados de la Lesson Study Methodology<sup>316</sup>, que incluyen un modelo de análisis colaborativo empleado por los profesores para planificar, implementar, observar y reflexionar sobre sus clases de matemáticas; 3) las contribuciones de Davis<sup>317</sup> en el marco de su propuesta de estudio conceptual, que combina elementos de los dos enfoques relevantes para la investigación de la educación matemática: “concept analysis” y “lesson study”. Cada una de estas propuestas se centra comúnmente en la naturaleza específica concedida a los conocimientos matemáticos para la enseñanza. Este enfoque tiene ventajas sobre otras investigaciones de carácter más general, que diferencian el conocimiento didáctico general del conocimiento matemático como disciplina científica.

Las investigaciones anteriormente mencionadas tienen como objetivo común mejorar las prácticas matemáticas en el aula, centrándose en la complejidad *a priori* de los objetos matemáticos, o más bien en el conocimiento matemático del maestro que está en juego en el manejo de los complejos objetos matemáticos. Este es un propósito compartido por otros enfoques orientados al conocimiento profesional, cuyo objetivo es reconocer las acciones que permiten al profesor de matemáticas desarrollar con éxito su profesión. Por ejemplo, Mason<sup>318</sup> destaca la importancia de la competencia referida como “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes. Dicha competencia permite que el profesor de matemáticas vea contextos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que puede diferenciarse de la forma en que un profesor que no es de matemáticas vería la

.....  
316 Clea Fernández y Makoto Yoshida, *Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development* (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2004).

317 Brent Davis, *For the Learning of Mathematics* (Alberta: FLM Publishing Association, 2008). Brent Davis y Moshe renert, “Profound Understanding of Emergent Mathematics: Broadening the Construct of Teachers’ Disciplinary Knowledge”. *Educational Studies in Mathematics* 82, n.º 2 (2013): 245-265.

318 John Mason, *Mathematics Teaching Practice A Guide for University and College Lecturers*. Chichester, UK: Horwood Publishing Series in Mathematics and Applications, 2002, 29.

situación<sup>319</sup>. Del mismo modo, otros autores hacen hincapié en la importancia de la competencia en el análisis didáctico<sup>320</sup>, que permiten al profesor identificar y organizar los múltiples significados del concepto que desea enseñar y, además, seleccionar esos significados para ser estudiados en los procesos de instrucción.

Para poder realizar sistemáticamente un análisis didáctico que permita la descripción, explicación y evaluación de los procesos de instrucción, es necesario contar con herramientas especialmente diseñadas para hacer frente a la complejidad tanto de las matemáticas como de los procesos de instrucción. Para abordar esta necesidad, la investigación en la educación matemática ha proporcionado marcos teóricos específicos que ofrecen herramientas de análisis. El enfoque ontosemiótico (EOS) de la enseñanza de matemáticas es uno de estos. A continuación, se desarrolla con más detalle el modelo de análisis didáctico de Rico y el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS.

## 5.3 Modelo de análisis didáctico del Grupo PNA de la Universidad de Granada

El concepto de AD desde una primera panorámica es planteado por Rico<sup>321</sup> y desarrollado entre otros por Gómez<sup>322</sup>; se enfoca en el nivel local de planificación, es decir, se da relevancia a la planeación considerada como uno de los aspectos importantes en el trabajo del profesor no solo de matemáticas, sino también de otras áreas del currículo, asumida como una competencia indispensable del profesor de

.....  
319 Ceneida Fernández, Salvador Llinares y Julia Valls, “Learning to Notice Students’ Mathematical Thinking Through On-line Discussions. ZDM”. *Mathematics Education*, 44 (2012): 747-759.

320 Pedro Gómez, “Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria”, (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

321 Luis Rico, “Los organizadores del currículo de matemáticas”, en *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, editado por L. Rico (Barcelona: Ice-Horsori, 1997), 39-59.

322 Pedro Gómez, *Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas*. Revista EMA, 2006.

matemáticas<sup>323</sup>. El docente debe poder desarrollar distintos tipos de planeación y tener en cuenta que para planear una unidad didáctica o una sesión de clase se debe basar en la exploración y estructuración de los diversos significados del ente matemático, resultado de la negociación y construcción de estos, apoyado en los organizadores del currículo planteados por Rico<sup>324</sup>.

La propuesta de Gómez<sup>325</sup> es analizar el significado de un concepto matemático desde tres dimensiones: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología. La estructura conceptual alude a las relaciones del concepto con otros conceptos, dentro de la estructura matemática del propio concepto; los sistemas de representación son las formas como se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos; la fenomenología abarca los contextos, situaciones o problemas que podrían dar sentido al concepto.

Según Gómez<sup>326</sup>, el profesor puede basarse en el análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación para planificar una unidad didáctica o una sesión de clase. La identificación y organización de los diferentes significados de un concepto por parte del profesor tiene que ver con el análisis de contenido. El análisis cognitivo hace referencia a la descripción de las hipótesis que asume el docente relativas a la manera como los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento a partir de las tareas y actividades de enseñanza y aprendizaje propuestas. En el análisis de instrucción, el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que serán las actividades mencionadas anteriormente. El análisis de actuación alude a la identificación por parte del docente de las capacidades que los estudiantes han desarrollado, al igual que de las dificultades manifestadas por estos.

---

323 Luis Rico, "Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria". *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, (2004).

324 Luis Rico, *Los organizadores del currículo de matemáticas*, en *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, editado por L. Rico (Barcelona: Ice-Horsori, 1997), 39-59.

325 Pedro Gómez, "Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria" (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

326 Gómez, "Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas".

Gómez<sup>327</sup> define el análisis didáctico como “un procedimiento cíclico que incluye estos cuatro análisis, atiende a los condicionantes del contexto e identifica las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto”.

A continuación, describiremos el ciclo de AC del que habla Gómez<sup>328</sup>. Basado en los resultados obtenidos en el análisis de actuación del ciclo anterior y teniendo en cuenta los contextos social, educativo e institucional, el profesor determina el contenido por tratar y los objetivos de aprendizaje que se desean lograr. Luego, el profesor inicia la planeación con el análisis de contenido, donde el resultado debe ser identificar y organizar los distintos significados del concepto asumido como foco de la instrucción, lo que es la base del análisis cognitivo, y la realización de este último sirve como fundamento para la revisión del análisis de contenido. Igual sucede con el análisis de instrucción, pues su formulación depende de los resultados de los análisis de contenido y cognitivo, y también al realizarse surge la necesidad de revisar los anteriores análisis.

Lo dicho se traduce en lo siguiente: al realizar el análisis cognitivo, el profesor selecciona unos significados del objeto, y teniéndolos en cuenta al igual que los objetivos que se ha fijado con anterioridad, determina las capacidades que se prospecta desarrollar en los estudiantes; a su vez, plantea hipótesis acerca de las posibles vías por las que se puede producir su aprendizaje cuando aborden las tareas. Con esta información, el profesor diseña, selecciona y evalúa las tareas. Por lo anterior, las tareas que componen las actividades deben estar acordes con los resultados de los tres análisis mencionados. Por otra parte, evaluar las tareas puede llevar al profesor a un nuevo ciclo de análisis antes de escoger las tareas definitivas. Finalmente, el profesor aplica estas actividades, y en esta etapa analiza las actuaciones de los estudiantes, que le proveen información que sirve como punto de inicio para un nuevo ciclo. Según Gómez<sup>329</sup>, el conocimiento didáctico es el conocimiento que el profesor pone en juego durante este proceso.

.....  
327 Pedro Gómez, “Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria” (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

328 *Ibid.*

329 *Ibid.*

Otro aspecto que resalta Gómez<sup>330</sup> es que el eje articulador de los análisis es una noción, y los organizadores del currículo expresan el significado técnico de esa noción. A cada noción le asignan un significado teórico, uno técnico y uno práctico. Lo anterior hace una analogía con las componentes de una competencia: ser, conocer y saber hacer<sup>331</sup>.

**Tabla 11.** Elementos y relaciones en la exploración de un concepto

Concepto matemático	Elementos	Objetos	Casos particulares de un concepto. Conforman la extensión del concepto.
		Conceptos	Predicados que son saturados por los objetos. Conforman estructuras matemáticas.
		Estructuras matemáticas	Conformadas por conceptos.
	Relaciones	Horizontales	Relaciones entre representaciones.
		Verticales	Relaciones entre los tres tipos de elementos.

**Fuente:** Gómez, *Análisis didáctico en la formación inicial*.

Según Gómez<sup>332</sup>, para la exploración de un concepto en matemáticas escolares se deben tener en cuenta los siguientes elementos y relaciones:

**5.3.1 Análisis didáctico en relación con las capacidades del profesor de matemáticas.**

Gómez<sup>333</sup> propone una forma para identificar las capacidades que contribuyen al desarrollo de la competencia de planificación del profesor de matemáticas, basada en la noción de análisis didáctico, lo cual se plantea en el siguiente cuadro:

.....  
330 Ministerio de Educación Nacional de Colombia, *Estándares en competencias* (Bogotá: MEN, 1998).

331 Gómez, "Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria" (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

332 *Ibid.*

333 Gómez, "Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria" (ponencia en X Simposio de la SEIEM, Huesca, 2006).

**Tabla 12.** Análisis didáctico propuesto por el PNA

Análisis	Capacidades
	Recabar la información necesaria que le permita identificar los significados del concepto
	Organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación
<b>Análisis de Contenido</b>	Seleccionar, a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, al tener en cuenta las condiciones de los contextos sociales, educativos e institucionales
	Seleccionar los significados relevantes para la instrucción al atender las condiciones del contexto del aula (que surgen de la información que se obtiene del análisis cognitivo)
	Las competencias que se quieren desarrollar
	Los focos de interés que se han de tratar
	Las capacidades que los escolares tienen antes de la instrucción
<b>Análisis cognitivo</b>	Las capacidades que se espera que los escolares desarrollen con motivo de la instrucción (que contribuyen a las competencias previamente identificadas y que delimitan los significados por tratar)
<b>Establecer</b>	Las tareas que conforman la instrucción (cuyo establecimiento involucra las capacidades que se enumeran en el análisis de instrucción)
	Las dificultades que los escolares pueden encontrar al realizar esas tareas
	Las hipótesis sobre los caminos por los que se puede desarrollar el aprendizaje
<b>Análisis de instrucción</b>	Identificar las capacidades que se pueden poner en juego cuando los escolares la aborden.
	Identificar las competencias a las que esas capacidades, con la tarea en cuestión, pueden contribuir
<b>Analizar una tarea con el propósito de</b>	Establecer los posibles caminos de aprendizaje que los escolares pueden recorrer cuando emprendan la tarea
	Evaluar la pertinencia de la tarea a partir de esta información
<b>Análisis de actuación</b>	Comparar las previsiones que se hicieron en la planificación con lo que sucedió cuando esa planificación se puso en práctica en el aula
	Establecer los logros y deficiencias de la planificación (actividades y tareas) en su puesta en práctica en el aula
	Caracterizar el aprendizaje de los escolares con motivo de la ejecución de las actividades
	Producir información relevante para una nueva planificación.

**Fuente:** Gómez, *Análisis didáctico en la formación inicial*.

## 5.4 Algunos aspectos teóricos del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática

El enfoque ontosemiótico (EOS) surge con la formulación ontológica de objetos matemáticos que tienen en cuenta tres criterios de la matemática: resolución de problemas como actividad socialmente compartida, lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado. El grupo de Godino y Font toma como concepto básico la situación problemática y define práctica, objeto y significado, resaltando la génesis institucional y personal del conocimiento matemático.

**Sistemas de prácticas referentes a tipos de problemas.** Se mencionó como punto de partida la resolución de problemas, por lo cual es importante plantear algunas apreciaciones de lo que se entiende por problema. Según Hoc<sup>334</sup>, “un problema es la representación de un sistema cognitivo construido a partir de una tarea, sin disponer inmediatamente de un procedimiento admisible para alcanzar el objetivo”. Otra postura por mencionar es la de Schoenfeld<sup>335</sup>, para el cual “un problema es una tarea difícil para el individuo que está tratando de hacerla”. Como se puede deducir de las posiciones anteriores, un problema es una encrucijada en la que hace falta ingenio para poder salir de ella. Para el caso matemático se pueden aplicar las anteriores definiciones con la particularidad de que las situaciones se refieren a entes matemáticos, lo que sí es claro es que solucionar un problema matemático va más allá de aplicar algoritmos y realizar operaciones.

Para facilitar la resolución de problemas matemáticos y el planteamiento de su teoría, Godino y Batanero<sup>336</sup> proponen algunas definiciones que se presentan en la Tabla 13.

.....  
334 María Luisa Chamorro, *Didáctica de las matemáticas para primaria* (Madrid: Pearson Educación, 2003).

335 Manuel Santos, *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos* (México: Trillas, 2007).

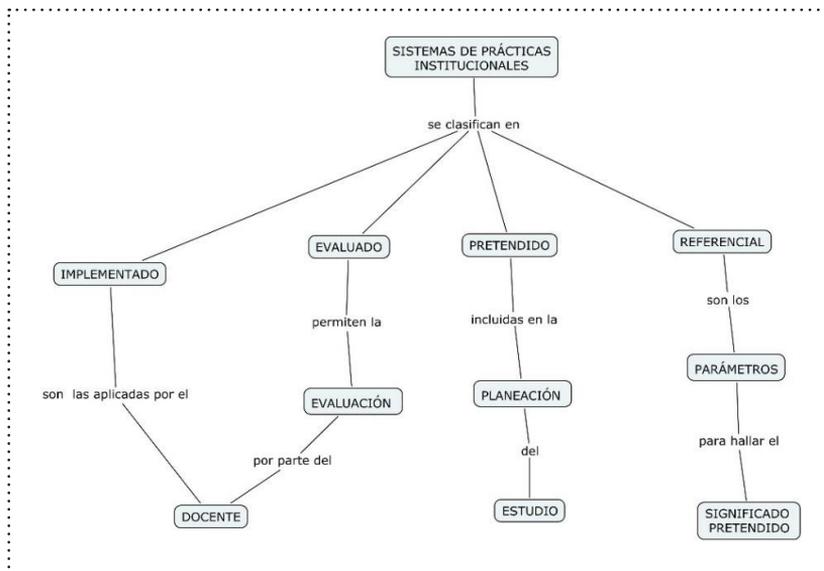
336 Juan Godino y Carmen Batanero, “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14, n.º 3 (1994): 325-355.

**Tabla 13.** Definiciones básicas del enfoque ontosemiótico

Práctica matemática	Se denomina práctica matemática toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.
Prácticas personales	Las prácticas personales pueden ser acciones observables o no realizadas por una persona con los mismos fines que la práctica matemática.
Práctica significativa	Ahora bien, es importante destacar que no siempre con la práctica matemática se logra el objetivo, sino que en algunas ocasiones se fracasa, por lo que Godino consideró indispensable plantear lo siguiente: Una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.
Institución	Una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.
Institución matemática	Se denomina institución matemática (M) a las personas que pertenecen a una institución enfocada a la resolución de nuevos problemas matemáticos. Son, por tanto, los productores del “saber matemático”. Otras instituciones alrededor de las situaciones matemáticas son los “utilizadores” del saber matemático (matemáticos aplicados) y los “enseñantes” del saber matemático (la escuela del saber matemático).
Sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas. PI(C).	Está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I. Representaremos a este sistema por la notación PI(C). Como ejemplos de estas prácticas sociales que son observables están: descripciones de problemas o situaciones, representaciones simbólicas, definiciones de objetos, enunciados de proposiciones y procedimientos que son invariantes características del campo de problemas, argumentaciones, entre otras.
Sistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas. Pp(C)	Está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Se representa este sistema por la notación Pp(C)

**Fuente:** Godino, Batanero y Font, “The Onto-semiotic Approach...”

En los sistemas institucionales, Godino, Batanero y Font<sup>337</sup> proponen la siguiente tipología:



**Figura 5.** Mapa conceptual sobre sistemas de prácticas institucionales

**Fuente:** elaboración propia

Global: Todos los sistemas de prácticas personales que el sujeto manifieste respecto a un objeto.

Logrado: Todas las prácticas manifestadas que están acordes con el punto de vista institucional. Hay que tener en cuenta los significados iniciales y finales de los estudiantes.

Declarado: Todas las prácticas realizadas por el sujeto, teniendo en cuenta las pruebas institucionalmente propuestas (teniendo en cuenta las correctas y las incorrectas).

**Figura 6.** Sistemas de prácticas personales

**Fuente:** Godino, Batanero y Font, “The Onto-semiotic Approach...”

337 Godino, Batanero y Font, “The onto-semiotic approach to research in mathematics education”.

En el enfoque ontosemiótico se busca una adaptación progresiva de los significados personales a los institucionales. La enseñanza es vista como la participación del estudiante en la comunidad de prácticas que valida los significados institucionales. El aprendizaje consiste en la apropiación de los significados institucionales por parte de los estudiantes.

## 5.5 Emergencia de los objetos matemáticos

En el enfoque ontosemiótico los objetos matemáticos son entes abstractos que surgen de los sistemas de prácticas ligadas a la solución de una tipología de problemas matemáticos<sup>338</sup>. Como sistemas, emergen las propiedades holísticas que hacen que el todo sea algo más que la suma de las partes y que se interrelacionan con todos los elementos del sistema<sup>339</sup>. Dado que el objeto es relativo respecto de las prácticas de cada institución, las cuales cambian de una institución a otra, Godino y Batanero<sup>340</sup> definen:

**5.5.1 Objeto institucional OI.** Es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de  $P_1(C)$ . Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de  $O_1$ . De acuerdo con lo anterior el objeto institucional es considerado conocimiento objetivo, pues fue culturalmente asumido por una institución y es el objeto de referencia para los objetos personales. Se aclara que puede ser distinto para instituciones diferentes. Los objetos personales son un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de  $P_p(C)$ ; es considerado subjetivo, ya que va emergiendo progresivamente y acorde con las experiencias y aprendizajes del sujeto.

.....  
338 Un problema es una encrucijada en la que hace falta ingenio para poder salir de ella. Para el caso matemático, las situaciones se refieren a entes matemáticos.

339 Se asume sistema como “un complejo de elementos en interacción”, según Ludwig von Bertalanffy, “An Outline of General System Theory”. *British Journal of the Philosophy of Science* 1, n.º 2 (1950), citado por Yves Winkin, *La nueva comunicación* (Barcelona: Kairós, 1981), 15.

340 Godino y Batanero, “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”.

Para el tratamiento de los objetos emergentes, Godino y Batanero<sup>341</sup> proponen una dicotomía para clasificarlos: los que se pueden determinar directamente en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, teoremas, corolarios) y los que emergen del contexto de los anteriores, de una acción (ver, operar, relacionar) sobre ellos.

**5.5.2 Objetos matemáticos primarios.** Son los primeros en la dicotomía, los que, a su vez, para facilitar su tratamiento, son clasificados así:

- Elementos lingüísticos. Son los términos, expresiones, notaciones, gráficos, los cuales son expresados por cualquiera de los giros lingüísticos: escrito, oral, gestual.
- Situaciones-problemas. Planteamientos en los que se indica la exigencia de un desarrollo.
- Conceptos-definición. Claramente identificables dentro de los textos, ya que de alguna manera describen el objeto emergente.
- Proposiciones. Determinan relaciones entre los conceptos.
- Procedimientos. Identifican las operaciones entre los conceptos: cálculos, operaciones, desarrollos algorítmicos.
- Argumentos. Expresiones que permiten explicar los problemas, conceptos, proposiciones o procedimientos.

Los seis tipos de entidades primarias surgen como contraposición a las entidades típicas (conceptuales y procedimentales), que no pueden describir en su totalidad los objetos intervinientes y emergentes del trabajo matemático. Los autores del enfoque ontosemiótico asumen que considerar una entidad como primaria es un aspecto relativo, ya que en cierta forma es dependiente de los juegos del lenguaje en que está inmersa. Los objetos matemáticos están relacionados entre sí formando configuraciones (redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y sus interrelaciones), las cuales, a su vez, pueden ser socioepistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales)<sup>342</sup>.

.....  
341 *Ibid.*

342 *Ibid.*

**5.5.3 Objetos matemáticos secundarios.** Es importante para la identificación de los objetos contextuales el significado de estos, entendiéndose que el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos<sup>343</sup>, por ello y basados en estos autores, se define a continuación el significado de los objetos institucionales y personales:

El significado de un objeto institucional OI es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge un OI en un momento dado. Simbólicamente, para un tiempo  $t$  y una institución  $I$ :  $S(OI) = PI(C)$ . Si  $I=M$ , se habla del significado matemático de un objeto.

En cuanto a los objetos personales, se considera que el significado de un objeto personal  $Op$  es el sistema de prácticas personales de una persona  $p$  para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto  $Op$  en un momento dado:  $S(Op) = Pp(C)$ . Dos aspectos contextuales que enmarcan los significados de los objetos matemáticos son la noción de institución y el juego de lenguaje; a partir de estos, los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas y los emergentes de estas pueden ser clasificados como<sup>344</sup>:

- Personal-institucional. Son objetos considerados institucionales si son compartidos dentro de una institución, mientras que son objetos personales si son propios del sujeto.
- Ostensivo-no ostensivo. De acuerdo con el juego del lenguaje, se considera que un objeto es ostensivo cuando se puede mostrar a otras personas; es decir, es de dominio público, y si no lo es, se les puede mostrar a través de sus ostensivos asociados (símbolos, gráficos, formas de notación, entre otros). Para el caso, los objetos institucionales y personales son no ostensivos, ya que están en el pensamiento de las personas.
- Expresión-contenido. Los objetos matemáticos solo se pueden comprender como sujetos relacionados mediante funciones semióticas, entendidas como relaciones implicativas, donde el antecedente es una expresión o lo que se quiere significar y el consecuente es un contenido o significado.

.....  
343 *Ibid.*

344 Godino, “Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática”.

- Extensivo-intensivo. Se resalta la utilización de un objeto como un caso particular o como un caso general.
- Unitario-sistémico. Dependiendo de la situación, los objetos matemáticos son asumidos como sistemas (deben descomponerse para su estudio en sus partes retomando sus relaciones y operaciones) o como objetos unitarios. Ejemplo, los números naturales.

Según Font<sup>345</sup>, solo hay dos maneras de entender la comprensión, como proceso mental y como competencia; criterios epistemológicos claramente opuestos. Los enfoques cognitivos en didáctica de la matemática la entienden como proceso mental, en el EOS se asume como competencia. La comprensión también se expresa en términos de funciones semióticas, ya que el conocimiento se entiende como el contenido de funciones semióticas.

## 5.6 Formas de análisis del desarrollo de una clase de matemáticas

Para este apartado se utilizó como referencia el ejemplo de análisis de una clase no significativa propuesto por Pochulu y Font<sup>346</sup>. Se pretendió clasificar a la clase y al profesor de acuerdo con las tipologías planteadas en el capítulo anterior: la propuesta por Ernest<sup>347</sup>, que clasifica al docente como entrenador, tecnólogo, humanista, progresista o crítico, y la clasificación de Porlán complementada con los criterios de Piaget, Vygotsky y Bruner, que proponen los modelos teóricos de profesor tradicional, tecnológico, espontaneísta y constructivista. Para lograr lo anterior se toma como referencia la teoría de las situaciones didácticas y la teoría antropológica de lo didáctico, caracterizadas por tener en cuenta

345 Vicenç Font, *Processos mentals versus competència* (Barcelona: Departament de Didáctica de los CCEE I de la Matemática de la UB, 2001).

346 Pochulu y Font, “Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 14, n.º 3 (2011): 361-394.

347 Paul Ernest, “The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher: A Model”. *Journal of Education for Teaching* 15, n.º 1 (1989): 13-33.

los puntos de vista socioculturales y, por ende, también un modelo integrador propio de la educación matemática, como es el enfoque ontosemiótico. Se utilizó, además, el modelo de análisis didáctico propuesto por el enfoque ontosemiótico<sup>348</sup>, el cual permitió analizar los pormenores de una clase de matemáticas.

Inicialmente, se analizó el contexto de la clase con aspectos como la institución (ubicación, pública o privada, estrato, número de estudiantes, etc.), el docente (antigüedad en docencia, selección, etc.), la clase (duración, grado, número de alumnos, etc.). Para el análisis de la clase, el enfoque ontosemiótico propone dividir el registro en configuraciones didácticas entendidas como “las interacciones profesor-alumno, a propósito de una tarea matemática y usando unos recursos materiales específicos”<sup>349</sup>. Los mismos autores plantean que una configuración didáctica está compuesta por configuraciones epistémicas (tarea, reglas, argumentaciones, lenguajes), configuraciones docentes (asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación), configuraciones discentes (exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación), configuraciones cognitivas, afectivas y mediacionales. El cambio de configuración didáctica está dado por el cambio de realización de una tarea, sin embargo, es un criterio que se considera flexible y depende del investigador.

Como referente teórico para analizar las configuraciones didácticas, Godino, Contreras y Font plantean cuatro tipos de configuraciones: magistral, personal, adidáctica y dialógica. Se toma una configuración didáctica como magistral cuando el profesor asume una manera tradicional de enseñar matemáticas, en la que se hace una explicación de los contenidos por medios expositivos, desarrollo de ejemplos y ejercicios sobre la temática presentada; implícitamente, se le delega al estudiante la tarea de vivir los momentos de exploración, formulación y validación. Otro tipo de configuración es la personal, allí es el estudiante quien estudia sin intervención directa del docente, muestra que está capacitado para ello, lo cual es opuesto al caso tradicional, en que los estudiantes solucionan ejercicios tomados de libros o propuestos por el profesor. La

.....  
348 Vicenç Font, Nuria Planas and Juan Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”. *Infancia y Aprendizaje* 33, n.º 1 (2010): 89-105.

349 Godino, Contreras y Font, “Análisis de procesos de instrucción”.

configuración adidáctica, considerada de naturaleza teórica, se da cuando las situaciones de acción, formulación, validación e institucionalización determinan el rol del alumno en interacción con el medio. Por último, está la configuración dialógica, tomada como intermedia entre la adidáctica y la magistral, allí el estudiante explora la tarea y plantea alguna forma de solución, y el docente formula los problemas y valida las respuestas o formulaciones de los estudiantes, quedando el proceso de institucionalización como un diálogo contextualizado.

Igualmente, Font, Planas y Godino<sup>350</sup> proponen, para poder analizar de una forma completa un periodo de instrucción, cinco aspectos de análisis sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje: identificación de prácticas matemáticas, elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, identificación del sistema de normas y metanormas, y valoración de la idoneidad didáctica de la clase como tal.

## 5.7 Identificación de prácticas matemáticas realizadas en una clase de matemáticas

Es bueno iniciar esta sección recordando la definición de práctica matemática dentro del enfoque ontosemiótico, “consideramos la práctica matemática como cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas a fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas”<sup>351</sup>. Se busca ir desde la situación problema y las prácticas propias para su resolución hasta la identificación de objetos y procesos matemáticos que permiten tales prácticas. Pochulu y Font<sup>352</sup> manifiestan que este es un proceso que se debería dar como si

.....  
350 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

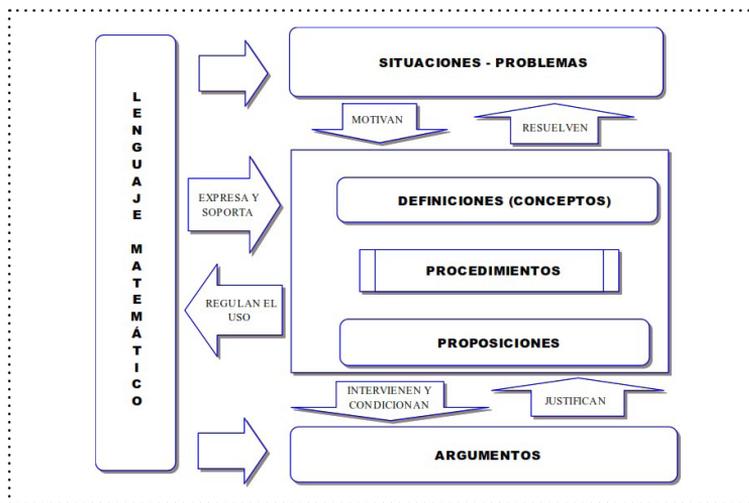
351 Godino y Batanero, “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”.

352 Marcel Pochulu y Vicenç Font, “Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 14, n.º 3 (2011): 361-394.

un profesor le comentara a otro lo que pasó en la clase, desde el punto de vista matemático. Hay que tener en cuenta que en una práctica inicialmente intervienen un agente y un medio, es decir, la persona o institución que realiza la práctica y el sitio de dicha práctica; igualmente, se requiere considerar otros tópicos como los valores e intenciones.

## 5.8 Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos

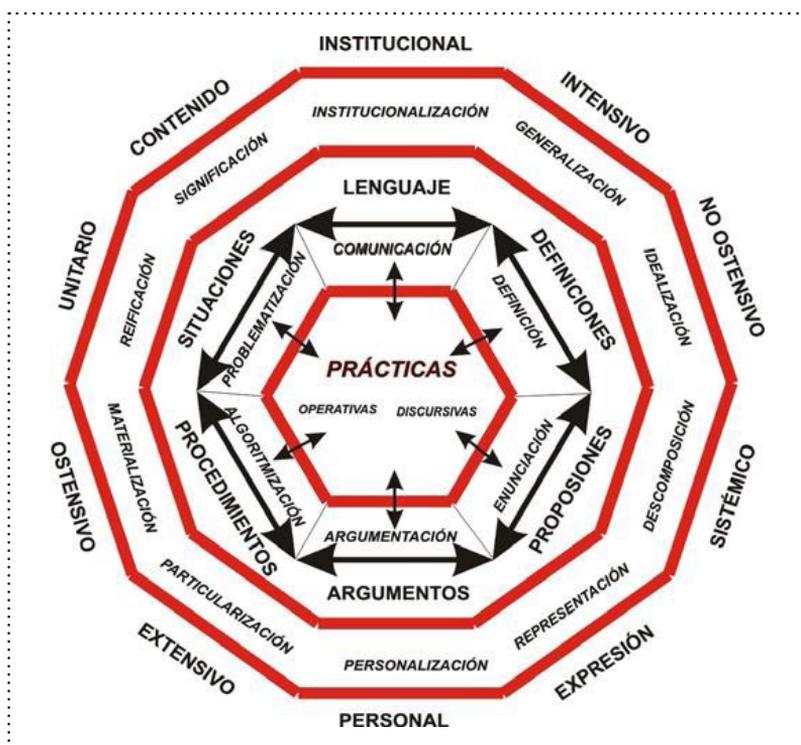
Se trata de determinar los objetos y procesos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas, al igual que los objetos y procesos emergentes de la realización de estas. Deben analizarse las interacciones docente-estudiante y estudiante-estudiante. Se destaca el uso de lenguajes verbales y simbólicos como la parte ostensiva de los conceptos, proposiciones y procedimientos. En resumen, busca describir la complejidad de las prácticas matemáticas. El entramado que conforman estos objetos se presenta en la Figura 7.



**Figura 7.** Configuración de objetos y procesos matemáticos desde el enfoque ontosemiótico

**Fuente:** Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”

En la Figura 7 se presenta la forma de los objetos matemáticos, pero si lo que interesa es la dinámica entre ellos, es decir, su interacción, hay que utilizar la tipología propuesta por el enfoque ontosemiótico<sup>353</sup>.



**Figura 8.** Interacción entre los objetos matemáticos propuestos por el enfoque ontosemiótico  
**Fuente:** Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”

Lo que se pretende es modelar la actividad matemática tomando como base los sistemas de prácticas tanto operativas (lectura y producción de texto) como discursivas (reflexión sobre las prácticas operativas). En el primer nivel aparecen los tipos de objetos matemáticos: lenguaje, definiciones, proposiciones, argumentos, procedimientos y situaciones. En el último nivel (decágono) aparecen las cinco dimensiones duales con

353 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

las cuales se pueden analizar los objetos matemáticos: personal/institucional, unitaria/sistémica, expresión/contenido, ostensiva/no-ostensiva y extensiva/intensiva. En cuanto a los 16 procesos, en la Figura 7 se determina cuáles están relacionados con las dimensiones duales y cuáles con los objetos matemáticos<sup>354</sup>.

## 5.9 Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas

Se deben describir los patrones de interacción, los cuales se utilizan para tipificar las configuraciones didácticas y las trayectorias didácticas. Unas de las interacciones que hay que privilegiar son las que giran alrededor de los conflictos semióticos, los cuales son abordados desde el enfoque ontosemiótico como significados diferentes asignados a un mismo objeto por dos entidades, ya sean personas o instituciones; si se presentan entre instituciones, se llaman conflictos semióticos epistemológicos o epistémicos, y en caso contrario, es decir, si se presenta entre dos personas, se denomina conflicto semiótico de tipo cognitivo. Si el desfase significativo surge de una acción comunicativa, se trata de conflictos semióticos interaccionales.

## 5.10 Identificación del sistema de normas y metanormas

Este sistema soporta las configuraciones y las trayectorias didácticas; regula las distintas dimensiones de estos procesos (epistémica, afectiva, cognitiva, etc.). La actividad matemática también tiene un espíritu social, en cuanto a las interacciones sociales en el aula como base para la comunicación matemática. El aprendizaje matemático “está condicionado no sólo por conocimientos matemáticos y didácticos, sino

.....  
354 Vicenç Font and Angel Contreras, “The Problem of the Particular and Its Relation to the General in Mathematics Education”. *Educational Studies in Mathematics* 69, n.º 1 (2008): 33- 52. 10.1007/ s10649-008-9123-7

por algunas reglas llamadas *normas sociomatemáticas*<sup>355</sup> y las cláusulas del contrato didáctico<sup>356</sup>.

Desde el enfoque ontosemiótico se han desarrollado trabajos como los de D'Amore, Font y Godino<sup>357</sup>, y Godino, Font, Wilhelmi y Castro<sup>358</sup>, en los cuales se plantean clasificaciones de las normas según diferentes tópicos como el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), procesos de enseñanza y aprendizaje que abordan (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, etc.) y su origen (disciplina, escuela, aula, etc.), entre otros. Las normas epistémicas se encuentran en los elementos de las configuraciones de objetos que controlan las prácticas matemáticas en un entorno institucional. Se habla de normas metaepistémicas a las que algunos autores aluden como sociomatemáticas<sup>359</sup>. Finalmente, para analizar los conflictos es bueno estudiarlos desde la discordancia entre prácticas personales e institucionales, teniendo en cuenta que en algunos casos pueden ser prácticas desviadas, aunadas al uso de normas.

## 5.11 Valoración de la idoneidad didáctica

Hasta este momento con el análisis se responde a la pregunta ¿qué ha ocurrido aquí y por qué?, pero no se evalúa el proceso de clase como tal y mucho menos se proponen mejoras, cuestión que se soluciona en este apartado, el cual se encarga de la valoración de la idoneidad didáctica<sup>360</sup>. Estos autores proponen seis criterios para determinar la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje:

.....  
355 Yackel y Cobb, "Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics".

356 Pochulu y Font, "Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa".

357 D' amore, Font y Godino, "La dimensión metadidáctica".

358 Godino et al., "Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas".

359 Yackel y Cobb, "Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics".

360 Juan Godino, Delisa Bencomo, Vicenç Font and Miguel Wilhelmi, "Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas". *Paradigma* 27, n.º 2 (2006): 221-252.

**Idoneidad epistémica.** Para valorar los contenidos matemáticos enseñados, comparando los significados de referencia con los institucionales aplicados o planeados, según Alsina y Domingo<sup>361</sup> hay que analizar qué contenidos matemáticos aparecen y con qué frecuencia, al igual que identificar el modelo implícito que se presenta en cada actividad o serie de actividades.

**Idoneidad cognitiva.** Comprende dos momentos, pre y post ejecución de la actividad: antes de la clase, para valorar si lo que se pretende enseñar está al alcance del estudiante, y después de la clase, para identificar si los aprendizajes logrados se aproximan a los aprendizajes pretendidos, es decir, se mira el grado de proximidad entre los significados implementados o planeados y los cognitivos o personales iniciales de los estudiantes; Vygotsky<sup>362</sup> destaca que se trata de determinar en qué medida los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos.

**Identidad mediacional.** Para valorar los recursos materiales y temporales utilizados en la clase en cuanto a su disponibilidad y adecuación para el proceso, destacando que según Baroody<sup>363</sup> la utilización de materiales manipulativos no es una condición necesaria y suficiente para el éxito en el aprendizaje.

**Idoneidad emocional.** Para determinar el grado de interés o motivación del estudiante en la clase, aclarando que este puede depender de los factores internos a la clase o externos que tienen que ver con las vivencias de los estudiantes.

**Idoneidad interaccional.** Para valorar las interacciones de la clase, en el sentido de ser válidas por los alumnos en lo concerniente a resolver dudas y dificultades, lo cual se evalúa durante el proceso, y *a priori* se

.....  
361 Ángel Alsina y Marta Domingo, "Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13, n.º 1 (2010): 7-32. <https://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v13n1/v13n1a2.pdf>

362 Lev Vygotsky, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Barcelona: Grijalbo, 1995).

363 Arthur Baroody, *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically* (New York: Macmillan, 1993).

identifican conflictos semióticos potenciales. En estudios realizados por Font, Planas y Godino<sup>364</sup>, y Planas e Iranzo<sup>365</sup> se plantean algunas sugerencias para mejorar esta idoneidad.

***Idoneidad ecológica.*** Para valorar la concordancia de la clase con el proyecto educativo de la institución, los procesos curriculares y el contexto social y profesional.

## 5.12 Modelo de análisis didáctico utilizado en esta investigación

Después de la revisión de la literatura sobre modelos de análisis didáctico de procesos de instrucción hecha en los párrafos anteriores, en esta investigación se ha optado por el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS, dada su generalidad y, sobre todo, porque propone dos tipos de análisis específicos (el análisis de las interacciones y de las trayectorias didácticas, y el análisis de la dimensión normativa) que permiten describir y explicar las interacciones en el aula, y también propone un tipo de análisis para la valoración de la interacción (idoneidad didáctica).

## 5.13 Estudios empíricos relacionados con el modelo de análisis didáctico del EOS

Utilizando como marco teórico los constructos del EOS se han realizado una serie de experimentos de diseño, estudios de tipo naturalista y cursos de formación, los cuales han permitido, por una parte, el desarrollo del modelo de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas (CCDM) propuesto por dicho enfoque y, por otra parte, han permitido poner a prueba dicho modelo de CCDM en situaciones empíricas. En diferentes investigaciones y contextos de formación se han diseñado e implementado ciclos formativos para que los profesores (o futuros profesores) desarrollen las competencias del modelo CCDM

.....  
364 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

365 Planas e Iranzo, “Consideraciones metodológicas”.

y aprendan los conocimientos que se contemplan en él, por ejemplo, en Rubio<sup>366</sup>; Pochulu, Font y Rodríguez<sup>367</sup>, y Seckel<sup>368</sup>. Se trata de ciclos formativos en los que se pretende enseñar a los participantes algunos de (o todos) los tipos de análisis didáctico contemplados en el modelo de análisis didáctico, propuestos por el EOS<sup>369</sup>, ya que se supone que realizar estos tipos de análisis didácticos permite desarrollar la competencia clave de este modelo, la competencia de análisis e intervención didáctica, y también el aprendizaje de los diferentes tipos de conocimientos contemplados en el modelo de conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. Por esta razón, en numerosas ocasiones se han implementado ciclos formativos (muchos de ellos con un formato de taller) con el objetivo de enseñar el modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS. Se trata de ciclos formativos (talleres) diseñados como entornos potentes de aprendizaje de manera que: 1) los asistentes tengan una participación activa a partir del análisis de episodios de aula; y 2) los tipos de análisis que propone dicho modelo emerjan de la puesta en común realizada en el gran grupo.

Dichos ciclos formativos (talleres) son considerados en el Office of State Assessment (OSA) *experimentos del desarrollo de las competencias y conocimientos del profesor* (EDCCP) y son un tipo de *Teacher Development Experiment* (TDE). Según Simon<sup>370</sup>, los TDE estudian el desarrollo profesional del profesor en formación o en servicio, y se fundamentan

.....  
366 Norma Rubio, “Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos” (tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, 2012).

367 Marcel Pochulu, Vicenç Font y Mabel Rodríguez, “Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas”. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 19, n.º 1 (2016), 71-98. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33544735004>

368 María José Seckel, “Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática” (tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, 2016).

369 Luis Pino-Fan, Adriana Assis and Walter Castro, “Towards a Methodology for the Characterization of Teachers’ Didactic Mathematical Knowledge”. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education* 11, n.º 6 (2015): 1429-1456.

370 Martín Simón, “Research on the development of mathematics teacher: The teacher development experiment”, en *Handbook of research design in mathematics and science education*, editado por A. E. Kelly y R. A. Lesh (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2000), 335-359.

en los principios de los experimentos de enseñanza<sup>371</sup>, lo que significa que un equipo de investigadores estudia el desarrollo del profesor a la vez que lo promueve como parte de un ciclo continuo de análisis e intervención. Este tipo de investigaciones también contemplan el estudio de casos.

En los diferentes talleres para profesores o futuros profesores de matemáticas implementados (EDCCP) con el objetivo señalado —dos de las cuales están descritos en Rubio<sup>372</sup> y Seckel<sup>373</sup>— se han observado algunas regularidades que se formulan de la siguiente manera:

Los profesores o futuros profesores, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración. Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de algunas de las seis facetas (epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional y emocional) del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CCDM) del profesor de matemáticas (una parte del CCDM). Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (otro componente del modelo CCDM) propuestos por el EOS (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva).

La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad. Estas tendencias<sup>374</sup> se relacionan con el

.....  
371 Leslie Steffe y Patrick Thompson, “Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements”, en *Research design in mathematics and science education*, editado por R. Lesh y A. E. Kelly (Hillsdale, NJ: Erlbaum, 2000), 267-307.

372 Norma Rubio, “Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos” (tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, 2012).

373 María José Seckel, “Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática” (tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, 2016).

374 Miguel de Guzmán, “Enseñanza de las ciencias y las matemáticas”. *Revista Iberoamericana*

modelo CCDM, ya que ellas son la base para proponer algunos de los criterios de idoneidad didáctica. Por esta razón, para esta investigación se ha planteado organizar un grupo de trabajo colaborativo que desarrolle la reflexión de los participantes asumiendo que, en una primera fase, no era necesario dar herramientas teóricas *a priori* para guiar su reflexión, pues se esperaba que se iban a cumplir las cuatro regularidades señaladas. Dado que en la primera fase se generaron muchos de los componentes y descriptores de los criterios, en la segunda fase se dieron herramientas para pautar la reflexión, básicamente en forma de lectura de artículos previos o bien por una lectura hecha directamente en la sesión del grupo. En la tercera fase se aplicó la pauta a la clase de uno de los asistentes y se observó que muchos criterios no se cumplían.

En la cuarta fase se valoraron clases con esta pauta. En la quinta fase se diseñó una clase siguiendo la pauta. Finalmente, se implementó la clase diseñada y se valoró aplicando la pauta.

## 5.14 Análisis didáctico. Caso Fernando

La elaboración del análisis didáctico con los criterios del enfoque ontosemiótico refleja la situación de la clase en profundidad, permitiendo su descripción detallada, por lo cual el trabajo se concentrará en los criterios de idoneidad didáctica, dado que permiten determinar la calidad y las mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas<sup>375</sup>.

Se presentan en la Tabla 14 los resultados del análisis didáctico de Fernando, antes y después del trabajo colaborativo.

---

*de Educación*, n.º 43 (2007): 19-58.

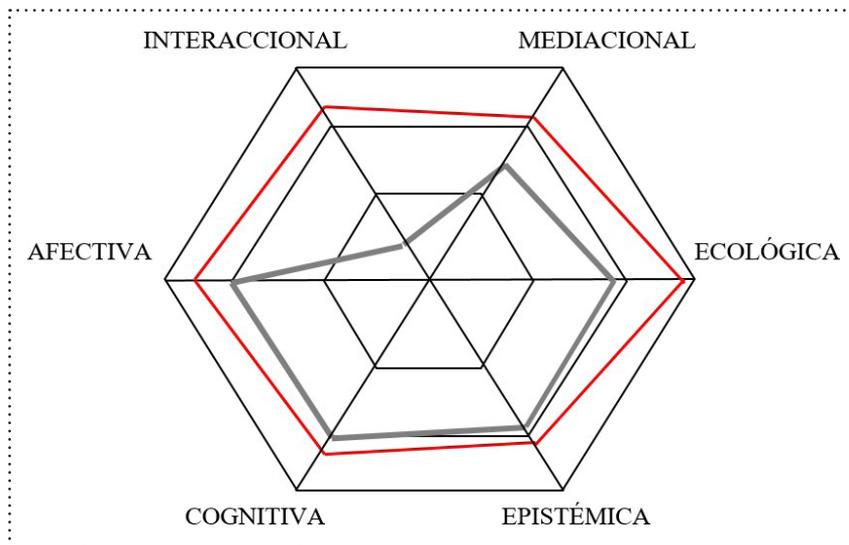
375 Adriana Breda, Vicenc Font and Valderez Marina do Rosário Lima, “Noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática”. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática* 8, n.º 2 (2015): 1-41.

**Tabla 14.** Resultados del análisis de los criterios de idoneidad didáctica en las dos fases

Idoneidad didáctica	Antes del trabajo colaborativo %	Posterior al trabajo colaborativo %
Idoneidad epistémica	59.7	70
Idoneidad cognitiva	66.6	75
Idoneidad afectiva	66.6	83.3
Idoneidad interaccional	15.7	75
Idoneidad mediacional	49.95	72.2
Idoneidad ecológica	60	95

**Fuente:** elaboración propia.

La representación hexagonal sería:



**Figura 9.** Tendencia de las idoneidades de las dos fases

**Fuente:** adaptada del análisis del enfoque ontosemiótico de Godino, 2011; Font, Planas, Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”; Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, “Aproximación a la dimensión normativa...”.

En la primera fase se observa que las idoneidades más bajas del docente Fernando, en su orden, son la interaccional y la mediacional, pero la crítica por desarrollar para este docente es la idoneidad interaccional.

En la segunda fase (posterior al trabajo colaborativo), la idoneidad más baja es la epistémica seguida por la mediacional. Se resalta que hay resignificación en todas las idoneidades, especialmente hay que destacar que la idoneidad interaccional dejó de ser el punto crítico.

A continuación, se examina puntualmente por idoneidad:

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad

Componentes:	Descripción
<b>Idoneidad epistémica</b>	
Situaciones- Problemas	ATC: no se propusieron en la clase situaciones que permitieran generar problemas; en este caso el docente planteó todos los problemas para trabajar por parte del estudiante. Igualmente, no se sugirieron situaciones donde los alumnos tuvieran que generar o negociar procedimientos, definiciones o proposiciones. Tampoco se presentaron diferentes significados de los objetos matemáticos.
	DTC: sucedió la misma situación en cuanto a generación de problemas por parte de los estudiantes y planteamiento de diferentes significados de los objetos matemáticos.
	M: en este criterio no se mejoró en cuanto al planteamiento de problemas por parte de los estudiantes, al igual que sobre determinar diferentes significados de los objetos. Sin embargo, sí se propusieron situaciones donde los estudiantes tuvieron que generar o negociar procedimientos, definiciones o proposiciones
Lenguajes	ATC: fue adecuado el uso de diferentes modos de expresión matemática, tanto verbal, como gráfica y simbólica. El lenguaje es adecuado al nivel universitario que se está trabajando, así mismo, en la clase se propusieron actividades de interpretación y de expresión matemática.
	DTC: igualmente este aspecto fue similar.
	M: son aspectos positivos del docente que debe mantener.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	ATC: no se observaron fallas en el planteamiento de las definiciones y procedimientos, y están adaptados para el nivel universitario. Sin embargo, no se proponen situaciones en las que los alumnos tengan que generar o negociar Definiciones, proposiciones o procedimientos.
	DTC: se hace un buen planteamiento de las definiciones y procedimientos, adaptados al nivel universitario. Acá sí se propusieron situaciones de generación y negociación de conceptos.

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad (continuación).

Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	M: se mejoró el criterio de generación y negociación de conceptos.
Argumentos	ATC: las explicaciones fueron adecuadas al nivel universitario, pero no se promovieron situaciones donde el alumno pudiera argumentar.
	DTC: el docente tiene como fortaleza el adaptar las explicaciones para el nivel universitario, además propuso situaciones donde el alumno tuvo que argumentar.
	M: se mejoró en cuanto el profesor propuso situaciones donde el alumno tenía que argumentar mediante el trabajo en grupo y la socialización.
Relaciones	ATC: se relacionaron y conectaron los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.), pero no se abordaron los distintos significados de estos.
	DTC: igual.
	M: no se mejoró en cuanto a abordar los distintos significados de los objetos matemáticos.
<b>Idoneidad cognitiva</b>	
Conocimientos previos	ATC: los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y el profesor considera que los contenidos pretendidos se pueden alcanzar.
	DTC: igual
	M: es una fortaleza del docente.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	ATC: se incluyeron actividades de ampliación, y se promovió el logro de todos los estudiantes.
	DTC: igual.
	M: es una fortaleza del docente.
Aprendizaje:	ATC: no se mostró o identificó alguna forma que propusiera el docente como evaluación de los procesos y prácticas, que señalara entre otros aspectos la comprensión conceptual y proposicional. Como no hay evaluación, no pudimos fijarnos si en ella se tienen en cuenta los distintos niveles de comprensión y competencia por parte del estudiante, al igual que si los resultados de esta evaluación se usan para tomar decisiones.
	Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva.
	DTC: igual.
	M: no se mejoró en este aspecto, queda como criterio por mejorar.

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad (continuación).

<b>Idoneidad afectiva</b>	
Intereses y necesidades	ATC: se propusieron tareas que tenían interés para los alumnos y algunos problemas que mostraban la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.
	DTC: aunque las tareas fueron interesantes para los estudiantes, no se propusieron problemas contextualizados.
	M: se desmejoró, ya que en la segunda fase no se propusieron problemas de contexto; así que queda como aspecto por mejorar, ya que no es una práctica usual del profesor.
Actitudes	ATC: se favoreció la argumentación en situaciones de igualdad, mas no la participación real del estudiante, con los valores de responsabilidad y perseverancia.
	DTC: se respetó el proceso de argumentación independiente de la persona, adicionalmente se dio buena participación al estudiante para generar valores de responsabilidad y perseverancia.
	M: se mejoró, en el sentido de dar mayor participación al estudiante y dar oportunidad de desarrollo de valores como la responsabilidad y la perseverancia.
Emociones	ATC: se motivó al estudiante promoviendo el agrado por las matemáticas y fomentando su autoestima, pero no se resaltaron las cualidades estéticas y La precisión de las matemáticas.
	DTC: igual.
	M: no se mejoró el hecho de resaltar las cualidades y la precisión de la matemática, queda como aspecto por superar.
<b>Idoneidad interaccional</b>	
Interacción docente-discente	ATC: el profesor realizó una buena presentación del tema, sin embargo, no se hicieron preguntas adecuadas, sino esperando una respuesta corta del estudiante, tampoco se buscó llegar a consensos ni se usaron otros recursos retóricos para motivar a los estudiantes.
	DTC: se hizo una buena presentación del tema, la participación del estudiante fue adecuada, pero no se motivó a los estudiantes con otros recursos retóricos.
	M: se mejoró en cuanto a la participación del estudiante, pero siguen faltando recursos retóricos y argumentativos que mejoren la motivación del estudiante, queda como aspecto por mejorar.

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad (continuación).

Interacción entre alumnos	ATC: aunque se evitó la exclusión, no se buscó una participación significativa de los estudiantes, que favoreciera el diálogo y la comunicación entre ellos.
	DTC: se evitó la exclusión y se dio participación a los estudiantes, favoreciendo el diálogo y la comunicación entre ellos.
	M: se mejoró el criterio de dar participación a los estudiantes favoreciendo el diálogo y participación entre ellos.
Autonomía	ATC: dado que el profesor siempre explica todo en la clase, no da oportunidad de que el estudiante asuma la responsabilidad del estudio.
	DTC: el profesor hizo la clase participativa, dio oportunidad a que los estudiantes asumieran la responsabilidad de la clase, realizando actividades como plantear cuestiones y presentar soluciones; explorar ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usar una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos, etc.
	M: mejoró el aspecto comunicativo en general y en particular los procesos matemáticos que de ello se derivan.
Evaluación formativa	ATC: no se realizó una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
	DTC: igual.
	M: no mejoró el aspecto de la observación sistemática del progreso del alumno. Queda como aspecto por mejorar para el docente.
<b>Idoneidad mediacional</b>	
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores).	ATC: no se utilizaron materiales manipulativos e informáticos, y las definiciones y propiedades no fueron contextualizadas.
	DTC: se utilizaron materiales manipulativos (talleres, calculadoras), lo que permitió la contextualización de los objetos matemáticos.
	M: se mejoró en el criterio de utilizar materiales manipulativos que permitieran contextualizar los objetos matemáticos.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	ATC: el horario, la distribución de los estudiantes (forma matricial), al igual que su número, permitieron llevar a cabo la enseñanza pretendida.
	DTC: igual, excepto la distribución de los alumnos, pequeños grupos.
	M: es una fortaleza del docente.

**Tabla 15.** Análisis de idoneidad (continuación).

Tiempo (de enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje).	ATC: uno de los problemas del docente es el tiempo, escoge una temática demasiado ambiciosa, por lo cual el tiempo no es suficiente para la enseñanza pretendida y no dedica tiempo especial a los contenidos más importantes o que son de más dificultad para el estudiante.
	DTC: igual.
	M: el aspecto de control de tiempo queda por mejorar.
<b>Idoneidad ecológica</b>	
Adaptación al currículo	ATC: los contenidos, su implementación y evaluación son coherentes con las directrices curriculares.
	DTC: igual.
	M: es fortaleza del profesor.
Apertura hacia la innovación didáctica	ATC: la clase no tiene que ver con la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva, al igual que no integra las tecnologías de la información y comunicación.
	DTC: se planteó una metodología que es innovadora, donde se utiliza material manipulativo.
	M: mejoró el criterio de nuevas metodologías y tecnologías en la clase de matemáticas.
Adaptación socioprofesional y cultural	ATC: los contenidos abordados contribuyen a la formación socio-profesional de los estudiantes.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.
Educación en valores	ATC: se promovió la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.
Conexiones intra e Interdisciplinares	ATC: los contenidos abordados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.

**Nota:** ATC: antes del trabajo colaborativo. DTC: después del trabajo colaborativo. M: análisis de mejora.

**Fuente:** elaboración propia.

Se consideran fortalezas de Fernando aquellos criterios que estaban inicialmente dentro de su práctica pedagógica y los siguió manteniendo; un aspecto fue resignificado si inicialmente no lo tenía el docente, pero a través del trabajo colaborativo consiguió desarrollarlo. Hay un aspecto por mejorar, si inicialmente no estaba presente en las prácticas del profesor y al finalizar el trabajo colaborativo sigue sin estarlo. Lo anterior se detalla a continuación.

**Tabla 16.** La práctica pedagógica del docente al finalizar el trabajo. Análisis por idoneidad

<b>Idoneidad</b>	<b>Fortaleza</b>	<b>Resignificación</b>	<b>Aspectos por mejorar</b>
<i>Idoneidad epistémica</i>	Los lenguajes	Reglas y argumentos	Situaciones problema y relaciones.
<i>Idoneidad cognitiva</i>	Conocimientos previos y adaptaciones curriculares		Aprendizaje, lo que tiene que ver con la evaluación explícita de la clase.
<i>Idoneidad afectiva</i>		Actitudes	Intereses y necesidades, y emociones
<i>Idoneidad interaccional</i>		Interacción docente-discente, interacción entre alumnos y autonomía	Evaluación formativa
<i>Idoneidad mediacional</i>	Número de alumnos, horario y condiciones de aula	Recursos materiales	Tiempo, especialmente en la distribución de tareas
<i>Idoneidad ecológica</i>	Adaptación al currículo, adaptación socio profesional y cultural, y conexiones intra e interdisciplinarias	Apertura hacia la innovación didáctica	

**Fuente:** elaboración propia.

Se presentan a continuación algunos aspectos referentes a la idoneidad epistémica o la calidad de las matemáticas enseñadas. El profesor en las clases iniciales prácticamente no propone problemas (uno en las dos clases), lo anterior coincide con lo que piensa, pues plantea “en los ejercicios que involucro para trabajar, busco que se incluyan con enfoque de algoritmos y en ocasiones la resolución de problemas” (Ent2F, 27 marzo 2015), explicando de esta manera la poca importancia que

le da al planteamiento de problemas en el aula, lo cual está acorde con su metodología “se trabaja la explicación de la temática en el tablero y los estudiantes solucionan los ejercicios siguiendo un proceso similar al explicado” (Ent3F, 1 julio 2016); sin embargo, en la segunda fase, en las dos clases planteó situaciones problemáticas aunque sin utilizar el contexto<sup>376</sup>, lo cual coincide con su metodología después de reflexionar acerca de sus prácticas dentro del grupo de trabajo colaborativo, “el modelo de clase que propongo, está enfocado a la participación activa del estudiante en la solución de situaciones problema donde ponga en juego sus conocimientos previos y logre así construir los nuevos conceptos” (Ent4F, 18 noviembre 2016), pero aún no se preocupa por generar actividades en las que promueva que el estudiante plantee sus problemas.

El criterio sobre generación y negociación de conceptos fue resignificado por el profesor. En la primera fase, esta generación y negociación no existían, pues el docente pensaba que en la clase debía darse una “relación explicativa que hace el docente al estudiante, teniendo como parámetro que este puede preguntar en cualquier momento para aclarar sus dudas” (Ent2F, 27 marzo 2015), lo cual no dejaba lugar a una búsqueda de consenso. En la segunda fase, Fernando asumió un cambio, “especialmente en la concepción de que el estudiante aprende sólo si le explico, lo cual conlleva modificar las actividades y asumir que el estudiante puede aprender sin necesidad de que yo esté dentro de ese proceso” (Ent3F, 1 Julio 2016), lo cual permitió que en sus clases se fomentara el trabajo en grupo, la discusión y generación de conceptos.

En la idoneidad cognitiva, un aspecto por mejorar es la realización explícita de la evaluación y el dejar inferir cuál es su objetivo; este factor no ha sido aún interiorizado por el docente, al respecto manifiesta: “hay aspectos que necesito interiorizar y esto es un proceso que requiere de tiempo” (Ent3F, 1 julio 2016). Graduar los contenidos de acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes, teniendo como objetivo una mejor comprensión de los nuevos conceptos<sup>377</sup>, es una fortaleza del docente.

.....  
376 Alsina y Domingo, “Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural”.

377 Lev Vygotsky, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Barcelona: Grijalbo, 1988).

En la idoneidad afectiva, un aspecto por mejorar es el proponer tareas matemáticas que tengan que ver con el contexto, aunque es un criterio interiorizado por el docente. Inicialmente, decía que uno de los problemas de la enseñanza de la matemática “es brindar demasiada información al estudiante, esperando que comprenda las diferentes temáticas y desarrolle un proceso algorítmico, sin analizar a fondo su utilidad en un contexto determinado” (Ent2F, 27 marzo 2015), lo cual permite afirmar que existe una conciencia por parte del docente hacia la importancia del contexto en el problema de la clase. En la segunda fase, en cuanto a los conocimientos matemáticos, el docente plantea que “ya no los veo como entes totalmente abstractos, sino como que puede buscarse su representación en la realidad y así aplicar la matemática en su contexto” (Ent3F, 1 julio 2016), lo cual lleva nuevamente a pensar que Fernando cree en la importancia del contexto en la clase de matemáticas, sin embargo, no lo ha puesto en práctica. Un aspecto que logró resignificar el docente fue referente a las actitudes, pues inicialmente, por la estructura tradicional- tecnológica de la clase<sup>378</sup>, la participación del estudiante se limitó básicamente a respuestas cortas a preguntas del profesor, lo cual no daba lugar a mayores desarrollos participativos; al cambiar el docente su estilo de clase, proponiendo actividades de trabajo de grupo, permitió que los estudiantes interactuaran entre ellos con situaciones de igualdad y en fomento de valores. Respecto al rol del estudiante, el profesor manifestó: “Mi rol cambió, antiguamente mi papel era reproducir algorítmicamente los procesos explicados en el desarrollo de los ejercicios; actualmente, soy partícipe de la construcción de los conocimientos que se trabajan en el aula, permitiéndole al estudiante reflexionar sobre el proceso de aprendizaje que realiza en cada situación planteada, llevándolo a un verdadero reto” (Ent3F, 1 julio 2016).

En lo que respecta a la idoneidad interaccional, el aspecto que quedó por mejorar fue el de la evaluación formativa, lo cual ya se fundamentó en la idoneidad cognitiva. Un criterio que se resignificó fue la relación docente-estudiante; en la primera fase, el docente menciona que “es un proceso de escucha, donde se debe estar pendiente de las orientaciones que se brindan para no perder la idea de la explicación” (Ent2F, 27

.....  
378 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

marzo 2015), lo cual es coherente con la actuación del docente; en la segunda fase hace comentarios como el siguiente “he aprendido a mirar que la clase se puede trabajar más participativa, donde el estudiante realmente sea el eje de ella, y comprender que existen otras formas de enfocar la práctica pedagógica que dan mejores resultados en el proceso de aprendizaje del estudiante” (Ent3F, 1 Julio 2016). Lo anterior indica un cambio de paradigma en cuanto a la relación docente-estudiante, que se evidenció en la práctica.

Otro factor que se resignificó fue la relación estudiante-estudiante. Inicialmente, el docente prácticamente no daba mucha posibilidad de una interacción entre los estudiantes, consideraba que “entre los estudiantes debe presentarse una discusión interna que permita aclarar las dudas entre ellos” (Ent2F, 15 Julio 2014), no llegar a consensos sino solo aclarar dudas, pero no brindaba el espacio para ello; posteriormente, Fernando manifestó que “hoy día lo que se busca es llevar al estudiante a reflexionar sobre un concepto, el cual es contrastado con lo que piensan los compañeros y el profesor, orientados por una base teórica de cualquier texto o ayuda de internet” (Ent3F, 1 Julio 2016), lo que lleva a una manera diferente de actuar del docente, como se logró evidenciar en las últimas clases. Finalmente y como corolario de lo anterior, el criterio de autonomía del estudiante también se resignificó, puesto que, como se evidenció en las clases iniciales, fue casi nulo, pero en las posteriores ya se presentó este factor, “actualmente, si hay interacción entre ellos, al igual que con el docente aunque en menor escala, corroboración en los textos de trabajo e internet, permitiendo así la reflexión sobre la temática y conllevando un mejor proceso de aprendizaje” (Ent3F, 01 Julio 2016); de lo cual se infiere que a menor participación del profesor, mayor participación del estudiante y, por ende, mayor autonomía de este último<sup>379</sup>.

En lo relativo a la idoneidad mediacional, el manejo del tiempo, principalmente en lo que se refiere a la distribución de tareas, es un aspecto por mejorar de Fernando, el cual lo reconoce. Inicialmente, el docente afirmó “la organización del tiempo en la clase para la distribución de la

.....  
 379 Alro y Skovsmose, *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection, critique* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002).

temática, es uno de los aspectos que debo mejorar” (Ent2F, 27 marzo 2015), lo que implica que es consciente de la necesidad de resignificar este aspecto; sin embargo, una vez culminado el trabajo colaborativo, manifiesta: “debo evolucionar más en el control del tiempo de la clase, para dar campo a desarrollar diversas estrategias conducentes al aprendizaje de los conceptos por parte de los estudiantes” (Ent3F, 1 Julio 2016). Reconoce que este concepto no evolucionó lo esperado, por lo cual se considera como no resignificado. Así mismo, dice que “el estudiante puede aprender por sí mismo, con ayuda del profesor y de otros recursos” (Ent3F, 1 julio 2016). Da importancia al uso de recursos, en las primeras clases no utilizó material fuera del texto y el tablero, pero después sí utilizó fichas con talleres, los cuales entregó a cada grupo, teniendo en cuenta la importancia del uso de medios educativos<sup>380</sup>.

En la idoneidad ecológica, un aspecto que logró el docente resignificar fue la apertura hacia la innovación didáctica, ya que incluyó material manipulativo dentro de la clase y una metodología no tradicional-tecnológica<sup>381</sup>, “el modelo de clase que propongo está enfocado a la participación activa del estudiante en la solución de situaciones problema donde ponga en juego sus conocimientos previos y logre así construir los nuevos conceptos” (Ent4F, 18 julio 2016), lo que propende a una innovación metodológica, basada en la práctica reflexiva.

## 5.15 Análisis didáctico. Caso Juan

La elaboración del análisis didáctico con los criterios del enfoque ontosemiótico refleja la situación de la clase en profundidad, que permite hacer una descripción detallada de la clase; por lo cual, el trabajo se concentrará en los criterios de idoneidad didáctica, dado que posibilitan analizar la calidad y las mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas<sup>382</sup>.

.....  
380 Arthur Barrody, *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically* (New York: Macmillan, 1993).

381 Porlán, *Constructivismo y escuela*.

382 Breda, Font y Valdez, “A noção de idoneidade didática”.

Se presenta en la tabla siguiente la tipología del docente Juan antes y después del trabajo colaborativo.

**Tabla 17.** Tipología del docente antes y después del trabajo colaborativo

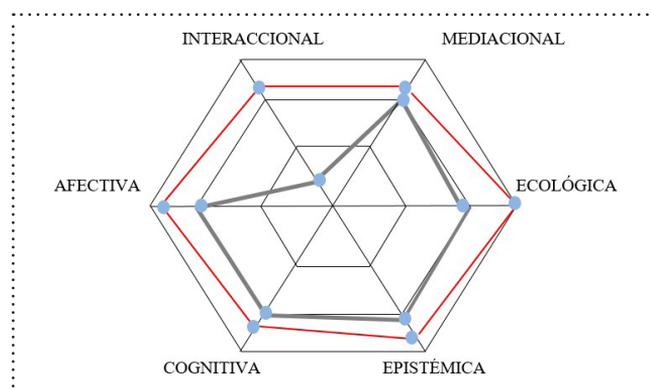
Idoneidad didáctica	Trabajo colaborativo	
	Antes %	Posterior %
Idoneidad epistémica	68.2	85
Idoneidad cognitiva	66.6	75
Idoneidad afectiva	66.6	91.7
Idoneidad interaccional	29,1	75
Idoneidad mediacional	72.15	75
Idoneidad ecológica	65	100

**Fuente:** elaboración propia.

En la primera fase se observa que las idoneidades más bajas del docente Juan, en su orden, son la interaccional y la ecológica, pero la idoneidad crítica por desarrollar para este docente es la interaccional.

En la segunda fase (posterior al trabajo colaborativo), este docente mejoró en todas las idoneidades; las más bajas son la cognitiva, interaccional y mediacional, pero no en un nivel crítico, ya que las tres están valoradas con 75 %, dejando de ser la idoneidad interaccional punto crítico.

La representación hexagonal sería:



**Figura 10.** Idoneidades de Juan, en la primera (negro) y segunda (rojo) fases  
**Fuente:** adaptada del análisis del enfoque ontosemiótico Godino, 2011; Font, Planas, Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”; Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, “Aproximación a la dimensión normativa...”

A continuación, se va a observar puntualmente por idoneidad:

**Tabla 18.** Análisis de idoneidad de la clase del profesor

Componentes	Descripción
<b>Idoneidad epistémica</b>	
Situaciones-problemas	ATC: el profesor planteó situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación de conceptos, aunque sí se plantearon problemas, no se permitió la generación de estos por parte de los estudiantes.
	DTC: sucedió lo mismo.
	M: al no mejorar en este criterio, el docente deberá tenerlo en cuenta.
Lenguajes	ATC: fue adecuado el uso de diferentes modos de expresión matemática, tanto verbal como gráfica y simbólica. El lenguaje es adecuado al nivel universitario que se está trabajando, pero en la clase no se propusieron actividades que facilitaran el desarrollo de la interpretación y de la expresión matemática.
	DTC: en estas clases sí se propusieron actividades de interpretación y los otros dos aspectos permanecieron igual.
	M: el uso de diferentes modos de expresión y la adecuación del lenguaje a nivel universitario son aspectos positivos del docente, se mejoró en que ya se preocupó por plantear actividades de interpretación y expresión matemática.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	ATC: no se observaron fallas en el planteamiento de las definiciones y procedimientos, y están adaptados para el nivel universitario. Sin embargo, no se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar Definiciones, proposiciones o procedimientos.
	DTC: se sigue haciendo un buen planteamiento de las definiciones y procedimientos, adaptados al nivel universitario. Acá sí se propusieron situaciones de generación y negociación de conceptos.
	M: se mejoró el criterio de generación y negociación de conceptos. Los demás son aspectos positivos del docente.
Argumentos	ATC: las explicaciones fueron adecuadas al nivel universitario, pero no se promovieron situaciones donde el alumno pudiera argumentar.

**Tabla 18.** Análisis de idoneidad de la clase del profesor (continuación).

Argumentos	DTC: el docente tiene como fortaleza el adaptar las explicaciones para el nivel universitario, además propuso situaciones donde el alumno tuvo que argumentar.
	M: Se mejoró en que el profesor propuso situaciones donde el alumno tenía que argumentar, mediante el trabajo en grupo y la socialización. Una fortaleza del docente es que adecúa los contenidos al nivel universitario.
Relaciones	ATC: se relacionaron y conectaron los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.), pero no se abordaron los distintos significados de estos.
	DTC: igual.
	M: aunque se relacionan los objetos matemáticos, no se mejoró en cuanto a abordar los distintos significados de los objetos matemáticos. El docente debe asumir como aspecto por mejorar este criterio.
<b>Idoneidad cognitiva</b>	
Conocimientos previos	ATC: los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema y el profesor considera que los contenidos pretendidos se pueden alcanzar.
	DTC: igual.
	M: es una fortaleza del docente.
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	ATC: se promovió el logro de todos los estudiantes y se incluyeron actividades de ampliación.
	DTC: igual.
	M: es un aspecto positivo del docente.
Aprendizaje:	ATC: no se mostró o identificó alguna forma que propusiera el docente como evaluación de los procesos y prácticas, que señalara entre otros aspectos la comprensión conceptual y proposicional. Como no hay evaluación, no pudimos fijarnos si en ella se tienen en cuenta los distintos niveles de comprensión y competencia por parte del estudiante ni si los resultados de esta evaluación se usan para tomar decisiones. Tampoco se evidenció un desarrollo de las competencias comunicativa y argumentativa.
	DTC: siguió igual en los primeros aspectos, pero planteó situaciones que permitieron un desarrollo de las competencias comunicativas y argumentativas.
	M: solo se mejoró este último aspecto. Lo demás queda como criterio por mejorar.

**Tabla 18.** Análisis de idoneidad de la clase del profesor (continuación).

<b>Idoneidad afectiva</b>	
Intereses y necesidades	ATC: se propusieron tareas que tenían interés para los alumnos, pero no situaciones que pudieran mostrar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana.
	DTC: aunque las tareas fueron interesantes para los estudiantes, no se propusieron problemas contextualizados.
	M: permaneció igual, es decir, que sigue siendo un aspecto por mejorar el proponer situaciones problemáticas contextualizadas.
Actitudes	ATC: se favoreció la argumentación en situaciones de igualdad, mas no la participación real del estudiante.
	DTC: se respetó el proceso de argumentación independiente de la persona; adicionalmente, se dio buena participación al estudiante para generar valores de responsabilidad y perseverancia.
	M: se mejoró en el sentido de dar mayor participación al estudiante y dar oportunidad de desarrollo de valores como la responsabilidad y la perseverancia.
Emociones	ATC: se motivó al estudiante por el agrado de las matemáticas, fomentando su autoestima y resaltando las cualidades estéticas y la precisión de las matemáticas.
	DTC: igual.
	M: es una fortaleza del docente.
<b>Idoneidad interaccional</b>	
Interacción docente-discente	ATC: el profesor realizó una buena presentación del tema; sin embargo, no se hicieron preguntas adecuadas, sino esperando una respuesta corta del estudiante, tampoco se buscó llegar a consensos ni se usaron otros recursos retóricos para motivar a los estudiantes.
	DTC: se invirtieron los papeles, se permitió la participación de los estudiantes en búsqueda de consenso, se utilizaron diversos recursos retóricos; no obstante, debido a la falta de organización del tiempo, no alcanzó a realizar una buena exposición del tema, como proceso de institucionalización.
	M: en general, se mejoró este criterio.
Interacción entrealumnos	ATC: aunque se evitó la exclusión, no se buscó una participación significativa de los estudiantes que favoreciera el diálogo y la comunicación entre ellos.

**Tabla 18.** Análisis de idoneidad de la clase del profesor (continuación).

Interacción entre alumnos	DTC: se evitó la exclusión y se dio participación a los estudiantes, favoreciendo el diálogo y la comunicación entre ellos.
	M: se mejoró el criterio de dar participación a los estudiantes favoreciendo el diálogo entre ellos.
Autonomía	ATC: dado que el profesor siempre explica todo en la clase, no da oportunidad de que el estudiante asuma la responsabilidad del estudio.
	DTC: el profesor hizo la clase participativa, dio oportunidad a los estudiantes para que asumieran la responsabilidad de la clase realizando actividades como plantear cuestiones y presentar soluciones, explorar ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar, y que usaran una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos, etc.
	M: mejoró el aspecto comunicativo en general y en particular los procesos matemáticos que de ello se derivan.
Evaluación formativa	ATC: no se realizó una observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.
	DTC: igual.
	M: no mejoró el aspecto de la observación sistemática del progreso del alumno. Queda como aspecto por mejorar.
<b>Idoneidad mediacional</b>	
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores)	ATC: no se utilizaron materiales manipulativos e informáticos ni las definiciones y propiedades fueron contextualizadas.
	DTC: se utilizaron materiales manipulativos (talleres, calculadoras), lo que permitió la contextualización de los objetos matemáticos.
	M: se mejoró en el criterio de utilizar materiales manipulativos que permitieran contextualizar los objetos matemáticos.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	ATC: el horario, la distribución de los estudiantes (forma matricial), al igual que su número, permitió llevar a cabo la enseñanza pretendida.
	DTC: igual, excepto la distribución de los alumnos, pequeños grupos.
	M: es una fortaleza del docente.

Tiempo (de enseñanza colectiva /tutorización; tiempo de aprendizaje)	ATC: uno de los problemas del docente es el tiempo, escoge una temática demasiado ambiciosa, por lo cual el tiempo no es suficiente para la enseñanza pretendida, no dedicando tiempo especial a los contenidos más importantes o que son de más dificultad para el estudiante.
	DTC: igual.
	M: este aspecto es tal vez el de mayor importancia para el docente, el de control de tiempo, pero queda por mejorar.
<b>Idoneidad ecológica</b>	
Adaptación al currículo	ATC: los contenidos, su implementación y evaluación son coherentes con las directrices curriculares.
	DTC: igual.
	M: es fortaleza del profesor.
Apertura hacia innovación didáctica	ATC: la clase no tiene que ver con la innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva, al igual que no integra las tecnologías de la información y comunicación.
	DTC: se planteó una metodología que es innovadora, donde se utiliza material manipulativo.
	M: mejoró el criterio de nuevas metodologías y tecnologías en la clase de matemáticas.
Adaptación socioprofesional y cultural	ATC: los contenidos abordados contribuyen con la formación socioprofesional de los estudiantes.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.
Educación en valores	ATC: no se promovió la formación en valores democráticos y el pensamiento crítico.
	DTC: se realizaron actividades que favorecieran la formación en valores.
	M: se mejoró el hacer explícito la formación en valores.
Conexiones intra e interdisciplinares	ATC: los contenidos abordados se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.
	DTC: igual.
	M: fortaleza del docente.

**Nota:** ATC: antes del trabajo colaborativo. DTC: después del trabajo colaborativo. M: análisis de mejora

**Fuente:** elaboración propia.

Teniendo en cuenta que se consideran una fortaleza del docente aquellos criterios que tenía inicialmente dentro de su práctica pedagógica y los siguió manteniendo; un aspecto fue resignificado si inicialmente no lo tenía el docente, pero a través del trabajo colaborativo consiguió desarrollarlo; se considera un aspecto por mejorar, si inicialmente no estaba presente en las prácticas del docente y al finalizar el trabajo colaborativo sigue sin estarlo. En general, lo que muestra este análisis es lo siguiente:

**Tabla 19.** La práctica pedagógica del docente al finalizar el trabajo. Análisis por idoneidad

Idoneidad	Fortaleza	(re)significación	Aspectos por mejorar
<i>Idoneidad epistémica</i>		Los lenguajes; reglas y argumentos.	Situaciones problema y relaciones.
<i>Idoneidad cognitiva</i>	Conocimientos previos; adaptaciones curriculares	Aprendizaje	
<i>Idoneidad afectiva</i>	Emociones	Actitudes	Intereses y necesidades
<i>Idoneidad interaccional</i>		Interacción docente-discente, interacción entre alumnos, y autonomía.	Evaluación formativa
<i>Idoneidad mediadora</i>	Número de alumnos, horario y condiciones de aula	Recursos materiales	Tiempo, especialmente en la distribución de tareas.
<i>Idoneidad ecológica</i>	Adaptación al currículo; adaptación socio-profesional y cultural, y conexiones intra e interdisciplinarias	Apertura hacia la innovación didáctica; educación en valores.	

**Fuente:** elaboración propia.

Uno de los aspectos más complicados de valorar fue la idoneidad epistémica o la calidad de las matemáticas enseñadas, sin embargo, en cuanto a la resolución de problemas es de aclarar que el docente sí planteó problemas en sus clases, a pesar de que inicialmente pensaba que “muchos

de los contenidos que se les presentan a los estudiantes no dan tiempo para el trabajo de resolución de problemas (Ent2J, 27 marzo 2015), pero no logró finalmente que el estudiante planteara sus propias situaciones problemáticas ni que contextualizara los problemas planteados<sup>383</sup>; lo anterior lo menciona el docente al finalizar el proceso: (...) quedan muchos aspectos por mejorar, por ejemplo, en cuanto a la dimensión epistémica, pues hace falta la incorporación sistemática de situaciones problema que impliquen mayor esfuerzo por parte del estudiante para poner en juego tanto los saberes previos como su espíritu investigativo (EntJ3, 12 mayo 2016).

En la idoneidad cognitiva, un aspecto que quedó por mejorar fue la evaluación explícita y el dejar entrever cuál es el objetivo de esta. Al respecto, el docente afirmaba inicialmente, “debo cambiar mi paradigma sobre la evaluación, y hacer que los contenidos sean más prácticos, que los estudiantes los vean útiles” (Ent2J, 27 marzo 2015). Una de las fortalezas fue graduar los contenidos de acuerdo con los conocimientos previos de los estudiantes, de tal manera que pudieran estar dentro de la zona de desarrollo próximo del estudiante<sup>384</sup>.

En la idoneidad afectiva quedó igual un aspecto por mejorar, que está relacionado con el epistémico: proponer tareas matemáticas que tengan que ver con el contexto y, por lo tanto, mejoren la motivación del estudiante por su estudio, aunque al terminar el proyecto opina que “enseñar matemáticas va más allá de un simple ejercicio rutinario que le permite al estudiante desarrollar algunas estrategias mecánicas y algorítmicas, considera que las matemáticas poseen un componente práctico que le permite al estudiante relacionarlo con situaciones de la vida cotidiana” (EntJ3, 12 mayo 2016), lo cual lleva a pensar que hay una resignificación del concepto, pero no se alcanzó a plasmar en la práctica.

En lo referente a la idoneidad interaccional también quedó un aspecto por mejorar referente a la evaluación formativa, la cual está igualmente relacionada con la idoneidad cognitiva y allí se explicó la situación. Se resignificaron las interacciones entre los diferentes entes de la clase. Al

.....  
383 Alsina y Domingo, Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural.

384 Lev Vygotsky, *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores* (Barcelona: Grijalbo, 1988).

inicio del trabajo el profesor planteaba “la relación docente- estudiante debe ser cordial, en la que el profesor le responde de la manera más clara posible al estudiante y así resolver sus dudas” (Ent2J, 27 marzo 2015), y esta era la forma más clara de interacción presente dentro de la clase; pero después del trabajo colaborativo, el profesor opina al respecto, “en mi práctica docente veo dificultades en la dimensión interaccional, pues el estudiante sólo asume un rol pasivo y por tal razón no está plenamente comprometido con su propio aprendizaje” (EntJ3, 12 mayo 2016). En sus últimas clases tuvo muy en cuenta la interrelación estudiante-estudiante como fundamental, “La organización de los alumnos pasó de ser lineal o caótica, a ser por grupos de trabajo identificables” (EntJ3, 12 mayo 2016); tiene en cuenta que las concepciones de los estudiantes “son un punto de partida, sin embargo, es mediante el trabajo progresivo sobre las situaciones problema que se van transformando esas concepciones en conceptos institucionales” (EntJ3, 12 mayo 2016). También se identificaron conflictos cognitivos y se reflexionó sobre ellos, pues lo más importante es tratar de evitarlos<sup>385</sup>. Otro aspecto sobre el cual se trabajó en el grupo fue sobre las normas, las cuales permitieron el buen desarrollo de la clase<sup>386</sup>. Acerca de estos aspectos también se presentó una resignificación, por ejemplo, al respecto Juan menciona que (...) las reglas van surgiendo del grupo, porque si nos fijamos, uno no pone las mismas reglas para todas las clases ni para todos los grupos. Hay grupos muy activos, muy pilosos, que están sobre la temática. Hay otros que son perezosos, que no se concentran, entonces las actividades de la clase no pueden ser las mismas (TG14).

En lo que tiene que ver con la idoneidad mediacional hay un aspecto por mejorar, el manejo del tiempo, especialmente en lo referente a la distribución de tareas, aunque inicialmente el profesor afirmaba “ en cada clase se abordan conceptos de acuerdo con los contenidos programáticos previstos, se inicia mencionando los temas que se tratarán en el tiempo estimado de la clase y luego empieza el desarrollo de esta” (Ent2J, 27 marzo 2015), lo que aclara que destina un tiempo estimado para la clase, pero aun así, no lo pudo manejar. Al respecto, dice que

.....  
385 Font, Planas y Godino, “Modelo para el análisis didáctico en educación matemática”.

386 Planas y Iranzo, “Consideraciones metodológicas”.

“un aspecto que me ha sido especialmente difícil es el de ceder espacios a los estudiantes, pues algunos estudiantes consideran que la labor del profesor en el salón debe acaparar toda la atención en el tiempo de clase” (EntJ3, 12 mayo 2016), es decir, reconoce el problema. También manifiesta que “uno de los aspectos de mi práctica docente que me preocupa es el uso de mediaciones apropiadas, que le permitan al estudiante acercarse a la comprensión de conceptos matemáticos” (EntJ3, 12 mayo 2016), aunque según Barrody<sup>387</sup>, la utilización de materiales manipulativos no es una condición necesaria y suficiente para el éxito en el aprendizaje, pero sí aporta mucho; este fue uno de los aspectos que el profesor Juan logró resignificar.

En la idoneidad ecológica, un aspecto que logró resignificar el docente fue la apertura hacia la innovación didáctica, ya que incluyó material manipulativo dentro de la clase y algunos de los elementos de las tecnologías de la información y la comunicación.

.....  
387 Arthur Barrody, *Problem solving, reasoning, and communicating, K-8: Helping children think mathematically* (New York: Macmillan, 1993).