CONCLUSIONES

Sobre el fenómeno de la comprensión

El estudio de la comprensión de la diferencial de una función en varias variables es complejo, debido, entre otros aspectos, a su carácter formal, a la cantidad de elementos y relaciones que lo configuran, a los diferentes sistemas de representación utilizados y a los esquemas previos requeridos (espacios vectoriales, producto interior, normas, función, límite, continuidad, derivabilidad). Sin embargo, para controlar esta complejidad se adoptó el marco teórico y metodológico APOE, de corte constructivista, que permite describir y explicar el desarrollo del esquema de este concepto.

Al respecto, el desarrollo del esquema en este enfoque teórico se expresó por niveles de comprensión, que se fijaron teniendo como referencia la triada *Intra*, *Inter* y *Trans*[105], de acuerdo con las características que manifestaron los estudiantes que participaron en la investigación, en los desempeños de las tareas y en las entrevistas, al construir y representar en forma gráfica, algebraica, numérica y analítica, los elementos matemáticos y sus relaciones. La comprensión de los elementos matemáticos se reflejó en términos de las estructuras mentales de acción, proceso, objeto y esquema. Las relaciones entre los elementos son el resultado de activar mecanismos para interiorizar acciones, coordinar o invertir procesos, encapsular procesos en objetos, desencapsular objetos en procesos, organizar las estructuras en el esquema y tematizar el esquema en un nuevo objeto, la diferencial de una función en varias variables.

En relación con investigaciones sobre conceptos previos a la diferencial, como la comprensión de funciones en dos variables[106],

[105] Ilana Arnon y otros, *op. Cit.* p 114-118.
[106] Rafael Martínez-Planell, María Trigueros, "Students' understanding of the general notion of a function of two variables", *Springer Science+Business Media* B.1. 2012,3

estas reportan que este concepto tiene muchas sutilezas, por tanto se deben utilizar varias formas de representación que favorezcan su aprendizaje. Estas dificultades se presentaron en esta investigación para graficar e interpretar planos, rectas secante y tangente, curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, campos escalares definidos en dominios de $\mathbb{R}^2$ e intersección de planos con superficies.

En relación con investigaciones sobre la comprensión de la diferencial de una función real de variable real, que es equivalente a la derivada, se observaron dificultades en los estudiantes para interpretar el concepto en forma algebraica, gráfica y analítica. Estas dificultades también se evidenciaron en esta investigación en las características del nivel *Intra* del esquema y en el paso de este a los niveles *Inter* y *Trans*, para comprender la diferencial de funciones vectoriales de variable real, de campos escalares y de campos vectoriales.

Además, se constató la presencia de obstáculos epistemológicos que se caracterizan porque propiedades que se cumplen en contextos restringidos para funciones en una variable, no se cumplen para funciones en varias variables, como la derivabilidad, que implica continuidad y criterios para la existencia de límite de una función en un punto.

Por otra parte, desde el punto de vista histórico, para la comprensión, formalización y definición del concepto de diferencial de una función en varias variables, la humanidad tardó varios siglos para desentrañar sus particularidades. Al respecto, se destacan los siguientes aportes, algunos de los cuales causaron pasión y controversia tanto para la comunidad matemática, como para su enseñanza y aprendizaje.

NEWTON define las variables denominadas fluyentes, como las generadas por el movimiento de puntos, rectas y planos, diferente a la concepción de elementos estáticos; las considera como infinitesimales y las nota como x e y. Al cambio relativo de la fluyente con respecto al tiempo lo denomina fluxión por su carácter físico, y lo representa por $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

LEIBNIZ define los diferenciales como cantidades arbitrariamente pequeñas, con una visión dinámica; cantidades que tienden a cero, que se pueden hacer tan pequeñas como se quiera. La notación dy/dx, combina una percepción primitiva y una cierta referencia del paso a límite abstracto, implícito en el concepto de diferencial.

EULER enuncia la forma de calcular la diferencial de una función de dos variables, considerando las derivadas parciales como un paso intermedio para este fin.

CAUCHY define la diferencial como el producto de la derivada por un incremento arbitrario de la variable independiente.

FRÉCHET introduce el concepto de diferencial en su interpretación moderna, en términos de transformaciones lineales. La diferencial df, consiste en exigir que $\Delta f(a) - df(a)\Delta x$ sea infinitamente pequeño respecto a Δx. Por tanto, lo que es infinitamente pequeño respecto a Δx no es la diferencial, sino su diferencia con el incremento $\Delta f - df$.

Sobre el análisis del concepto

La génesis del concepto de diferencial contribuyó a la solución de los problemas clásicos del siglo XVII (calcular el ritmo de cambio, encontrar la tangente a una curva dada, calcular valores máximos y mínimos de una función, calcular sumas infinitas) y motivó a la comunidad matemática a su invención, a dotarlo de rigor, formalizarlo y socializarlo. Lo anterior incidió en el desarrollo del análisis funcional, la física matemática y sus importantes aplicaciones en áreas afines.

Al respecto, el concepto de diferencial está estrechamente relacionado con la derivada. En funciones reales de variable real, los dos conceptos son equivalentes, por tanto, la complejidad en la investigación sobre la comprensión de la diferencial y la derivada de este tipo de funciones es similar.

Sin embargo, al extender el concepto derivada a funciones en varias variables, carece de sentido hallar los cocientes incrementales de estas aplicaciones y, por lo tanto, no es posible generalizar el concepto de derivada en esos términos, lo que sí es posible es generalizar el concepto de derivada a subespacios de dimensión uno.

Aparece así el concepto de derivada direccional y, como caso particular, el concepto de derivada parcial.

Así que, para generalizar el proceso de derivación a funciones en varias variables, surgió el concepto de diferencial, que estudia la variación de una función en relación con incrementos de las variables independientes cuando estos son pequeños o, aún mejor, cuando ellos tienden a cero.

En relación con este concepto, intuitivamente una función es diferenciable en un punto particular de esta, si en cercanías del punto en consideración se comporta de manera similar a una función lineal, es decir, en una vecindad del punto se puede aproximar muy bien por una función lineal. Si la similitud con lo lineal se produce cuando se incrementa una sola de sus variables, se dice que la función es derivable respecto de ella; si la casi linealidad lo es respecto a la variación conjunta de todas las variables, se dice que la función es diferenciable.

Por tanto, para formalizar las nociones intuitivas de la diferencial, se establecieron los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los registros de representación, que caracterizan el esquema del concepto diferencial y son referentes para estudiar su comprensión.

Elementos matemáticos

Los siguientes son los elementos matemáticos que configuran la $DIFVV$:

Derivada direccional (*DD*), derivada parcial (*DP*), función derivable en un punto (*FDE*), diferencial de una función de variable real (*DIFR*), diferencial de una función vectorial de variable real (*DIFV*), diferencial de un campo escalar (*DICE*), diferencial de un campo vectorial (*DICV*), diferencial de una función en varias variables ($DIFVV$).

Relaciones lógicas

Para establecer relaciones entre los elementos matemáticos que configuran la diferencial, se fija un abierto A, subconjunto de $\mathbb{R}^n$, un punto a de A y una función f, definida de A en $\mathbb{R}^m$, con m y n

naturales. Sobre estos elementos, a continuación se presentan las relaciones lógicas que permiten hacer inferencias acerca de la diferenciabilidad.

Conjunción lógica $(p \wedge q)$

Afirmar que la función f es diferenciable en a, es equivalente a las siguientes declaraciones, las cuales, a su vez, son equivalentes entre sí:

Existe una aplicación lineal, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, que se denota por $Df(a)$ y se denomina diferencial de f en a, tal que,

$$\lim_{\|v\|_n \to 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - T_a(v)\|_m}{\|v\|_n} = 0.$$

Existe una aplicación lineal, $Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y una función $E(a,h): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tales que cuando $\|h\| \to 0$,

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \|h\|E(a,h), \text{ y, } \lim_{h\to 0} E(a,h) = 0.$$

Condicional (p →q)

Condición de derivabilidad (CD). Si existen todas las derivadas parciales de f en a, entonces f es derivable en a.

Condición suficiente de diferenciabilidad (TCSDI). Si las derivadas parciales existen en una vecindad del punto a y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.

Diferenciabilidad implica continuidad (TDICO). Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en a.

Frecuentemente se utiliza el contrarrecíproco de esta relación en el siguiente sentido: si una función f no es continua en un punto a, entonces f no es diferenciable en a.

La diferencial implica existencia de las derivadas direccionales (TDIDD). Si f es diferenciable en a, entonces existe la derivada direccional para cualquier vector dirección u en $\mathbb{R}^n$, en particular f es derivable en a.

La diferenciabilidad de un campo escalar implica la existencia de las derivadas parciales (TDIDP).

Función de clase C^1 implica ser diferenciable (*CC1DI*).

Registros de representación.

Los registros para representar los elementos matemáticos y evidenciar su comprensión son los siguientes.

Analítico. Relacionado con las definiciones verbales de los conceptos, los axiomas o postulados considerados como verdades, las relaciones y propiedades que se establecen entre los elementos matemáticos expresados a través de los teoremas, las consecuencias de los teoremas o corolarios con las demostraciones correspondientes utilizando el razonamiento lógico.

Algebraico. Relacionado con expresiones algebraicas, las fórmulas, operaciones y algoritmos.

Gráfico. Relacionado con los dibujos, gráficas de funciones y figuras.

Verbal. Relacionado con descripciones en lenguaje natural de los conceptos.

Numérico. Relacionado con tablas, métodos y algoritmos numéricos.

Computacional. Conjunto de instrucciones (declaraciones) según la sintaxis de un lenguaje de programación, para que el computador pueda entender y ejecutar. A través de estas instrucciones se representan acciones, procesos, objetos y esquemas.

Implicaciones en la enseñanza

El enfoque APOE que se siguió para esta investigación, es un modelo que satisface los criterios para considerarse como una teoría: poder descriptivo, poder explicativo, alcance, rigor y especificidad, susceptible de falsación, capacidad de replicación y triangulación[107]. Por tanto, este marco teórico y metodológico permitió establecer de

[107] David E. Meel, "Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 6, 2003: 243-244.

manera científica los niveles de comprensión de la diferencial de una función en varias variables.

En este sentido, a partir del análisis del desarrollo histórico de la diferencial, de la presentación de esta en los textos, de la experiencia como docente y estudiante, se propuso una *DG* preliminar del concepto, la cual se puso a prueba en la investigación y, según los resultados obtenidos, se presentó una versión refinada que describe una trayectoria mental que un estudiante debe seguir para comprender el concepto en términos de los mecanismos mentales activados por la abstracción reflexiva para construir los objetos mentales (los elementos matemáticos) y establecer relaciones lógicas entre estos a través de la utilización y coordinación de las representaciones.

Por otra parte, las actividades computacionales diseñadas según la *DG*, al implementarlas y depurarlas en el *software* MATLAB demostraron motivar e inducir al estudiante a utilizar y coordinar representaciones analíticas, algebraicas, numéricas y gráficas, cuando realizaba acciones (instrucciones línea a línea en la ventana de comandos o en programas) sobre objetos previamente construidos, que al repetirlas en diferentes situaciones inducían la interiorización de estas en procesos (elaboración de procedimientos, archivos m-file o *script* de MATLAB). Posteriormente, estos procesos se encapsulaban en nuevos objetos matemáticos (elaboración de funciones) que, al relacionarlos con otros (llamado a funciones previamente construidas), propiciaban inferencias lógicas para construir el esquema y, de esta manera, lograr una mejor comprensión del concepto.

Estas actividades son un complemento de la presentación del concepto en los textos, de las técnicas tradicionales de enseñanza y aprendizaje, caracterizadas por las exposiciones magistrales, ejercicios y evaluación. Además, se aprovechan los recursos humanos, informáticos y tecnológicos disponibles.

Sobre el desarrollo del esquema

En el capítulo anterior se caracterizó el desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, a través de los distintos subniveles, en estudiantes que habían participado de un ciclo de instrucción *ACE* de cálculo multivariable. De manera similar que en el trabajo sobre el desarrollo del esquema de la derivada[108] y la comprensión de la integral definida[109] en el análisis de los instrumentos de recogida de la información y de los instrumentos teóricos, se comprobó que la construcción del conocimiento es progresiva y continua, y que el paso de un subnivel al siguiente se evidencia por las relaciones lógicas que el sujeto es capaz de establecer entre los elementos matemáticos que conoce y lo que sabe hacer con estos elementos en la resolución de las distintas tareas.

El primer intento de relacionar los elementos matemáticos es a través de la "conjunción lógica", siendo esta el primer tipo de relación que, con frecuencia y de manera correcta, establecen los estudiantes; como se evidencia con el estudiante *E1*, cuando justifica en la entrevista la diferenciabilidad de una función real correspondiente a la Tarea 1.b.

La "implicación lógica" es otra relación que frecuentemente utilizan los estudiantes en sus inferencias, como se demostró cuando los estudiantes *E1* y *E2* resolvieron las tareas 5 y 6, para determinar si la función f, definida por secciones, es diferenciable en (0,0), y cuando el estudiante *E1* justificó la diferenciabilidad de un campo vectorial en un punto, en la Tarea 9.

La relación de "contrarrecíproca" solo se manifiesta por pocos estudiantes, como se puede evidenciar en el desempeño del estudiante *E2* en la solución de la Tarea 5.c, para determinar si la función del ejemplo es continua en un punto.

Los elementos matemáticos que utilizan los estudiantes, en general, son los mismos, aunque varían de un estudiante a otro en el

---

108 Gloria Sánchez-Matamoros, Mercedes García Blanco y Salvador LLinares, "El desarrollo… 7.

109 Eliécer Aldana, *Comprensión de la integral…* 392.

desempeño de las tareas del cuestionario; los elementos matemáticos que comúnmente recuerdan son "derivada o diferencial de una función real de variable real", "derivada parcial", "derivada direccional"; con los que tienen más dificultad son "diferencial de una función vectorial de variable real", "diferencial de un campo escalar" y "diferencial de un campo vectorial"; algunos de estos elementos se recuerdan de forma incorrecta o con errores en los elementos que los configuran, como se describe a continuación.

Respecto a la diferencial de una función real de variable real, los estudiantes calculan la derivada de la función definida por la expresión algebraica y la evalúan en un punto aplicando teoremas de diferenciación; sin embargo, tienen dificultades para representar gráficamente los elementos que constituyen la diferencial, como la tangente a la curva en un punto, el incremento de f en a, $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$; la diferencial de f en a aplicada a h, $(f'(a)h)$ y el error, $hE(a,h) = \Delta f(a) - f'(a)h$.

Algunos estudiantes presentan dificultades para distinguir las propiedades de derivabilidad, diferenciabilidad y transformación lineal de una función diferenciable real de variable real en un punto. Por ejemplo, el estudiante *E9* tiene la concepción que para esta clase de funciones diferenciabilidad es equivalente a derivabilidad y que la derivabilidad implica continuidad. Sin embargo, no tiene una imagen clara de la derivada como el límite del cociente incremental en un punto y la diferencial como una transformación lineal.

En relación con la derivada direccional, mostraron dificultad para determinar en qué casos es conveniente aplicar la definición como el límite de incrementos o como el producto interior de la diferencial evaluada en el punto por el vector dirección, que es válida únicamente cuando la función es diferenciable en el punto. Esta dificultad surgió porque no lograron establecer la relación que para funciones en varias variables la derivabilidad no implica la diferenciabilidad; como en el caso del estudiante *E5*, quien describió de manera equivocada el cálculo de la derivada direccional de una función que no es diferenciable en el origen, según la Tarea 6 del cuestionario.

Respecto a las derivadas parciales, ellos demuestran facilidad para calcularlas y evaluarlas en un punto, aplicando reglas de diferenciación o evaluando el límite de incrementos. Sin embargo, cometen errores y tienen dificultades para interpretarlas como las pendientes de rectas tangentes o como razón de cambio de la función en el punto respecto a la variable que se está derivando. Lo anterior se pudo observar en el estudiante *E5* cuando describió cómo resolvió la Tarea 3 del cuestionario, pues cometió errores para ubicar los puntos en la gráfica de la función, identificar las secantes con sus respectivas pendientes y el límite de estas cuando tienden a la tangente, con pendientes expresadas por las derivadas parciales.

Además, cuando una función en varias variables está representada en forma tabular y no se muestra la expresión algebraica que la define para estimar aproximaciones de sus derivadas parciales en un punto, varios estudiantes tienen dificultades para identificar las cantidades que permanecen constantes y las que cambian, los incrementos de dichas variables, para formar cocientes que representan las tasas medias de variación de la función respecto a una variable y su interpretación al contexto que define la función. Por tanto, no pueden hacer traducciones entre los registros que representa la función (tabular, algebraico y analítico). Una situación es la del estudiante *E7* sobre la Tarea 4.b, cuando, a pesar de calcular las tasas medias de variación de la función, definida en forma tabular, no puede describir el significado de la aproximación de la derivada parcial, según el contexto del problema.

Lo anterior incide en la dificultad para aproximar el valor de un campo escalar en un punto no registrado en la tabla de valores, aplicando el concepto de diferencial de un campo escalar utilizando la parte principal del polinomio de Taylor de primer grado. Esto se evidencia en el desempeño del estudiante *E3*, al resolver la Tarea 4.c, cuando intenta comprender la *DICE* como acción al aproximar $h(43,17)$ por el promedio de los valores $h(40,15)$ y $h(50,20)$, como cotas superior e inferior de la función en el punto en consideración. Para esto aproxima las *DD* como tasas de variación media en estos puntos, pero no logra identificar los elementos ni las relaciones establecidas en la parte principal del polinomio de Taylor para encontrar la mejor aproximación, además comete errores en las operaciones.

Respecto a la diferencial de un campo escalar, los estudiantes demostraron habilidad para aplicar acciones, reglas de diferenciación para calcular las derivadas parciales o evaluar límites de cocientes incrementales. Sin embargo, tuvieron dificultades para determinar la conveniencia de su aplicación en situaciones cuando las funciones estaban definidas por secciones en forma algebraica y no lograron establecer relaciones entre límite, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad.

Los estudiantes *E7* y *E9*, en la solución de la Tarea 5.d, no comprendieron la noción de continuidad como un proceso que resulta de la coordinación de los procesos de evaluar el límite de la función en un punto y de verificar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Además, utilizaron la condición que diferenciabilidad implica la continuidad, pero no explicaron cómo se deduce la diferenciabilidad.

Además, el estudiante *E6*, en la Tarea 5.c, para determinar la diferenciabilidad de la función en un punto de forma directa, realizó la acción de evaluar el límite del cociente del resto (la diferencia del incremento de la función en el punto con la diferencial aplicada al incremento de la variable independiente) entre la norma del incremento de la variable independiente, pero no interiorizó que si este límite es cero, entonces la función es diferenciable.

Los errores y las dificultades descritas anteriormente demuestran que algunos estudiantes aplican de manera mecánica y algorítmica reglas para hallar derivadas totales y parciales de funciones, calcular gradientes, jacobianos, aplicar teoremas fundamentales sobre la diferencial de una función en varias variables. Sin embargo, no establecen para qué clase de funciones y en cuáles puntos se pueden aplicar, no tienen en cuenta la representación de la función, no interpretan y utilizan estos conceptos para resolver situaciones problema. Esto concuerda con los resultados encontrados en el estudio acerca de concepciones y dificultades sobre los diferenciales[110].

Por lo tanto, se sugiere para la enseñanza de estos conceptos, presentar y analizar, en diferentes formas de representación, variedad de ejemplos y contraejemplos de funciones, en los cuales se pueda evidenciar que no se preservan ciertas propiedades de funciones reales de variable real a funciones en varias variables, situaciones que motivaron la generalización del proceso de derivación al de diferenciación.

Respecto al desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, los siguientes niveles y subniveles están caracterizados por la comprensión como objeto de los respectivos elementos matemáticos que se enuncian a continuación: *Intra*, la función real de variable; *Inter 1*, la diferencial de una función vectorial de variable real; *Inter 2*, la derivada parcial y derivada direccional; *Inter*, la diferencial de un campo escalar; *Trans 1*, la diferencial de un campo vectorial; y *Trans,* la diferencial de una función en varias variables, estableciendo relaciones lógicas entre los objetos previamente construidos, que configuran y dan completez al esquema.

Limitaciones y perspectivas futuras

Una limitación en el desarrollo de las actividades computacionales basadas en la DG es la dificultad de los estudiantes para familiarizarse con el *software*, en particular con la sintaxis y el razonamiento lógico para dar las instrucciones o elaborar los programas. Sin embargo, estas dificultades se compensan con la posibilidad de construir y manipular con cierta facilidad y autonomía objetos y gráficas bidimensionales y tridimensionales, realizar cálculos numéricos para representar e inducir la noción de infinitesimales, el orden de los infinitesimales y la aproximación del límite de funciones, lo cual permite que el estudiante descubra y construya su propio conocimiento e interactúe con sus compañeros como una posibilidad para fomentar el aprendizaje colaborativo.

[110] Michele Artigue, "Analysis"... 183-184.

Como el computador es una máquina discreta, los procesos de límite, que son dinámicos, son simulados por cantidades pequeñas pero estáticas, a través de los límites de cocientes incrementales, y las derivadas, por diferencias finitas. Por tanto, las actividades están orientadas a realizar representaciones aproximadas de la diferencial y la derivada. Se sugiere complementarlas con actividades sin utilizar el computador.

Para continuar con la investigación se proponen las siguientes fases:

Desarrollar esta propuesta con otros grupos de estudiantes, para proseguir con el refinamiento de la descomposición genética del concepto.

Utilizar este proceso investigativo en otros temas del pensamiento matemático avanzado que presentan dificultades en su comprensión, a fin de procurar mejores desempeños de nuestros estudiantes y contribuir a la investigación en educación matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Libros

Aldana Bermúdez, Eliécer. *Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría "APOE"*. Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca, 2011.

Apostol, Tom M. *Calculus. Introducción, con vectores y geometría analítica.* Barcelona: Reverté, 1961.

Apostol, Tom M. *Calculus. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferencial y a las probabilidades.* Barcelona: Reverté, 1988.

Arnon, Ilana y otros. *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer Science, 2014.

Artigue, Michèle. "Analysis". En *Advanced Mathematical Thinking*, editado por David Tall. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002, 188-196.

Artigue, Michèle. "The Notion of Differential for Undergrate Students in Science", en *Proccedings of the Xth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Matematic Education*, 229-234. London: University of London, Institute of Education, 1986.

Bartle, Robert. *The Elements of Real Analysis.* New York: Jhon Wiley & Sons, 1975.

Bernal, César Augusto. *Metodología de la investigación.* México: Prentice Hall, 2006.

Bisguerra Alzina, Rafael, Inma Dorio Alcaráz, Inés Massot Lafot y Marta Sabariego Puig. "Características generales de la metodología cualitativa". En *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla. S.A., 2009.

Dubinsky, Ed. “Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking”. En *Advanced Mathematical Thinking*, editado por D. Tall. New York: Kluwer Academic Publishers, 2000, 95-123.

Galindo, Félix, Javier Sanz y Luis A. Tristán. *Cálculo infinitesimal en varias variables. Guía practica.* Madrid: Paraninfo, 2005.

Harel, Guershon y David Tall. "The General Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics". En *For the Learning of Mathematics.* Alberta: H.M. Publishing Association, 1991, 38-42.

Poincaré, Henri. *The Foundations of Science,* trad. Halsted G.B. New York: The Science Press, 1982.

Kline, Morris. *El pensamiento matemático de la antiguedad hasta nuestros dias, I y II.* Madrid: Alianza Editorial, 1972.

López-Gay, Lucio y Rafael Villegas. "La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora". Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Madrid, 2001.

Piaget, Jean. *Psicología y pedagogía.* Buenos Aires: Ariel, 1980.

Piaget, Jean. *The Principles of Genetic Epistemology,* trad. W. Mays. London: Neubauer, P. B., 1972.

Piaget, Jean y Rolando García. *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Madrid: Siglo Veintiuno Editores, 1983.

Piaget, Jean. *The Equilibration of Cognitive Structures,* trad. T. T. Brown. Cambridge: Harvard University Press, 1985.

Stewart, James. *Cálculo multivariable.* Mexico: Thompson. Learning, 2002.

Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Tall, David. “The psychology of advanced mathematical thinking”. En *Advanced mathematical thinking*, editado por D. Tall. Dordrecht: Kluwer, 1991, 3-21.

Thomas, George, Ross L. Finney y Maurice D. Weir. *Cálculo varias variables.* México: Addison Wesley, 1999.

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas y Estadística, *Proyecto Académico Educativo-PAE Matemáticas.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2010.

Artículos de Revistas

Asiala, Mark, Anne Brown, David DeVries y Ed Dubinsky. "A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education". *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues in Mathematics,* 6, 1996: 1–32.

Ayers, Thomas, George Davis, Ed Dubinsky y Philip Lewin. "Computer Experiences in Learning Composition of Functions". *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 1988: 246-259.

Baker, Bernadette , Laurel Cooley y María Trigueros. "A Calculus Graphing Schema". *The Journal for Research in Mathematics Educations*, 31, 2000: 557–578.

Fréchet, Maurice, "Sur la notion de différentielle", *Journal de Mathématiques*, XVI, 1937: 233-250. [Mi traducción].

Gómez Fuentes, Pablo Ignacio y Juan Raúl Delgado Rubí. "La diferenciabilidad de funciones en varias variables, una propuesta de tratamiento metodológico". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 25, 2012: 603-6013.

Martínez-Planell, Rafael y María Trigueros Gaisman. "Students' Understanding of the General Notion of a Function". *Springer Science+Business Media B.V. Educ Stud Math,* 5, 2012: 76-80.

Meel, David E. "Modelos y teoría de la comprensión matemática, comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE". *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 6, 2003: 221-271.

Sánchez-Matamoros García, Gloria, Mercedes García Blanco y Salvador Llinares Ciscar. "El desarrollo del esquema de derivada". *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 24, 2006: 85-98.

Suárez Aguilar, Zagalo. "Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto diferencial de una función en varias variables". *Investigación Desarrollo e Innovación*, 6, 2015: 45-60.

Trigueros Gaisman, María. "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior". *Educación Matemática*, 17, 2005: 5-31.

Weller, Kirk, Julie Clark, Ed Dubinsky y S. Loch. "Student Performance and Attitudes in Courses Based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle". *Research in Collegiate Mathematics Education V. CBMS Issues in Mathematics Education*, 12, 2003: 97–131.

Consultas de Internet

Programa de Matemáticas. Comité Curricular. "Página Institucional Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. UPTC". Programa Académico Matemáticas. http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/facultades/f_ciencias/pregrado/matematicas/inf_general/document/IV/calculo_multivariable.pdf (consultado el 12 de agosto de 2017).

Documento legal

Resolución 6339/2013, del 23 de mayo, del Ministerio de Educación Nacional, Por medio de la cual se resuelve la solicitud de renovación de registro calificado del programa de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia ofrecido bajo la metodología precencial en la ciudad de Tunja-Boyacá.