

## RESULTADOS

En este capítulo se expone el análisis de cada uno de los estudiantes, organizado por los niveles de desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables. Se describe teniendo como referencia el análisis teórico del concepto, la descomposición genética, las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que se establecen en la resolución de las tareas del cuestionario y que se evidencian en las formas de representación gráfica, numérica, algebraica y analítica, en las argumentaciones, en las entrevistas, y según la solución plausible de estas tareas.

Por tanto, se mostrará una caracterización de forma descriptiva y explicativa de los niveles de desarrollo establecidos en el marco teórico y en la recolección y análisis de la información.

### *Análisis de cada estudiante*

El análisis se organizó en el siguiente orden de subniveles del desarrollo del esquema, de acuerdo con los objetivos de cada tarea del cuestionario y el desempeño que demostró el estudiante en estas.

*Intra:* tareas 1.a, 1.b y 1.c, para establecer la comprensión del concepto diferencial de una función real de variable real *DIFR*.

*Inter 1:* tareas 2.a, 2.b, con el propósito de analizar la comprensión del concepto diferencial de una función vectorial de variable real *DIFVR*, como elemento contiguo a la *DIFR*.

*Inter 2:* tareas 3.a, 3.b, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6.a, 6.b, 6.c y 7, para analizar la comprensión del concepto de derivada direccional *DD* y parcial *DP*, como elementos contiguos a la *DIFR* y agrupar las funciones en varias variables según las propiedades locales de continuidad, derivabilidad, linealidad y diferenciabilidad.

*Inter:* tareas 4.c, 5.c, 6.d y 8, para analizar la comprensión del concepto diferencial de un campo escalar *DICE*, cuando establece

relaciones entre los objetos  $CE$ ,  $FR$ ,  $DP$ ,  $DD$  y  $DIFR$ , en los modos de representación  $G$ ,  $A$ ,  $AN$ ,  $N$ .

*Trans 1:* tareas 9.a y 9.b, con el propósito de analizar la comprensión del concepto diferencial de un campo vectorial  $DICV$ , cuando establece relaciones con la  $DICE$  comprendido como objeto o proceso.

*Trans:* tareas 5.d, 5.e, 6.e, 6.f, 9.b y 10, para analizar la comprensión del esquema de la diferencial de una funciones en varias variables  $DIFVV$ , al verificar el cumplimiento de las propiedades y las relaciones que pueda establecer entre los elementos que la configuran y que le dan coherencia y completez al esquema.

A continuación se describen los resultados de este análisis de los estudiantes que se ubican en cada subnivel.

### ***Nivel Intra***

#### *Subnivel Intra 1*

##### Estudiante E8

Comprende el elemento matemático, la derivada de una función real como acción en una única forma de representación, la algebraica, cuando aplica reglas de diferenciación de una manera mecánica y algorítmica, sin tener en cuenta las condiciones que debe cumplir la función.

No comprende la  $DIFVR$  como un elemento contiguo a la  $DIFR$ .

Muestra la tendencia a comprender la  $DP$  como acción, incluyendo algunos elementos matemáticos, que los recuerda con errores y en el único modo de representación, la algebraica. Además, no logra generalizar el proceso de derivación de una  $FR$ , para encontrar la derivada de un  $CE$ , la  $DP$  y la  $DD$  como elementos que configuran la  $DICE$ .

No muestra capacidad de síntesis cuando comete errores al aplicar las relaciones lógicas de implicación, conjunción y disyunción, en la comprensión como acción del concepto de  $DICE$ , para hacer inferencias y generar nuevos elementos matemáticos.

En la Tabla 18 se presenta una caracterización del desarrollo del esquema de la *DIFVV*, correspondiente a este subnivel *Intra 1*, demostrado por el estudiante.

### *Subnivel Intra*

#### Estudiante E9

Recuerda de manera aislada y como acción el elemento *DIFR*, junto con los elementos internos que lo constituyen. No logra relacionar este elemento con los elementos *DIFVR*, *DICE* y *DICV*.

En la Tabla 18 se indican las características, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el estudiante en el nivel *Intra*.

### *Nivel Inter*

#### *Subnivel Inter 1*

#### Estudiante E5

Comprende el elemento *DIFR* como un proceso al activar mecanismos para interiorizar acciones de recordar y relacionar elementos que lo configuran. Coordina este proceso con la *FVR* para generalizar la *DIFR* en la comprensión del elemento contiguo *DIFVR* en un nuevo proceso.

Comprende como acciones realizadas sobre los elementos *FVV*, los conceptos de *DP* y *DD* en el modo de representación *A*, pero no logra hacer las traducciones a las representaciones *G* y *AN*, al intentar resolver las situaciones problema.

No comprende los elementos *DICE* y *DICV* como acciones sobre el *CE* y el *CV* respectivamente, porque presenta errores y dificultades para representarlos en forma *G*, *A*, *AN* y para establecer relaciones lógicas entre estos, que le permitan estructurar y sintetizar el esquema de la *DIFVV*.

#### Estudiante E7

Grafica la *FR* y la tangente a esta por un punto e interioriza esta acción en el proceso de identificar en forma *V* y *A* la diferencial de la función y el error de aproximar el incremento de la función por la diferencial.

Sin embargo, tiene dificultad para encapsular el proceso en el objeto *DIFR* en un punto e interpretarlo como una transformación lineal.

Intenta generalizar el concepto de *DIFR* al elemento contiguo *DIFVR* en forma *A*; sin embargo tiene dificultades al representar este elemento en forma *G* y *A*.

Comprende los conceptos de *DP* y *DD* como acciones, porque encuentra estas derivadas en forma *A*, pero no las interpreta en forma *G*, *AN* y *N*. No establece relaciones entre los elementos que configuran estos conceptos para hacer inferencias que le permitan resolver las situaciones propuestas.

No comprende los elementos *DICE* y *DICV* como acciones, procesos u objetos, lo cual no le permite establecer relaciones entre los elementos que los constituyen ni determinar coherencia y síntesis del desarrollo del esquema de la *DIFVV*.

En las Tabla 18 y 19 se exponen las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por los estudiantes en la construcción progresiva del esquema. Las relaciones que se establecen entre los elementos matemáticos en el nivel *Inter 1* son, además de las que figuran en dicho subnivel, las que se presentan en el subnivel *Intra*.

#### *Subnivel Inter 2*

##### Estudiante E6

En la construcción progresiva del esquema, comprende como acción y proceso la *DIFR*, por lo cual presenta las características del nivel *Intra* del esquema de la *DIFVV* (Tabla 18).

Comprende como acciones, procesos y objetos la *DP* y la *DD* en representación *A*, *G*, *N* y *AN*, como elementos contiguos a la *DIFR*. Por tanto, se ubica en el nivel *Inter 2* del desarrollo del esquema (Tabla 19).

Entiende los elementos *DICE* y *DICV* como acciones, pero no logra interiorizarlas en procesos y encapsular estos en objetos. Además, presenta errores y dificultades para hacer traducciones entre las formas de representación *G*, *A*, *N* y *AN* de los elementos

matemáticos y establecer relaciones necesarias entre estos para estructurar el esquema de la *DIFVV*.

### *Subnivel Inter*

#### Estudiante E4

Muestra características del nivel *Intra*, porque realiza la acción de graficar la función real de variable real y la tangente a esta en un punto, tiene dificultades al interiorizar esta acción en el proceso de recordar y traducir entre las formas de representación *G*, *A*, *AN*, la diferencial de la función y relacionarla a través del polinomio de Taylor de orden uno, con el incremento de la función y el error de aproximar el incremento de la función por la diferencial. Además, identifica los elementos relacionados con la *DIFR* en forma *A* y logra sintetizarlos al resolver una situación problema.

Comprende como objeto *DIFR*, lo desencapsula y lo utiliza como proceso para comprender la diferencial de una función vectorial *DIFV* como elemento contiguo a la *DIFR* y, por lo tanto, presenta las características del nivel *Inter 1* del esquema de la *DIFVV*.

Reconoce e interpreta la *DP* y la *DD* en los modos de representación *G*, *A*, *N* y *AN*, comprende como objeto estos elementos matemáticos, que caracterizan el nivel *Inter 2* del esquema *DIFVV*.

Reconoce e interpreta la *DICE* en representación *G*, *A* y *AN*, y comprende como proceso este elemento, que es una característica principal del nivel *Inter* del esquema de *DIFVV*.

La caracterización de estos subniveles del nivel *Inter* se representan en la Tabla 19.

El estudiante muestra errores y dificultades para establecer y demostrar propiedades que generalizan los elementos *DIFR*, *DIFVR*, *DICE* y *DICV*, que estructuran y dan coherencia al esquema de *DIFVV*.

## ***Nivel Trans***

### *Subnivel Trans 1*

#### Estudiante E3

La construcción progresiva del esquema se evidencia por las características presentadas en los niveles *Intra*, *Inter* y *Trans*, de la siguiente forma.

Respecto al desempeño en la Tarea 1, el estudiante alcanza el nivel *Intra* (Tabla 18), porque comprende la *DIFR* como acción y proceso, cuando recuerda y relaciona los elementos matemáticos que la configuran, y como objeto, cuando sintetiza los elementos y las relaciones para resolver una situación problema.

Sobre el desempeño en la Tarea 2, demuestra las características del nivel *Inter 1*, porque comprende la diferencial de una función real *DIFR* como proceso, y lo extiende al elemento próximo cognitivo, función vectorial de variable real *FVR*, cuando calcula e interpreta la diferencial de una función vectorial de variable real *DIVR* en forma *A* y *AN*, como parte del espacio tangente a la *FVR* en un punto.

Respecto al análisis de la solución de las tareas 3, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6.a, 6.b y 7, se infiere que el estudiante alcanza el nivel *Inter 2*, por las siguientes actuaciones:

Comprende como acción los elementos derivada parcial *DP* y derivada direccional *DD*, al calcular estas derivadas aplicando la definición como el límite del cociente incremental. Interioriza estas acciones en procesos, cuando resuelve algunas situaciones problema que requieren interpretar la *DP* y *DD* en representación *G*, *A*, *N* y *AN*. Encapsula la *DP* como un objeto que hace parte del vector gradiente sobre el cual se realizan nuevas acciones, como determinar la dirección en la cual crece más rápido la función.

Agrupar los elementos *DD* y *DP* como una generalización del proceso de derivación de funciones reales y vectoriales de variable real a la derivación de un campo escalar que forma parte de la *DICE*.

Intenta sintetizar los elementos *CE*, *DD*, *DP*, para resolver problemas que requieren la representación analítica de estos

elementos; sin embargo, las relaciones no son suficientes para interpretar la información que da el vector gradiente y para hallar curvas de nivel.

Sobre el desempeño en las tareas 4.c, 5.c, 6.d y 8, se concluye que el estudiante alcanza el nivel *Inter* del desarrollo del esquema de la *DIFVV*, por las siguientes razones:

Aplica la relación de implicación lógica ( $p \rightarrow q$ ), para verificar que un campo escalar es diferenciable: si  $\|v\| \rightarrow 0$ , entonces  $E(a, v) \rightarrow 0$ , lo cual requiere desencapsular los objetos límite, norma de un vector y la derivada direccional *DD*; comprender como proceso el elemento diferencial de un campo escalar *DICE*, que, a su vez, lo relaciona con los elementos incremento de la función en un punto  $\Delta f(a)$ , la *DD* de  $f$  en  $a$  en dirección del vector  $v = (\alpha, \beta)$  como la transformación lineal aplicada al vector dirección,  $\nabla f(a) \cdot v$ .

Utiliza la relación lógica de la implicación, al verificar el cumplimiento de la condición de diferenciabilidad y encapsular los elementos y relaciones inmersas en el objeto diferencial de un campo escalar *DICE* y formar la imagen conceptual de este objeto en un punto arbitrario del dominio, donde se define el *CE* como la diferencial de  $f$  en  $a$ ,  $Df(a) = \nabla f(a) \cdot v$ .

Sin embargo, presenta dificultades para desencapsular el objeto *DICE*, cuando intenta resolver la situación que requiere calcular el valor de una función en un punto  $a + h$ , cuando se posee información de la función y su derivada en el punto  $a$ .

La caracterización del nivel *Inter* se presenta en la Tabla 19.

Respecto a las solución de la Tarea 9, el estudiante alcanza el nivel *Trans 1* (Tabla 20), porque establece relaciones entre los elementos matemáticos derivada parcial *DP*, diferencial de un campo escalar *DICE*, gradiente de un campo escalar  $\nabla f(a)$ , comprendidos como objetos; los desencapsula y realiza acciones sobre estos elementos para comprender como proceso la diferencial de un campo vectorial *DICV*, en el modo de representación *A*.

Del análisis de las tareas 5.d, 5.e, 6.e, 6.f, 9.b y 10, se concluye que el estudiante no alcanza el nivel *Trans*, ya que no tiene éxito al

intentar establecer diferentes relaciones lógicas entre elementos que configuran y dan coherencia al esquema de la diferencial de funciones en varias variables, como se manifiesta en las siguientes actuaciones:

Comprende la *DIFVV* como acción, cuando verifica en forma directa que una función es diferenciable en un punto.

Enuncia la condición suficiente de diferenciabilidad, pero sin justificarla.

No relaciona los elementos matemáticos que permiten hacer síntesis para inferir resultados de la diferenciabilidad, como la continuidad, la existencia de las derivadas parciales y direccionales.

Verifica que los recíprocos de algunos resultados de la diferenciabilidad no se cumplen y están precisamente en las tareas en consideración.

No logra generalizar el concepto de diferenciabilidad de una función en varias variables y la interpreta como casos aislados según las dimensiones entre los espacios en que está definida la función.

### *Subnivel Trans*

Estudiante E2

Al resolver la Tarea 1, presenta las características del nivel *Intra* del esquema de la *DIFVV* que se caracteriza por lo relacionado en la Tabla 18.

Respecto a la Tarea 2, muestra las características del subnivel *Inter 1*, porque comprende la *DIFVR* como el proceso de calcular un vector cuyas componentes son las diferenciales de cada una de las *FR* en el punto que conforman la *FVR* y que las ha encapsulado en el objeto *DIFR* aplicado a un real.

Además, relaciona los elementos *FR*, *FVR*, *DIFVR*, cuando calcula e interpreta en forma *A* y *AN* el espacio tangente a la *FVR* en un punto.

Con respecto a las tareas 3, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6.a, 6.b, 6.c y 7, presenta las características del subnivel *Inter 2* del desarrollo del esquema, por las siguientes actuaciones:



Comprende como acción los elementos  $DP$  y  $DD$ , cuando calcula estas derivadas al evaluar el límite del cociente incremental o aplicar reglas de diferenciación. Interioriza estas acciones en un proceso, cuando resuelve problemas que requieren representar la  $DP$  y la  $DD$  en forma  $G$ ,  $A$ ,  $AN$  y  $N$ . Encapsula la  $DP$  en un objeto, cuando calcula el vector gradiente y da una interpretación  $AN$  de este.

Agrupar los objetos  $DD$  y  $DP$  para generalizar el proceso de derivación de funciones reales y vectoriales de variable real en el proceso de derivación de un campo escalar que forma parte de la  $DICE$ .

Sin embargo, tiene dificultades para sintetizar, cuando intenta relacionar los elementos  $CE$ ,  $DD$ ,  $DP$  para resolver problemas que requieren la representación  $A$  y  $AN$  de estos elementos.

Con referencia a la solución de las tareas 4.c, 5.c, 6.d y 8, se concluye que presenta las características del subnivel *Inter* del desarrollo del esquema, por las siguientes actuaciones:

Comprende la  $DICE$  como proceso, porque relaciona los elementos matemáticos que la configuran y la aplica para aproximar el valor de un  $CE$  en un punto.

Relaciona los elementos de la  $DICE$  a través de la implicación ( $p \rightarrow q$ ): si  $E(a, v) \rightarrow 0$  cuando  $\|v\| \rightarrow 0$ , entonces el  $CE$  es diferenciable en el punto, y establece la relación entre la  $DICE$  y la  $DD$ , lo cual requiere desencapsular los objetos límite, norma y transformación lineal en los procesos que los generaron. Además, de forma alterna, comprueba la diferenciable de un  $CE$  en un punto, aplicando la contrarrecíproca del  $TDICO$ .

Respecto a las soluciones de la Tarea 9, el estudiante muestra las características del nivel *Trans 1*, porque establece relaciones entre los objetos  $CE$ ,  $DICE$  y  $CV$ , para comprender la  $DICV$  como el proceso que dado un  $CV$ , un punto  $a$  y un vector  $u$ , transforma linealmente el vector  $u$  en un nuevo vector, cuyas componentes son las  $DICE$  que conforman el  $CV$  aplicadas al vector  $u$ .

Respecto al desempeño en las tareas 5.d, 5.e, 6.e, 6.f y 10, muestra las características del nivel *Trans*, porque comprende los

elementos *DIFR*, *DIFVR*, *DICE* y *DICV*, como acciones, procesos y objetos, los representa en forma *G*, *A*, *N* y *AN*, establece relaciones entre estos elementos y las partes que los constituyen, para determinar propiedades de derivabilidad, continuidad y diferenciabilidad de las *FVV*, demostrando completez y coherencia del esquema de la diferencial de una función en varias variables *DIFVV*.

Estudiante E1

Por la solución de la Tarea 1, manifiesta las características del nivel *Intra*, porque ha logrado tematizar el esquema de la derivada de una función real en un punto  $a$ ,  $Df(a)$  y construye las estructuras mentales de acción, cuando representa en forma *G* y *A* los siguientes elementos: función real *FR*, tangente a la función en un punto, incremento de la variable independiente  $h$  e incremento de la función en  $a$ ,  $\Delta f(a)$ .

Desencapsula el objeto función derivable en un punto  $Df(a)$ , en el proceso para calcular la derivada de una función en un punto y lo coordina con el proceso de incrementar la variable independiente  $x$ , desde el punto  $a$  hasta  $a + h$ , para construir la diferencial de la función  $f$  con incremento  $h$ ,  $f'(a) \cdot h$ .

Relaciona los elementos  $f'(a) \cdot h$  y  $\Delta f(a)$  en el polinomio de Taylor, que establece el error  $hE(a, h)$  cometido al aproximar el incremento  $\Delta f(a)$  por el diferencial,  $f'(a) \cdot h$ .

Verifica el cumplimiento de la condición, si  $hE(a, h)$  se aproxima más rápido a cero que el incremento  $h$ , para concluir que la función  $f$  es diferenciable en  $a$ .

Los anteriores procesos los encapsula en el objeto diferencial de una función real *DIFR*, al que utiliza para resolver una situación problema.

Por la forma como el estudiante resolvió la Tarea 2, se infiere que manifiesta las características del subnivel *Inter 1*, porque comprende la *DIFR* como objeto y lo desencapsula en el proceso para calcular la *DIFVR* en un punto, que es un vector cuyas componentes son las diferenciales de cada una de las *FR* en el punto, que conforman la *FVR*. Entiende como proceso la *DIFVR*, cuando relaciona los

elementos  $FR$ ,  $FVR$ ,  $DIFVR$ , para calcular e interpretar en forma  $A$  y  $AN$  el espacio tangente a la  $FVR$  en un punto.

Respecto al desempeño en las tareas 3, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6.a, 6.b y 7, presenta las características del nivel *Inter 2* del esquema de la  $DIFVV$ , por las siguientes razones:

Comprende como acción los elementos  $DP$  y  $DD$ , cuando calcula estas derivadas aplicando la definición como el límite del cociente incremental o aplicando reglas de diferenciación. Interioriza estas acciones en procesos, cuando resuelve situaciones problema que requieren interpretar la  $DP$  y  $DD$  en representación  $G$ ,  $A$ ,  $AN$  y numérica. Encapsula la  $DP$  como un objeto que hace parte del vector gradiente sobre el cual se realizan nuevas acciones, como determinar la dirección en la cual crece más rápido la función a partir de un punto de referencia.

Agrupar los elementos  $DD$  y  $DP$  para generalizar el proceso de derivación de funciones reales y vectoriales de variable real al proceso de derivación de un campo escalar que forma parte de la  $DICE$ . Demuestra capacidad de síntesis cuando relaciona los elementos  $CE$ ,  $DD$ ,  $DP$ , para resolver problemas que requieren la representación  $A$  y  $AN$  de estos elementos.

Respecto a la solución de las tareas 4.c, 5.c, 6.d y 8, muestra las características del subnivel *Inter* del desarrollo del esquema de la  $DIFVV$ , según los siguientes desempeños:

Establece relaciones entre elementos matemáticos que configuran la  $DICE$ , a través de la implicación lógica  $p \rightarrow q$ , para verificar la diferenciabilidad de un  $CE$  en un punto: si  $\|v\| \rightarrow 0$ , entonces  $E(a, v) \rightarrow 0$ , al desencapsular los objetos límite, norma y transformación lineal, en los procesos que los generaron, para calcular la norma del vector  $v$ , verificar la linealidad de la transformación  $T_a$  definida de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$  y coordinarlos con el proceso que, dado un  $CE f$ , un punto  $a$  y un vector  $v$ , aproxima el incremento de la función en un punto,  $\Delta f(a)$ , con la transformación lineal aplicada al vector,  $T_a(v)$ , y el error de aproximación es  $\|v\|E(a, v)$ .

Coordina los procesos anteriores para verificar que si  $\|v\| \rightarrow 0$ , entonces  $\|v\|E(a, v) \rightarrow 0$  y concluye que la función es diferenciable en

*a.* La transformación lineal aplicada al vector es igual a la *DD* del *CE* en *a* según el vector dirección *v* y se calcula como el producto punto del vector gradiente del campo escalar evaluado en el punto *a* con el vector dirección *v*,  $\nabla f(a) \cdot v$ .

Si el *CE* es diferenciable, encapsula los elementos y las relaciones anteriores en el elemento diferencial de un campo escalar *DICE* y forma la imagen conceptual de este objeto en un punto del dominio donde se define el *CE* como la transformación lineal, (la diferencial de *f* en *a*,  $Df(a)$ ), tal que para cada vector *v*, lo transforma linealmente en el escalar,  $Df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v$

Respecto a las soluciones de la Tarea 9, demuestra las características del nivel *Trans 1*, porque comprende la *DICV* como el proceso que, dados un *CV* diferenciable *f* definido en una abierto *A* de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ , un punto *a* de *A* y un vector *u* en  $\mathbb{R}^n$ , desencapsula los objetos *DP* y gradiente de un *CE*, para formar la matriz jacobiana cuyos vectores fila son los gradientes de los *CE*,  $f_i$ ,  $i = 1 \dots m$ , que componen el *CV*, evaluados en *a*,  $\nabla f_i(a)$  y que representan la *DICV* como la aplicación que, a cada vector *u* de  $\mathbb{R}^n$ , lo transforma linealmente en un vector en  $\mathbb{R}^m$ , que es igual a la *DD* del *CV* en el punto *a* en dirección del vector *u* y se calcula como el producto entre la matriz jacobiana con el vector *u*.

Del análisis de las tareas 5.d, 5.e, 6.e, 6.f, 9.b y 10, demuestra las características del nivel *Trans*, porque comprende los elementos *DIFR*, *DIFVR*, *DICE* y *DICV*, como acciones, procesos u objetos, los representa en forma *G*, *A*, *N* y *AN*, establece relaciones entre los elementos internos que los configuran para caracterizar propiedades, demostrando completez y coherencia del esquema de la diferencial de una función en varias variables *DIFVV* cuando resuelve situaciones problemas.

Las características de los niveles de los estudiantes *E1*, y *E2* se exponen en forma sintética en las Tabla 18, Tabla 19 y Tabla 20.

### ***Análisis global de los estudiantes***

Después del análisis individual de los estudiantes, se analizó el grupo de manera general de acuerdo con la solución plausible del

cuestionario, los desempeños en las tareas, las argumentaciones en las entrevistas, y se clasificó según la triada de los niveles de desarrollo *Intra*, *Inter* y *Trans*.

Al respecto, se constató que todos los estudiantes recuerdan por lo menos un elemento matemático que configura el esquema de la *DIFVV* y lo representan de algún modo.

En el nivel *Intra*, los estudiantes establecen relaciones entre los elementos internos del objeto *DIFR* del esquema. Se determinan los siguientes dos subniveles con las respectivas características:

*Intra 1.* El estudiante recuerda elementos matemáticos de la *DIFR* de manera aislada y en una única forma de representación, la algebraica. Cuando intenta representarlo en otra forma, no logra elaborar relaciones lógicas entre las partes que lo constituyen y además comete errores en las operaciones. El estudiante *E8* demuestra estas características.

*Intra.* El estudiante recuerda, como acción o proceso, elementos matemáticos representados en forma *A* o *G* que constituyen el objeto *DIFR* del esquema de la *DIFVV*. Sin embargo, no logra relacionar la *DIFR* con otros elementos que configuran el esquema. El estudiante *E9* presentó estas características diferenciadoras.

El siguiente nivel de esquema, denominado *Inter*, se caracteriza porque los estudiantes empiezan a establecer relaciones entre el objeto *DIFR* con elementos contiguos. Se determinan los siguientes subniveles:

*Inter 1.* Los desempeños del estudiante en este nivel demuestran que encuentra la relación de conjunción o implicación lógica entre el objeto *DIFR* con la *DIFVR*, que es comprendida como acción o proceso y es representada en forma *G* o *A*. En este nivel se ubicaron los estudiantes *E5* y *E7*.

*Inter 2.* Lo característico de este subnivel es que determina la relación de conjunción o implicación lógica entre el objeto *DIFR* con la *DP* o *DD*, comprendidas como acción o proceso y representadas en forma *G*, *A*, *N* o *AN*. Además indica esbozos de síntesis al utilizar estas

relaciones y objetos para resolver situaciones problema. El estudiante *E6*, por los desempeños demostrados, alcanzó este nivel.

*Inter.* En este subnivel, los estudiantes relacionan el objeto *DIFR* con el objeto *DICE*, representándolo en forma *G*, *A* o *N* y lo utilizan para resolver ejercicios y situaciones problema. En este subnivel se ubicó el estudiante *E4*.

Finalmente, en el nivel *Trans*, los estudiantes pueden determinar relaciones (conjunción lógica, condicional, contrarrecíproco, bicondicional) sin muchas restricciones entre los elementos del esquema y producir síntesis entre las representaciones *G*, *A* y *AN*. En este nivel se caracterizan dos subniveles.

*Trans 1.* En este subnivel, el estudiante logra originar relaciones entre la *DIFR*, la *DICE*, la *DP* y la *DD* para generar un nuevo elemento del esquema, la *DICV*. Aquí se ubica el estudiante *E3*.

*Trans.* Se caracteriza porque el estudiante aplica diferentes relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, descubre propiedades de estos e infiere información para resolver situaciones problema, demostrando coherencia y completez del esquema de la *DIFVV*. Además expresa capacidad para sintetizar y generalizar procesos. En este nivel se ubican los estudiantes *E1* y *E2*.

### ***Desarrollo del esquema del concepto de diferencial de una función en varias variables***

En esta sección se exponen los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de la *DIFVV*; se describe la comprensión de los elementos matemáticos en términos de acción, proceso, objeto y esquema, las relaciones lógicas que establecen entre estos y las formas de representación.

#### *Nivel Intra.*

Los estudiantes que se ubican en este nivel centran sus actuaciones en acciones repetitivas u operaciones entre elementos internos de la diferencial de una función real *DIFR*. Además, no relacionan la *DIFR* con otros objetos del esquema. En este nivel se consideran los subniveles *Intra 1* e *Intra*, caracterizados por los siguientes desempeños de los estudiantes.

### Subnivel Intra 1

C1. No recuerda ninguno de los siguientes elementos matemáticos, ni de las partes que lo constituyen: *DIFR*, *DIFVR*, *DICE* y *DICV*.

C2. Recuerda elementos internos que constituyen la *DIFR*, o, la *DIFVR*, o la *DICE*, o la *DICV*, algunos con errores y en un único modo de representación *G*, *A*, pero sin determinar ninguna relación entre estos.

### Subnivel Intra

C1. Recuerda algunos de los siguientes elementos internos de la *DIFR*: función real *FR*; tangente a una función en un punto; incremento de la variable independiente, *h*; incremento de la función *f* en el punto *a*,  $\Delta f(a) = f(a + h) - f(a)$ . Sin embargo, lo hace de forma aislada sin establecer relaciones entre estos y en un único modo de representación.

C2. Realiza acciones con los elementos internos de la *DIFR*, como representar la recta secante que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(a + h, f(a + h))$ , calcular la pendiente de esta secante, representar la tangente a la función en el punto  $(a, f(a))$ , hallar la derivada de la función aplicando reglas de diferenciación, encontrar la parte principal del polinomio de Taylor. Sin embargo, no pueden inferir a partir de estas acciones la *DIFR* como proceso u objeto y aplicarlo con éxito en la solución de problemas.

C3. Representa en forma *A* y *G* la construcción de la derivada de una *FR*, al relacionar con la conjunción lógica en la expresión (44), los siguientes elementos internos que la constituyen: la función *f* real de variable real *FR*; incremento de la variable independiente, *h*; incremento de la función *f* en el punto *a*,  $\Delta f(a)$ . Luego ejecuta la acción de evaluar el límite cuando  $h \rightarrow 0$  del cociente según (44) y obtiene la siguiente implicación lógica: si el límite existe, entonces la derivada de *f* en *a* existe y se nota como  $f'(a)$ .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{h} \quad (44)$$

Posteriormente, mediante la ecuación (45) relacionan la derivada  $f'(a)$  y el cociente de incrementos.

$$E_a: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h \mapsto E_a(h) = \begin{cases} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), & \text{si } h \neq 0 \\ 0, & \text{si } h = 0. \end{cases} \quad (45)$$

Finalmente, según la ecuación (46) aproxima  $f(a+h) - f(a)$ , con la aplicación lineal  $f'(a)h$  más un error  $hE(a,h)$  dado por (45). Verifica la implicación, si  $h \rightarrow 0$  entonces  $hE(a,h) \rightarrow 0$  (el error  $hE(a,h)$  es de orden menor que  $h$  para valores pequeños de  $h$ ). Si la anterior relación condicional se cumple, entonces concluye que la FR es diferenciable en  $a$  y por tanto la DIFR existe y es la transformación lineal,  $f'(a)$  la cual aplica el número real  $h$  en el real  $f'(a)h$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + hE(a,h). \quad (46)$$

Además, puede aplicar el concepto *DIFR*, para determinar la diferenciabilidad de una función particular en un punto específico y resolver una situación problema.

El estudiante E9 demostró algunas de estas características, lo que hizo que se ubicara en este subnivel del desarrollo del esquema.

*Nivel Inter.*

Los estudiantes en este nivel pueden relacionar la *DIFR* con los elementos contiguos, función vectorial de variable real y función real de variable vectorial. Estas relaciones surgen cuando reconocen que la diferenciación se generaliza de *FR* a funciones vectoriales de variable real, como la *DIFR* de cada una de sus componentes.

Además, se dan cuenta que para funciones reales de variable vectorial o campos escalares, los objetos derivada direccional *DD* y derivada parcial *DP* no son una generalización satisfactoria del objeto *DIFR*, porque en este tipo de funciones derivabilidad no implica continuidad. Por tanto, comprenden la *DICE* como una generalización reconstructiva de la derivada de una *FR*, que permite extender la



noción de *DIFR* a los campos escalares y así tener una propiedad para garantizar la continuidad de estos objetos en un punto.

Para describir estas generalizaciones y estructurar el análisis de acuerdo con el desempeño de los estudiantes al intentar resolver las tareas, se precisaron los siguientes subniveles del nivel Inter: Inter 1, Inter 2 e Inter, con las siguientes características.

### Subnivel Inter 1

C1. Reconocer la *DIFVR* como elemento matemático contiguo a la *DIFR*. Se evidencia cuando el estudiante ha comprendido la función vectorial de variable real *FVR*, definida de un abierto  $J \subseteq \mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^m$ , como objeto, y la descompone en  $m$  *FR* y a cada una de estas le calcula la *DIFR* para construir el elemento contiguo, la diferencial de una función vectorial de variable real *DIFVR* compuesto por las  $m$  *DIFR* aplicado a un mismo real.

C2. Establecer relaciones entre los elementos contiguos *DIFR* y *DIFVR*. Se presentan cuando el estudiante ha comprendido los elementos *FR*, *FVR*, *DIFR* y *DIFVR* como procesos u objetos. Los relaciona por la condición lógica, si las *DIFR* que componen la *DIFVR* no son todas cero, entonces realiza acciones que transforman estos elementos para representar en forma  $A$  el espacio tangente a la *FVR* definido por las ecuaciones paramétricas.

Los estudiantes E5 y E7 demostraron en los desempeños de las tareas y entrevistas la mayoría de estas características, por lo cual se ubicaron en este subnivel.

### Subnivel Inter 2

C1. Identificar los elementos matemáticos *DD* y *DP* de naturaleza similar a la derivada de una función real *DEFR*. Ocurre cuando el estudiante extiende el concepto derivada de una *FR* a campos escalares y vectoriales para calcular la derivada direccional (*DD*) o parcial (*DP*) en diferentes formas de representación.

C2. Generalizar los procesos de derivación de una *FR* a un *CE* o un *CV*. Se manifiesta cuando relaciona los elementos *DIFR*, *DD*, *DP*

y logra generalizarlos en el proceso que calcula la derivada de una función en varias variables en un punto respecto a un vector dirección, y comprende esta derivada como una transformación, que cuando tiene la propiedad de ser lineal, se puede calcular como el producto interior del vector gradiente evaluado en el punto con un vector dirección de  $\mathbb{R}^n$ , y además, utiliza este concepto para resolver situaciones problema.

El estudiante *E6*, según las actuaciones en las tareas del cuestionario y en las entrevistas, demostró las características de este nivel.

### Subnivel Inter

C1. Reconocer propiedades de continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de los elementos matemáticos *FR* y *CE*. Se manifiesta cuando reflexiona sobre la relación, derivabilidad implica continuidad, que se cumple para *FR*; esta no se verifica para campos escalares y vectoriales. Por tanto, debe extender el concepto de *DIFR* a la *DICE*, para garantizar la continuidad del *CE*.

C2. Establecer relaciones entre elementos matemáticos internos que configuran la *DICE*. Cuando reconoce los siguientes elementos: *CE*, transformación lineal  $T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y los relaciona mediante la función definida en (47).

$$E_a: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$v \rightarrow E_a(v) = \begin{cases} \frac{f(a+v) - f(a) - T_a(v)}{\|v\|_n}, & \text{si } v \neq 0 \\ 0, & \text{Si } v = 0 \end{cases} \quad (47)$$

Con las anteriores relaciones se genera otra, descrita por la expresión (48), la cual permite concluir que si existe la transformación lineal  $T_a$  y la función  $E(a, v)$  de tal manera que para  $\|v\| < r$ ,  $r > 0$ ,  $E(a, v) \rightarrow 0$  cuando  $v \rightarrow 0$ , entonces el campo escalar  $f$  es diferenciable en un punto  $a$ .

$$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|E(a, v). \quad (48)$$

Además, se puede sintetizar el proceso anterior como equivalente de verificar que si se cumplen las relaciones descritas por (49), entonces el campo escalar  $f$  es diferenciable en  $a$ .

$$\lim_{\|v\| \rightarrow 0} \frac{f(a+v) - f(a) - T_a(v)}{\|v\|} = 0. \quad (49)$$

Por otra parte, genera nuevas relaciones entre la diferencial  $T_a$  con las derivadas parciales al determinar que si el campo escalar  $f$  es diferenciable en  $a$ , entonces  $T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v$  y puede aplicar este concepto para resolver situaciones problema. En este subnivel se ubicó el estudiante E4.

#### *Nivel Trans*

En este nivel se caracterizan los estudiantes que logran generalizar el proceso de diferenciación a funciones en varias variables y fijar síntesis en el esquema cuando relacionan elementos matemáticos para hacer inferencias en la solución de situaciones problema. Se determinaron los subniveles *Trans 1* y *Trans* de este nivel, según los siguientes desempeños demostrados.

#### Subnivel Trans 1

C1. Establecer relaciones entre el elemento matemático *DICE*, comprendido como proceso u objeto, con la *DICV*. Se manifiesta cuando ha entendido el elemento *DICE* como objeto, lo desencapsula en el proceso que verifica si un *CV* es diferenciable en un punto, así: si todos los *CE* que conforman el *CV* son diferenciables en el punto, entonces el *CV* es diferenciable en este. Además, calcula la *DD* del *CV* como el producto de la matriz jacobiana (matriz que representa transformación lineal  $T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  formada por los  $m$  gradientes de los campos escalares que conforman el *CV* evaluados en el punto) por el vector dirección.

C2. Presentar primeros intentos de síntesis entre los elementos matemáticos *DIFR*, *DIFVR*, *DICE*. Ocurre al intentar generalizar los procesos de diferenciación de una *FR*, *FVR* y *CE* para calcular la *DICV* en un punto, verificando que se cumple la ecuación (50) cuando  $f$  es un *CV*.

$$\lim_{\|v\|_n \rightarrow 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - T_a(v)\|_m}{\|v\|_n} = 0. \quad (50)$$

En este subnivel se ubica el estudiante E3.

### Subnivel Trans

C1. Establecer relaciones lógicas entre los elementos que configuran el esquema de la DIFVV, para inferir propiedades que se describen a continuación:

- En una *FR*, al determinar la siguiente relación lógica bicondicional: la diferencial de una *FR* en un punto es equivalente a la derivada de la función en el punto, (en notación de álgebra proposicional,  $p \leftrightarrow q$ ).
- En una *FR* se cumple la relación condicional lógica, si existe la derivada de la función en un punto, entonces la función es continua en este. Sin embargo, esta relación no se cumple para una *FVV* y se expresa en forma equivalente como la negación de esta condicional así: existen *FVV* que poseen derivadas parciales en un punto y no son continuas en este (en notación de álgebra proposicional,  $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$ ).
- Para una *FVV* no se cumple la propiedad, la derivabilidad implica la diferenciabilidad, expresando este hecho como la negación del condicional así: existen funciones que son derivables en un punto y no son diferenciables en este (en notación de álgebra proposicional,  $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$ ).
- Las *FVV* satisfacen la relación que diferenciabilidad implica la continuidad TDICO. Se evidencia cuando aplican el contrarrecíproco de esta relación de la siguiente manera: si una función no es continua en un punto, entonces no es diferenciable en este (en notación de álgebra proposicional,  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$ ).
- La condición suficiente pero no necesaria para que una función sea diferenciable en un punto CSDI, se puede evidenciar si una función es diferenciable en un punto al analizar la existencia de las

derivadas parciales en una vecindad del punto y la continuidad de estas en el punto, en álgebra proposicional  $p \rightarrow q$ .

- La diferenciabilidad en un punto de una FVV implica la existencia de la derivada direccional en este, cualquiera que sea el vector dirección (TDIDD), y esta derivada es igual al producto del gradiente evaluado en el punto con el vector dirección. Para el caso particular de un CE, la diferenciabilidad en un punto de su dominio implica la existencia de todas las derivadas parciales TDIDP.
- Los recíprocos de los teoremas DIDD y DIDP no se cumplen, cuando justifica que hay puntos del dominio de definición de una FVV donde existen las derivadas cualquiera sea la dirección y, sin embargo, la función no es diferenciable en estos puntos (en notación de álgebra proposicional,  $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$ ). Además, cuando se verifica que la función no es diferenciable en un punto, la derivada direccional en este, cualquiera que sea su dirección, no es igual al producto punto del gradiente calculado en el punto con el vector dirección y, por tanto, esta derivada debe ser evaluada utilizando la definición como el límite del cociente de incrementos.
- Establecer coherencia del esquema de la DIFVV. Se presenta cuando generaliza y sintetiza las propiedades que satisfacen los elementos matemáticos para determinar cuándo una FVV es diferenciable en un punto y precisar su diferencial según de las dimensiones de los espacios entre los cuales esté definida la función como DIFR, DIFVR, DICE y DICE.
- En este nivel se ubican los estudiantes E1 y E2. En la Tabla 20 se caracteriza el desarrollo del esquema de la DIFVV.

<i>Subniveles</i>	<i>Características</i>	<i>Elementos matemáticos y sistemas de representación</i>
<i>Intra 1</i>	<p><b>C1.</b> No utilizar elementos matemáticos.</p> <p><b>C2.</b> No establecer relaciones entre los elementos matemáticos.</p>	

<i>Subniveles</i>	<i>Características</i>	<i>Elementos matemáticos y sistemas de representación</i>
<i>Intra</i>	<p><b>C1.</b> Recordar elementos matemáticos internos de la <i>DIFR</i>, de forma aislada.</p> <p><b>C2.</b> Establecer relaciones entre los elementos matemáticos internos de la <i>DIFR</i>, comprendidos como acciones.</p> <p><b>C3.</b> Recordar y relacionar los elementos matemáticos internos de la <i>DIFR</i>.</p>	<p><i>Función real</i> (<math>G, A</math>). <i>Diferencial de una función real</i> (<math>G</math>):</p> <p>Derivada de una función como transformación. Incremento de la función. Aproximación del incremento de la función por el diferencial. Error al aproximar el incremento de la función por el diferencial.</p> <p><i>Diferencial de una función real</i> (<math>A, AN</math>):</p> <p>Derivada de una función como una transformación. Incremento de la función. Aproximar el incremento de la función en un punto por la diferencial. Error al aproximar el incremento de la función por el diferencial. Demostración directa de diferenciabilidad. La diferencial como un operador lineal. Condición suficiente de diferenciabilidad.</p>

Tabla 18. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación del nivel Intra 1 e Intra del esquema de diferencial

<i>Subniveles</i>	<i>Características</i>	<i>Elementos matemáticos y sistemas de representación</i>
<i>Inter 1</i>	<b>C1.</b> Reconocer la <i>DIFVR</i> como elemento matemático contiguo a la <i>DIFR</i> .	<i>Función real</i> ( $A$ ). <i>Función vectorial de variable real</i> ( $A$ ).

<i>Subniveles</i>	<i>Características</i>	<i>Elementos matemáticos y sistemas de representación</i>
<i>Inter 1</i> (continuación)	<b>C2.</b> Establecer relaciones entre los elementos matemáticos contiguos <i>DIFR</i> y <i>DIFVR</i> .	<p><i>Diferencial de una función real (A):</i></p> <p>Diferencial de una función real como operador lineal.</p> <p><i>Diferencial de una función vectorial de variable real (A):</i></p> <p>Diferencial de una función vectorial como un operador lineal.</p> <p>Espacio tangente a una función vectorial de variable real en un punto.</p>
<i>Inter 2</i>	<p><b>C1.</b> Identificar los elementos matemáticos <i>DD</i> y <i>DP</i> de naturaleza similar a la <i>DEFR</i>.</p> <p><b>C2.</b> Generalizar los procesos de derivación de una <i>FR</i> a un <i>CE</i> o un <i>CV</i>.</p>	<p><i>Campo escalar (G, A, T).</i></p> <p><i>Derivada parcial (G, A, T, AN):</i></p> <p>Derivada parcial como la pendiente de la recta tangente a una curva.</p> <p>Reglas de diferenciación para calcular la derivada.</p> <p>Aproximación de la derivada parcial por diferencias finitas.</p> <p><i>Derivada direccional (A, AN):</i></p> <p>Derivada direccional como el límite de un cociente de incrementos.</p> <p>Derivada parcial como caso particular de la derivada direccional.</p> <p>Linealidad de la derivada direccional.</p>
<i>Inter</i>	<b>C1.</b> Reconocer propiedades de continuidad, derivabilidad y	<p><i>Campo escalar (N, A)</i></p> <p><i>Diferenciabilidad de un campo escalar (A, AN, N):</i></p> <p>Derivada de un campo</p>

<i>Subniveles</i>	<i>Características</i>	<i>Elementos matemáticos y sistemas de representación</i>
<i>Inter</i> (Continuación)	<p>diferenciabilidad de los elementos matemáticos <i>FR</i> y <i>CE</i>.</p> <p><b>C2.</b> Establecer relaciones entre elementos matemáticos internos de la <i>DICE</i>.</p>	<p>escalar como una transformación.</p> <p>Incremento de un campo escalar.</p> <p>Operador derivada de un campo escalar aplicado a un vector.</p> <p>Aproximación del incremento de un <i>CE</i> por el operador derivada.</p> <p>Resto de aproximar el incremento del <i>CE</i> por el operador derivada.</p> <p>Diferencial de un <i>CE</i> como una transformación lineal.</p>

Tabla 19. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación del nivel Inter 1, Inter 2 e Inter del esquema de diferencial de una función en varias variables

<i>Subniveles</i>	<i>Características</i>	<i>Elementos matemáticos y sistemas de representación</i>
<i>Trans 1</i>	<p><b>C1.</b> Establecer relaciones entre el <i>DICE</i>, comprendido como proceso u objeto, con <i>DICV</i>.</p> <p><b>C2.</b> Presentar primeros intentos de síntesis entre los elementos matemáticos <i>DIFR</i>, <i>DIFVR</i>, <i>DICE</i>.</p>	<p><i>Campo vectorial (A).</i></p> <p><i>Diferencial de un campo vectorial (A):</i> Derivada de un campo vectorial como una transformación.</p> <p>Incremento de un <i>CV</i> en un punto.</p> <p>Resto de aproximar el incremento de un <i>CV</i> en un punto por la derivada de un <i>CV</i> evaluada en un punto aplicada a un vector.</p> <p>Condición directa para demostrar la diferenciabilidad de un <i>CV</i> en un punto.</p> <p>La <i>DICV</i>, como una transformación lineal.</p>



Subniveles	Características	Elementos matemáticos y sistemas de representación
Trans	<p><b>C1.</b> Establecer relaciones lógicas entre los elementos que configuran la <i>DIFVV</i> para inferir propiedades.</p> <p><b>C2.</b> Establecer coherencia del esquema de la <i>DIFVV</i></p>	<p><i>Diferencial de una función en varias variables (A, AN).</i></p> <p>Condición directa para mostrar que una función es diferenciable.</p> <p>Condición suficiente de diferenciabilidad.</p> <p>Diferenciabilidad implica continuidad.</p> <p>Diferenciabilidad implica la existencia de la derivada parcial.</p> <p>Diferencial de una función real de variable real.</p> <p>Diferencial de una función vectorial de variable real.</p> <p>Diferencial de un campo escalar.</p> <p>Diferencial de un campo vectorial.</p>

Tabla 20. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan el nivel Trans 1 y Trans del esquema de diferencial de una función en varias variables

El paso del nivel *Intra* al *Inter* se da cuando el estudiante desencapsula el objeto *DIFR* en procesos para realizar síntesis, generar nueva información para calcular derivadas de funciones vectoriales de variable real y de funciones reales de variable vectorial.

El paso del *Inter* al *Trans* se percibe cuando el estudiante desencapsula la *DICE* y aplica procesos para calcular la derivada de un campo vectorial y la derivada de una función en varias variables.

En la Tabla 21 se expone el resumen de las características, marcadas con *X*, que mostraron los estudiantes y que permitió ubicarlos en los niveles de desarrollo del esquema, donde se puede apreciar lo siguiente:

- Los estudiantes se clasificaron en los diferentes niveles de desarrollo, dependiendo del número de elementos matemáticos que recordaron, las relaciones que determinaron entre estos y las formas de representación, cuando intentaron resolver las tareas diseñadas para requerir cierta información para la solución (en términos de las estructuras mentales como acción, proceso u objeto de los conceptos de DIFR, DIFRV, DICE o DICV), y que caracterizaban cada nivel.
- Los estudiantes E5, E6, E7 y E8 recuerdan elementos matemáticos de manera aislada, porque presentan características en forma discontinua en los diferentes niveles de desarrollo.
- La diferencia en los niveles de desarrollo del esquema de los estudiantes se presenta porque algunos solo recuerdan los elementos matemáticos, mientras que otros, además de recordarlos, los pueden relacionar y utilizar.
- Existen diferencias dentro de un mismo nivel (Inter, Intra o Trans) por la cantidad de elementos matemáticos que utilizan de forma correcta y por las relaciones lógicas que establecen entre estos para resolver las tareas.
- A los estudiantes que tienen facilidad para comprender los elementos matemáticos en diferentes formas de representación, también se les facilita determinar relaciones lógicas y resolver situaciones problema. Sin embargo, se nota una tendencia a utilizar la representación algebraica, así como a emplear fórmulas y expresiones, pero cuando las funciones están representadas en forma numérica o tabular, tienen dificultad para interpretar los conceptos y resolver problemas.

Niveles	Intra					Inter						Trans			
Subnivel	Intra 1		Intra			Inter 1		Inter 2		Inter		Trans 1		Trans	
Estudiante	C1	C2	C1	C2	C3	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2	C1	C2
E1			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
E2			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
E3			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
E4			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
E5			X		X	X	X	X				X			
E6			X					X	X						
E7			X	X	X	X		X							
E8			X	X	X										
E9		X													

Tabla 21. Estudiantes y características según niveles de desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables.