RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Teniendo como referencia la descomposición genética preliminar, la solución plausible del cuestionario, las soluciones individuales de cada tarea presentada por los estudiantes al resolver el cuestionario, se llevó a cabo una primera etapa de análisis de esta información, que dio como resultado la codificación de las diferentes categorías para cada tarea y de estas categorías se estableció cuáles mostraron los estudiantes (Tabla 13).

La segunda etapa de análisis consistió en determinar las relaciones entre los elementos matemáticos en la solución plausible del cuestionario, según la **DG** preliminar y las categorías identificadas en la fase anterior. Este análisis se realizó con el *software* Atlas.ti7, según la codificación y el significado de cada categoría y la identificación de estas en la solución del cuestionario. De este análisis se generó una red semántica para cada tarea (Figura 47 a Figura 56) y una red semántica general (Figura 57).

En la tercera etapa se analizaron las entrevistas semiestructuradas que se hicieron a los estudiantes y se elaboró un resumen general de las categorías mostradas por los estudiantes en las entrevistas (Tabla. **14**). Posteriormente se trianguló la información entre la DG preliminar, las categorías según la red semántica de la solución plausible de cada tarea, la solución del cuestionario por cada estudiante y el análisis de la entrevista.

La cuarta etapa del análisis consistió en agrupar las categorías y establecer niveles y subniveles de comprensión del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables desde el punto de vista de la teoría APOE, a través de la descripción de las estructuras mentales y los mecanismos mentales utilizados para su construcción, a fin de generar los resultados de los niveles de comprensión que demostraron los estudiantes. Esta etapa permitió validar y refinar la DG preliminar.

Primera etapa: identificar categorías del cuestionario definitivo

En esta sección se exponen las categorías y subcategorías que emergieron del análisis de las soluciones presentadas por los estudiantes. El significado de las subcategorías se estableció de acuerdo con los elementos matemáticos, el objetivo, los descriptores, las variables y las respuestas dadas por los estudiantes, según el cuestionario definitivo. Esto permite describir las relaciones entre los elementos matemáticos para caracterizar los niveles de comprensión de la DIFVV.

En la Tabla 13, para cada tarea se anotan, en la primera columna, los ítems, en la segunda, la categoría, los códigos y el significado de la subcategoría. Los códigos son de la forma *Tmn*, donde *T* es tarea, *m*, el ítem y *n* el consecutivo. Por ejemplo, el código *T1ac3*, corresponde al ítem *1.a.* de la Tarea *1,* Categoría *3*.

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
1.a.	*T1ac1*. Representar la gráfica de una función f y la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$. *T1ac2*. Identificar en la gráfica el incremento de la variable independiente h, el incremento de la variable dependiente, $\Delta f(a)$ y la diferencial de f en a, $df(a,h)$. *T1ac3*. Polinomio de Taylor, relacionar en la gráfica y en forma algebraica los elementos: $\Delta f(a)$, $df(a,h)$, y $\lvert h\rvert E(a,h)$.
1.b.	*T1bc1*. Demostrar en forma directa que f es diferenciable en el punto a. *T1bc2*. Demostrar en forma indirecta que f es diferenciable en un punto a. *T1bc3*. Diferencial de f en el punto a como la transformación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, $T_a(h) = f'(a)h$.

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
1.c.	*T1cc1*. Aplicación. Resuelva una situación problema aplicando la *DIFR*, identificando y relacionando los elementos matemáticos que la configuran en la parte principal del polinomio de Taylor: $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.
2.a.	*T2ac1*. Representación algebraica de la diferencial de la función g, vectorial en $\mathbb{R}^3$ de variable real, en el punto t_0 como: $Dg(t_0) = \left(g_1{}'(t_0), g_2{}'(t_0), g_3{}'(t_0)\right)$, si cada una de las derivadas de las funciones reales de variable real, $g_1{}'(t_0)$, $g_2{}'(t_0)$, $g_3{}'(t_0)$, existen y no son todas cero. *T2ac2*. Espacio tangente a C_g, $g(t_0) = \left(g_1{}'(t_0), g_2{}'(t_0), g_3{}'(t_0)\right) \in \mathbb{R}^3$.
2.b.	*T2bc1*. Representación algebraica del espacio tangente, C_g, a una función vectorial, (definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$, en $\mathbb{R}^3$, en el punto $g(t_0)$) calculando la diferencial de g en el punto y realizando las operaciones correspondientes.
3.a.	*T3ac1*. Representación gráfica e interpretación geométrica de la derivada parcial de un campo escalar respecto a la variable x, definido de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.
3.b.	*T3bc1*. Representación gráfica e interpretación geométrica de la derivada parcial de un campo escalar respecto a la variable y, definido de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.
4.a.	*T4ac1*. Evaluación e interpretación de un campo escalar de dos variables independientes, representado en forma tabular con datos provenientes de un fenómeno físico.
4.b.	*T4bc1*. Derivada parcial del campo escalar $h = h(v,t)$, respecto a las variables v y t, en un punto arbitrario (v_0, t_0) e

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
	interpretación como el límite de la razón media al variar solamente una variable y la otra permanecer constante. *T4bc2.* Derivada parcial de un campo escalar de dos variables representado en forma tabular como un valor aproximado de la razón media al variar solamente una variable y la otra permanecer constante.
4.c.	*T4cc1.* Aplicación de la diferencial de un campo escalar para aproximar el valor de este campo, $h = h(v,t)$, en un punto no registrado en la tabla de valores, utilizando la parte principal del polinomio de Taylor de orden 1, e interpretación de este resultado según la situación planteada.
5.a.	*T5ac1.* Teoremas de diferenciación para calcular derivadas parciales del campo escalar f en puntos donde este es continuo.
5.b.	*T5bc1.* Derivada parcial del campo escalar f respecto a cada variable en un punto como el límite del cociente incremental, $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_i)-f(a)}{h}.$$
5.c.	*T5cc1.* Condición directa para establecer diferenciabilidad de una función f en un punto a, verificando que se cumpla, $$\lim_{\Vert v\Vert\to 0}\frac{r(a,v)}{\Vert v\Vert} = \frac{f(a+v)-f(a)-\nabla f(a)\cdot v}{\Vert v\Vert} = 0.$$
5.d.	*T5dc1.* Continuidad de un campo escalar en un punto, analizando que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
5.e.	*T5ec1.* Justificar que un campo escalar no es diferenciable en un punto, argumentando alguna de las siguientes razones: No cumplir las hipótesis del teorema de la condición suficiente de diferenciabilidad: la existencia de las derivadas

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
	parciales en un entorno del punto y la continuidad de estas en el punto. Funciones que aunque poseen derivadas parciales en un punto, no son continuas en el punto, por lo tanto no son diferenciables. Ilustrar con el contraejemplo que se analizó en esta tarea, el cual posee derivadas parciales en el punto pero no es continua en él y, por tanto, no diferenciable. Función de varias variables que posee derivada direccional en un punto según cualquier vector dirección y sin embargo no es diferenciable en el punto.
6.a.	*T6ac1.* Derivada direccional de la función g en el punto (0,0) en dirección del vector $u = (a, b)$ como el límite del cociente incremental, $$g'\big((0,0),(a,b)\big) = \lim_{h\to 0}\frac{g\big((0,0)+h(a,b)\big)-g(0,0)}{h}$$
6.b.	*T6bc1.* Derivada parcial como un caso particular de derivada direccional de una función en un punto, cuando el vector dirección es uno de la base canónica de, $\mathbb{R}^2$ $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = g'\big((0,0),(1,0)\big)$ y $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = g'\big((0,0),(0,1)\big)$.
6.c.	*T6cc1.* No linealidad de la derivada direccional de g en a respecto al vector dirección mostrando que, $g'(a; u+v) \neq g'(a;u) + g'(a;v)$. Este resultado se tiene porque g no es diferenciable en (0,0).
6.d.	*T6dc1.* Condición directa para establecer la diferenciabilidad de la función en un punto, $$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{r(a,v)}{\|v\|} = \lim_{\|v\|\to 0}\frac{\Delta f(a) - \nabla f(a)\cdot v}{\|v\|} = 0.$$
6.e.	*T6ec1.* Verificar que el recíproco del siguiente teorema no se cumple: si una función f es diferenciable en un punto a,

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
	entonces la derivada direccional de f en a en dirección del vector u es igual al producto punto del vector gradiente de f evaluado en a con el vector dirección u.
6.f.	*T6ec1.* Caracterización de funciones de varias variables que la derivabilidad en un punto no implica diferenciabilidad en este. El criterio directo para que f sea diferenciable en a es que debe existir una transformación lineal T_a tal que $f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| r(a,v)$ y además que $\lim_{\|v\|\to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|} = 0$.
7.a.	*T7ac1.* Cálculo e interpretación del vector gradiente de un campo escalar en un punto.
7.b.	*T7bc1.* Interpretación de la derivada parcial de una función $z = f(x,y)$ respecto a una variable en un punto en una situación problema.
7.c.	*T7cc1.* Cálculo e interpretación de la derivada direccional de una función en un punto respecto a un vector dirección, en una situación problema.
7.d.	*T7dc1.* Significado del valor nulo de la derivada direccional y su aplicación para determinar direcciones para recorrer trayectoria de nivel, según la situación problema.
8.a.	*T8ac1.* Condición directa para establecer la diferenciabilidad de un campo escalar en un punto, calculando el residuo $r(a,v) = \Delta f(a) - \nabla f(a) \cdot v$ y verificando que $\lim_{\|v\|\to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|} = 0$.
8.b.	*T8bc1.* La diferencial de un campo escalar f en el punto a como la existencia de la transformación lineal definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ por la expresión $T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v$.

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
8.c.	*T8cc1.* Existencia del plano tangente a la gráfica de un campo escalar en un punto como la interpretación geométrica de la diferencial de f en el punto a y como la posibilidad de linealizar f en puntos cercanos de a.
9.a.	*T9ac1.* Cálculo de la diferencial de un campo vectorial f en un punto a, como la derivada direccional de f en a en dirección del vector u que es igual al producto de la matriz jacobiana de f en el punto a, $Jf(a)$, con el vector u. Algebraicamente se representa como, $$D_u f(a) = f'(a;u) = Jf(a) \cdot u = \left.\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}\right\rfloor_a \cdot u.$$
9.b.	*T9bc1.* Condición directa para establecer la diferenciabilidad de un campo vectorial en un punto, $$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{r(a,u)}{\|u\|} = \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\Delta f(a) - D_u f(a) \cdot u}{\|u\|} = \lim_{\|u\|\to 0} \frac{\Delta f(a) - Jf(a) \cdot u}{\|u\|} = 0.$$
10.	*T10ac1.* La diferencial de una función f en varias variables, definida en un abierto como la transformación lineal entre los espacios donde se define la función, para los siguientes casos: función real de variable real, función vectorial de variable real, campo escalar y campo vectorial.

Tabla 13. Categoría y subcategorías que emergen de las tareas. Fuente: el autor.

En la Tabla. **14** se presenta el resumen de las subcategorías mostradas por el grupo de estudiantes, luego del análisis individual de cada cuestionario. En esta tabla, en la primera columna se encuentra el código de la categoría, y en las siguientes columnas, los estudiantes que se han identificado con el seudónimo *En*, donde *n* va desde *1* hasta *9* y en cada celda de la tabla aparece la letra *S*, para indicar que el estudiante mostró la categoría correspondiente, o la letra *N* para el caso contrario.

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T1ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*
T1ac2	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T1ac3	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	*S*
T1bc1	*N*	*N*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*
T1bc2	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T1bc3	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T1cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*S*	*S*
T2ac1	*S*	*N*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*
T2ac2	*S*	*N*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T2bc1	*S*	*N*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T3ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T3bc2	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T4ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*
T4bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*
T4bc2	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T4cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*
T5ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*
T5bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T5cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*
T5dc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	*S*
T5ec1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T6ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T6bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*S*	*N*	*N*
T6cc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T6dc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T6ec1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T6fc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T7ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T7bc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T7cc1	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*
T7dc1	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T8ac1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T8bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T8cc1	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T9ac1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*S*
T9bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T10ac1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*

Tabla. 14 Categorías mostradas por los estudiantes al resolver las tareas del cuestionario

Segunda etapa: relaciones entre los elementos matemáticos

A continuación se presenta el resultado del análisis de las relaciones entre los objetos matemáticos que configuran los conceptos en cada tarea de la solución plausible del cuestionario según la *DG* y las categorías identificadas en la sección anterior y se representan en forma gráfica a través de redes semánticas.

Para la Tarea 1, la red semántica se expone en la Figura 47, donde se puede apreciar que la categoría *T1ac1* establece relaciones entre el objeto matemático función real de variable real, *FR*, con la diferencial de una función real de variable real *DIFR,* a través de pendiente de la recta tangente a la función en un punto. Las demás categorías de esta tarea muestran la relación directa entre otros elementos con el objeto *DIFR*. Para cada categoría se encuentran referenciados los segmentos de texto de la solución plausible del cuestionario.

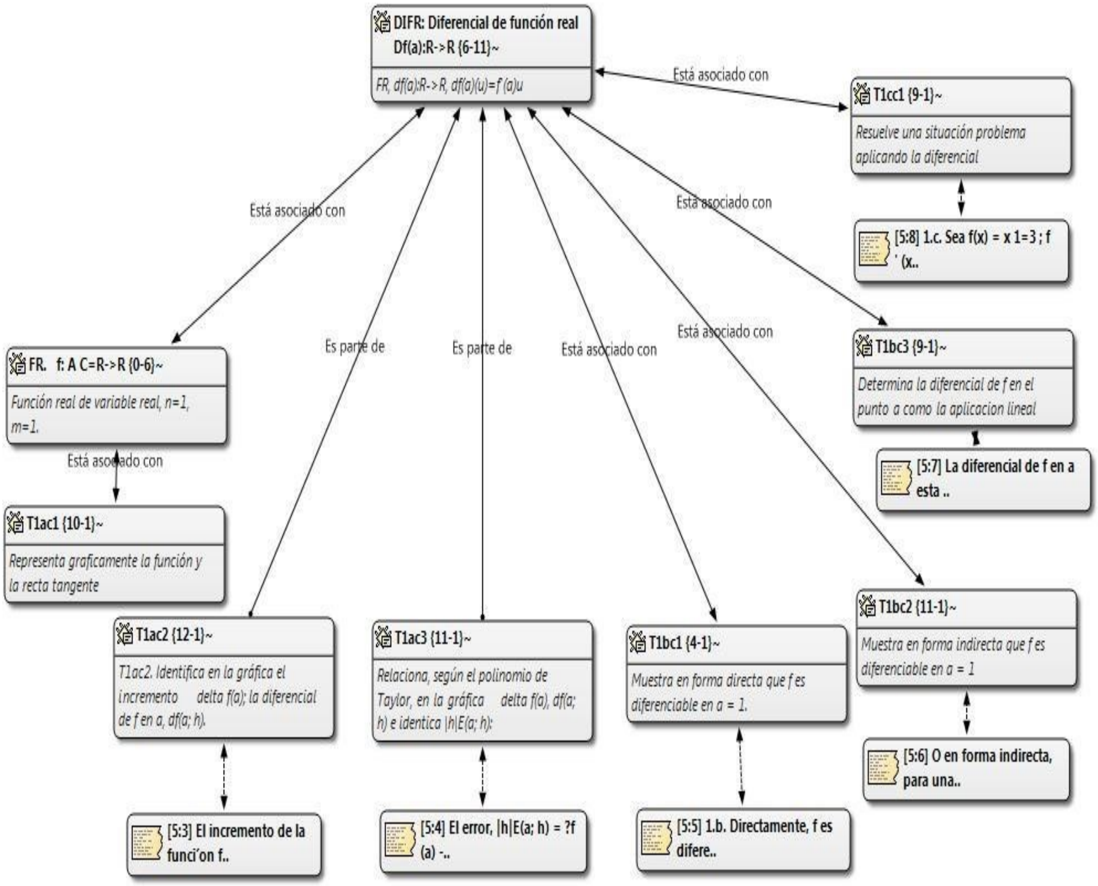

Figura 47. Red semántica de la Tarea 1. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Para la Tarea 2, la red semántica de la Figura 48 muestra las relaciones que establecen las categorías de esta tarea entre los siguientes elementos: función real *FR*, función vectorial de variable real *FVR*; cada *FVR* está compuesta por *m* funciones reales *FR*; la diferencial de una función vectorial de variable real *DIFVR* se relaciona con la *DIFR*, porque la transformación lineal *DIFVR* aplicada a una real está compuesta por *m* *DIFR*.

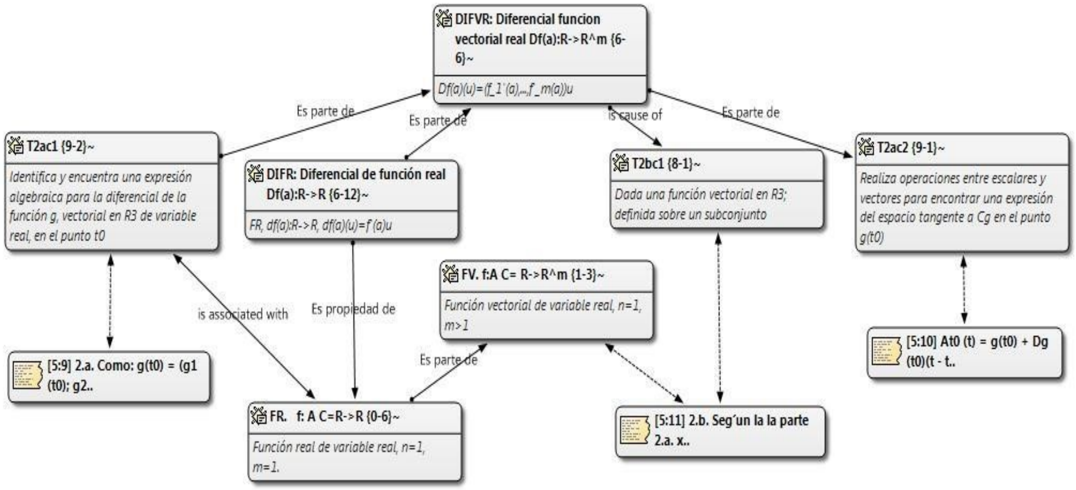

Figura 48· Red semántica de la Tarea 2. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor·

Para la Tarea 3, la red semántica de la Figura 49 muestra relaciones que establecen las categorías entre los elementos derivada parcial *DP*; cuando estos objetos existen y son continuos en un punto forman parte de la diferencial de un campo escalar *DICE*, la cual es una propiedad de algunos campos escalares *CE*.

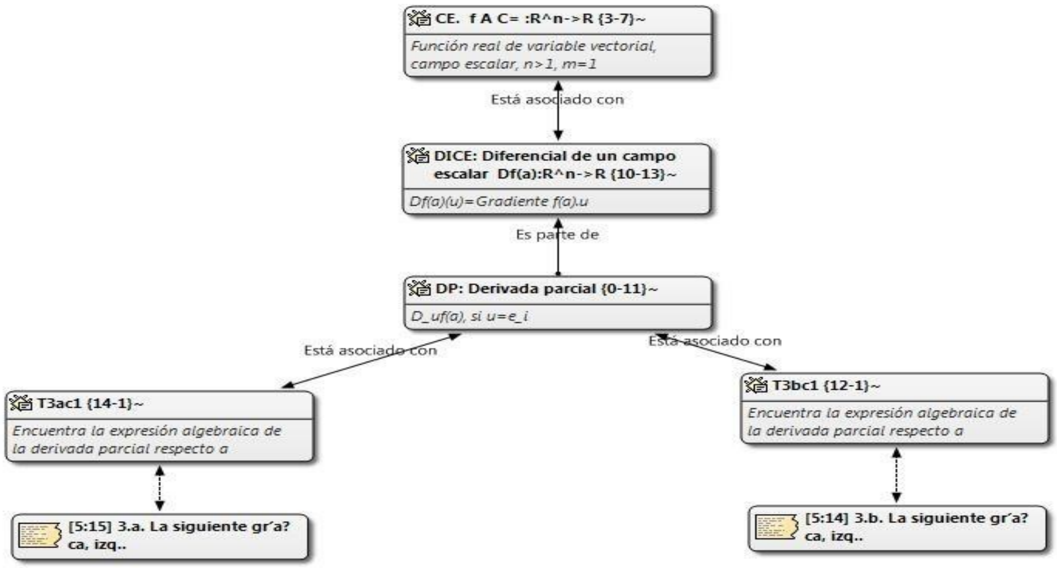

Figura 49. Red semántica de la Tarea 3. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Respecto a la Tarea 4, la red semántica de la Figura 50 muestra las relaciones que establecen las categorías emergentes del cuestionario entre los elementos campo escalar *CE*, representado en forma tabular de datos provenientes de una situación problema; se aproxima el objeto derivada parcial *DP* en puntos del *CE* por diferencias finitas y como el *CE* es diferenciable, se encuentra la diferencial *DICE*. Estos elementos se relacionan en la parte principal del polinomio de Taylor de grado 1, lo que permite encontrar mejores aproximaciones de valores del *CE* en puntos no registrados en la tabla.

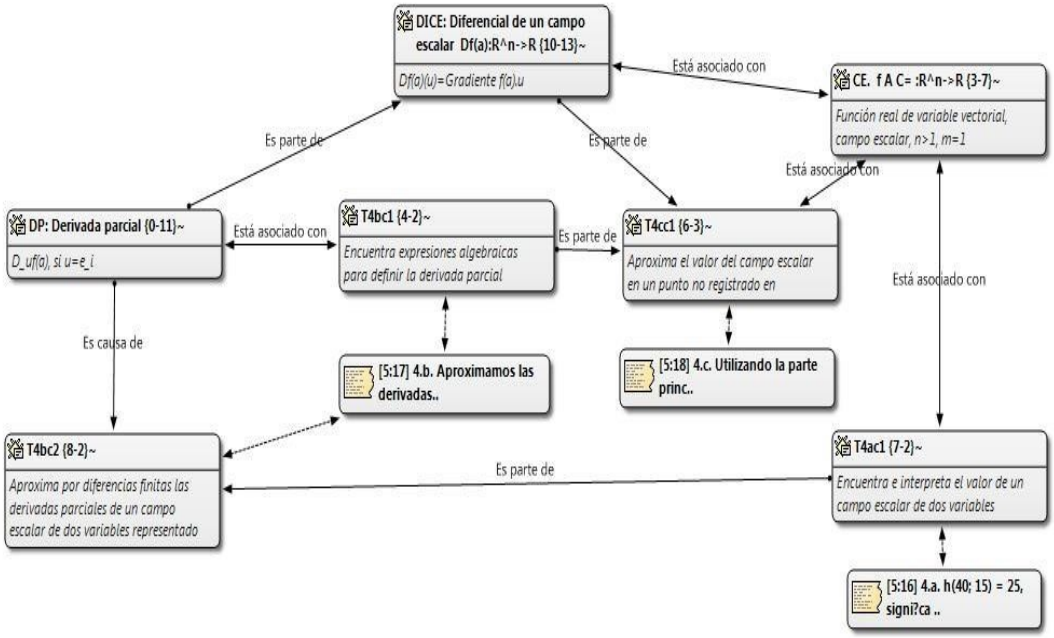

Figura 50. Red semántica de la Tarea 4. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Respecto a la Tarea 5, la red semántica representada en la Figura 51 indica relaciones entre elementos matemáticos de la siguiente forma: calcular las derivadas parciales *DP*, utilizando teoremas de diferenciación en puntos donde el campo escalar *CE* es continuo, de acuerdo con la categoría *T5ac1*, o utilizando la definición, en caso contrario, categoría *T5bc1*; determinar si el campo escalar *CE* es diferenciable *DICE*, aplicando el criterio del límite de acuerdo con *T5cc1*; verificar si un *CE* es continuo utilizando el teorema que sostiene que diferenciabilidad implica continuidad *TFDI-TDICO*, de acuerdo con *T5dc1*; justificar que un campo escalar no es diferenciable en un punto, utilizando el teorema que afirma que diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas parciales *TFDI-TDIDP*, según *T5ec1*.

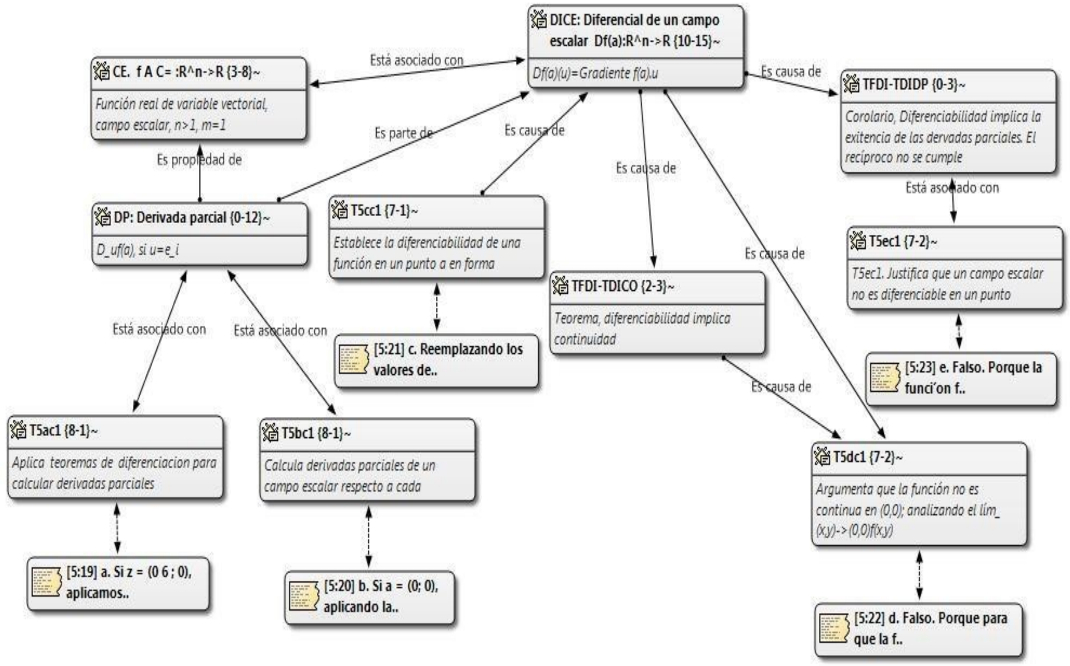

Figura 51. Red semántica de la Tarea 5. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Respecto a la Tarea 6, la red semántica de la Figura 52 describe lo siguiente: por *T6ac1*, encuentra la *DD* del CE en un punto; por *T6bc1* se halla la *DP* del CE en un punto como caso particular de la *DD* cuando los vectores dirección son los de la base canónica de $\mathbb{R}^2$; según *T6cc1* se prueba que la *DD* en el punto (0,0) no es lineal respecto al vector dirección, que es alternativa para inferir la no diferenciabilidad en (0,0) del *CE*; otra alternativa es, según *T6dc1*, establecer que el límite entre el resto sobre la norma del vector dirección no es cero; y por *T6ec1* se prueba que el recíproco del teorema no se cumple: si un *CE* es diferenciable en un punto, entonces la derivada direccional del *CE* en el punto según cualquier vector dirección es igual al producto punto entre el gradiente del *CE* evaluado en el punto con el vector dirección *TFDI-TDIDD*; y por *T6fc1* se establece que la existencia de la derivada direccional en un punto según cualquier vector dirección no es condición suficiente para que el *CE* sea diferenciable en el punto *DICE*.

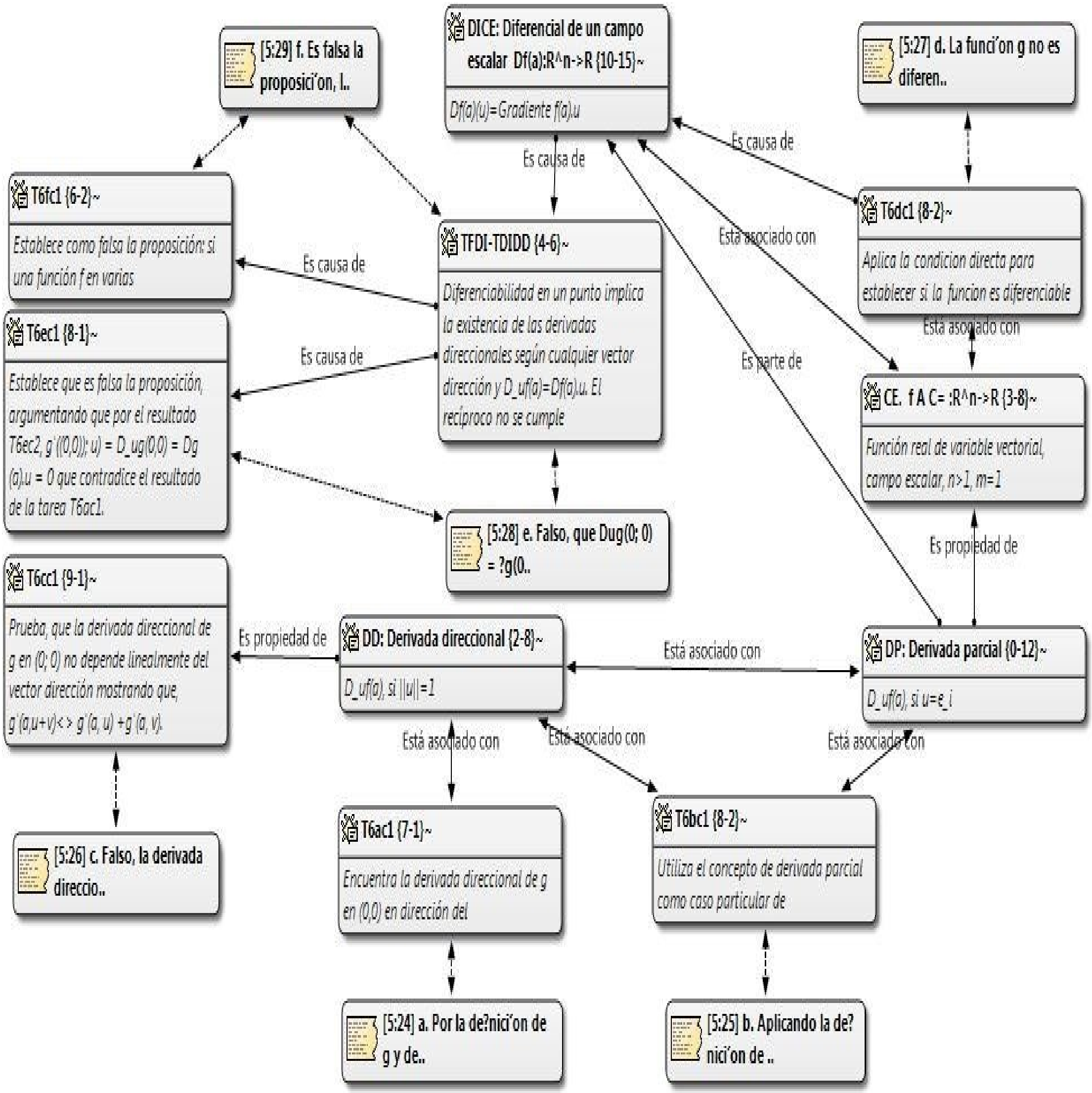

Figura 52. Red semántica de la Tarea 6. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Respecto a la Tarea 7, a partir de una situación problema se describen las relaciones entre los objetos matemáticos, representadas en la red semántica de la Figura 53, que comprenden: por *T7ac1* se encuentra e interpreta el vector gradiente de un campo escalar diferenciable *DICE*; según *T7bc1* y *T7cc1* se encuentra e interpreta respectivamente la derivada parcial *DP* y la derivada direccional *DD*; y por *T7dc1* establece que si la *DD* es 0 entonces se hallan las curvas de nivel.

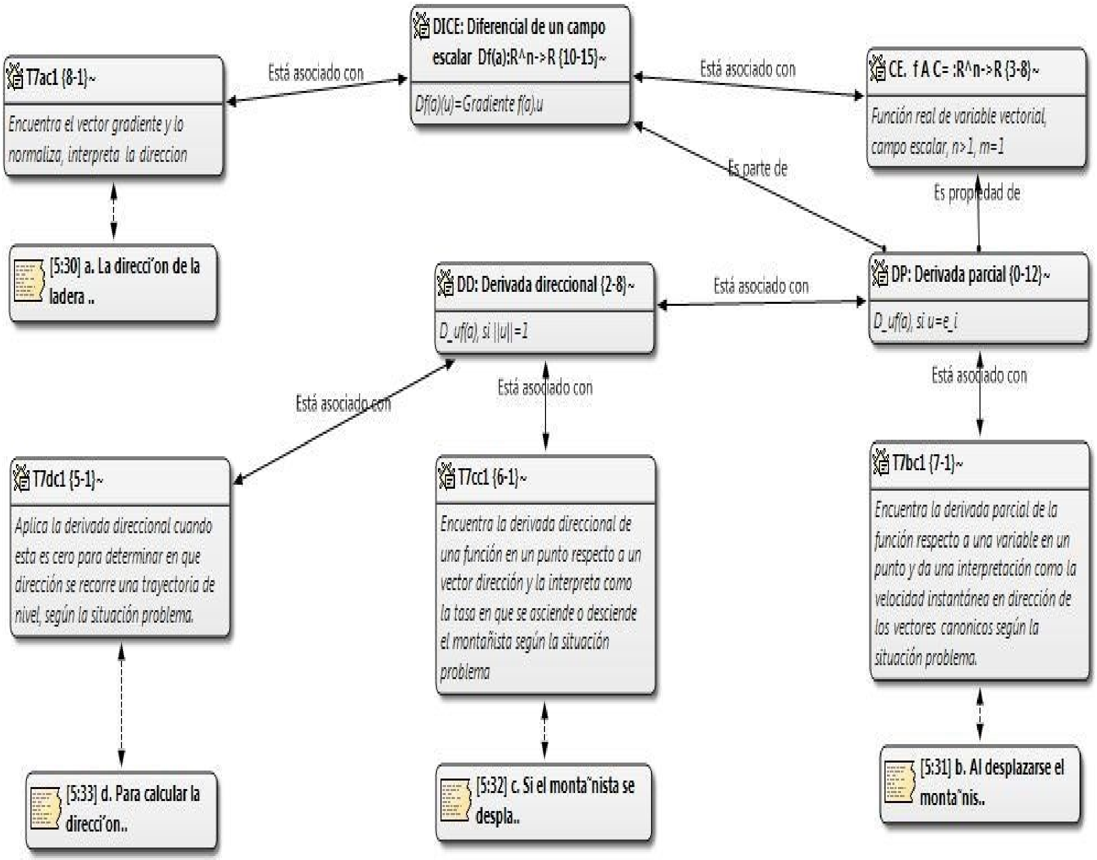

Figura 53. Red semántica de la Tarea 7. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

En lo referente a la Tarea 8 se generó la red semántica de la Figura 54, la cual describe que dado un campo escalar *CE* en forma algebraica se realizan las siguientes acciones y procesos sobre este objeto: según *T8ac1* se muestra que el *CE* es diferenciable en todo su dominio; por *T8bc1* se encuentra la diferencial del campo escalar *DICE,* y según *T8cc1* se da una interpretación geométrica de la diferencial.

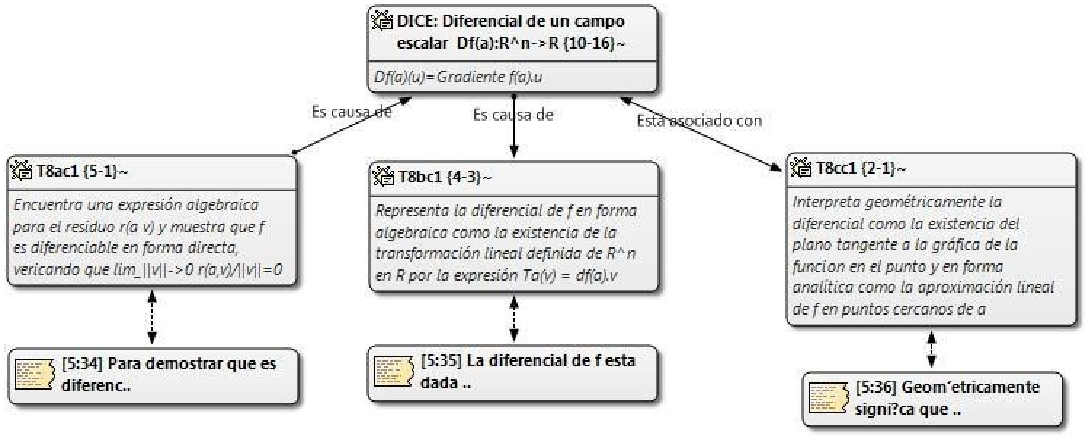

Figura 54. Red semántica de la Tarea 8. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Sobre la Tarea 9 se generó la red semántica de la Figura 55, la cual describe que dada una función en varias variables *FVV* en forma algebraica, que para este caso corresponde a un campo vectorial *CV*, se realizan las siguientes acciones y procesos sobre este objeto: según *T9ac1*, como el *CV* es diferenciable en todo su dominio, se aplica el teorema que establece que la diferenciabilidad de un campo vectorial implica la diferenciabilidad de los campos escalares que lo componen *TFDI-TDICVDICE*, la diferencial es igual a la derivada direccional en cualquier punto de su dominio según cualquier vector dirección, y esta se encuentra como el producto de la matriz jacobiana, evaluada en el punto con el vector dirección, y por *T9bc1* se muestra en forma directa que este *CV* es diferenciable.

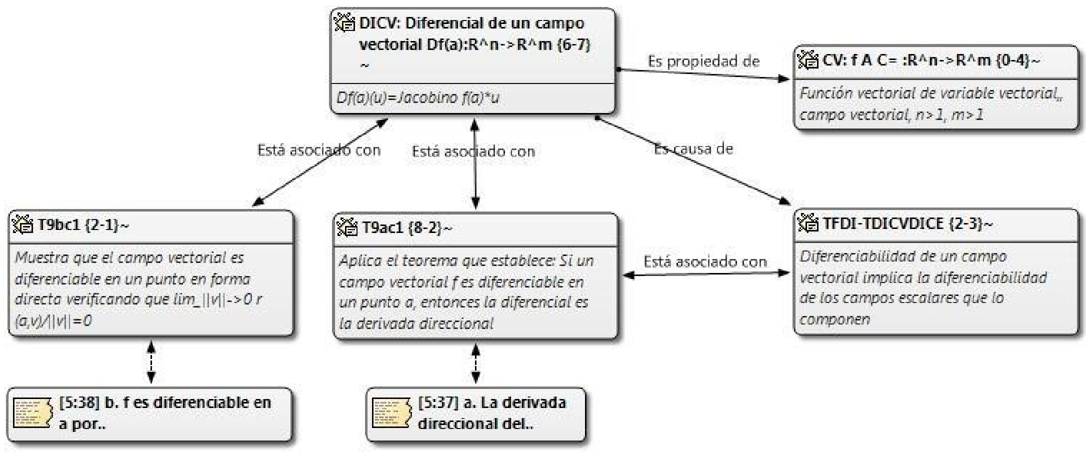

Figura 55. Red semántica de la Tarea 8. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Teniendo en cuenta la Tarea 10 se generó la red semántica de la Figura 56, donde se describe que, dada una función en varias variables *FVV* y según *T9ac1*, se encuentran expresiones algebraicas y la interpretación como transformación lineal, según los siguientes casos: la diferencial de una función real de variable real *DIFR*, la diferencial de una función vectorial de variable real *DIVR*, la diferencial de un campo escalar *DICE* y la diferencial de un campo vectorial *DICV*.

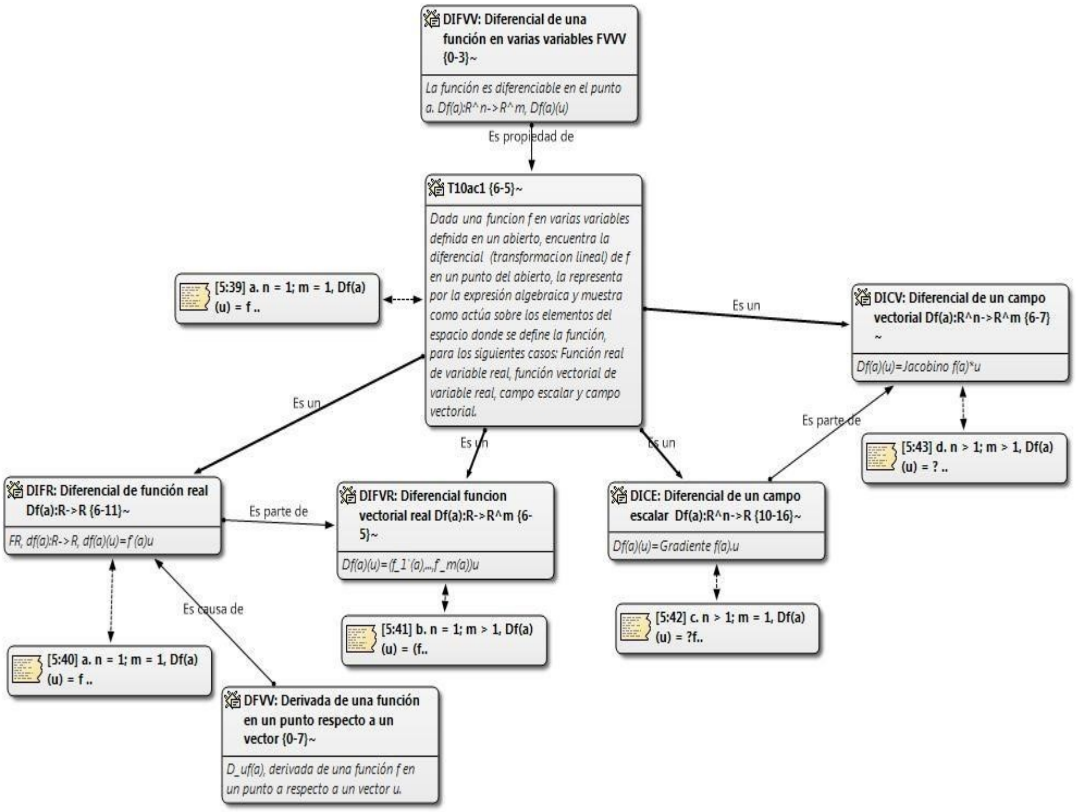

Figura 56. Red semántica de la Tarea 10. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Finalmente, en la Figura 57 se representa en forma gráfica la *DG*, donde se muestran las relaciones entre los objetos matemáticos como resultado del análisis de la *DG* preliminar, las categorías emergentes de las respuestas dadas por los estudiantes del cuestionario y la solución plausible de este.

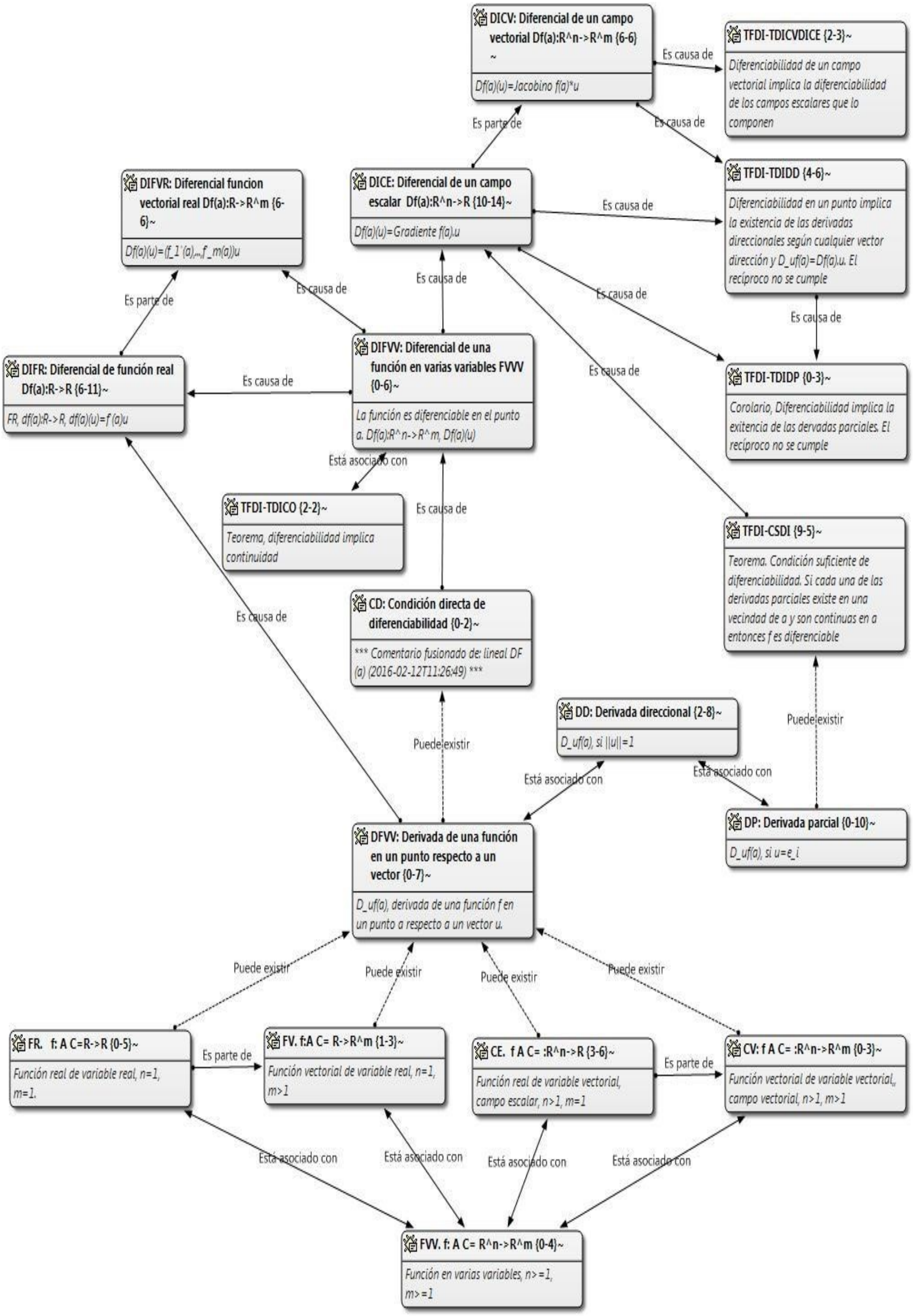

Figura 57. Red semántica de la DG. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Tercera etapa: análisis de las entrevistas

En esta etapa, a cada estudiante se le realizó una entrevista semiestructurada y el correspondiente análisis a la luz de la descomposición genética, las categorías que emergieron en la etapa uno y las relaciones entre los elementos matemáticos según el análisis plausible del cuestionario que se presentó en la sección anterior.

A continuación se expone un episodio demostrativo de la entrevista al estudiante que se identifica con el seudónimo de *E1*, para la Tarea 1, realizada por el investigador *I*.

1. *I.* Explique ¿cómo desarrolló la Tarea 1?
2. *E1.* La función es una parábola que se traslada una unidad hacia arriba; ahora, el incremento viene definido por $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$, que viene a ser este segmento [ilustra el incremento], ehh la diferencial de f en a, entonces se aplica la fórmula de Taylor, bueno, la diferencial viene dada por la fórmula $f'(a)h$, [la señala en la gráfica], en este caso como es unidimensional no es el producto punto, sino la multiplicación real normal que viene a ser la altura con respecto a la tangente, el error es lo que le falta a la altura respecto a la tangente para llegar a la altura de la curva en el punto, si se pasa por efecto o por exceso.
   En el segundo indicar si f es diferenciable en uno y mostrar que es diferenciable. Para mostrar que es diferenciable debo ver que existe una transformación lineal, que en este caso es $f'(a)h$ y que satisface el polinomio de Taylor, y que el error va para 0 cuando h tiende a 0, entonces eso fue lo que hice. Además, creo que hay un teorema.
3. *I.* En cambio de mostrar que el límite cuando h va para cero y que el error $r(a, v)$ va para cero, que es equivalente al proceso que describe. ¿Cuál teorema aplicó?
4. *E1.* Ah, en caso de que sus derivadas existan y sean continuas en el punto, entonces la función es diferenciable en el punto.
5. *I.* En otras palabras ¿qué diferencia, en forma geométrica, encuentra entre la diferencial y el incremento de la función?
6. *E1.* La diferencia es el error, son magnitudes, pero el incremento es superior, en este caso a la diferencial.
7. *I.* ¿Siempre va ocurrir así?
8. *E1*. A veces puede cambiar, puede ser al revés.
9. *I*. La diferencial es el cambio con respecto a ¿qué objeto matemático?
10. *E1*. A la tangente.
11. *I*. El incremento es con respecto a la forma en que cambia ¿quién?

12. *E1*. La curva.
13. *I*. ¿En qué consiste la parte c de la Tarea?
14. *E1.* Decía, me daba si α es un valor que se desea calcular aproximadamente por medio de diferenciales, la estimación se encuentra en una función conveniente y los valores f y h y luego se aplica la fórmula de Taylor. Lo que uno hace es hallar la aproximación de la raíz cubica de un número. Para esto, tomamos la función más apropiada, que sería la raíz cúbica de x y nos aproximaríamos por la recta tangente, y como es más fácil calcular el valor de la tangente que el de la función, entonces aplicamos la fórmula y ya.
15. *I*. En este caso se aplicó el polinomio de Taylor, pero ¿qué parte del polinomio de Taylor no se tiene en cuenta?
16. *E1*. El error.
17. *I*. Pero necesita otra información ¿podría indicar cuál?
18. *E1*. Sí, encontramos el valor de la función en un punto conocido, que en este caso es uno.
19. *I*. El incremento en x ¿cuál sería?
20. *E1*. Sería la diferencia entre el valor que tomé, que es uno, y el que nos dan, es decir 1.02, o sea 0.02.
21. *I*. La diferencial ¿cuál sería para este caso?
22. *E1*. En este caso sería $\left(\frac{1}{3}\right)(1)^{-\frac{2}{3}}$, que es la derivada de la función en uno por el h que es 0.02.
23. *I*. ¿Cuál fue el valor de la aproximación?
24. *E1*. α es aproximadamente uno.
25. *I*. Pero no es uno, porque obtendríamos que el valor de la raíz cúbica de 1.02 es lo mismo que la raíz cúbica de uno.
26. *E1*. No, es una aproximación a la raíz cúbica de 1.02.[103]

Posteriormente se hizo el análisis de este segmento, utilizando el *software* atlas.ti7, que se resume en la Tabla 15. En la primera columna de esta Tabla aparece el ítem correspondiente a la Tarea; en la segunda columna se agrupa el código de la categoría según la codificación establecida en la primera fase, el código de segmento de la entrevista relacionada con la categoría y los elementos matemáticos relacionados; en la tercera columna se hacen comentarios sobre los procesos de pensamiento que se percibieron en la entrevista. Respecto al contenido del código del segmento de la entrevista, por ejemplo

[103] Estudiante E1 (Estudiante de cálculo III), entrevista por Zagalo Suárez. 14, marzo, 2016.

ET1E1L2, 5-10, significa **E**ntrevista, **T**area **1**, Estudiante **E1**, línea **2** y líneas **5** a **10**.

Ítem	*Categoría, segmentos de la entrevista*	*Comentarios*
1.a.	*T1ac1*, ET1E1L1-2, *FR*. *T1ac2*, ET1E1L2, 5-10 $\Delta f(a), df(a)$. *T1ac3*, ET1E1L2, 9-12, Taylor, $\Delta f(a) = df(a) \cdot h + \|h\|E(a,h)$.	Grafica la función y la tangente en un punto e interpreta en forma verbal, algebraica y analítica la diferencial; establece relaciones entre los elementos: incrementos, derivada y el error de aproximación.
1.b.	*T1bc1*, ET1E1L2, DIFR. *T1bc2*, ET1E1L3-4, TFDI-CSDI. *T1bc3*, ET1E1L3, DIFR.	El estudiante argumenta en forma algebraica y analítica por qué la función es diferenciable en el punto.
1.c.	*T1cc1*, ET1E1L13-26, DIFR.	Resuelve una situación problema aplicando la diferencial en forma algebraica y analítica

Tabla 15. Análisis de la entrevista de la Tarea 1, Estudiante 1.

De este análisis se generó la red semántica, Figura 58, que representa los elementos matemáticos y las relaciones lógicas entre estos que logra establecer el estudiante en la entrevista y luego se triangula esta información con la obtenida en las fases uno y dos.

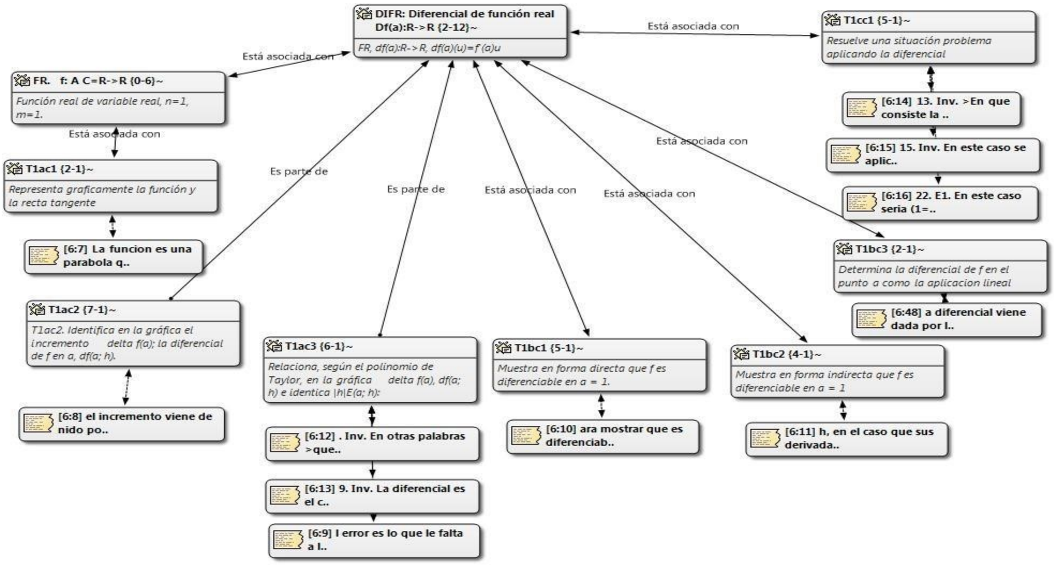

Figura 58. Red semántica de la entrevista ET1E1. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Las entrevistas completas y el proceso de análisis hacen parte del desarrollo de la investigación. En la Tabla 16 se presenta el resumen de las categorías mostradas por todos los estudiantes. En la primera columna aparece el código de la categoría y en las columnas siguientes, los seudónimos de los estudiantes desde *E1* a *E9*. La letra S indica que se infiere que el estudiante sí demostró lo descrito por esta categoría, y la letra *N* indica el caso contrario.

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T1ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T1ac2	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*
T1ac3	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*
T1bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	*N*	N	*N*	*N*
T1bc2	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T1bc3	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	*N*	N	*N*	*N*
T1cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T2ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T2ac2	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T2bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T3ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	S	*N*	*S*
T3bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	S	*N*	*S*
T4ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T4bc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*S*	N	*N*	*N*
T4bc2	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T4cc1	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*N*
T5ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T5bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T5cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T5dc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T5ec1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T6ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T6bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	S	*N*	*N*
T6cc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*S*	N	*N*	*S*
T6dc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	N	*N*	*S*
T6ec1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T6fc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	N	*N*	*N*
T7ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T7bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T7cc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T7dc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T8ac1	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*N*
T8bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	N	*N*	*N*
T8cc1	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	N	*N*	*N*

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T9ac1	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*S*	S	*N*	*N*
T9bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	*N*	N	*N*	*N*
T10ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	N	N

Tabla 16. Categorías mostradas por los estudiantes en las entrevistas.

Cuarta etapa: niveles de desarrollo del esquema de la diferencial

Teniendo como referencia el enfoque teórico *APOE*, la *DG* de la diferencial y el desarrollo metodológico de las fases anteriores, se asume que el desarrollo progresivo del esquema de la diferencial de una función en varias variables está caracterizado por los elementos matemáticos representados en forma gráfica, numérica, algebraica y analítica (G, N, A, AN), por las traducciones entre estas representaciones y por las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos para hacer inferencias, cuando resuelven ejercicios y situaciones problema.

Por tanto, como una adaptación de la caracterización para el esquema de la derivada[104], la comprensión por los estudiantes de la diferencial de una función en varias variables se describe a continuación en términos de la conceptualización de la triada de los niveles Intra, Inter y Trans de la siguiente manera: el nivel Intra, con los subniveles Intra 1 e Intra; el nivel Inter, con los subniveles Inter 2, Inter 1 e Inter, y el nivel Trans con los subniveles Trans 1 y Trans. Para cada subnivel, *Cn* indica la característica correspondiente *n*.

Nivel Intra 1

C1. No utilizar ningún elemento matemático. Se manifiesta cuando no resuelve ninguna tarea y no recuerda ninguno de los elementos matemáticos que constituyen el esquema.

[104] Gloria Sánchez-Matamoros García, y otros, "El desarrollo del esquema de la derivada", *Enseñanza de las ciencias,* 24, 2006: 87-88.

C2. No establecer relaciones entre los elementos matemáticos. Ocurre cuando, en las cadenas de inferencias, al intentar resolver una tarea, recuerda algunos elementos matemáticos con concepciones erróneas y en una única forma de representación. Por tanto, las relaciones que establece son incorrectas.

Nivel Intra

C1. Recordar elementos matemáticos de forma aislada. Se evidencia cuando al intentar resolver la tarea recuerda algunos elementos de manera aislada sin establecer relaciones entre estos y en un único modo de representación.

C2. Establecer relaciones entre elementos matemáticos comprendidos como acciones. Cuando en el desempeño de las tareas recuerda algunos elementos matemáticos y realiza acciones sobre estos de una forma mecánica y algorítmica; las relaciones que puede llegar a establecer no son suficientes para inferir nueva información o generar nuevos elementos que le permitan resolverlas.

C3. Recordar los elementos matemáticos como componentes internos de otro elemento. Se presenta cuando recuerda uno o varios elementos matemáticos, como proceso u objeto, realizando acciones sobre este para generar un nuevo elemento. Sin embargo, considera el nuevo elemento de manera aislada.

Nivel Inter 1

C1. Reconocer elementos matemáticos contiguos. Se evidencia cuando comprende un elemento del esquema como objeto, realiza acciones sobre este y las generaliza para construir un nuevo elemento, entendido como una estructura mental de acción o proceso y cognitivamente próximo al objeto.

C2. Establecer relaciones entre los elementos contiguos. Cuando ha comprendido como proceso u objeto dos elementos contiguos del esquema y en un mismo modo de representación y los relaciona a través de la conjunción para resolver tareas o situaciones problema.

Nivel Inter 2

C1. Agrupar elementos matemáticos de naturaleza similar. Ocurre cuando ha comprendido un elemento del esquema como objeto, por mecanismos de desencapsulación coordina el proceso que lo generó con otros elementos entendidos también como procesos o acciones representados en forma G, A o N para generar nuevos elementos y agruparlos por su génesis similar.

C2. Generalizar procesos. Cuando aplica un mismo proceso a varios elementos matemáticos de naturaleza similar.

Nivel Inter

C1. Reconocer propiedades de los elementos matemáticos. Se manifiesta cuando al aplicar un mismo proceso a diferentes elementos matemáticos del esquema, los puede clasificar dependiendo de si cumplen ciertas propiedades.

C2. Establecer relaciones entre elementos matemáticos. Se presenta cuando relaciona con la conjunción e implicación lógica elementos matemáticos, no necesariamente contiguos y en diferentes formas de representación.

Nivel Trans 1

C1. Establecer relaciones entre elementos matemáticos comprendidos como procesos u objetos. Ocurre cuando ha comprendido varios elementos matemáticos como objetos y los desencapsula en los procesos que los generaron, y al coordinarlos crea nuevos procesos que, a su vez, originarán estructuras generales del esquema que son comprendidas como acciones o procesos.

C2. Presentar primeros intentos de síntesis entre los elementos matemáticos. Se manifiesta cuando generaliza procesos que transforman varios objetos del esquema y utilizando la implicación lógica los encapsula en un nuevo objeto.

Nivel Trans

C1. Inferir propiedades del esquema al establecer relaciones lógicas entre los elementos que lo configuran. Se evidencia cuando ha logrado tematizar el esquema e infiere propiedades de estos objetos a partir de la aplicación directa e indirecta de relaciones lógicas de conjunción e implicación.

C2. Establecer coherencia del esquema. Ocurre cuando generaliza y sintetiza las propiedades que satisfacen algunos elementos matemáticos y las puede identificar en diversos ámbitos como casos particulares y en diferentes modos de representación.

La Tabla 17 resume las características generales de cada uno de los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de diferencial de una función en varias variables.

Niveles	*Características*
Intra 1	C1. No utilizar ningún elemento matemático. C2. No establecer relaciones entre los elementos matemáticos.
Intra	C1. Recordar elementos matemáticos de forma aislada. C2. Establecer relaciones entre los elementos matemáticos comprendidos como acciones. C3. Recordar elementos matemáticos como componentes de otro elemento.
Inter 1	C1. Reconocer elementos matemáticos contiguos. C2. Establecer relaciones entre los elementos contiguos.
Inter 2	C1. Agrupar elementos matemáticos de naturaleza similar. C2. Generalizar procesos.
Inter	C1. Reconocer propiedades de los elementos matemáticos. C2. Establecer relaciones entre elementos matemáticos.
Trans 1	C1. Establecer relaciones entre elementos matemáticos comprendidos como procesos u objetos. C2. Presentar primeros intentos de síntesis entre los elementos matemáticos.
Trans	C1. Inferir propiedades del esquema al establecer relaciones lógicas entre los elementos que lo configuran. C2. Establecer coherencia del esquema.

Tabla 17. Caracterización de los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables