DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN

Actividades computacionales basadas en la DG

Siguiendo los apartados de la descomposición genética del concepto, se expone a continuación el diseño de actividades de instrucción medidas por el *software* MATLAB, las cuales tienen como propósito simular la construcción de las estructuras mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas a través de mecanismos para interiorizar acciones, coordinar o invertir procesos, encapsular procesos en objetos o desencapsular objetos en procesos y tematizar esquemas.

Las instrucciones y programas se diseñaron, probaron, ejecutaron y depuraron en las salas de informática de la Universidad con el grupo de estudiantes que participaron en la investigación, quienes previamente habían asistido a las clases magistrales, realizando tareas, talleres, y estaban familiarizados con la sintaxis del *software*. Para la presentación de estas actividades de instrucción se adoptó la numeración establecida en la DG del capítulo anterior.

El *software* utilizado tiene las siguientes características:

```
-------------------------------------------------------------
MATLAB Version: 8.2.0.701 (R2013b)
MATLAB License Number: 931317
Operating System: Microsoft Windows 7 Version 6.1(Build 7600)
Java Version: Java 1.7.0_11-b21 with Oracle Corporation Java
HotSpot(TM) 64-Bit Server VM mixed mode
-------------------------------------------------------------
MATLAB                            Version 8.2        (R2013b)
Simulink                          Version 8.2        (R2013b)
Control System Toolbox            Version 9.6        (R2013b)
Data Acquisition Toolbox          Version 3.4        (R2013b)
Fixed-Point Designer              Version 4.1        (R2013b)
Partial Differential Equation Toolbox Version 1.3    (R2013b)
Simulink Control Design           Version 3.8        (R2013b)
Statistics Toolbox                Version 8.3        (R2013b)
Symbolic Math Toolbox             Version 5.11       (R2013b)
------------------------------------------------------------
```

A. Construcciones previas

1. El objeto matemático función real de variable real.

MATLAB proporciona diferentes formas para definir y evaluar las funciones, entre ellas: una desde la ventana de comandos, que se caracteriza por el prompt >>, disponible mientras se trabaja en una sesión; y otra crearla como un programa para utilizarla en posteriores sesiones de trabajos.

En los siguientes apartados se explica cada una de estas formas y al frente de cada instrucción se da la explicación o documentación precedida del carácter porcentaje.

En la ventana de comandos de MATLAB realizar las siguientes acciones, como formas diferentes para definir el objeto función.

a. Con el comando *handle*. Al nombre dado a la función se le asigna el nombre de la variable o variables precedidos del signo @ y luego la expresión o fórmula analítica. Por ejemplo, para definir la función $f(x) = x^2 + 3x + 5$ en la ventana de comandos, y hallar $f(3)$, el código es:

```
>> f=@(x) x^2+3*x+5   % Definir la función.
f = @(x)x^2+3*x+5
>> f(3)               % Evaluar la función en x=3.
    ans = 23          % Respuesta generada por MATLAB.
```

b. Con el comando *inline*. Al nombre de la función se le asigna con el comando *inline* y entre paréntesis y apóstrofos la expresión algebraica que define la función y el nombre de la variable independiente. Por ejemplo, para definir la función anterior,

```
>> f=inline('x^2+3*x+5','x')% Definir la función.
>> f(3)
ans =
    23
```

c. En forma *simbólica*. Definir el nombre de la variable como simbólica, asignar al nombre de la función la expresión algebraica que la define y luego utilizar el comando *subs* para hallar el valor de f en el valor deseado. Para el ejemplo anterior se debe digitar:

```
>> syms x       % Definir a x como variable simbólica.
>> f=x^2+3*x+5  % Definir la función.
```

```
>> subs(f,3)     % Evaluar la función en x=3.
 ans =
        23
```

d. Como un *módulo, script*. Con la palabra reservada `function`, se definen funciones y quedan disponibles para utilizarlas en otros módulos al grabarla como un archivo de MATLAB. Para el caso del ejemplo, guardar el siguiente código digitado en el procesador de texto de MATLAB con el nombre *f.m*

```
function y=f(x)
% f es el nombre de la función
% y es la variable de salida,
% x, es la variable independiente o argumento.
   y=x^2+3*x+5;     % Asignar la función.
>> f(3)             % Evaluar f en x=3.
ans =
    23
```

2. El objeto matemático función vectorial de variable real FVR

Para construir este objeto mental se diseñaron las siguientes acciones:

a. Para definir la función particular, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto f(t) = (\cos t\,, \sin t, t)$, y representarla en forma gráfica, realizar las siguientes *acciones*, digitando lo siguiente:

```
>>f=@(t)[cos(t) sin(t) t] % Definir la función vectorial.
>>t=0:0.1:12*pi;      % Asignar el dominio de la función.
>>plot3(cos(t),sin(t),t,'r','linewidth',2);
  %graficar la función
>>grid on;                   % Incluir cuadrícula.
>>xlabel('x');ylabel('y');% Asignar etiquetas para ejes.
>>zlabel('z');
>>title('Gráfica de la función f(t)=[cos(t) sen(t) t]');
                             % Incluir título de la gráfica.
```

El resultado de estas acciones genera la gráfica de la función vectorial de la Figura 17.

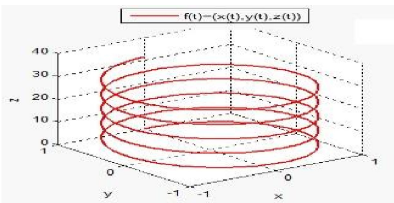

Figura 17. Función vectorial $\boldsymbol{f(t) = (\cos t\,, \sin t, t)}$. Fuente: el autor

3. El objeto matemático campo escalar CE

Para construir el campo escalar, realizar las siguientes acciones:

a. Para definir y graficar el campo escalar,

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ \ (x,y) \mapsto f(x,y) = z = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} - 1,$$

escribir el siguiente código en MATLAB,

```
>>f=@(x,y) y.^2./9-x.^2./16-1  % Definir el campo escalar.
>>[x,y]=meshgrid(-6:.01:6,-6:0.01:6);% Rango a graficar.
>>mesh(x,y,f(x,y))                   % Graficar la función.
>>grid on
>>xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z=f(x,y)')
>>title('Gráfica de f(x,y)=y^2/9-x^2/16-1')
```

El resultado de estas acciones se puede observar e interpretar en la Figura 18.

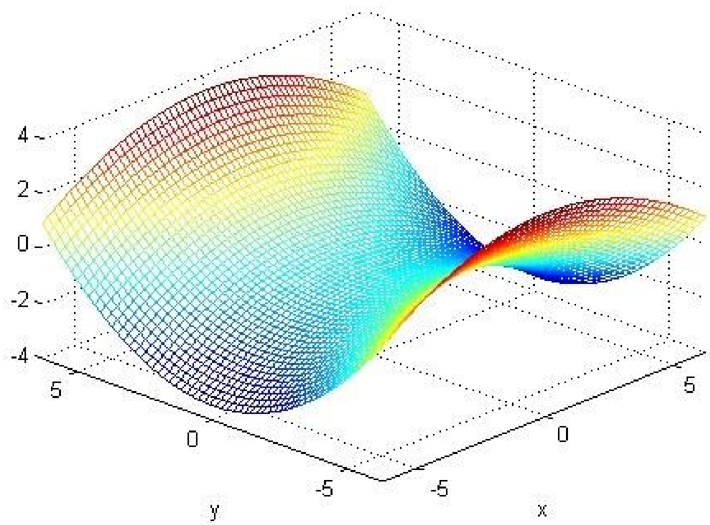

Figura 18. Campo escalar $\boldsymbol{f(x,y) = z = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} - 1}$. Fuente: el autor.

4. El objeto matemático campo vectorial CV

Para construir un campo vectorial, realizar las siguientes acciones:

a. Definir el campo vectorial,

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z) \mapsto w = f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2, x^2-yz+z^2, xyz).$$

Evaluar el campo en el vector (1,2,3).

b. Utilizar variables simbólicas, escribir en MATLAB

```
>>syms x y z            % Definir variables simbólicas.
>>F=[x^2+y^2+z^2;x^2-y*z+z^2;x*y*z]% Definir el C. V.
>>subs(F,{x,y,z},[1 2 3])         % Evaluar F(1,2,3).
```

c. Utilizar el concepto de función de MATLAB, en un *script* digitar,

```
function [f1 f2 f3]=CV(x,y,z)% Definir el campo vectorial
f1=x^2+y^2+z^2;         % Definir f1, componente del C. V.
f2=x^2-y*z+z^2;         % Definir f2, componente del C. V.
f3=x*y*z;               % Definir f3, componente del C. V.
```

d. Grabar el anterior código con el nombre *CV.m* y para evaluarlo en el vector (1,2,3), digitar en la ventana de comandos,

```
>>[f1 f2 f3]=CV(1,2,3)
```

e. Utilizar funciones handles

```
>>f1=@(x,y,z) x^2+y^2+z^2; % Definir f1, del C. V.
>>f2=@(x,y,z) x^2-y*z+z^2; % Definir f2, del C. V.
>>f3=@(x,y,z) x*y*z;       % Definir f3, del C. V.
>>F=@(x,y,z)[f1(x,y,z) f2(x,y,z) f3(x,y,z)]
                           % Definir el campo vectorial
>>F(1,2,3)                 % Evaluar F en (1,2,3)
ans =
    14     4     6
```

B. Construcción del objeto derivada direccional de una función real de variable vectorial DD

Para construir el objeto derivada direccional, realizar las siguientes acciones:

1. En el caso particular de calcular la derivada direccional del campo escalar, $f(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + 3z$, en el punto $a = (1,1,0)$ en la dirección del vector $u = (1,-1,2)$ y luego hacer la generalización, se diseñaron las siguientes *acciones*:

a. Digitar las siguientes instrucciones

```
>>f=inline('x^3+2*y^3+3*z','x','y','z')
% Definir el campo escalar.
>>a=[1 1 0]             % Asignar el valor de a.
>>u=[1 -1 2]            % Asignar el vector dirección.
>>h=0.00001             % Aproximar h a 0.
>>b=a+h*u               % Calcular a+hu.
>>dd=(f(b(1),b(2),b(3))-f(a(1),a(2),a(3)))/h
% Aproximar  la derivada direccional.
```

b. *Repetir* las acciones anteriores en varios valores del punto a, en diferentes direcciones u y en otros campos escalares definidos de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

2. *Interiorizar* las acciones anteriores en un proceso, similar al codificado en el siguiente *script*.

```
clear;clc;
fu=input('defina el campo escalar?','s');% Capturar el C. E.
a=input('Valor en el punto ?');          % Capturar el punto.
u=input('valor del vector dirección ?');% Capturar vector
                                         % dirección.
f=inline(fu,'x','y','z');  % Definir el campo escalar.
h=0.00001;
b=a+h*u;
dd=(f(b(1),b(2),b(3))-f(a(1),a(2),a(3)))/h;
% Calcular la derivada direccional.
```

3. Modificar el proceso anterior cuando se definan otros campos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

4. Encapsular el campo escalar en un objeto matemático y denominarlo `mifunción`, digitando el siguiente *script* en MATLAB

```
f=mifuncion(x,y,z)
f=x^3+2*y^3+3*z;
```

5. *Encapsular* el proceso para calcular la derivada direccional de un campo escalar definido de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. en el objeto matemático denominado `ddR3`.

```
function y=ddR3(fu,a,u)
f=fu;
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(f(b(1),b(2),b(3))-f(a(1),a(2),a(3)))/h;
```

6. Realizar *acciones* sobre el objeto `ddR3`, para el caso del ejemplo propuesto.

```
>> ddR3(@mifuncion,[1 1 0],[1 -1 2])
ans = 3.0001
```

7. *Desencapsular* el campo escalar y modificarlo para otros campos cuando $n = 3$ y utilizar el objeto `ddR3`.

8. Modificar los objetos matemáticos `mifunción` y `ddR3` para otros campos escalares, por ejemplo cuando $n = 2,\ n = 4$.

9. *Interpretar* geométricamente la existencia de la derivada direccional de una función real de variable real f, en un punto, como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto. Para inducir esta interpretación se diseñaron las siguientes *acciones*.

a. Digitar y analizar el siguiente código en un *script*.

```
f=inline('x.^2','x')% Definir la función.
h=0.0001;            % Asignar a h un valor cerca a 0.
a=2;                 % Asignar punto a calcular la DD.
df=(f(a+h)-f(a))/h;  % Aproximar la derivada de f en
                     % el punto (a,f(a)).
x=-1:0.1:6;          % Asignar dominio de la función.
rt=df.*(x-a)+f(a);   % Asignar la ecuación de la recta
                     % tangente a f en el punto (a,f(a)).
plot(x,f(x),'b',x,rt,'r');% Graficar de la función
                          % y la tangente.
punto=['o(',num2str(a),',',num2str(f(a)),')'];
                      % Asignar etiqueta para el punto.
text(a,f(a),punto);   % Imprimir el punto en la gráfica.
xlabel('x');ylabel('y'); grid on;
title('Interpretación geométrica de la derivada');
```

El resultado de estas acciones se observa en la Figura 19.

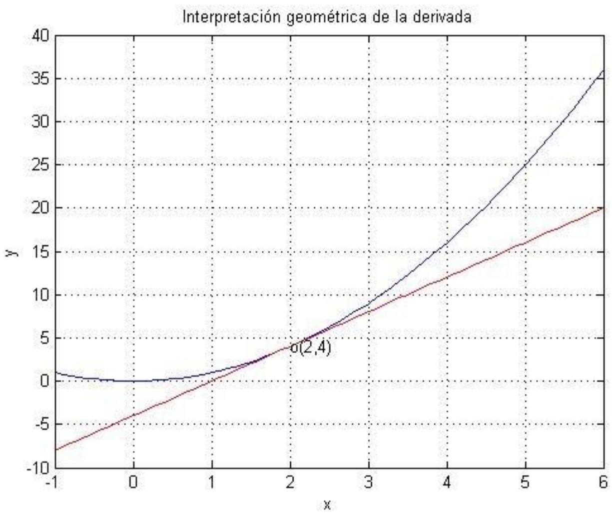

Figura 19. Recta tangente a la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, en el punto (2,4). Fuente: el autor.

b. Las *acciones* anteriores se repiten para diferentes puntos y funciones que inducen a *interiorizarlas* en el *proceso* de interpretar geométricamente el concepto de derivada de una función real de variable real.

c. El proceso se *encapsula* en el objeto matemático *tangente1d,* escribiendo la siguiente función en MATLAB:

```
function t=tangente1d(fu,a)
% Para hallar la tangente a la gráfica de la función en
% el punto (a,f(a)), se debe digitar tangente1d(fu,a),
% donde fu es la expresión algebraica de la función y a
% el punto. Por ejemplo tangente1d('x.^2',2).
f=inline(fu,'x');
h=0.00001;
df=(f(a+h)-f(a))/h;
x=a-2:0.1:a+2;        % Asignar dominio de la función.
rt=df.*(x-a)+f(a);    % Asignar la ecuación de la recta.
                      % tangente a f en el punto (a,f(a)).
plot(x,f(x),'b',x,rt,'r');% Graficar función y tangente.
grid on;
punto=['o(',num2str(a),',',num2str(f(a)),')'];
% Definir etiqueta del punto.
text(a,f(a),punto);   % Escribir el punto en la gráfica.
xlabel('x');ylabel('y');
title('Interpretación geométrica de la derivada');
```

Sobre el objeto mental se pueden realizar acciones como,

```
>>tangente1d('4-x.^2',1)
```

Que genera la Figura 20.

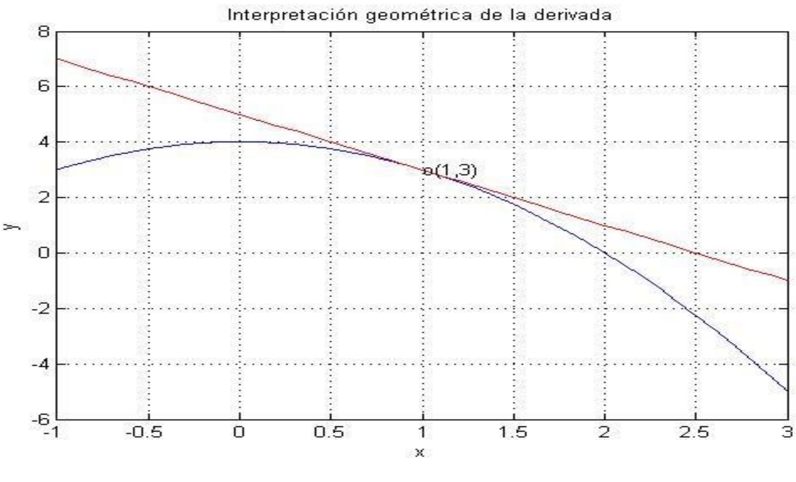

Figura 20. Tangente a la función $\boldsymbol{f(x) = 4 - x^2}$ en el punto (1,3). Fuente: el autor

10. *Interpretar* geométricamente la derivada direccional para campo escalar $z = f(x, y)$. La derivada de f en el punto a en dirección del vector u se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva de intersección entre la superficie representada por f y el plano, en dirección del vector u en el punto $(a, f(a))$. Para inducir esta interpretación se diseñaron las siguientes acciones:

a. Para un *ejemplo* particular, algunas acciones se realizan sobre objetos previamente encapsulados como plano, recta, funciones vectoriales, escribiendo lo siguiente en MATLAB:

```
hold on;
clear;
a=[1 1];          % Asignar punto de tangencia.
u=[1 1];          % Asignar vector dirección.
f=inline('4-x.^2-y.^2','x','y'); % Definir la  función.
x0=a(1);y0=a(2);  % Asignar variables.
z0=f(x0,y0);      % Evaluar f en a.
xi=x0-1;xf=x0+1;  % Asignar dominio de f en x.
yi=y0-1;yf=y0+1;  % Asignar dominio de f en y.
zf=2*abs(z0); zi=-zf; % Definir rango en f en z.
[x,y]=meshgrid(xi:0.01:xf,yi:0.01:yf);
                 % Asignar dominio de f en el plano xy.
z=f(x,y);        % Evaluar f en el dominio.
mesh(x,y,z);     % Graficar la malla que representa a f.
A=[u(1) u(2) 0]; % Asignar vector dirección en R^3.
B=[0 0 z0];      % Asignar vector ortogonal al dirección.
N=cross(A,B);    % Asignar vector normal al plano
                 % formado por A y B.
A=N(1);B=N(2);C=N(3);% Asignar coordenadas del vector
                     % normal al plano.
ys=[num2str(-A/B),'*(x,num2str(x0),')+',num2str(y0),...
'+0*z']           % Generar ecuación del plano
                  % y=(-B/A)*(x-x0)+y0.
f2=inline(ys,'x','z');% Definir el plano tangente.
[x,z]=meshgrid(xi:0.01:xf,zi:0.01:zf);
                  % Asignar dominio en el plano.
 y=f2(x,z);       % Evaluar el dominio del plano.
 mesh(x,y,z);     % Definir la malla que representa a f.
 t=xi:0.01:xf  % Asignar Dominio de la función vectorial.
 plot3(t,f2(t,0.*t),f(t,f2(t,0.*t)),'b','linewidth',2)
                  % Graficar la función vectorial que
                  % representa curva parametrizada C
                  % que es la intersección de la gráfica
                  % de f con el plano.
 h=0.00001;       % Aproximar que h tiende a cero.
 df2x=(f2(x0+h,x0)-f2(x0,x0))/h;
 dft=(f(x0+h,f2(x0+h,0))-f(x0,f2(x0,0)))/h;
                 % Calcular derivada direccional.
 u=[1,df2x,dft]  % Asignar vector direccional de la recta
```

```
                % tangente a la curva de intersección C.
t=-1:0.01:1;
plot3(t.*u(1)+x0,t.*u(2)+y0,t.*u(3)+z0,'g', ...
'linewidth',2);  % Graficar la tangente.
cadena=['o(',num2str(x0),',',num2str(y0),',',...
num2str(z0),')'];% Asignar etiqueta del punto.
text(x0,y0,z0,cadena);
grid on;
```

Estas acciones generan las Figura 21 y Figura **22**.

b. *Repetir las acciones* anteriores para diferentes puntos y campos escalares, para interiorizarlas en el proceso de determinar la tangente a la curva C, intersección de un campo escalar $z = f(x, y)$ con el plano en dirección del vector u, en un punto arbitrario a de C.

c. El proceso anterior se encapsula en el *objeto* matemático `tangente2d`, tal que dado el campo escalar, el punto y el vector dirección encuentran la derivada direccional y la representan geométricamente.

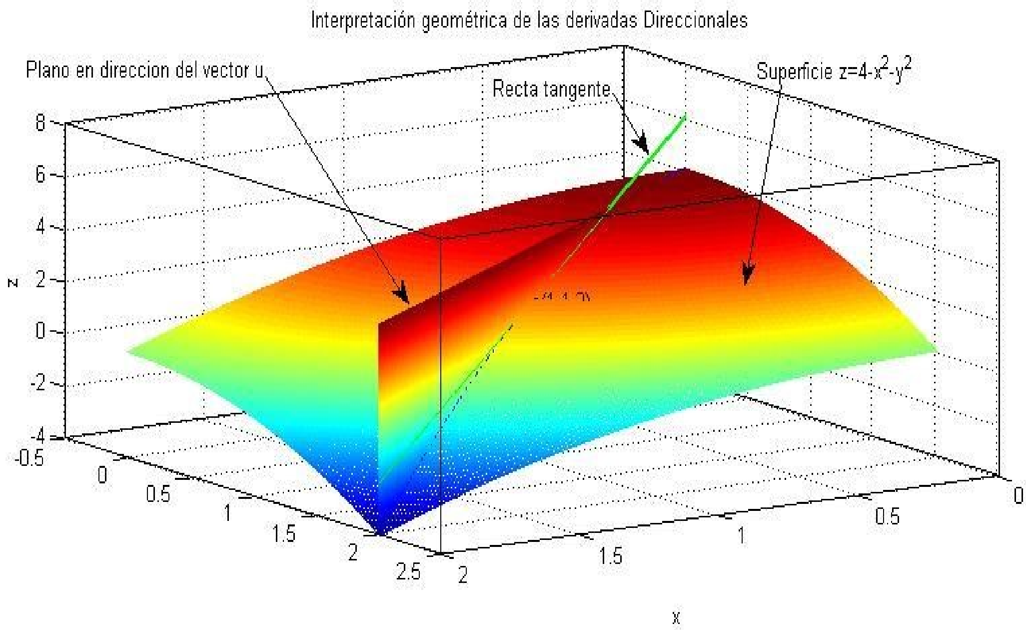

Figura 21. Interpretación geométrica de la derivada direccional, el plano de la dirección del vector u, corta la gráfica de la superficie.

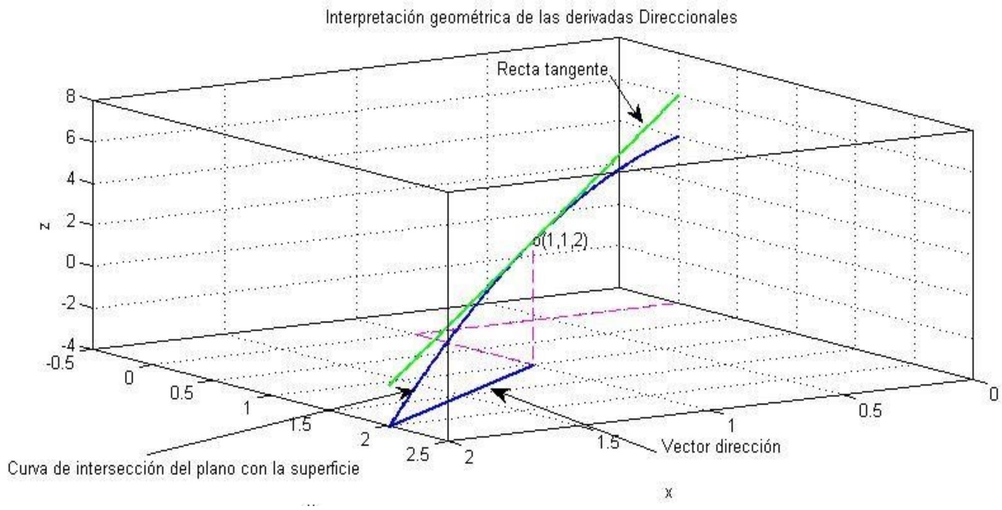

Figura 22. Interpretación geométrica de la derivada direccional, la pendiente de la recta tangente a la curva formada por la intersección del plano en la dirección $\boldsymbol{u}$ y la gráfica del campo escalar $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

C. Construcción del objeto derivada parcial de una función real de variable vectorial o CE

La derivada parcial es un caso particular de la derivada direccional, cuando el vector direccional es uno de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para la construcción de este objeto matemático se propone activar los siguientes mecanismos mentales.

1. Calcular la derivada parcial de un campo escalar.

a. Para el caso particular $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 3z$, calcular las derivadas parciales de f respecto a x, y y a z en el punto $(1, -1, 2)$ utilizando y realizando acciones sobre los objetos matemáticos previamente construidos. Se proponen las siguientes:

```
>> ddR3(@mifuncion,[1 -1 2],[1 0 0])
% Calcular la derivada parcial de f respecto a x.
>> ddR3(@mifuncion,[1 -1 2],[0 1 0])
% Calcular la derivada parcial de f respecto a y.
>> ddR3(@mifuncion,[1 -1 2],[0 0 1])
% Calcular la derivada parcial de f respecto a z.
```

2. *Repetir* las acciones anteriores para calcular la derivadas parciales en otros puntos y para diferentes campos escalares definidos sobre $\mathbb{R}^3$ e interiorizar en procesos.

3. Desencapsular el objeto matemático ddR3 para calcular derivadas parciales en campos escalares definidos en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ y en general en $\mathbb{R}^n$, cuando $n > 1$.
4. Repetir estos procesos y coordinarlos para encapsularlos en el objeto matemático derivada parcial de un campo escalar.
5. *Interpretar* geométricamente la derivada parcial.
a. *Encapsular* el proceso de interpretar geométricamente la derivada direccional de un campo escalar en el objeto matemático `igR2`,

```
function y=igR2(fu,u,a)
x0=a(1);y0=a(2);
u1=u(1);u2=u(2);
f=inline(fu);
u1=u1/norm(u); u2=u2/norm(u);
z0=f(x0,y0);
limx=1;limy=1;
xi=x0-limx;xf=x0+limx;
yi=y0-limy;yf=y0+limy;
zi=0;zf=2*abs(z0);
axis([xi xf yi yf zi zf]);  % Definir rango para f.
h=0.00001;
[x,y]=meshgrid(xi:0.01:xf,yi:0.01:yf);
z=f(x,y);
hold on;
mesh(x,y,z);
A=[u1 u2 0];
B=[0 0 z0];
N=cross(A,B);
a=N(1);b=N(2);c=N(3);
if abs(b)<=0.0001
   xs=[num2str(x0),'+0*y+0*z']; % Ecuación del plano x=x0
   [y,z]=meshgrid(yi:0.01:yf,zi:0.01:zf);
   f1=inline(xs,'y','z');
   x=f1(y,z);
   mesh(x,y,z);
   t=yi:0.01:yf;
   plot3(f1(t,0.*t),t,f(f1(t,0.*t),t),'r','linewidth',2);
   % Graficar  la curva parametrizada C1 que
   % corresponde a la intersección del plano con la
   % superficie.
   df1y=(f1(y0+h,0)-f1(y0,0))/h;
   dft=(f(f1(y0+h,0),y0+h)-f(f1(y0,0*y0),y0))/h;
   % Calcular las derivadas parciales.
   u=[df1y,1,dft]; % Definir vector dirección de la recta
                   % tangente.
   t=-limy:0.01:limy;
   plot3(u(1).*t+x0,u(2).*t+y0,u(3).*t+z0,'g', ...
```

```
  'linewidth',2);
   %Gráfica de la recta tangente a la curva C1
else
    ys=[num2str(-a/b),'*(x-  ,num2str(x0),')+',...
    num2str(y0),'+0*z'];
    %ecuación del plano y=(-b/a)*(x-x0)+y0
    f2=inline(ys,'x','z');
    [x,z]=meshgrid(xi:0.01:xf,zi:0.01:zf);
    y=f2(x,z);
    mesh(x,y,z); % Graficar el plano con el vector u.
    t=xi:0.01:xf;
    plot3(t,f2(t,0.*t),f(t,f2(t,0.*t)),...
    'b','linewidth',2);
    df2x=(f2(x0+h,x0)-f2(x0,x0))/h;
    dft=(f(x0+h,f2(x0+h,0))-f(x0,f2(x0,0)))/h;
    u=[1,df2x,dft];
    t=-limx:0.01:limx;
    plot3(t.*u(1)+x0,t.*u(2)+y0,t.*u(3)+z0, ...
    'g','linewidth',2);
end
    xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
cadena=['(*',num2str(x0),',',num2str(y0),',', ...
num2str(z0),')'];
plot3(x0,y0,z0,'o','LineWidth',2,...
                       'MarkerEdgeColor','k',...
                       'MarkerFaceColor','g',...
                       'MarkerSize',5)
text(x0,y0,z0,cadena);
cadena=['(*',num2str(x0),',',num2str(y0),',', ...
num2str(zi),')'];
plot3(x0,y0,zi,'o','LineWidth',2,...
                       'MarkerEdgeColor','k',...
                       'MarkerFaceColor','g',...
                       'MarkerSize',5);
text(x0,y0,zi,cadena);
title('Interpretación geométrica de las derivadas...
Direccionales')
xa=[x0 x0+u1];ya=[y0 y0+u2];za=[zi zi];
line(xa,ya,za,'MarkerFaceColor','r','linewidth',2);
% Graficar el vector dirección.
xa=[xi x0];ya=[yi yi];za=[zi zi];
line(xa,ya,za,'Linestyle','--,'color','m','linewidth',1);
xa=[x0 x0];ya=[yi y0];za=[zi zi];
line(xa,ya,za,'Linestyle','--,'color','m','linewidth',1);
xa=[x0 x0];ya=[y0 y0];za=[zi z0];
line(xa,ya,za,'Linestyle','--,'color','m','linewidth',1);
grid on;
box on
```

6. Realizar acciones sobre el objeto matemático `igR2`, por ejemplo para visualizar la interpretación geométrica de la derivadas parciales del campo,

$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, en el punto (1,1), digitar:

```
>> igR2('4-x.^2-y.^2',[1 0],[1 1]);
% Calcular DP de f respecto a x en el punto (1,1).
>> igR2('4-x.^2-y.^2',[0 1],[1 1]);
% Calcular la DP de f respecto a y en el punto (1,1).
```

Al procesar este código genera las Figura 23 y Figura 24.

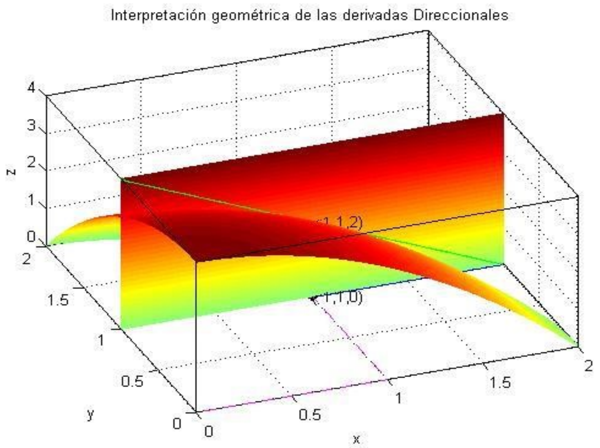

Figura 23. Interpretación geométrica de la derivada parcial de $\boldsymbol{f}$ respeto a $\boldsymbol{x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Fuente: el autor.

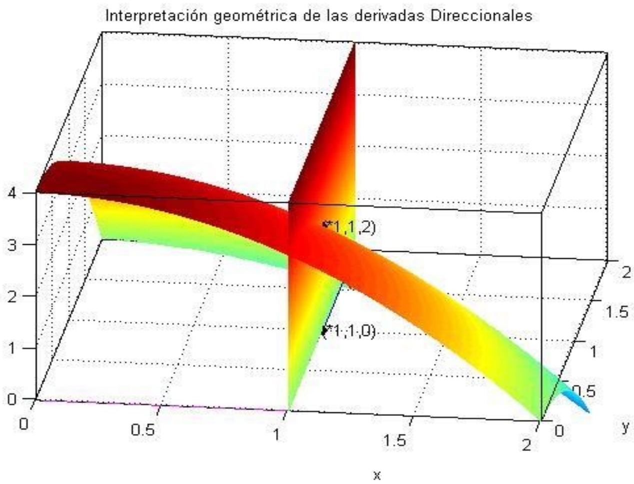

Figura 24. Interpretación geométrica de la derivada parcial de $\boldsymbol{f}$ respeto a $\boldsymbol{y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Fuente: el autor

D. Derivada de una función en varias variables

1. Para aproximar la derivada de una función definida sobre un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, se proponen las siguientes acciones:

a. Para el caso de una función real de variable real, $n = 1$ y $m = 1$, calcular $Df(a) = f'(a)$: *encapsular* la función a calcular la derivada y utilizar el objeto derivada de una función real de variable real, por ejemplo para el caso particular $f(x) = x^2$ en el punto $a = 2$.

```
function f=fR_R(x)
% Definir la unción real de variable real.
 f=x.^2;

 function y=derivada(fu,a)
 % Definir la derivada de una función en un punto real.
     h=0.00001; % Definir incremento.
     y=(fu(a+h)-fu(a))/h;

 >>y=derivada(@fR_R,2)
```

b. Para el caso de una función definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ la derivada de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $a = (1,1)$ se encuentra realizando las siguientes acciones:

```
function f=fR2_R(x,y)
%Definir el campo escalar de R^2 a R.
f=x.^2+y.^+2;


function y=ddR2_R(fu,a,u)
% Calcular la DD de un campo escalar de R^2 a R.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2))-fu(a(1),a(2)))/h;


function y=grR2_R(g,a)
% Calcular el gradiente de un campo escalar de R^2 a R.
fx=ddR2(g,a,[1 0]);
fy=ddR2(g,a,[0 1]);
y=[fx fy];

>>gradiente=grR2_R(@fR2_R,[1 1])
```

c. Para el caso de un campo escalar f, $n > 1$ y $m = 1$, por ejemplo para $n = 3$ para calcular la derivada de la función $f(x,y) = x^3 + 2y^3 + 3z$, en el punto $a = (1,2,3)$.

```
function f=fR3_R(x,y,z)
% Definir Campo escalar de R^3 a R.
f=x.^3+2*y.^3+3.*z;

function y=ddR3_R(fu,a,u)
% Calcular la DD de un campo escalar de R^3 a R.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2),b(3))-fu(a(1),a(2),a(3)))/h;

function y=grR3_R(g,a)
% Calcular el Gradiente de un campo escalar de R^3 a R.
fx=ddR3(g,a,[1 0 0]);
fy=ddR3(g,a,[0 1 0]);
fz=ddR3(g,a,[0 0 1]);
y=[fx fy fz];
>>gradiente=grR3_R(@fR3_R,[1 2 3])
```

d. Repetir acciones anteriores para campos escalares de dimensión mayor que 3 en varios puntos, y encapsular la derivada como el gradiente del campo escalar.

e. Para el caso de una función vectorial de variable real, $n = 1$ y $m > 1$, por ejemplo si $m = 2$, aproximar la derivada para la función vectorial $f(t) = (\cos t, \sin t)$ en $a = \pi$ realizar las siguientes acciones:

```
function f=fR_R2(t)
% Definir la función vectorial en R^2 de variable real.
f=[cos(t) sin(t)];

function y=derivada(fu,a)
% Aproximar la derivada de una función real en un punto.
h=0.00001;
y=(fu(a+h)-fu(a))/h;

>>y=derivada(@fR_R2,pi)
```

f. Para el caso de la función vectorial de variable real, $n = 1$ y $m > 1$, por ejemplo para $m = 3$, aproximar la derivada para la función vectorial $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ en $a = \pi$ se deben realizar las siguientes acciones:

```
function f=fR_R3(t)
% Definir la función vectorial en R^3 de variable real.
f=[cos(t) sin(t) t]
>>y=derivada(@fR_R3,pi)
```

g. *Repetir* acciones anteriores para funciones vectoriales definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, para $m > 3$ en varios puntos y *encapsular* la derivada como el vector en $\mathbb{R}^m$ cuyas m componentes son las derivadas de cada una de las $f_i(a), i = 1, \cdots, m$.

2. *Interiorizar* las acciones anteriores en procesos.

a. *Repetir* las acciones anteriores para diferentes casos.

b. Para calcular la derivada de la función,

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - 2xz, xyz).$$

En el punto $a = (1,1,1)$, se debe calcular la matriz jacobiana y utilizar los objetos matemáticos previamente construidos. Para este propósito se diseñaron las siguientes actividades:

```
function f=f1(x,y,z)
f=x+y+z;

function f=f2(x,y,z)
f=x-y-2*x*z;

function f=f3(x,y,z)
f=x*y*z;

function y=ddR3_R(fu,a,u)
% Calcular la DD de un campo escalar de R^3 a R.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2),b(3))-fu(a(1),a(2),a(3)))/h;


function y=grR3_R(g,a)
% Calcular el gradiente de un campo escalar de R^3 a R.
fx=ddR3_R(g,a,[1 0 0]);
fy=ddR3_R(g,a,[0 1 0]);
fz=ddR3_R(g,a,[0 0 1]);
y=[fx fy fz];

function y=jacR3_R3(f1,f2,f3,a)
y=[grR3_R(f1,a);grR3_R(f2,a);grR3_R(f3,a)];

>>jacobiana=jacR3_R3(@f1,@f2,@f3,[1 1 1])

jacobiana =
    1.0000    1.0000    1.0000
   -1.0000   -1.0000   -2.0000
    1.0000    1.0000    1.0000
```

c. Modificar los códigos anteriores para calcular la derivada de otros campos vectoriales definidos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ en diferentes puntos.

3. Repetir las acciones anteriores para generalizar el concepto de derivada de una función en varias variables.

E. Construcción del objeto diferencial de una función real de variable real DIFR

1. Para calcular la diferencial de una función real de variable real f en el punto a e interpretar geométricamente, se diseñaron las siguientes acciones:

a. Calcular la diferencial, para el caso particular de la función $f(x) = x^2$, en el punto $a = 2$. Desencapsular la derivada de una función y definir el error de aproximación $E(a, h)$ e interpretar la fórmula de Taylor de primer orden, a través de los siguientes mecanismos:

```
function f=fR_R(x)
% Definir la función real de variable real.
f=x.^2;

function y=derivada(fu,a)
% Aproximar a la derivada de una función en un punto.
dx=0.000001;
y=(fu(a+dx)-fu(a))/dx;

function E=errorf(fu,a,h)
% Definir la función error de la fórmula de Taylor.
if h==0
    E=0;
else
    E=(f(a+h)-f(a))/h-derivada(fu,a);
end

>>a=2;                % Definir punto de tangencia.
>>hold on
>>x=a-2:0.01:a+2;     % Asignar rango para graficar.
>>m=derivada(@fR_R,2);% Calcular la pendiente de la recta
                      % tangente.
>>rt=m*(x-a)+fR_R(2); % Definir la ecuación de la recta
                      % tangente.
>>plot(x,fR_R(x),'r',x,rt,'b','LineWidth',1.5);
% Graficar  la función y la tangente.
>>h=1;                % Asignar valor del incremento.
>>deltaf=f(a+h)-f(a); % Asignar el incremento de f al
                      % variar x en [a,a+h]
>>dy=derivada(@fR_R,2)*h; % Calcular la diferencial.
```

```
>>deltaf=dy+h*errorf(@fR_R,2,h);
% Asignar la fórmula de Taylor de primer orden.

ans
deltaf = 8
dy =     4.0000
deltaf = 8
```

b. *Interpretar* geométricamente la diferencial, dy, como el cambio de altura de la recta tangente, mientras que `deltaf`, es el cambio de altura de la curva $y = f(x)$ cuando x varía una cantidad h desde a hasta $a + h$, y la diferencia entre `deltaf` y dy es la función `errorf` que representa la función $hE(a, h)$ del análisis del concepto. Esta interpretación se puede visualizar al realizar la acción anterior, que genera la Figura 25.

c. *Interpretar* analíticamente la existencia de la diferencial como la posibilidad de aproximar la función $y = f(x) = x^2$ por la recta tangente, $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, en puntos x muy próximos al punto fijo a.

d. Repetir las acciones anteriores, haciendo que $h \rightarrow 0$, analizar el comportamiento de `deltaf`, `dy` y `errorf`.

2. *Interiorizar* las *acciones* en *procesos*.

a. *Repetir* las acciones del paso anterior para diferentes valores de a.

b. *Repetir* las acciones del paso anterior para diferentes funciones f.

3. *Encapsular los* procesos anteriores en el objeto matemático *diferencial de una función real de variable real* f en un punto a, implementado en la siguiente función.

```
function y=diferencialdy(fu,a,h)
% Definir la función que calcula la diferencial.
y=derivada(fu,a)*h;
>>y=diferencialdy(@fR_R,2,0.001)

ans
y = 0.0040
```

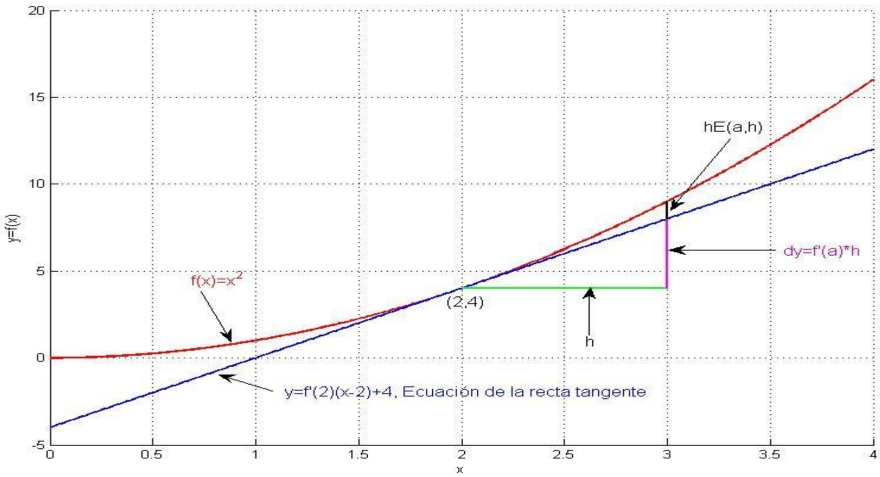

Figura 25. Interpretación geométrica de la diferencial $f(x) = x^2$ en x=2. Fuente: el autor.

F. Construcción del objeto diferencial de una función vectorial de variable real DIFVR

1. *Acción* de calcular la diferencial de una función vectorial de variable real.

a. Desencapsular los objetos matemáticos derivada de una función real.

b. Desencapsular la función vectorial de variable real.

c. Realizar las siguientes acciones sobre los anteriores objetos matemáticos, al programar y ejecutar los siguientes scripts y encapsularlos en los objetos matemáticos definidos por las funciones.

```
function diffuvectorial(varargin)
% Graficar la tangente a una curva en R^3 definida por la
% función f(t)=(2cos(t),sin(t),t).
clc;
graficatangentefR_R3(@fR_R3,3*pi);

function f=fR_R3(t)
% Definir una función de R a R^3.
f=[2*cos(t) sin(t) t];

function f=derivada(fu,a)
% Aproximar la derivada de una función en el punto a.
h=0.00001;
f=(fu(a+h)-fu(a))/h;
```

```
function graficafR_R3(fu,t)
% Graficar la función fu en R^3, en un intervalo de t.
x=[];y=[];z=[];      % Inicializar vectores.
for k=1:length(t)
    vaux=fu(t(k));   % Evaluar la función.
    x=[x,vaux(1)];   % Actualizar los vectores.
    y=[y,vaux(2)]; z=[z,vaux(3)];
end
plot3(x,y,z,'b','linewidth',2); % Graficar la función.
```

```
function graficatangentefR_R3(fu,t0)
% Graficar la función y la tangente en el punt0 f(t0).
t=0:0.01:6*pi;      % Definir rango de t.
graficafR_R3(fu,t);% Graficar la curva definida por fu.
v0=fu(t0);          % Evaluar la función en t0.
x0=v0(1);y0=v0(2);z0=v0(3); % Establecer las coordenadas.
df=derivada(fu,t0);% Calcular la derivada.
x=@(t) x0+df(1)*t; % Definir x(t) para la recta tangente.
y=@(t) y0+df(2)*t; % Definir y(t) para la recta tangente.
z=@(t) z0+df(3)*t; % Definir z(t) para la recta tangente.
t=-1:0.01:1;hold on; % Definir Rango de t de la tangente.
plot3(x(t),y(t),z(t),'r','linewidth',2)% Grafica tangente
xlabel('x(t)');ylabel('y(t)');zlabel('z(t)');
cadena=['(',num2str(x0),',',num2str(y0),num2str(z0),')'];
text(x0,y0,z0,cadena);
title('Diferencial de una función vectorial de...
variable real ')
grid on;
```

d. Interpretar geométricamente los resultados generados al ejecutar los *scripts* anteriores (ver la Figura 26).

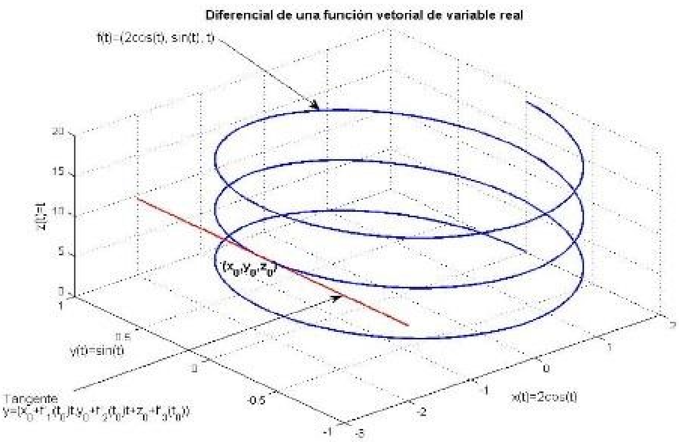

Figura 26. Interpretación geométrica de la diferencial $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = (\mathbf{2}\cos\boldsymbol{t}, \sin\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t})$ en el punto $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}) = (\mathbf{2}\cos\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}, \sin\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}, \mathbf{3}\boldsymbol{\pi})$. Fuente: el autor.

2. Repetir las *accione*s anteriores para diferentes puntos t_0 y funciones f definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$.

3. Repetir las acciones anteriores para diferentes puntos t_0 y funciones f definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$.

4. Repetir las acciones anteriores para diferentes puntos t_0 y funciones f definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$, $m > 3$.

5. Interiorizar las acciones anteriores en procesos.

6. Encapsular el proceso anterior en el objeto matemático diferencial de una función vectorial de variable real en un punto.

G. Construcción del objeto diferencial de un campo escalar DICE

1. Calcular la diferencial de un campo escalar de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.

a. Determinar la fórmula de Taylor de primer orden para $f(a+u)$, del campo escalar $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto (1,1) mediante la ejecución de las siguientes acciones en MATLAB sobre objetos matemáticos previamente construidos.

```
function f=fR2_R(x,y)
% Definir campo escalar de R^2 a R.
f=x.^2+y.^+2;

function y=ddR2_R(fu,a,u)
% Calcular la derivada direccional de un campo escalar
% fu de R^2 a R, en a en la dirección del vector u.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2))-fu(a(1),a(2)))/h;

function y=grR2_R(g,a)
% Calcular el gradiente de un campo escalar de R^2 a R.
fx=ddR2_R(g,a,[1 0]);
fy=ddR2_R(g,a,[0 1]);
y=[fx fy];

function y=difcampoescalar(fu,a,u)
% Calcular la diferencial del CE fu en el punto a.
y=dot(grR2_R(fu,a),u)

function E=errorces(fu,a,u)
% Calcular error de la fórmula de Taylor de primer grado
% para la función fu en el punto a expandida a, a+u.
if norm(u)==0
    E=0;
else
    b=a+u;
```

```
    E=((fu(b(1),b(2))-fu(a(1),a(2)))-...
    difcampoescalar(fu,a,u))/norm(u);
end


>>a=[1 1]  % Asignar punto donde se calcula la
           % diferencial de f.
>>u=[0.5 0.5] % Asignar vector para calcular f(a+u)
              % aplicando fórmula de Taylor de orden 2.
>>deltaf=difcampoescalar(@fR2_R,a,u)+norm(u)*...
errorces(@fR2_R,a,u)
% Calcular deltaf=f(a+u)-f(a), por la fórmula de Taylor
  De primer orden.
>>deltaf=fR2_R(a(1)+u(1),a(2)+u(2))-fR2_R(a(1),a(2));
% Comparar el valor anterior con  deltaf=f(a+u)-f(a).
ans
deltaf =2.5000
deltaf =2.5000
```

b. Identificar la transformación lineal en u, $T_a(u)$, como la función difcampoescalar(@fR2_R,a,u) que representa la diferencial de f en a.

c. Interpretar analíticamente la existencia de la diferencial de f en el punto a, como la posibilidad de aproximar *deltaf*= $f(a+u)-f(a)$, con la suma de la transformación lineal dada por, difcampoescalar(@fR2_R,a,u), y el error definido como, norm(u)*errorces(@fR2_R,a,u) que corresponde a la fórmula de Taylor de primer orden.

d. Interpretar geométricamente la diferencial al ejecutar las siguientes acciones sobre objetos previamente construidos.

```
function ft=ptangente(f,a,x,y)
% Calcular el plano tangente de f en el punto a.
ft=f(a(1),a(2))+ddR2_R(f,a,[1,0])*(x-a(1))+ ...
ddR2_R(f,a,[0 1]),*(y-a(1));
>>x=a-5:0.01:a+5;y=x;  % Definir rango de x e y para
                       % graficar.
>>[x,y]=meshgrid(x,y); % Establecer la malla que
                       % representa el dominio.
>>mesh(x,y,fR2_R(x,y));% Graficar la función
>>cadena=['(',num2str(a(1)),',',num2str(a(2)),',',...
  num2str(fR2_R(a(1),a(2))),')'];
>>text(a(1),a(2),fR2_R(a(1),a(2)),cadena,'color','red');
>>hold on;
>>mesh(x,y,ptangente(@fR2_R,[1,1],x,y));
%Graficar  el  plano tangente
```

Donde `difcampoescalar(@fR2_R,a,u)`, representa el cambio de altura del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, mientras que $f(a+u) - f(a)$ representa el cambio de altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) cambia del punto fijo $\boldsymbol{a} = (a, b)$ al punto, `a+u=(a(1)+ u(1),a(2)+u(2))`. (Ver las Figura 27 y Figura **28**).

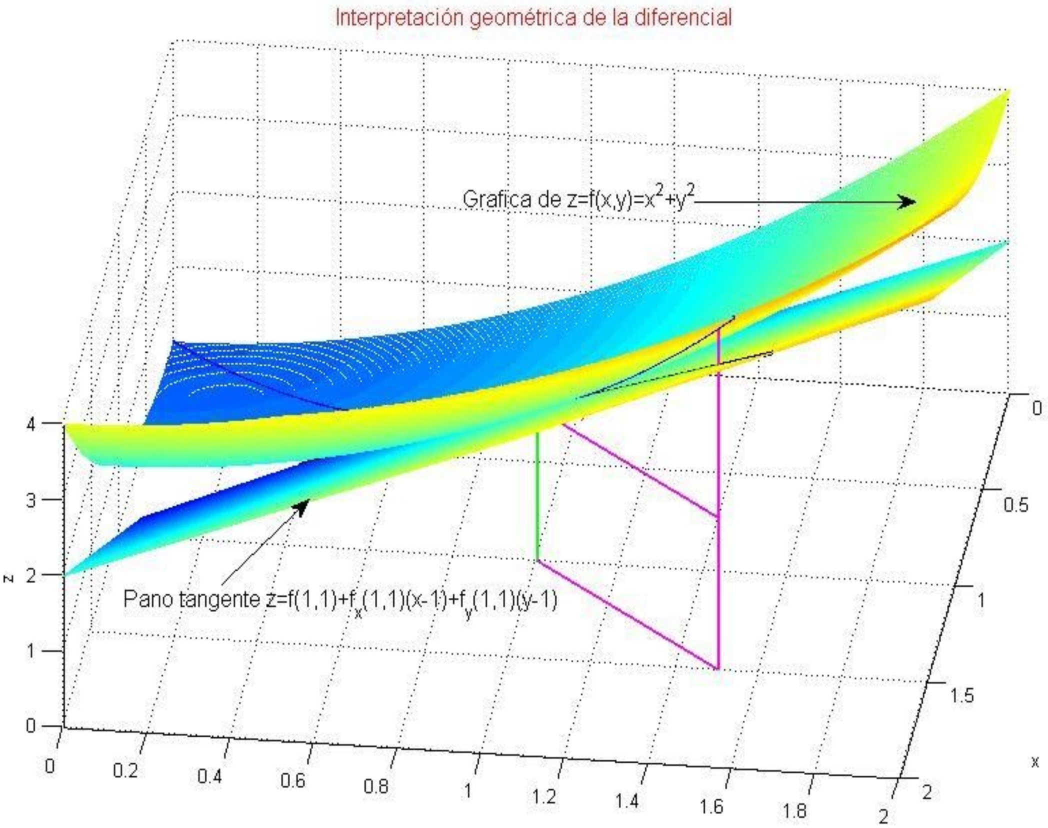

Figura 27. Plano tangente a la superficie $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ en el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$. Fuente: el autor

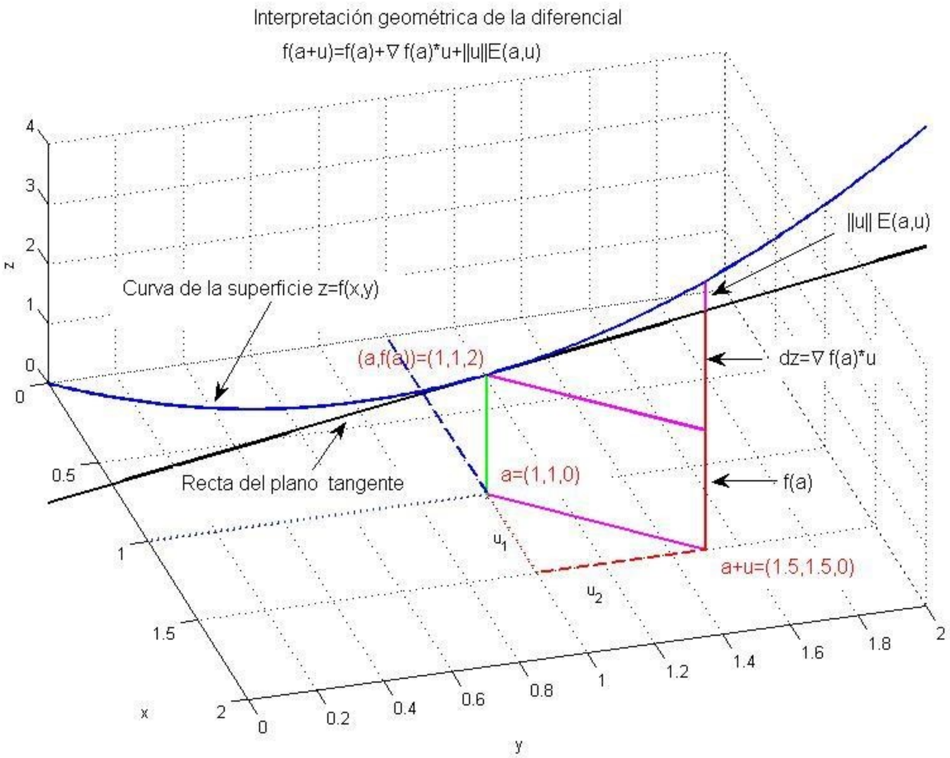

Figura 28. Interpretación geométrica de la diferencial de $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2}$ en el punto $(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{2})$. Fuente: el autor.

e. *Repetir* la acción anterior para otros valores de a, del vector u y otros campos escalares f.

f. *Repetir* y modificar las acciones anteriores para calcular la diferencial de otros campos escalares f definidos de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ para varios puntos a y vectores u e interpretar geométrica y analíticamente.

2. Repetir las acciones anteriores y generalizarlas para interiorizar en un proceso que calcula la diferencial de un campo escalar en un punto.

3. Encapsular la acción anterior en el objeto matemático *diferencial de un campo escalar en un punto a.*

H. Construcción del objeto diferencial de un campo vectorial DICV

1. Dado un abierto A subconjunto de $\mathbb{R}^n$, un punto a de A y un *campo vectorial* f definido de A en $\mathbb{R}^m$, la acción de calcular la diferencial de f en el punto a. Dado el campo vectorial,

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - 2xz, xyz).$$

determinar la diferencial del campo vectorial f en el punto $a = (1,1,1)$.

a. *Desencapsular* el objeto matemático función y definir el campo vectorial

```
function f=f1(x,y,z)
f=x+y+z;

function f=f2(x,y,z)
f=x-y-2*x*z;

function f=f3(x,y,z)
f=x*y*z;
```

b. *Desencapsular* el objeto matemático derivada de una función en el punto $a = (1,1,1)$.

```
function y=ddR3_R(fu,a,u)
% Calcular DD de un campo escalar de R^3 a R.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2),b(3))-fu(a(1),a(2),a(3)))/h;
```

c. *Desencapsular* el objeto matemático campo escalar diferenciable en un punto a.

```
function y=grR3_R(g,a)
% Calcular gradiente de un campo escalar de R^3 a R.
fx=ddR3_R(g,a,[1 0 0]);
fy=ddR3_R(g,a,[0 1 0]);
fz=ddR3_R(g,a,[0 0 1]);
y=[fx fy fz];
```

d. Desencapsular el objeto matemático derivada de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, como la matriz jacobiana de orden $m \times n$, con filas formadas por los gradientes de m campos escalares, para el ejemplo $m = 3, n = 3$.

```
function y=jacR3_R3(f1,f2,f3,a)
y=[grR3_R(f1,a);grR3_R(f2,a);grR3_R(f3,a)];
```

e. Definir la función error para la fórmula de Taylor de grado 1.

$$E_a: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$u \longmapsto E_a(u) = \begin{cases} \dfrac{\|f(a+u) - f(a) - T_a(u)\|_m}{\|u\|_n}, & Si\ u \neq 0 \\ 0, & Si\ u = 0 \end{cases}.$$

```
function E=errorcvec(f1,f2,f3,a,u)
% Definir función error.
if norm(u)==0
    E=0;
else
    b=a+u;
    fb=[f1(b(1),b(2),b(3)) f2(b(1),b(2),b(3))...
    f3(b(1),b(2),b(3))];
    fa=[f1(a(1),a(2),a(3)) f2(a(1),a(2),a(3))...
    f3(a(1),a(2),a(3))];
    E=(fb'-fa'-difcampovectorial(f1,f2,f3,a,u))/norm(u);
end
```

f. Definir campo vectorial diferenciable en un punto a, como la existencia de la transformación lineal aplicada en un punto, en dirección del vector u, $T_a(u)$, que se representa por el producto de la matriz jacobiana evaluada, el punto y el vector u.

```
function y=difcampovectorial(f1,f2,f3,a,u)
y=jacR3_R3(f1,f2,f3,a)*u';
```

g. Calcular $\Delta f(a) = f(a+u) - f(a) = T_a(u) + \|u\|E_a(u)$ para $a = (1,1,1)$ y $u = (0.5,0.5,0.5)$.

```
a=[1 1 1];u=[0.5 0.5 0.5];
b=a+u;
deltaf=difcampovectorial(@f1,@f2,@f3,a,u)+...
       norm(u)*errorcvec(@f1,@f2,@f3,a,u);
fb=[f1(b(1),b(2),b(3)) f2(b(1),b(2),b(3))...
f3(b(1),b(2),b(3))];
fa=[f1(a(1),a(2),a(3)) f2(a(1),a(2),a(3))...
f3(a(1),a(2),a(3))];
deltaf=fb'-fa'
deltaf =
    1.5000
   -2.5000
    2.3750
```

2. Repetir las acciones anteriores para otros puntos a y vectores u.

3. Repetir las acciones anteriores para otros valores de m, n, a y u e interiorizar en el proceso de calcular el diferencial de un campo vectorial definido de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para evaluar la fórmula de Taylor de primer grado.

4. Encapsular el proceso anterior en el objeto matemático diferencial de un campo vectorial en un punto.

5. Interpretar geométricamente la existencia del diferencial de un campo vectorial en un punto.
Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y sea f un campo vectorial de A en $\mathbb{R}^3$ que representa una superficie S_f en $\mathbb{R}^3$, definida paramétricamente como,

$$S_f = \{f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t) : (s,t) \in A\}.$$

Si f es diferenciable en un punto interior (s_0, t_0) de A, entonces el espacio tangente a S_f en el punto,

$$f(s_0,t_0) = \big(f_1(s_0,t_0), f_2(s_0,t_0), f_3(s_0,t_0)\big) \in \mathbb{R}^3,$$

está dado paramétricamente por la aplicación afín de A en $\mathbb{R}^3$ definida por,

$$pt(s_0,t_0)(s,t) = f(s_0,t_0) + dh(s_0,t_0)(s-s_0, t-t_0).$$

a. Definir las componentes de f, para el caso particular,

$$f = (f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t)) = (s+t, s-t, s^2-t^2)$$

en el punto $(s_0, t_0) = (1,2)$.

```
function f=f1(s,t)
% Definir componente f1 del campo vectorial f.
f=s+t;

function f=f2(s,t)
% Definir componente f2 del campo vectorial f.
f=s-t;

function f=f3(s,t)
% Definir componente f3 del campo vectorial f.
f=s.^2-t.^2;
```

b. Realizar acciones sobre los objetos matemáticos previamente construidos para hallar el espacio tangente a una superficie, expresado en forma paramétrica.

```
s0=1;t0=2; % Asignar coordenadas del punto de tangencia.
a=[s0 t0]  % Definir el punto a.
sa=s0-1:0.1:s0+1; % Definir el rango de s en el domino A.
ta=t0-1:0.1:t0+1; % Definir el rango de t en el domino A.
[sc,tc]=meshgrid(sa,ta); % Definir la malla para A.
xc=f1(sc,tc);       % Calcular f_1(s,t), (s,t) en A.
```

```
yc=f2(sc,tc);        % Calcular f_2(s,t), (s,t) en A.
zc=f3(sc,tc);        % Calcular f_3(s,t), (s,t) en A.
surf(xc,yc,zc);      % Graficar la superficie Sf.
% Calcular el espacio tangente
J=jacR2_R3(f1,f2,f3,a); % Calcular el diferencial del
                        % campo f en a.
f0=[f1(s0,t0) f2(s0,t0) f3(s0,t0)]; % Hallar f0=f(t0,s0).
pt=@(s,t) f0'+J*[s-s0;t-t0]; % Definir espacio tangente.
% Definir la componente en x del espacio tangente en
% forma paramétrica.
ptx=@(s,t) f0(1)+J(1,1)*(s-s0)+J(1,2)*(t-t0);
% Definir la componente en y del espacio tangente en
% forma paramétrica.
pty=@(s,t) f0(2)+J(2,1)*(s-s0)+J(2,2)*(t-t0);
% Definir la componente en z del espacio tangente en
% forma paramétrica.
ptz=@(s,t) f0(3)+J(3,1)*(s-s0)+J(3,2)*(t-t0);
hold on
xt=ptx(sc,tc); yt=pty(sc,tc); zt=ptz(sc,tc);
% Asignar la componente en x, y y z del espacio tangente.
surf(xt,yt,zt); % Graficar del espacio tangente.
```

c. Analizar el resultado de las acciones anteriores, que se pueden visualizar en la Figura 29.

6. Repetir las acciones anteriores para las siguientes situaciones e interiorizar en un proceso :

$f(s,t) \mapsto (x,y,z) = (s,t,s^2+t^2), \qquad (s_0,t_0) = (0,0),\ \ (s_0,t_0) = (1,1).$

$f(s,t) \mapsto (x,y,z) = (s+t,s-t,s^2-t^2),$
$(s_0,t_0) = (0,0), \ \ (s_0,t_0) = (1,2).$

$f(s,t) \mapsto (x,y,z) = (s\cos t\,, s\sin t\,, t), (s_0,t_0) = (0,0), \quad (s_0,t_0)$
$= (2,\pi/2).$

$f(s,t) \mapsto (x,y,z) = (\cos s \sin t\,, \sin s \sin t\,, \cos t), \qquad (s_0,t_0) = (0,0).$

$(s_0,t_0) = \left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$

que debe generar la Figura 30.

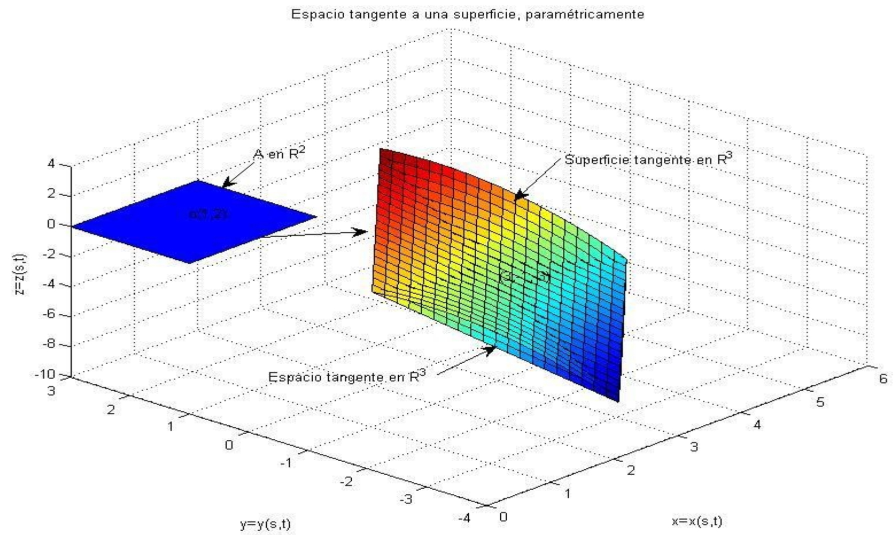

Figura 29. Interpretación geométrica del espacio tangente a una superficie en forma paramétrica. Fuente: el autor.

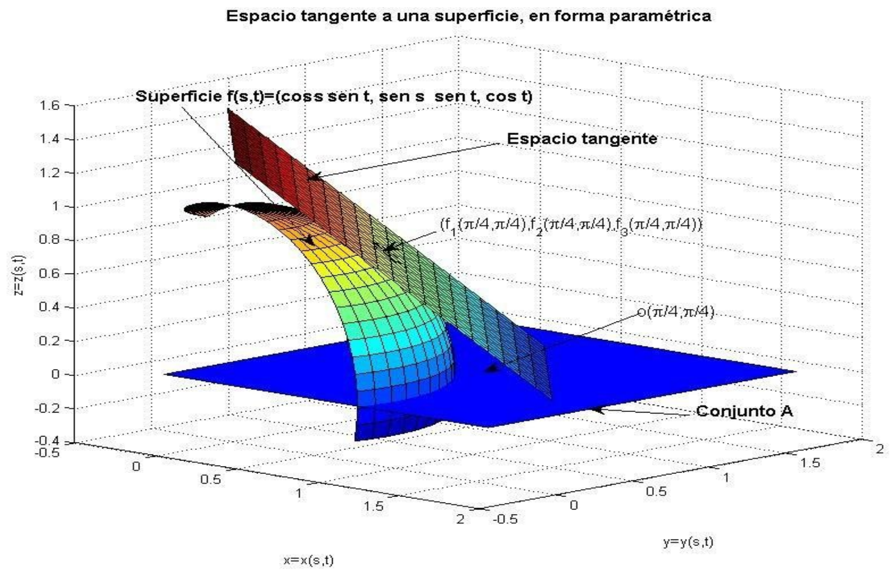

Figura 30. Interpretación geométrica del espacio tangente a una superficie en forma paramétrica. Fuente: el autor.

7. Encapsular los procesos anteriores en el objeto matemático espacio tangente expresado en forma paramétrica a una superficie en un punto.

```
function espaciotangente(f1,f2,f3,a)
s0=a(1);t0=a(2);
```

```
sa=s0-1:0.1:s0+1; % Definir el rango de s en el domino A.
ta=t0-1:0.1:t0+1; % Definir el rango de t en el domino A.
[sc,tc]=meshgrid(sa,ta);% Definir la malla para A.
xc=f1(sc,tc);       % Calcular f_1(s,t), (s,t) en A.
yc=f2(sc,tc);       % Calcular f_2(s,t), (s,t) en A.
zc=f3(sc,tc);       % Calcular f_3(s,t), (s,t) en A.
surf(xc,yc,zc);     % Graficar de la superficie Sf.
%Calcular el espacio tangente.
J=jacR2_R3(f1,f2,f3,a); % Calcular el diferencial del
                        % campo f en a.
s0=a(1);t0=a(2);    % Asignar coordenadas del punto de
                    % tangencia.
f0=[f1(s0,t0) f2(s0,t0) f3(s0,t0)] % Hallar f0=f(t0,s0).
pt=@(s,t) f0'+J*[s-s0;t-t0];  % Definir espacio tangente.
% Definir la componente en x del espacio tangente en
% forma paramétrica.
ptx=@(s,t) f0(1)+J(1,1)*(s-s0)+J(1,2)*(t-t0);
% Definir la componente en y del espacio tangente en
% forma paramétrica.
pty=@(s,t) f0(2)+J(2,1)*(s-s0)+J(2,2)*(t-t0);
% Definir la componente en z del espacio tangente en
% forma paramétrica.
ptz=@(s,t) f0(3)+J(3,1)*(s-s0)+J(3,2)*(t-t0);
hold on
xt=ptx(sc,tc); yt=pty(sc,tc); zt=ptz(sc,tc);
% Hallar la componente en x,y y z del espacio tangente.
surf(xt,yt,zt); % Graficar del espacio tangente.
sA=[s0-1 s0+1 s0+1 s0-1]; % Definir vecindad de s0.
tA=[t0-1 t0-1 t0+1 t0+1]; % Definir vecindad de t0.
hold on;
patch(sA,tA,'b')      % Definir vecindad de p0=(s0,t0).
text(s0,t0,['o(',num2str(s0),',',num2str(t0),')']);
% Definir el punto P0.
cadena=['(',num2str(f0(1)),',',num2str(f0(2)),...
',',num2str(f0(3)),')']
text(f0(1),f0(2),f0(3),cadena)
xlabel('x=x(s,t)');ylabel('y=y(s,t)');zlabel('z=z(s,t)');
title('Espacio tangente a una superficie,...
 paramétricamente')
```

I. Teoremas fundamentales

1. Verificar que si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en el punto, *TDICO*. Verificar que el recíproco del teorema no se cumple. Dada la función

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Definir la función

```
function f=fR2_R(x,y)
if x==0 & y==0
    f=0;
else
    f=(x.*y.^2)./(x.^2+y.^2);
end
```

b. Verificar que para esta función la fórmula de Taylor no se cumple, utilizando los objetos matemáticos derivada direccional, gradiente de un campo escalar y diferencial de un campo escalar,

```
>>taylor=difcampoescalar(@fR2_R,a,u)+norm(u)*...
errorces(@fR2_R,a,u)
% Definir fórmula de Taylor de orden dos.
ans=
    0
>>deltaf=fR2_R(a(1)+u(1),a(2)+u(2))-fR2_R(a(1),a(2))
% Calcular el valor de Delta f.
ans=0.2500
% Calcular la diferencial por la definición.
>>fprintf('Diferencial f en (x0,y0)...
 %10.5f\n',difcampoescalar(@fR2_R,a,u))
% Mostar la salida de los resultados.
Diferencial f por la definición en (x0,y0)    0.00000
>>fprintf('Si f es diferenciable en (x0,y0), por el...
 corolario 1, %10.5f\n',ddR2_R(@fR2_R,a,u))
% Genera la salida
 Si f es diferenciable en (x0,y0), por el corolario 1,
  0.25000
```

c. Interpretar geométricamente que esta función no es diferenciable. Graficar la función y el plano tangente realizando acciones sobre los objetos plano tangente y función definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

```
clc;
a=[0 0];          % Asignar punto de tangencia.
u=[0.5 0.5];      % Asignar vector dirección.
x0=a(1);y0=a(2);
x=x0-0.5:0.01:x0+0.5; % Asignar rango para x.
y=y0-0.5:0.01:y0+0.5; % Asignar rango para y.
[x,y]=meshgrid(x,y);  % Asignar malla del dominio.
```

```
hold on;
mesh(x,y,fR2_R(x,y)); % Graficar la función.
mesh(x,y,ptangente(@fR2_R,a,x,y));% Graficar el plano
                                  % tangente
grid on;
```

d. Interpretar que la gráfica de función en vecindades del punto (0,0), no se puede aproximar por un plano tangente a la función en (0,0), ver la Figura 31.

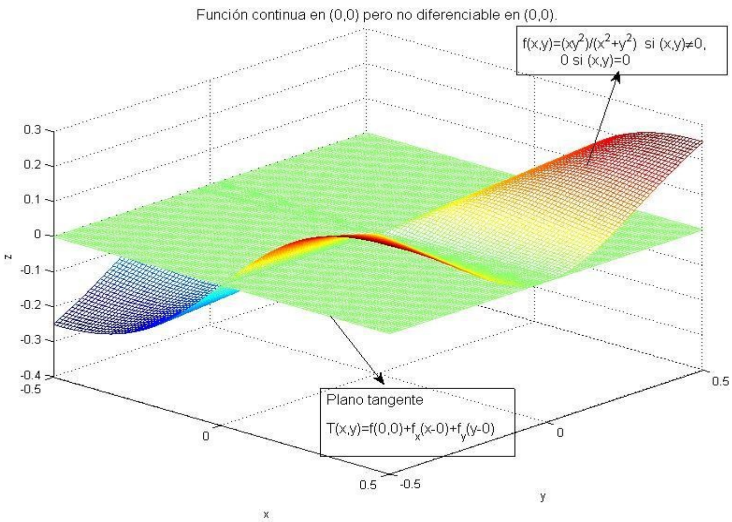

Figura 31. Interpretación geométrica de una función continua pero no diferenciable en $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Fuente: el autor**.**

2. Repetir las acciones anteriores para otros ejemplos y contraejemplos del Teorema 1, TDICO.
3. Interiorizar el proceso anterior para inferir que ser diferenciable implica ser continuo, pero el recíproco no se cumple.
4. Verificar el Teorema 2. Para el contrarrecíproco, si una función es discontinua en un punto, entonces no es diferenciable en este punto. Verificarlo para la siguiente función, que no es diferenciable en (0,0):

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Definir la función

```
function f=fR2_R(x,y)
if x==0 & y==0
    f=0;
else
    f=(x.*y.^4)./(x.^4+y.^8);
end
```

b. Graficar la función y el plano tangente con acciones sobre los objetos previamente construidos e interpretar la gráfica.

```
function teorema2(varargin)
% Verificar si una función es diferenciable implica la
% existencia de las derivadas direccionales.
clc;
a=[0 0];         % Asignar punto de tangencia.
u=[0.5 0.5];     % Asignar vector dirección.
x0=a(1);y0=a(2);
x=x0-0.5:0.01:x0+0.5; % Asignar rango para x.
y=y0-0.5:0.01:y0+0.5; % Asignar Rango para y.
[x,y]=meshgrid(x,y);  % Definir el dominio de f.
hold on;
C = del2(fR2_R(x,y));
% Graficar la función
mesh(x,y,fR2_R(x,y),'FaceLighting','gouraud',...
'LineWidth',0.3);
mesh(x,y,ptangente(@fR2_R,a,x,y)); % Graficar el plano
                                   % tangente.
grid on;
%Fórmula de Taylor
taylor=difcampoescalar(@fR2_R,a,u)+norm(u)*...
errorces(@fR2_R,a,u)
deltaf=fR2_R(a(1)+u(1),a(2)+u(2))-fR2_R(a(1),a(2))
fprintf('Diferencial f por la defnción en (x0,y0)...
 %10.5f\n', difcampoescalar(@fR2_R,a,u))
fprintf('Si f es diferenciable en (x0,y0), por el...
corolario 1,%10.5f\n',ddR2_R(@fR2_R,a,u));
```

Al realizar las anteriores acciones da como resultado,

```
taylor =
   -0.0294
deltaf =
    0.4706
Diferencial f por la defnción en (x0,y0)    0.00000
Si f es diferenciable en (x0,y0), por el corolario 1,
0.50000
```

La gráfica generada es la Figura 32.

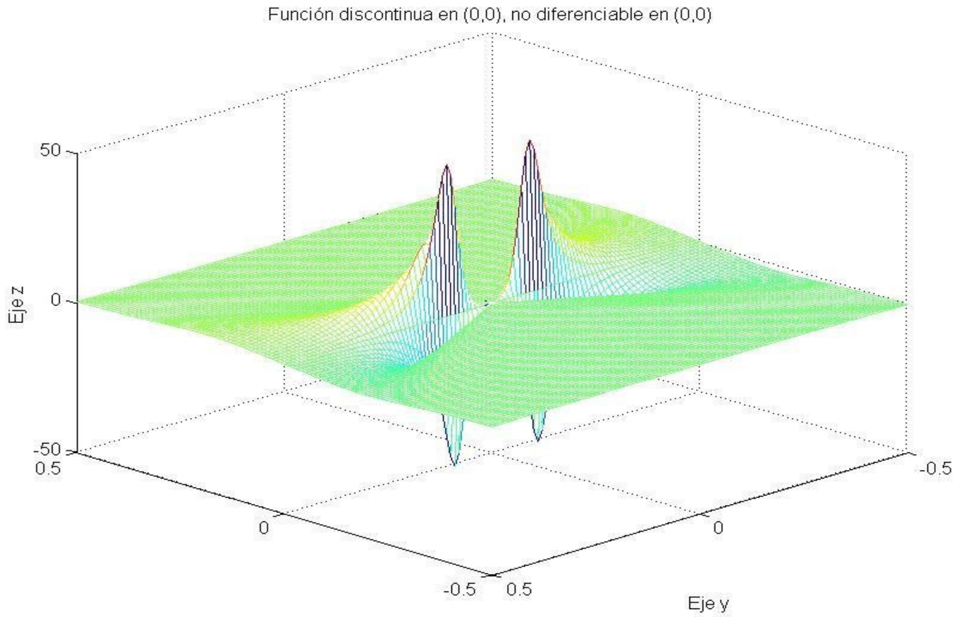

Figura 32. Interpretación geométrica de una función discontinua y no diferenciable en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Fuente: el autor.

5. Repetir las acciones anteriores para otros ejemplos y contraejemplos para verificar el Teorema 2.
6. Interiorizar el proceso anterior, para inferir que si una función es diferenciable en un punto, entonces implica la existencia de todas las derivadas direccionales en el punto TDIDD. Sin embargo, el recíproco no es cierto.
7. Verificar el Teorema 3. Para la función,

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

la cual es diferenciable en (0,0) pero sus derivadas parciales no son continuas en este punto.

a. Definir la función.

```
function f=fR2_R(x,y)
if x==0 & y==0
    f=0;
else
```

```
    f=(x.^2+y.^2).*sin(1./sqrt(x.^2+y.^2));
end
```

b. Graficar la función y el plano tangente con acciones sobre los objetos previamente construidos e interpretar la gráfica.

```
function teorema3(varargin)
% Ejemplificar que la existencia y la continuidad de las
% derivadas parciales en un punto implica la existencia
% de la diferencial en el punto.
clc;
a=[0 0];          % Asignar punto de tangencia.
u=[0.5 0.5];      % Asignar vector dirección.
x0=a(1);y0=a(2);
x=x0-0.5:0.01:x0+0.5; % Definir rango para x.
y=y0-0.5:0.01:y0+0.5; % Definir rango para y.
[x,y]=meshgrid(x,y);  % Definir dominio de la función.
hold on;
C = del2(fR2_R(x,y));
mesh(x,y,fR2_R(x,y),'FaceLighting','gouraud',...
'LineWidth',0.3);
% Graficar la función
mesh(x,y,ptangente(@fR2_R,a,x,y)); % Graficar el plano
 grid on;
taylor=difcampoescalar(@fR2_R,a,u)+norm(u)*...
errorces(@fR2_R,a,u);
% Asignar fórmula de Taylor de orden 2.
deltaf=fR2_R(a(1)+u(1),a(2)+u(2))-fR2_R(a(1),a(2))
fprintf('Diferencial f por la definición en (x0,y0)...
%10.5f\n',difcampoescalar(@fR2_R,a,u))
fprintf('Si f es diferenciable en (x0,y0), por el...
 corolario 1,%10.5f\n',ddR2_R(@fR2_R,a,u))
% Salida que genera
Diferencial f por la definición en (x0,y0)    0.00000
Si f es diferenciable en (x0,y0), por el corolario 1,
0.00000
```

Al ejecutar estas acciones se genera la siguiente salida y la Figura 33.

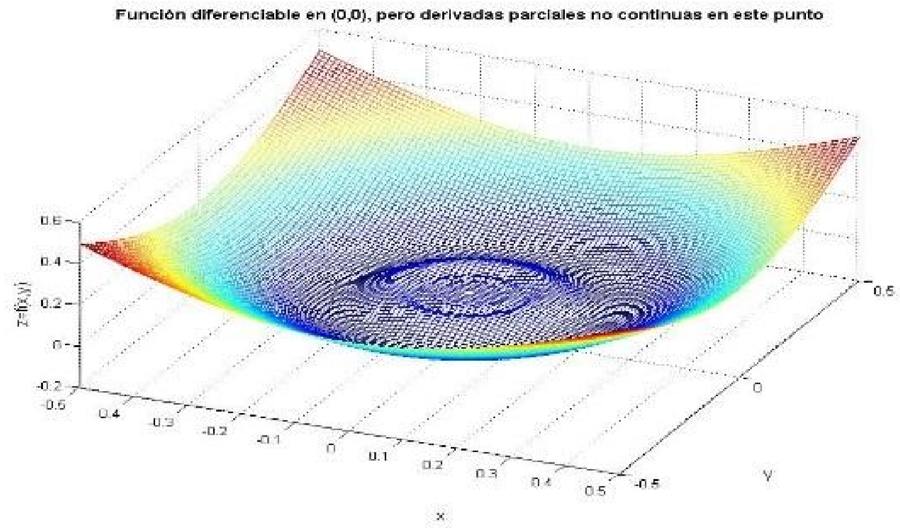

Figura 33. Interpretación geométrica de una función diferenciable en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Fuente: el autor.

c. Representar gráficamente las derivadas parciales de la función en el punto (0,0), e interpretar.

8. Repetir las acciones anteriores para otros ejemplos y contraejemplos, para verificar el Teorema 3 TCSDI.

9. Interiorizar el proceso anterior, para inferir que una función puede ser diferenciable en un punto; sin embargo, las derivadas parciales no son continuas en el punto que afirma que el recíproco del Teorema 3 no se cumple.

Diseño del cuestionario

Este apartado tiene como propósito describir cómo se diseñó y validó el cuestionario, que fue el instrumento utilizado para la recolección y el análisis cualitativo de la información con el fin de poderla triangular con otras fuentes y determinar niveles de comprensión.

En la fase de diseño del cuestionario se describe cómo se identificaron y seleccionaron los contenidos, las características de los estudiantes que participaron en la aplicación piloto, la evaluación por los expertos y, en último término, la presentación de la versión modificada, según los informes de los expertos y de las respuestas de los estudiantes a las distintas tareas.

Identificación de los contenidos del cuestionario

Para identificar los contenidos matemáticos que debían formar parte del precuestionario, en primer lugar se seleccionaron y analizaron ocho libros de texto de editoriales de amplia difusión internacional y que son la fuente principal de consulta de los estudiantes.

Los textos hacen una exposición analítica del concepto, de los cuales cuatro hacen énfasis en la parte teórica y los otros cuatro en las aplicaciones de los contenidos de la diferencial.

Una reseña de este análisis se anexó en la sección análisis de la diferencial en los libros de texto, donde se identificaron los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los sistemas de representación que constituyen la diferencial de una función en varias variables.

La comprensión del concepto por los estudiantes fue el objeto de esta investigación, y los elementos matemáticos que lo configuran se concretan en los siguientes, con sus respectivas siglas:

- Función en varias variables **FVV.**
- Derivada direccional **DD.**
- Derivada parcial **DP**.
- Función derivable en un punto **DFVV**.
- Diferencial de una función real de variable real **DIFR**.
- Diferencial de una función vectorial de variable real **DIFVR**.
- Diferencial de un campo escalar **DICE**.

- Diferencial de un campo vectorial **DICV**.
- Diferencial de una función en varias variables **DIFVV**.
- Teoremas fundamentales de diferenciación **TFDI.**

- *Teorema 1*. Diferenciabilidad implica continuidad **TDICO.**
- *Teorema 2*. Diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas direccionales **TDIDD**.
- *Corolario 1*. La diferenciabilidad de un campo escalar implica la existencia de las derivadas parciales **CDIDP**.
- *Teorema 3*. Condición suficiente de diferenciabilidad **TCSDI**.
- *Teorema 4*. Diferenciabilidad de un campo vectorial implica la diferenciabilidad de los m campos escalares que lo conforman **TDICVDICE**.
- *Corolario 2*. Función de clase C^1 implica ser diferenciable **CC1DI**.

Elaboración del precuestionario

Para la elaboración del precuestionario se tomaron como referencia los elementos matemáticos, las relaciones lógicas, los sistemas de representación y la descomposición genética del concepto de diferencial de una función en varias variables, presentados en las secciones anteriores, y a partir de ellos se seleccionó una colección de 30 problemas que comprendieron: el desarrollo curricular identificado en los libros de texto, las actividades planteadas, los problemas descritos en artículos publicados en revistas de investigación.

De la colección de los 30 problemas se escogieron los diez más representativos del concepto y que permitían analizar las relaciones lógicas que los estudiantes debían establecer entre los elementos matemáticos dados en distintos sistemas de representación. Para cada uno de estos problemas se determinó el número máximo de cuestiones que debían contener, y que pudieran ser contestados en el transcurso de una clase universitaria habitual.

El formato de presentación del precuestionario constaba de tres folios. En el primer folio se incluía el nombre del estudiante, la edad y la fecha de realización del precuestionario, luego aparecían las preguntas con los correspondientes ítems. El estudiante, en hojas anexas, respondía el cuestionario.

Sujetos

Contestaron el precuestionario 14 estudiantes (seis mujeres y ocho hombres), con un rango de edad entre 18-22 años, de segundo año (cuarto semestre curricular) del programa de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, UPTC. Todos los estudiantes estaban cursando la asignatura de Cálculo Multivariable en el momento de la realización de la prueba, habían recibido una instrucción previa con las actividades computacionales basadas en la DG, sobre el concepto de diferencial de una función en varias variables.

Validación del cuestionario por expertos

Para la evaluación del precuestionario por expertos se contactaron nueve profesores, asignándole los seudónimos EXn, siete de ellos atendieron la solicitud y reúnen las siguientes características:

Amplia experiencia en el desarrollo de cursos de cálculo multivariable y análisis real. Los expertos *EX1, EX2* con título de doctor en Matemáticas y vinculados con la Universidad Nacional de Colombia; los expertos *EX3, EX4, EX5, EX7* con título de Maestría en Matemáticas, y el experto *EX6* con título de Maestría en Educación Matemática, los cinco están vinculados con la UPTC. Los expertos *EX8* y *EX9*, no atendieron la solicitud.

A los expertos se les envió un documento, que comprendía: carta de solicitud, contexto de la investigación, formulación del problema, objetivos, diseño del cuestionario en una tabla con las columnas objetivos, tareas, ítems, descriptores, procedencia y variables. En el ámbito de esta investigación, para cada tarea los descriptores se entendieron como las palabras clave que la definen o caracterizan; las variables, como un conjunto de elementos matemáticos; y las formas de representación, como verbal, gráfica, algebraica y tabular, que configuran el concepto de DIFVV.

Al finalizar se propuso una encuesta para cada tarea (Tabla 12), a fin de evaluar las representaciones, el grado de dificultad, el grado de relevancia, los elementos matemáticos, las observaciones y sugerencias. A continuación se describen los resultados de este análisis, las observaciones y sugerencias hechas por los expertos.

Ítem	Representación	Grado de dificultad	Grado relevancia	Elementos matemáticos (conceptos), incluir las iniciales en los respectivos campos	
	V-Verbal **G-Gráfico** **A-Algebraico** **T-Tabular**	**1-Nada** **2-Poco** **3-Medio** **4-Alto**	**1-Nada** **2-Poco** **3-Medio** **4-Alto** **NA-no aplica**	Función en varias variables **FVV**. Derivada direccional **DD**. Derivada parcial **DP**. Diferencial de una función real de variable **DIFR**. Diferencial de una función vectorial de variable real **DIFVR.** Diferencial de un campo escalar **DICE**. Diferencial de un campo vectorial **DICV**. Diferencial de una función en varias variables **DIFVV**.	**Teorema 1.** Diferenciabilidad implica continuidad, **T1.** **Teorema 2**. Diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas direccionales, **T2**. **Corolario 1**. La diferenciabilidad de un campo escalar implica la existencia de las derivadas parciales, **CR1**. **Teorema 3**. Condición suficiente de diferenciabilidad, **T3.** **Otros**, enunciar.
1.a.					
1.b.					
1.c.					
Observaciones o sugerencias complementarias de la tarea 1.					

Tabla 12. Encuesta sobre la Tarea 1 del cuestionario.

Tarea 1. Respecto a las representaciones, los expertos consideran que la verbal está presente en un 35 %, la gráfica en 18 %, la algebraica en 41 % y la tabular en 6 %; sobre el grado de dificultad, el 24 % la califica de poca, el 71 % de media y el 5 % de alta; y en cuanto al grado de relevancia, la evalúa de poca el 5 %; de media, el 28 % y de alta, el 67 % (ver Figura 34). Los elementos matemáticos característicos son DIFR, DFVV, TCSDI. Se concluye que esta tarea es considerada por los expertos como de dificultad media y altamente relevante.

Figura 34. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 1.

Tarea 2. Los expertos califican las representaciones así: algebraica 48 %, verbal 31 %, gráfica 21 %. Respecto al grado de dificultad, el 36 % la considera de poca, el 50 % de media y el 14 % de alta. En lo relativo al grado de relevancia, la evalúan: poca, el 7 %; media, el 29 % y alta, el 64 % (ver Figura 35). Los elementos matemáticos característicos son DIFVR, DIFR, DFVV, TCSDI. Se concluye que la tarea se considera de dificultad media y altamente relevante.

Figura 35. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 2.

Tarea 3. Las representaciones características en esta tarea, según la evaluación de los expertos, son: verbal 27 %, gráfica 38 %, algebraica 32 %, tabular 3 %. Respecto al grado de dificultad, el 21 % la considera de media, y el 79 %, de alta. En cuanto al grado de relevancia, el 14 % opina que es de poca relevancia; el 36 %, de media y el 50 %, de alta (ver Figura 36). Los elementos matemáticos característicos son DP, DICE, DFVV. Se concluye que la tarea se considera de dificultad media y altamente relevante.

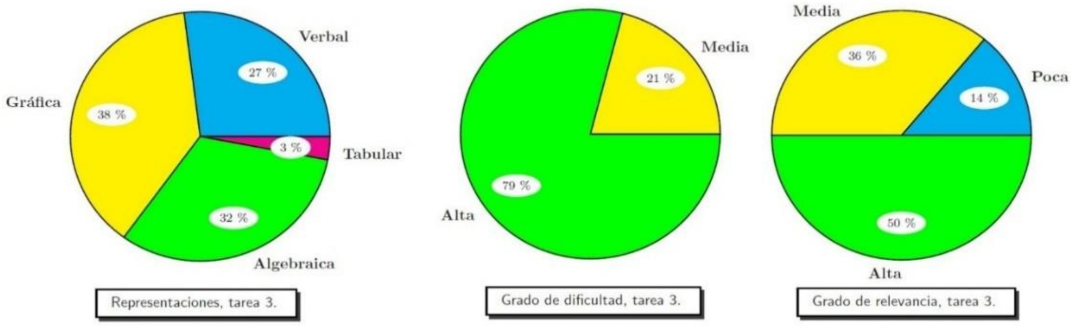

Figura 36. Representaciones, grados de dificultad y relevancia **de la t**area 3.

Tarea 4. Los porcentajes de representación en esta tarea son: verbal 35 %, algebraica 28 %, tabular 37%; en cuanto al grado de dificultad, el 10 % la considera de ninguna dificultad; el 28 %, de poca; el 48 %, de media y el 14%, de alta; y respecto al grado de relevancia, la califica de poca el 10%; de media, el 28 % y de alta, el 62 % (ver Figura 37). Los elementos matemáticos característicos son FVV, DP, DICE. Se concluye que la tarea se estima de dificultad media y altamente relevante.

Figura 37. Representaciones, grados de dificultad y relevancia **de la t**area 4.

Tarea 5. Las representaciones que sobresalen en esta tarea son: verbal 36 %, gráfica 2 % y algebraica 62 %. Respecto al grado de dificultad, el 20 % la califica de poca; el 40 %, de media y el 40 %, de alta. En cuanto al grado de relevancia, la evalúa de poca el 9 %; de media, el 31 % y de alta, el 60 % (Figura 38). Los elementos matemáticos característicos son FVV, DP, DICE, T1, T2, T3. Se concluye que la tarea es considerada de dificultad media y de relevancia alta.

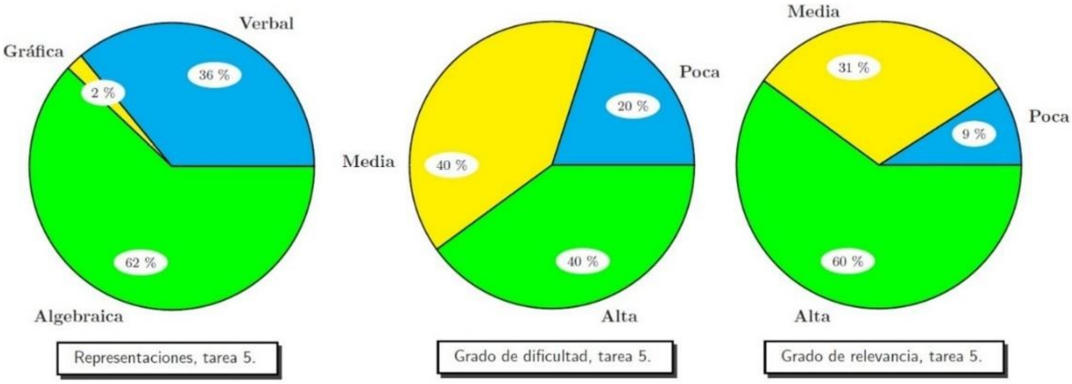

Figura 38. Representaciones, grados de dificultad y relevancia, Tarea 5.

Tarea 6. Las representaciones que predominan en esta tarea son: verbal 38 %, gráfica 2 %y algebraica 60 %. Respecto al grado de dificultad, el 12 % la considera de poca dificultad; el 40 %, de media y el 48 %, de alta. En lo relativo al grado de relevancia, la evalúa de poca el 7 %; de media, el 29 % y de alta, el 64 %, (Figura 39). Los elementos matemáticos característicos son: Teorema 2, DD, FVV, DP, DICE. Se concluye que la tarea es estimada de dificultad media y altamente relevante.

Figura 39. Representaciones, grados de dificultad y relevancia **de la t**area 6.

Tarea 7. Las representaciones que predominan en esta tarea son: verbal 33 %, gráfica 28 % y algebraica 39 %. Respecto al grado de dificultad, el 43 % la considera de poca; el 50 %, media y el 7 %, de alta. En cuanto al grado de relevancia, el 4 % la califica de poca; de media, el 39 % y de alta, el 57 % (ver Figura 40). Los elementos matemáticos característicos son: FVV, DD, DP, DICE, T2, Corolario 1. Se concluye que la tarea es considerada de dificultad media y altamente relevante.

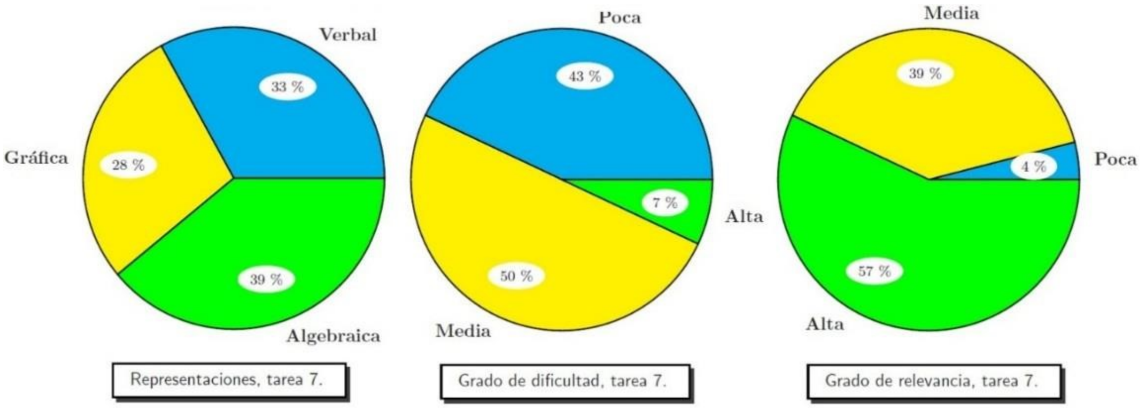

Figura 40. Representaciones, grados de dificultad y relevancia **de la t**area 7.

Tarea 8. Las representaciones que sobresalen en esta tarea son: verbal 31 %, gráfica 31 % y algebraica 38 %. Respecto al grado de dificultad, el 71 % la evalúa de media y el 29 %, de alta. En cuanto al grado de relevancia, el 14 % de los expertos opina que tiene relevancia media y el 86 %, alta (ver Figura 41). Los elementos matemáticos característicos son: DP, DICE, C1, T3, T4. Se concluye que la tarea es calificada de dificultad media y altamente relevante.

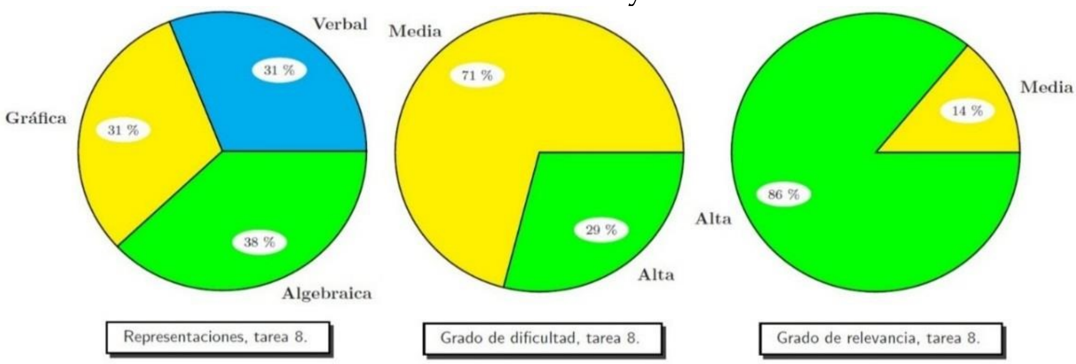

Figura 41. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la **t**area 8.

Tarea 9. Las representaciones que resaltan en esta tarea son: verbal 30 % y algebraica 70 %. Respecto al grado de dificultad, el 14 % la considera de poca dificultad; el 43 %, de media y el 43 %, de alta. En lo relativo al grado de relevancia, el 36 % la evalúa de media, y de alta, el 64 % (ver Figura 42). Los elementos matemáticos característicos son: DICV, T4. Se concluye que la tarea es considerada de dificultad media y el grado de relevancia, alto.

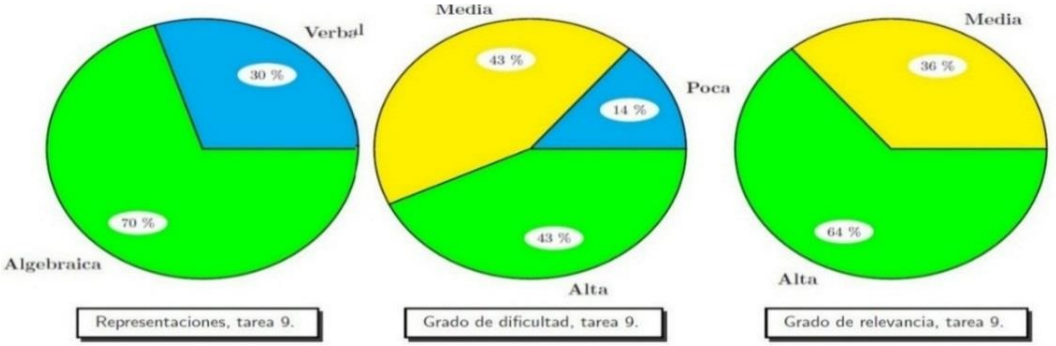

Figura 42. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 9.

Tarea 10. Las representaciones que predominan en esta tarea son: verbal 29 %, gráfica 2 % y algebraica 68 %. Respecto al grado de dificultad, los expertos la consideran: de ninguna dificultad, el 4 %; de poca, el 21 %; de media, el 32 % y de alta, el 43 %. Con relación al grado de relevancia: nada relevante, el 3 %; poco, el 4 %; media, el 32 % y alta, el 61 % (ver Figura 43). Los elementos matemáticos característicos son: DIFVV, DIFR, DIFVR, DICE, DICV, Teorema 4. Se concluye que la tarea es evaluada de dificultad media, y el grado de relevancia, alto.

Figura 43. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 10.

Cuestionario definitivo

Luego de la revisión de los expertos y del análisis a las respuestas o soluciones de los estudiantes en la prueba piloto, se atendieron las sugerencias y recomendaciones y se procedió a rediseñar cada tarea para consolidar el cuestionario definitivo que se presenta a continuación y que comprende: formulación de los objetivos, descripción de las tareas, los ítems que organizan la tarea, los descriptores, las fuentes bibliográficas de donde proceden los ejercicios y las variables que representan los elementos matemáticos y las relaciones lógicas.

Además, se incluye una solución plausible del cuestionario, según el análisis teórico del concepto, las fuentes de donde se tomaron algunas tareas y las propuestas del investigador. Esta solución es referencia para la recolección y el análisis de la información en secciones posteriores.

Tarea 1

Objetivos. Registrar las relaciones que establece el estudiante entre los elementos que configuran el concepto de diferencial de una función real de valor real, para caracterizar el nivel de comprensión Intra del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, mediante el análisis de las representaciones utilizadas para resolver el problema.

Tareas. 1**.** Dada la función $f(x) = x^2 + 1$ y $a = 1$.

a. Represente gráficamente el incremento de la función f en a, $\Delta f(a)$; el incremento h de la variable x; la diferencial de f en a evaluada en h, $df(a,h) = f'(a)h$ y el polinomio de Taylor de primer orden,
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|E(a,h).$$
b. Muestre que f es diferenciable en $a = 1$ y determine la diferencial de f en el punto a como una transformación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
c. Si α es un valor que se desea calcular aproximadamente por medio de diferenciales, esta estimación se ha de obtener de la siguiente forma: primero, se elige una función conveniente f y los valores apropiados x y h de manera que, $\alpha = f(x+h)$, luego se aplica la fórmula de aproximación para calcular α, $f(x+h) \approx f(x) +$

$f'(x)h$. Interesa elegir f y x de manera que $f(x)$ se pueda calcular fácilmente. Aproxime utilizando diferenciales $\alpha = \sqrt[3]{1.02}$.

Ítems. 1.a, 1.b, 1.c.

Descriptores. Se presenta una función real de variable real en forma algebraica y un punto.

Se representa en forma verbal y algebraica el incremento, la diferencial y el polinomio de Taylor de primer orden.

Aparece el término transformación lineal que está relacionado con la diferencial.

Se pide interpretar en forma analítica la diferencial de una función real de variable real en un punto.

Se describe un procedimiento para encontrar un valor aproximado de la raíz cúbica de un número utilizando la parte principal del polinomio de Taylor de primer orden.

Procedencia[102]. Adaptación de ejercicios propuestos del *Cálculo* de Apostol, tomo I, sección 2.20, ejercicios 1 y 2, página 167.

Ejercicios propuestos del *Cálculo* de Apóstol, tomo I, sección 2.20, ejercicios 4 y 5, página 168.

Variables. Representación algebraica, gráfica, analítica y verbal del incremento y la diferencial de una función real de variable real.

La diferencial como una transformación lineal, aproximación de la gráfica de la curva por la recta tangente en un punto.

Aplicación de la diferencial para aproximar valores de funciones a partir de unos ya conocidos.

Solución plausible

a. Los incrementos $\Delta f(a)$, h, la diferencial de f en a y la relación entre estos elementos dados por la fórmula del polinomio de Taylor de orden 1 están representados gráficamente en la Figura 44.

[102] Tom M. Apostol, *Calculus Volumen I. Introducción, con vectores y geometría analítica,* Barcelona: Editorial Reverté, 1988, 167-168.

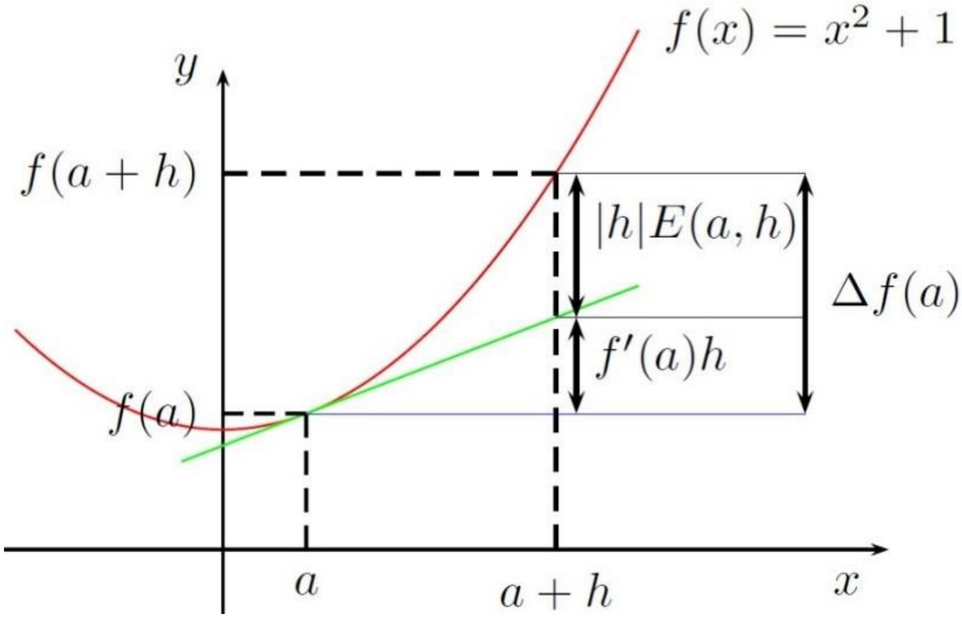

Figura 44. Gráfica de la solución de la Tarea 1.

El incremento de la función f en a, está dado por,

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a) = f(1+h) - f(1)$$

$$\Delta f(a) = (1+h)^2 + 1 - (1)^2 - 1 = 2h + h^2.$$

La diferencial de f en a es, $df(a,h) = f'(a)h = 2(1)h = 2h.$

El error en la aproximación de la diferencial por el incremento es

$$|h|E(a,h) = \Delta f(a) - df(a,h) = 2h + h^2 - 2h = h^2.$$

b. Directamente se prueba que, f es diferenciable en $x = a$, porque,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(a,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|E(a,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = 0.$$

O en forma indirecta, para una función real de variable real ser derivable en un punto es equivalente a que la función sea diferenciable en el punto.

La diferencial de f en a esta dada por la transformación

$$\begin{aligned} T_a = f'(a)\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto 2ah. \end{aligned}$$

c. Sea $f(x) = x^{1/3}, f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, si $x = 1, h = 0.02$, entonces aplicando la parte principal del polinomio de Taylor,

$$\alpha = f(x+h) = \sqrt[3]{1+0.02} \approx f(x) + f'(x)h = \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}} * 0.02$$
$$= 1.0067.$$

Tarea 2

Objetivos. Identificar las relaciones entre los elementos que configuran el concepto de diferencial de una función real y de una función vectorial de valor real, a través del análisis de las formas de representación utilizadas para resolver el problema, a fin de caracterizar el paso del nivel de comprensión Intra al Inter del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables.

Tareas. 2. Sea J un intervalo tal que $J \subseteq \mathbb{R}$ y sea $g: J \to \mathbb{R}$, una función vectorial de variable real que representa una curva $C_g = \{(g_1(t), g_2(t), g_3(t)): t \in J\}$. Si g es diferenciable en un punto interior t_0 de J, entonces el espacio tangente a C_g en el punto, $g(t_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0), g_3(t_0)) \in \mathbb{R}^3$ está dado paramétricamente por la aplicación afín, $A_{t_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida, como:

$$A_{t_0}(t) = g(t_0) + Dg(t_0)(t - t_0).$$

a. Mostrar que el espacio tangente a C_g en el punto $g(t_0)$ es

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x = g_1(t_0) + g_1'(t_0)(t-t_0), y = g_2(t_0) + g_2'(t_0)(t-t_0),$$
$$z = g_3(t_0) + g_3'(t_0)(t-t_0)\}.$$

Si $g_1'(t_0)$, $g_2'(t_0)$, $g_3'(t_0)$, no son todas cero, este espacio tangente es una recta en $\mathbb{R}^3$ y es llamada la recta tangente.

b. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva en $\mathbb{R}^3$, definida como:

$$g: t \to (x,y,z) = \left(t^{\frac{1}{3}}, t^2 + 1, t\right) \text{ en } t_0 = 1.$$

Ítems. 2. 2.a, 2.b.

Descriptores. Presentación de una función vectorial de variable real que describe una curva en $\mathbb{R}^3$.

Se hace una explicación de la diferencial de este tipo de función como una aplicación afín representada en forma algebraica.

Se pide calcular la diferencial de la función en el punto $g(t_0)$, $t_0 \in J$, y su aplicación, para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto.

La función es continua en J.

Se requiere el concepto de diferencial de una función real de variable real para hallar la diferencial de la función vectorial.

Procedencia. Ejercicio adaptado del texto de Bartle, 1975, sección 39, ejercicio 39 P y 39 Q, página 359.

Variables. Función vectorial de variable real, representación paramétrica de curvas en el espacio, diferencial de una función real de variable real, diferencial de una función vectorial de una variable real.

Solución plausible

a. Como $g(t_0) = \big(g_1(t_0), g_2(t_0), g_3(t_0)\big)$, entonces,

$$Dg(t_0) = D\big(g_1(t_0), g_2(t_0), g_3(t_0)\big) = \big({g_1}'(t_0), {g_2}'(t_0), {g_3}'(t_0)\big),$$

Luego,

$$A_{t_0} = g(t_0) + Dg(t_0)(t - t_0).$$

Así que,

$$A_{t_0} = \big(g_1(t_0) + g_1'(t_0)(t - t_0), g_2(t_0) + g_2'(t_0)(t - t_0), g_3(t_0) + {g_3}'(t_0)(t - t_0)\big).$$

Entonces, el espacio tangente a la curva C_g en $g(t_0)$, está dado por:

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon A_{t_0} = \big(x(t), y(t), z(t)\big), t \in \mathbb{R}\big\}.$$

b. Según la parte 2.a

$x = g_1(t_0) + g_1'(t_0)(t - t_0) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)(1)^{-\frac{2}{3}}(t - 1) = \frac{t}{3} + \frac{2}{3}$.
$y = g_2(t_0) + g_2'(t_0)(t - t_0) = 2 + 2(t - 1) = 2t$.
$z = g_3(t_0) + g_3'(t_0)(t - t_0) = 1 + 1(t - 1) = t$.
Luego el espacio tangente a la curva C_g en el punto
$g(t_0) = g(1) = (1,2,1)$, es $\left\{\left(\frac{t}{3} + \frac{2}{3}, 2t, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$.

Tarea 3

Objetivos. Determinar las relaciones que establece el estudiante entre los elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada parcial de un campo escalar, para caracterizar el nivel Inter del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, a través del análisis de la representación utilizada para resolver la situación problema.

Tareas. **3**. Interpretar geométrica y analíticamente las siguientes situaciones.

a. El plano $x = 1$ corta el paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una parábola. Determine la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto (1,2,5) e ilustre gráficamente.
b. El plano $y = 2$ corta el paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una parábola. Determine la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto (1,2,5) e ilustre gráficamente.

Ítems. 3., 3.a, 3b.

Descriptores. Las funciones de dos variables están expresadas en forma algebraica por una ecuación y lo que representan se describe en forma verbal.

Se proporciona un punto particular de la superficie.

El estudiante debe hacer una representación gráfica de las expresiones algebraicas y verbales.

El estudiante debe determinar la pendiente de la recta que pertenece al plano y que es tangente al paraboloide en el punto y hacer una representación gráfica.

No aparece el término derivada parcial, sin embargo debe utilizar este concepto para hallar la pendiente de la recta tangente.

Procedencia. Ejercicio adaptado del *Cálculo varias variables* de Thomas, Finney y Weir, 1999, ejemplo 4, página 927.

Variables. Campos escalares, funciones reales de variable vectorial con dos componentes o funciones en dos variables, planos, derivada parcial, pendiente de la recta tangente.

Solución plausible

a. La Figura 45 de la izquierda representa la superficie del paraboloide dado por, $f(x,y) = x^2 + y^2$, el plano $x = 1$.
La Figura 45 de la derecha representa la parábola, $z = 1 + y^2$, en el plano $x = 1$, la tangente a la parábola en el punto (1,2,5). La pendiente de la recta tangente a la parábola, formada por la intersección del plano $x = 1$ con el paraboloide $f(x,y) = x^2 + y^2$, en el punto (1,2,5), está dada por $m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, que al evaluarla en el punto se obtiene $m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$.

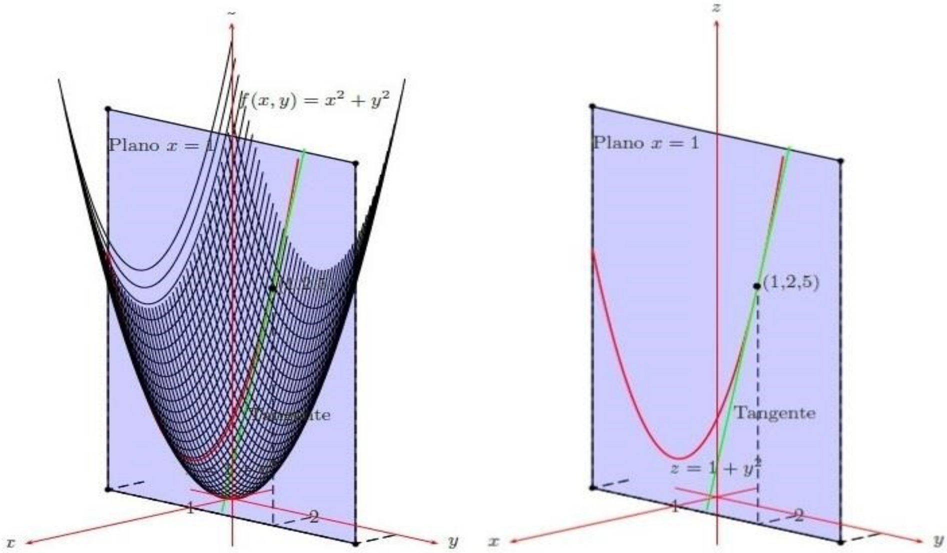

Figura 45. Tangente a la curva de intersección del plano $\boldsymbol{x = 1}$ y la superficie $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ en el punto (1,2,5). Fuente: el autor.

b. La Figura 46 de la izquierda representa la superficie del paraboloide dado por superficie, $f(x,y) = x^2 + y^2$, el plano $y = 2$.
La Figura 46 de la derecha representa la parábola $z = x^2 + 4$ en el plano $y = 2$, la tangente a esta en el punto (1,2,5).
La pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto (1,2,5) formada por la intersección del plano $y = 2$, paralelo al plano xz, con la gráfica de $f(x,y) = x^2 + y^2$, está dada por:
$m_t = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, reemplazando el punto se obtiene,
$m_t = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$.

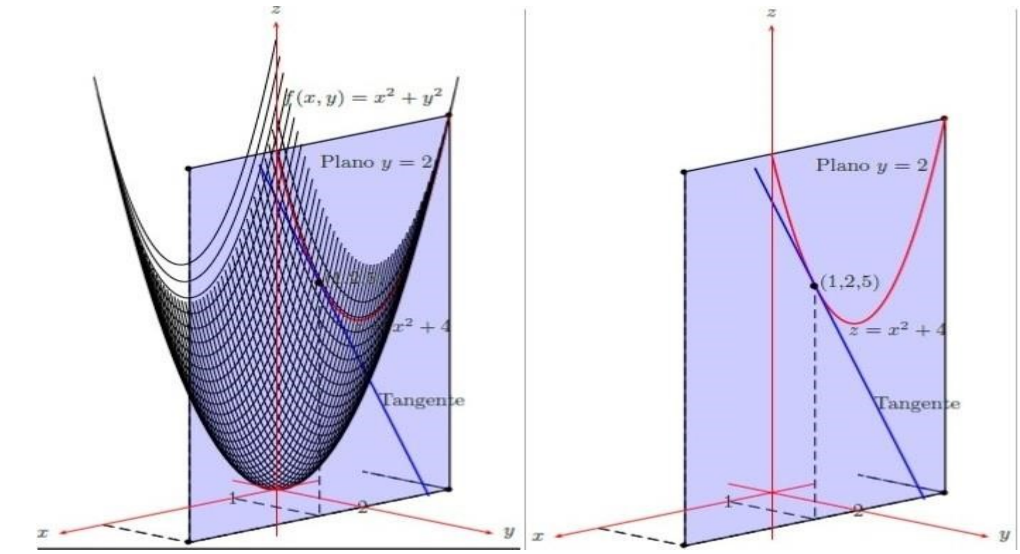

Figura 46. Tangente a la curva de intersección del plano $\boldsymbol{y = 2}$ y la superficie $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ en el punto (1,2,5). Fuente: el autor.

Tarea 4

Objetivos. Identificar los elementos matemáticos y las relaciones entre estos que configuran el concepto de DICE, para describir el nivel de comprensión Inter del desarrollo del esquema de la DIFVV, según las representaciones utilizadas en la solución de la situación problema.

Tareas. **4.** La altura h de las olas en mar abierto depende de la velocidad v del viento expresada en nudos y del tiempo t que el viento haya estado soplando a esa velocidad expresado en horas. En la siguiente tabla se dan valores de la función $h = f(v,t)$ en pies.

	Duración en horas							
Velocidad en nudos	v/t	**5**	**10**	**15**	**20**	**30**	**40**	**50**
	10	2	2	2	2	2	2	2
	15	4	4	5	5	5	5	5
	20	5	7	8	8	9	9	9
	30	9	13	16	17	18	19	19
	40	14	21	25	28	31	33	33
	50	19	29	36	40	45	48	50
	60	24	37	47	54	62	67	69

a. Encuentre $h(40{,}15)$, y ¿cuál es su significado?

b. Encuentre el mejor estimado posible, según los valores de la tabla, para las derivadas parciales, $\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15)$, $\frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15)$ e interprete estos valores.

c. A partir de la fórmula de Taylor de primer orden para un campo escalar obtenga una aproximación lineal a la función de altura de las olas, cuando la velocidad v es cerca de 40 nudos y el tiempo t es cerca de 15 horas. Luego estime las alturas de las olas cuando el viento ha estado soplando durante 17 horas a 43 nudos.

Ítems. 4., 4.a, 4.b, 4.c.

Descriptores. Se enuncia una situación problema de fenómenos modelados por una función representada por un registro numérico de valores.

No se tiene una expresión algebraica de la función, se da en forma tabular.

Se pide interpretar el valor de la función en un punto, según la situación.

Se pide aproximar numéricamente la derivada parcial y dar una interpretación a la situación problema.

Se pide aproximar el valor de la función en un punto no registrado en la tabla, aplicando el concepto de diferencial y de derivada parcial que están relacionados en la fórmula de Taylor de primer orden para campos escalares.

Procedencia. Ejercicios adaptados del *Cálculo multivariabe* de James Stewart, páginas 884-885.

Variables. Representación numérica de una función de dos variables, derivada parcial, diferencial.

Solución plausible

a. $h(40{,}15) = 25$, significa que en mar abierto, si la velocidad del viento es de 40 nudos y si ha durado 15 horas soplando a esta velocidad, la altura de las olas es de 25 pies.

b. Aproximamos las derivadas de la función h respecto a las variables v y a t, como el promedio de las diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás y centradas:

$$\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15) \approx \frac{h(40+\Delta v, 15) - h(40{,}15)}{\Delta v} = \frac{h(50{,}15) - h(40{,}15)}{10} = 1.1.$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15) \approx \frac{h(40-\Delta v, 15) - h(40{,}15)}{\Delta v} = \frac{h(30{,}15) - h(40{,}15)}{-10} = 0.9.$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15) \approx \frac{1.1 + 0.9}{2} = 1.$$

El significado de estos cálculos es que en mar abierto, si la altura de las olas es de 25 pies, generada por la velocidad del viento a 40 nudos y por estar soplando a esta velocidad durante 15 horas, entonces por cada 10 nudos que aumente la velocidad del viento y que dure soplando durante las mismas 15 horas, la altura de las olas ascenderá 1 pie.

$$\frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15) \approx \frac{h(40{,}15+\Delta t) - h(40{,}15)}{\Delta t} = \frac{h(40{,}20) - h(40{,}15)}{5} = 0.6.$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15) \approx \frac{h(40{,}15-\Delta t) - h(40{,}15)}{\Delta t} = \frac{h(40{,}10) - h(40{,}15)}{-5} = 0.8.$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15) \approx \frac{0.6 + 0.8}{2} = 0.7.$$

Los resultados anteriores significan que en mar abierto, si la altura de las olas es de 25 pies, generada por la velocidad del viento a 40 nudos y por estar soplando a esta velocidad durante 15 horas, entonces por cada 5 horas que aumente el tiempo y la velocidad del viento se haya mantenido a 40 nudos, la altura de las olas ascenderá 0.7 pies.

c. Utilizando la parte principal del polinomio de Taylor tenemos, si $a = (40{,}15)$, $a + v = (43{,}17)$, $v = (3{,}2)$, entonces,

$h(a+v) \approx h(a) + T_a(v) = h(a) + \nabla h(a) \cdot v.$

$h(40{,}37) \approx h(40{,}15) + \left(\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15), \frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15)\right) \cdot (3{,}2).$

$h(40{,}37) \approx 25 + (1{,}0.7) \cdot (3{,}2) = 29.4.$

Tarea 5

Objetivos. Identificar los elementos matemáticos y las relaciones de continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad que configuran el concepto de diferencial de un campo escalar, para establecer el nivel de comprensión Inter y Trans del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del análisis de las representaciones utilizadas al resolver el problema.

Tareas. **5.** Dada la función, $f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a. Si $z = (x,y) \neq (0,0)$, encuentre: $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z)$; aplicando teoremas de diferenciación.

b. Si $a = (0,0)$, encuentre $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

c. Dado el punto $a = (0,0)$, el vector dirección $v = (\alpha, \beta) \neq (0,0)$, el error cometido para aproximar $\Delta f(a)$ por medio de $\nabla f(a) \cdot v$ es $r(a,v) = f(a+v) - f(a) - \nabla f(a) \cdot v$.
Muestre en forma directa que f no es diferenciable en a, analizando el valor $\lim\limits_{\|v\| \to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|}$.

d. Responda falso o verdadero y justifique, ¿f es continua en el punto $a = (0,0)$?

e. Responda falso o verdadero. La existencia de las derivadas parciales de f en un punto, implica que f es diferenciable en este.

Ítems. 5., 5.a, 5.b, 5.c, 5d, 5e.

Descriptores. La función f está definida por secciones mediante una expresión algebraica.

La derivada parcial en puntos donde f es continua puede calcularse aplicando teoremas de diferenciación.

Para calcular las derivadas parciales de f en (0,0) se deben aplicar las definiciones de estas derivadas.

Se debe verificar que: $\lim\limits_{\|v\| \to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|}$ es distinto de 0, para mostrar que f no es diferenciable en (0,0).

Para mostrar que f no es continua en (0,0) se debe verificar que no se cumple la ecuación, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

La tarea pretende determinar si el estudiante es capaz de establecer que para funciones en varias variables la derivabilidad no implica la continuidad.

Procedencia. Adaptación del libro *Curso análise* de Elon Lima, ejemplo 3, página 122.

Variables. Función en dos varias variables, continuidad de una función en dos variables en un punto, definición de derivada parcial de una funciones de dos variables en un punto, teoremas de diferenciación parcial, definición de diferencial.

Solución plausible

a. Si $z \neq$ (0,0), aplicamos teoremas de diferenciación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{(x^2+y^2)\dfrac{\partial(xy)}{\partial x} - xy\dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{(x^2+y^2)\dfrac{\partial(xy)}{\partial y} - xy\dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

b. Si $a = (0,0)$, aplicando la definición de derivadas parciales y teniendo en cuenta como está definida la función, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h} = 0.$$

c. Reemplazando los valores del ítem 5.b, entonces,

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{r(a,v)}{\|v\|} = \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{f(\alpha,\beta) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\alpha - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$= \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}.$$

Si $(\alpha,\beta) \to (0{,}0)$ por la trayectoria $\alpha = \beta$ en el límite anterior se tiene que, $\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}$, este límite no existe, luego es distinto de 0, por lo tanto la función no es diferenciable en (0,0).

d. Falso. Porque para que la función sea continua en $a = (0{,}0)$, debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0{,}0).$$

Sin embargo, como $f(0{,}0) = 0$, el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, porque si $(x,y) \to (0{,}0)$ por trayectorias distintas los límites no coinciden; por ejemplo, por la trayectoria $x = y$ este límite es $1/2$, y por la trayectoria $y = 0$ el límite es 0.

e. Falso. Porque la función f de esta tarea es un contraejemplo, en el ítem 5.b se mostró que en el punto $a = (0{,}0)$ existen las derivadas parciales respecto a x y respecto a y son iguales a 0; sin embargo, en el ítem 5.c se mostró que la función no es diferenciable en a.

Tarea 6

Objetivos. Determinar cuáles elementos matemáticos y relaciones lógicas que configuran los conceptos de derivada direccional, parcial y diferenciabilidad establece el estudiante, para detallar el nivel de comprensión Inter y Trans del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del análisis de las representaciones de la solución del problema.

Tareas. **6.** Dada la función, $g(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0{,}0) \\ 0, & (x,y) = (0{,}0). \end{cases}$

a. Muestre que la derivada direccional de g en (0,0) respecto al vector dirección $u = (a,b) \neq (0{,}0)$ es:

$$g'\{(0{,}0);(a,b)\} = D_u g(0{,}0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}.$$

b. Muestre que $\frac{\partial g}{\partial x}(0{,}0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0{,}0) = 0$.

c. Responda falso o verdadero y justifique. La derivada direccional de g en $a = (0{,}0)$, en dirección $u = (a,b) \neq (0{,}0)$, es lineal respecto al vector dirección, es decir,

$$g'(a; u+v) = g'(a,u) + g'(a,v).$$

d. Muestre que g no es diferenciable en $a = (0,0)$.

e. Responda falso o verdadero y justifique: para cualquier vector u y para cada $a = (0,0)$, $g'(a;u) = D_u g(0,0) = \nabla g(0,0) \cdot u$.

f. Responda falso o verdadero y justifique. Si una función en varias variables tiene derivada direccional en un punto según cualquier vector dirección, entonces la función es diferenciable en el punto.

Ítems. 6., 6.a., 6.b., 6.c., 6.d., 6.e., 6.f.

Descriptores. La función está expresada en forma algebraica, por secciones.

Para encontrar la derivada direccional se debe utilizar la definición.

Se debe calcular la derivada parcial utilizando su definición.

Se debe utilizar el concepto de transformación lineal y aplicarlo a la derivada direccional.

La función g es continua en (0,0).

Procedencia. Adaptación del libro *Curso análise* de Elon Lima, ejemplo 3, página 122.

Variables. Función en varias variables definida por secciones, derivada direccional, derivada parcial, transformación lineal, límite de una función en varias variables, gradiente de una función en un punto, vector dirección, producto interior en $\mathbb{R}^n$, función diferenciable en un punto.

Solución plausible

a. Por la definición de la función g y de derivada direccional, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
D_u g(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{g\big((0,0) + h(a,b)\big) - g(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^3 ab^2}{(ha)^2 + (hb)^2}}{h} = \frac{ab^2}{a^2+b^2}.
\end{aligned}
$$

b. Aplicando la definición de derivada parcial,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g((0,0)+h(1,0))-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h0^2}{h^2+0^2}}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g((0,0)+h(0,1))-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0h^2}{0^2+h^2}}{h} = 0.$$

c. Es falso, la derivada direccional de g en $a = (0,0)$, no es lineal en el vector dirección, por ejemplo para los vectores direccionales, $u = (1,0)$ y $v = (0,1)$, entonces, $g'(a, u+v) = \frac{1}{2}$, mientras que, $g'(a,u) + g'(a,v) = 0$.

d. La función g no es diferenciable en $a = (0,0)$, porque, si $v = (\alpha,\beta)$ y como $\nabla g(0,0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0), \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$, $g(0,0) = 0$, entonces reemplazando,

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{r(a,v)}{\|v\|} = \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{g(\alpha,\beta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}.$$

Este límite no existe, porque si $(\alpha,\beta) \to (0,0)$, por la trayectorias $\alpha = \beta$ y por $\beta = 0$, estos límites son distintos, como se muestra respectivamente, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^3}{(2\alpha^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha 0}{(\alpha^2+0)^{\left(\frac{3}{2}\right)}} = 0$.

e. Es falso que, $D_u g(0,0) = \nabla g(0,0)\cdot u$. Porque en 6.a, si $u \neq (0,0)$, $D_u g(0,0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \neq 0$ y por la parte 6.b, $\nabla g(0,0)\cdot u = 0$.

f. Es falsa la proposición, la función g es un contraejemplo, en los ítems 6.a. y 6.b. g tiene derivada direccional en (0,0) en cualquier dirección y en el ítem 6.d se mostró que no es diferenciable.

Tarea 7

Objetivos. Identificar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que configuran el concepto diferencial de un campo escalar que logra establecer el estudiante, para caracterizar el nivel Inter del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del análisis de las representaciones de las soluciones de la situación problema.

Tareas. 7. La ecuación de una superficie de una montaña es $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el este y el eje y hacia el norte. Un montañista se encuentra en el punto $(-10,5,850)$.

a. ¿Cuál es la dirección de la ladera con más pendiente a partir de la posición en que se encuentra el montañista?
b. Si el montañista se desplaza en dirección este, ¿desciende o asciende y según, a qué tasa?
c. Si el montañista se desplaza en dirección suroeste ¿desciende o asciende y según, a qué tasa?
d. ¿En qué dirección recorre una trayectoria a nivel?

Ítems. 7., 7.a., 7.b., 7.c., 7.d.

Descriptores. Se da la expresión algebraica de f cuya superficie representa una montaña.

Se da un punto particular de la superficie.

El ejercicio induce a calcular el gradiente de la función en el punto y dar una interpretación geométrica de este concepto.

Se debe calcular la derivada direccional en el punto $(-10,5)$ según los vectores (1,0), $(-1,-1)$ que representan las direcciones de desplazamiento y además cuándo esta derivada es 0.

Procedencia. Adaptación del libro de Louis Leithold, 1985, del ejercicio, 38, sección 12.6, página 984.

Variables. Derivada direccional, gradiente de una función en un punto, vector dirección, producto punto, curva de nivel.

Solución plausible

a. La dirección de la ladera con más pendiente, a partir de la posición del montañista, es la que indica el vector gradiente de la superficie de la montaña evaluado en el punto.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (-6x, -4y),$$
$$\nabla f(-10{,}5) = (60, -20).$$

Normalizando este vector,

$$u = \frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|} = \frac{(60,-20)}{\sqrt{60^2 + (-20)^2}} = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10}\right).$$

b. Al desplazarse el montañista en dirección este, el vector $u = (1{,}0)$, indica el desplazamiento, y la tasa a que se desplaza está dada por la derivada direccional de la función f en la dirección de u evaluada en el punto en que se encuentra, que es igual a la derivada parcial de f respecto a x, $\frac{\partial f}{\partial x}(-10{,}5) = 60$.

Significa que por cada unidad que el montañista se desplace en la dirección este, asciende 60 unidades.

c. Si el montañista se desplaza al suroeste, el vector unitario que indica esta dirección es $u = (-1, -1)$ y la tasa a que se desplaza está dada por la derivada direccional de la función f en la dirección de u evaluada en el punto en que se encuentra. Como la función es diferenciable, se puede aplicar la siguiente fórmula,

$$D_u f(-10{,}5) = \nabla f(-10{,}5) \cdot u = (60, -20) \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -20\sqrt{2}.$$

Significa que el montañista, por cada unidad que se desplace en la dirección suroeste, desciende $20\sqrt{2}$ unidades.

d. Para calcular la dirección, dada por el vector unitario u, en que el montañista recorre una trayectoria de nivel, significa que la derivada direccional evaluada en el punto es 0, es decir:

$$\begin{aligned} D_u f(-10{,}5) &= \nabla f(-10{,}5) \cdot (v_1, v_2) = (60, -20) \cdot (v_1, v_2) \\ &= 60v_1 - 20v_2 = 0. \end{aligned}$$

El vector está dado por la forma, $v = (v_1, 3v_1)$ que al normalizar este vector se obtiene, $u = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$.

Tarea 8

Objetivos. Identificar cuáles elementos matemáticos y relaciones entre estos del concepto de diferencial de un campo escalar logra establecer el estudiante, para caracterizar el nivel Inter del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del estudio de las representaciones de la solución del problema.

Tareas. **8**. Dado el campo escalar diferenciable $f(x,y) = x^2 + y^2$, el punto $a = (x_0, y_0)$ y el vector $v = (\Delta x, \Delta y)$. Demuestre que f es diferenciable en a y determine cuál es la diferencial del campo escalar f en a y dé una interpretación geométrica.

Ítems. 8.

Descriptores. La función es de dos variables y se representa en forma algebraica.

Se da un punto arbitrario y un vector arbitrario.

Se debe expresar la definición de campo escalar diferenciable en un punto y hacer una representación gráfica de esta.

Procedencia. Adaptación del investigador al ejemplo 4, sección 1.3 página 927 del texto del *Cálculo varias variables* de Thomas, Finney y Weir, 1999.

Variables. Campo escalar de dos variables, diferencial de un campo escalar en un punto arbitrario.

Solución plausible. Para demostrar que f es diferenciable, calculamos:

$r(a,v) = \Delta f(a) - \nabla f(a) \cdot v = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)$.

$r(a,v) = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + y_0{}^2 + 2y_0\Delta y + (\Delta y)^2 - x_0{}^2 - y_0{}^2 - 2x_0\Delta x - 2x_0\Delta y$

$r(a,v) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

Evaluando, $\lim\limits_{\|v\|\to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|} = \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = 0$, entonces f es diferenciable en (0,0).

La diferencial de f está dada por la transformación lineal,

$$\begin{aligned} T_a \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v. \end{aligned}$$

Si $a = (x_0, y_0)$ y $v = (\Delta x, \Delta y)$, entonces,

$$T_a(v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot (\Delta x, \Delta y)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Geométricamente significa que en vecindades de (x_0, y_0) la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ se puede aproximar por el plano tangente dado por,

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot\ (x - x_0, y - y_0).$$

Tarea 9

Objetivos. Identificar cuáles relaciones entre los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial de un campo vectorial logra establecer el estudiante, para caracterizar el nivel de comprensión Trans del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del estudio de las representaciones de la solución del problema.

Tareas. **9.** Dado el campo vectorial,

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 - yz + z^2, xyz).$$

a. Si $a = (0,1,2)$ y $u = (0,2,3)$, encontrar la derivada direccional de f en el punto a en dirección del vector u.

b. Muestre que f es diferenciable en a.

Ítems. 9. 9.a., 9.b.

Descriptores. Representación del campo vectorial, compuesto por tres campos escalares expresados en forma algebraica.

Se pide calcular la diferencial del campo vectorial en un punto particular del dominio y según el vector dirección específico de $\mathbb{R}^3$.

Se debe establecer la relación entre la diferencial del campo vectorial en un punto y la derivada direccional.

Se pide mostrar que el campo es diferenciable utilizando la definición o teoremas que establecen relaciones entre diferenciabilidad y derivabilidad.

Procedencia. Adaptación del ejercicio 39.L, de la sección 39 página 358 del texto *The Elements of Real Analysis* de Robert Bartle, 1979.

Variables. Campo vectorial, derivada direccional de un campo vectorial, diferencial de un campo vectorial en un punto en la dirección de un vector, diferenciabilidad implica derivabilidad.

Solución plausible

a. La derivada direccional del campo vectorial f en el punto $a = (x, y, z)$ en dirección del vector $u = (u_1, u_2, u_3)$ está dada por:

$$D_u f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$D_u f(a) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & -z & -y + 2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

así,

$$D_{(0,2,3)} f(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b. f es diferenciable en a porque cada uno de los campos escalares componentes de f: $f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $f_2(x, y, z) = x^2 - yz + z^2$, $f_3 = (x, y, z) = xyz$, son polinomios en las variables, x, y, z; los cuales son diferenciales en cada punto de su dominio.

Otra forma equivalente para mostrar que f es diferenciable en a es, como cada una de las derivadas parciales del campo vectorial, $f_{i,j}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i = 1,2,3$; $j = 1,2,3$ son continuas en $x = a$, entonces f es diferenciable en a.

Tarea 10

Objetivos. Registrar procesos de generalización y síntesis que realizan los estudiantes para caracterizar el nivel de comprensión Trans del desarrollo del esquema de diferencial de una función en varias variables, por medio del análisis de las formas de representar y argumentar las soluciones a la situación problema.

Tareas. **10.** Sean f una función diferenciable definida sobre un subconjunto A abierto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y a un punto de A,

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $x \mapsto y = f(x)$.

Determine la expresión de la diferencial $Df(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $u \mapsto v = Df(a) \cdot u = f'(a; u)$ para los siguientes casos:

a. $n = 1, m = 1$. **b**. $n = 1, m > 1$. **c**. $n > 1, m = 1$. **d**. $n > 1, m > 1$.

Ítems. 10., 10.a., 10.b., 10.c., 10.d.

Descriptores. No se da una expresión o fórmula de la función.

Se da una representación algebraica de una función arbitraria diferenciable y de la diferencial de la función como una transformación lineal.

Se da un dominio arbitrario de la función en $\mathbb{R}^n$ y un punto arbitrario del dominio.

Se dan valores particulares de la dimensión del dominio y codominio de la función.

Se pide la expresión que representa la diferencial de una función real de variable real, función vectorial de variable real, campos escalares y campos vectoriales.

Procedencia. Adaptación del ejemplo 39.8 sección 39 del texto *The Elements of Real Analysis* de Robert Bartle, 1979.

Variables. Diferencial de una función en varias variables: función real de variable real, función vectorial de variable real, campos escalares y campos vectoriales.

Solución plausible

a. Si $n = 1, m = 1, Df(a)(u) = f'(a)u = \frac{df}{dx}(a)u$.

b. Si $n = 1, m > 1$, $Df(a)(u) = \left(f_1'(a), \cdots, f_m'(a)\right)u = (f_1'(a)u, \cdots, f_m'(a)u)$.

c. Si $n > 1, m = 1$, entonces,

$$\begin{aligned} Df(a)(u) = \nabla f(a) \cdot u &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \cdot (u_1, \cdots, u_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) u_k. \end{aligned}$$

d. Si $n > 1, m > 1,$ entonces,

$$Df(a)(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$