ANÁLISIS TEÓRICO DE LA DIFERENCIAL

En este capítulo se describe la primera fase de la investigación, el análisis teórico del concepto de diferencial de una función en varias variables. Comprende los siguientes apartados:

La historia de la evolución del concepto, que permitió determinar los principales alcances y limitaciones que encontraron los matemáticos para la invención, desarrollo y formalización.

El análisis de la aproximación al concepto en algunos libros de texto clásicos adoptados en los programas de pregrado, que posibilitó establecer los conceptos relacionados con la diferencial y la organización teórica y didáctica adoptada por los autores.

El estudio y el resumen monográfico del concepto, como resultado del análisis anterior, que se tomó como referencia para ser adoptado en la investigación y comprende los conceptos previos, la derivabilidad, diferenciabilidad y teoremas fundamentales.

En último término se exponen, como resultado de este capítulo, los elementos matemáticos, las relaciones lógicas, los sistemas de representación y la versión refinada de la DG de la diferencial. Este resultado orientó las siguientes fases de la investigación.

Historia del concepto de la diferencial

Este estudio permitirá contextualizar las dificultades de los estudiantes por los obstáculos que afrontaron los matemáticos para la elaboración del concepto, así como la explicación de estas dificultades en términos cognitivos[77].

La presentación actual del concepto de diferencial difiere bastante del desarrollo histórico, que fue paralelo al de la física matemática. Se determinan las siguientes épocas: la griega, caracterizada por la aplicación de los métodos exhaustivos para el cálculo de áreas y volúmenes; antes del siglo XVII, que se caracterizó

[77] Mark Asiala y otros, "A Framework for… 5-6.

por el desarrollo y aplicación de los métodos geométricos para calcular tangentes y aproximaciones lineales a funciones; el siglo XVII, que se destacó por el intento de resolver cuatro problemas clásicos (encontrar las tangentes a una curva, las razones de cambio instantáneo, maximizar o minimizar funciones y calcular longitudes de curvas); el siglo XVIII, época en la que sobresalen los intentos de dotar de rigor al cálculo; y el siglo XIX, que es considerado el del rigor y la formalización[78].

Al respecto, se relacionan los siguientes matemáticos que hicieron aportes geométricos al avance del cálculo diferencial: Giles Persone de Roverval (1602-1657) generalizó el método de Arquímedes para obtener la tangente a una curva espiral en cualquier punto; Fermat (1601-1665) formuló el método para hallar la tangente a una curva; Descartes (1596-1650) contribuyó con un método algebraico para hallar la tangente a una curva sin incluir el concepto de límite; Isaac Barrow (1630-1677) recurrió a métodos geométricos para hallar tangentes a curvas sin utilizar conceptos relacionados con límites; Kepler (1571-1630) propuso métodos exhaustivos para calcular áreas, volúmenes, centros de gravedad y longitud de curvas; Galileo (1564-1642) resolvió problemas sobre movimiento uniformemente acelerado y demostró que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es la distancia, y Bonaventura Cavalieri (1598-1647) desarrolló las ideas de los indivisibles mediante un método geométrico.

La diferencial según Leibniz y Newton

Un hecho fundamental para el desarrollo de la matemática se registró en el siglo XVII, con los aportes de Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), quienes son considerados como los inventores del cálculo. En Inglaterra, Newton definió los momentos como cantidades infinitamente pequeñas, indivisibles o infinitesimales y dio un método general para obtener el cambio relativo de una variable con respecto a la otra.

Newton consideró las variables, denominadas fluyentes, como las generadas por el movimiento de puntos, rectas y planos, diferente

[78] Morris Kline, *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días*, I y II, Madrid: Alianza Editorial, 1972, 512.

a la concepción de elementos estáticos, para considerarlos como infinitesimales y los notó como x e y. Al cambio relativo de la fluyente con respecto al tiempo lo denominó fluxión, por su carácter físico, y los representó por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Con estos conceptos, Newton estableció claramente el problema fundamental del cálculo: dada la relación entre dos fluyentes obtener la relación entre sus fluxiones[79].

Por su parte, Leibniz en Alemania, considerado además como el fundador de las matemáticas formales, estableció los conceptos de diferencias finitas, los diferenciales como cantidades arbitrariamente pequeñas, y determinó que la integración es un proceso de sumación y es el proceso inverso de la diferenciación. La notación de Leibniz, $\frac{dy}{dx}$, hoy generalizada, combina una percepción primitiva y una cierta referencia del paso a límite abstracto implícito en el concepto de diferencial[80].

Los siguientes ejemplos describen el uso original de las cantidades infinitesimales por Newton y Leibniz en sus cálculos y razonamientos.

- Para calcular la derivada de la función $y = x^2$, consideraban que una variación infinitesimal dx produciría una variación también infinitesimal dy: $y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$; por tanto: $dy = 2xdx + dx^2$. Después dividían ambos miembros por dx: $dy/dx = 2x + dx$, y sólo en este momento despreciaban los sumandos infinitesimales, obteniendo: $dy/dx = 2x$.
- Para demostrar la relación inversa entre la derivación y el cálculo del área $A(x)$ bajo una curva $y(x)$, consideraban que una variación infinitesimal dx produciría una variación infinitesimal dA, la cual podía aproximarse por el rectángulo de altura $y(x)$ y base dx, resultando: $dA = y \cdot dx$; dividiendo ambos miembros por dx, obtenían la relación básica: $dA/dx = y$.

Como puede apreciarse, el uso de los infinitesimales presentaba ciertas ventajas: se escribía como igualdad lo que solo podía considerarse como aproximación si se utilizaban incrementos finitos;

[79] Morris Kilne, *El pensamiento matemático…* 478-479.
[80] Morris Kilne, *El pensamiento matemático…* 496-496.

además, los términos que contenían estas cantidades podían despreciarse en el momento justo del razonamiento que se considerase oportuno y, por tanto, el uso de los infinitesimales generaba grandes dudas y fuertes críticas[81].

Posteriormente, en el siglo XVIII, la evolución del concepto de diferencial se caracterizó por los intentos de dotar de rigor al cálculo infinitesimal. Se destacan los aportes y críticas de los siguientes matemáticos: Brook Taylor (1685-1731) contribuyó con métodos de incrementos finitos y la manipulación formal de expresiones algebraicas; Colin Maclaurin (1698-1746) intentó fundamentar las fluxiones en la geometría griega y el método de la exhausción, evitando el concepto de límite[82]; aparece el primer libro de texto para entender las líneas curvas, denominado *Análisis de lo infinitamente pequeño*, que fue publicado por el marqués de L'Hospital (l696); Lagrange (1736-1813) intenta definir la derivada sin la noción de límite y utiliza la expansión de una función en series de potencias; D'Alembert (1717-1783) aporta las definiciones de límite y diferencial muy cercanas a las actuales[83] .

Por otra parte, algunos opositores y críticos al desarrollo del cálculo son Michel Rolle, quien opina que el cálculo infinitesimal es una colección de falacias ingeniosas, y George Berkely (1685-1753), quien critica las ideas de Newton, afirmando

> […] este razonamiento no parece ni correcto ni honesto. Cuando se dice que los incrementos ya no son nada o que no hay más incrementos, la suposición anterior en el sentido de que los incrementos fueron algo o que hubo incrementos es destruido, sin embargo, una consecuencia de la suposición es retenida (...) Este es un razonamiento falso[84].

Benjamin Robins (1707-17051), por su parte, apoya las fluxiones pero rechaza los infinitesimales; Carnot (1753-1823) critica los

---

[81] Rafael López-Gay Lucio-Villegas, "La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la Física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora" (Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Madrid, 2001), 35.
[82] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 567.
[83] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 759-780.
[84] David Tall, "The Psychology of… 168,169.

infinitesimales e intenta probar que el fundamento lógico estriba en el método exhaustivo y abre el paso al siglo XIX, considerado el del rigor para el cálculo diferencial[85].

Se cree que en el siglo XVIII se ubican los comienzos del cálculo infinitesimal de funciones de dos y tres variables, con los aportes de Newton para obtener expresiones a partir de ecuaciones polinomiales en x e y, es decir, ecuaciones de la forma $f(x,y)=0$, las cuales son equivalentes a las encontradas por derivación parcial de f respecto a x e y en el cálculo reciente. Su trabajo no fue publicado[86].

Al principio, la diferencia entre una derivada parcial y una ordinaria no fue reconocida explícitamente y se utilizaba el mismo símbolo d para ambas. Para el caso de funciones en varias variables independientes, era el significado el que indicaba de qué derivada se trataba, correspondiente a los cambios en una única variable.

Jacques Bernoulli (1654-1705) utilizó derivadas parciales en su trabajo sobre problemas isoperimétricos, como también lo hizo Nicolás Bernoulli (1687-1749) en un artículo del Acta Erudituorum de 1720 sobre trayectorias ortogonales. Sin embargo, fueron Euler, Clairaut y D'Alembert quienes crearon la teoría de derivadas parciales[87].

Clairaut fue quien obtuvo la condición para que $dz = pdx + qdy$, donde p y q son funciones de x e y, sea una diferencial exacta, es decir, proviene de la función $z = f(x,y)$ al formar la diferencial,

$$dz = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy,$$

su resultado fue que $pdx + qdy$ es una diferencial exacta si y solo si $\partial p/\partial y = \partial q/\partial x$. Además, en un artículo de 1734, demuestra que dada una función definida sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y si existen las segundas derivadas parciales de $z = f(x,y)$ y son continuas en un abierto, entonces,

[85] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 575-577.
[86] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 565.
[87] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 565.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

En otros artículos, escritos de 1748 a 1766, trata sobre los cambios de variables, inversión de derivadas parciales y determinantes funcionales[88].

El principal impulso para trabajar con derivadas de funciones de dos o más variables vino de los primeros trabajos en ecuaciones en derivadas parciales sobre la ecuación de onda, ecuación del calor y teoría del potencial. Así, Euler (1707-1783), con sus trabajos de funciones a partir de una manera formal, es decir, razonando desde su representación algebraica, en su libro sobre cálculo diferencial enuncia la forma de calcular la diferencial de una función de dos variables, las derivadas parciales no eran más que un paso intermedio hacia su objetivo principal: el cálculo del diferencial. Euler desarrolló el cálculo de derivadas parciales en una serie de artículos dedicados a problemas de hidrodinámica.

Por su parte, D'Alembert, en trabajos realizados en 1744 y 1745 sobre dinámica, extendió el cálculo de derivadas parciales[89].

La diferencial según Cauchy

En el siglo XIX se destacan por sus aportes al cálculo: Gauss (1777-1855) y Cauchy (1789-1857), quienes rechazan el concepto de derivada en términos de series de potencias de Lagrange y lo establecen utilizando el límite, con un tratamiento aritmético relacionan la integral con la derivada. Cauchy define la diferencial como el producto de la derivada por un incremento arbitrario de la variable independiente[90].

Otros aportes son los de Weierstrass (1815-1897), quien define el número real y el límite en términos de (ε, δ) con lo cual contribuye a la aritmetización del análisis; y Heine (1821-1881), quien da una

[88] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 565.
[89] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 565, 566.
[90] Michèle Artigue, "Analysis", 1985, en *David Tall*, "The Psychology of… 169-170.

definición rigurosa de infinitesimales como una cantidad variable, contrario a la idea intuitiva como una constante[91].

Durante el siglo XVIII y principios del XIX, la forma de trabajar con los diferenciales de funciones de varias variables continuó siendo la misma utilizada por Euler. Solo a finales del siglo XIX, cuando aparecen ejemplos de funciones no clasificadas entre las que hoy se denominan elementales, se produce un cuestionamiento inevitable a este tratamiento "por separado" de cada una de las variables.

En tiempos más recientes aparen los aportes de H. A. Schwartz (1843-1921), con los resultados de sus investigaciones en torno a las funciones reales de varias variables; él presenta una función que no es continua en (0,0), pero que posee derivadas parciales, cuestión que contrastaba fuertemente con las propiedades conocidas para funciones de una variable. A Schwartz se le atribuye la formalización del teorema de las derivadas mixtas o cruzadas[92].

Posteriormente, Hilbert (1872-1943) define espacio elucídelo de infinitas dimensiones; Stolz, en 1893, introduce la noción de diferenciabilidad de funciones de varias variables reales; W. H. Young (1908) define la diferencial como una trasformación lineal, y en 1911 Fréchet (1878-1973) incorpora el concepto de diferencial en su interpretación moderna, en términos de transformaciones lineales tangentes[93].

La diferencial según Fréchet

Fréchet (1878-1973), en 1911, introduce el concepto de diferencial en su interpretación moderna, en términos de transformaciones lineales tangentes, de la siguiente forma:

Una función $f(x, y, z, t)$ admite una diferencial en el punto (x_0, y_0, z_0, t_0) si existe una función lineal y homogénea de los incrementos, sea: $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + D \cdot \Delta t$, que no difiere del incremento de la función Δf a partir del valor $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$ más que

[91] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 1250-1251.
[92] Pablo Ignacio Gómez Fuentes y Juan Raúl Delgado, "La diferenciabilidad de funciones… 603-604.
[93] David Tall, *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, 168.

en un infinitamente pequeño, con relación a la distancia δ entre los puntos (x_0, y_0, z_0, t_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t)$, entonces la diferencial es, por definición:

$$df = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + D \cdot \Delta t.$$

Podemos entender por distancia entre dos puntos la suma de los valores absolutos del incremento de cada variable, o la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de esos incrementos, o incluso el mayor de todos esos incrementos.

Esta definición es expresada por la fórmula: $\Delta f = df + \varepsilon \cdot \delta$ donde ε tiende a cero. Recuerda a la antigua definición como la parte principal y presenta todas sus ventajas, pero escapando a las objeciones de rigor que muy justamente se le habían hecho[94].

Esto significa que $(\Delta f - df)$ tiende a cero más rápidamente que δ, es decir, que el límite de $(\Delta f - df)/\delta$ es cero cuando δ tiende a cero:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Delta f - df}{\delta} = 0.$$

Esto es, como lo aclara Fréchet, la expresión "$\Delta f - df$ es infinitamente más pequeña que δ", indica que df es una función lineal y homogénea de los incrementos que permite expresar,

$$\Delta f = df + \varepsilon \cdot \delta, \text{ donde: } \lim_{\delta \to 0} \varepsilon = 0.$$

La definición de Fréchet es tan precisa como la de Cauchy, pero sin quitarle significado ni reducirla a un ente formal útil para abreviar desarrollos. Al contrario, con Fréchet la diferencial recupera el carácter de aproximación y el importante papel que había desempeñado en los orígenes del cálculo —y que sigue desempeñando hoy día en cualquier análisis que requiera el uso del cálculo diferencial—. Desde esta nueva concepción, las expresiones o fórmulas diferenciales adquieren un significado preciso en sí mismas, independientemente del tratamiento operatorio que vayan a recibir después, y no ligado necesariamente a las cantidades infinitamente pequeñas[95].

---

94 Maurice Fréchet. "Sur la notion de différentielle", *Journal de Mathématiques*, volumen XVI, 1937: 233-250. [Mi traducción].

95 Lucio López-Gay y Rafael Villegas, "La introducción y utilización… 46-48.

El último giro en la historia ocurrió en 1960, cuando Robinson formuló una teoría rigurosa de análisis no estándar, reintroduciendo los infinitesimales sobre una base lógica después de un siglo de rechazo[96].

Análisis de la diferencial en los libros de texto

Para determinar los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial, la estrategia seguida fue analizar textos con las siguientes características en la presentación de los conceptos: la teórica formal, que da relevancia a los sistemas de representación analítica y algebraica; y la teórica aplicada, que hace énfasis en los sistemas de representación gráfica, numérica, algebraica y analítica.

Con respecto a la presentación teórica de los conceptos, se analizaron los siguientes textos:

- Apóstol, Tom M. *Calculus, Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades.* Volumen 2, segunda edición, Barcelona: Editorial Reverté, 1998.
- Bartle, Robert G. *The Elements of Real Analysis.* Segunda edición. New York: Editorial John Wiley & Sons, 1975.
- Lima, Elon Lages. *Curso de análise.* Volumen 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Projeto Euclides, 1985.
- Galindo Soto, Félix, Javier Sanz Gill y Luis Tristán Vega. *Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables.* Madrid: Editorial Paraninfo, 2005.

En cuanto a la presentación de los conceptos en forma teórica y práctica, se analizaron los siguientes textos:

- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. Séptima edición. México: Oxford University press-Harla, 1998.

[96] Michèle Artigue, "Analysis", 1985, en *Advanced Mathematical Thinking*, ed. David Tall. (Dordrecht: Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, 2002), 168.

- Stewart, James. *Cálculo multivariable*. Segunda edición. México: Thompson Learning, 2002.
- Thomas, George, Finney Ross y Maurice Weir. *Cálculo varias variable*. México: Addison Wesley, 1999.
- Marder, L. *Cálculo de varias variables*. Volumen 2. México: Limusa, 1974.

Los primeros textos se escogieron, porque exponen los temas con un desarrollo teórico riguroso, característico de la matemática moderna y el formalismo; además, presentan definiciones, teoremas y corolarios con sus respectivas demostraciones, ejemplos y contraejemplos.

Los segundos textos muestran los conceptos en forma geométrica, numérica, algebraica, verbal o descriptiva, lo que promueve la comprensión del cálculo por el descubrimiento, el poder en la práctica, la utilidad y la competencia técnica.

Para cada texto, como se indica en los siguientes párrafos, se analizó la organización de la unidad de la diferencial, los conceptos, los ejemplos y los ejercicios propuestos, que se relacionan de la Tabla 1 a la Tabla 8, en las cuales las dos primeras filas corresponden a la identificación del texto, en las siguientes filas a dos columnas se hace un resumen de la presentación de los contenidos (la primera columna es una transcripción de los títulos de las secciones y subsecciones y la segunda columna es una síntesis del desarrollo de los conceptos), y en la última fila se describe el enfoque metodológico de las actividades propuestas y los ejercicios de aplicación.

El libro de la editorial Reverté organiza los contenidos en tres partes: análisis lineal, análisis no lineal y temas especiales. Los conceptos relacionados con la diferencial están expuestos en la parte del análisis no lineal, en el capítulo 8, titulado "Cálculo diferencial en campos escalares y vectoriales", comprendido entre las páginas 297 a 342. En la Tabla 1 se presenta un resumen del correspondiente análisis.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	Calculus Volumen II	Tom M. Apostol	Bogotá	1988
Contenidos				
Temas	Descripción			
Derivada de un campo escalar respecto a un vector en un punto	Define la derivada de un campo escalar, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, en un punto a interior de A, respecto a un vector arbitrario y de $\mathbb{R}^n$ y sus diferentes notaciones. Presenta ejemplos de esta derivada cuando el vector $y = 0$, la derivada de una transformación lineal, la derivada de la norma euclídea al cuadrado. Enuncia y demuestra el teorema del valor medio para derivadas de campos escalares.			
Derivadas direccionales y derivadas parciales	Define la derivada direccional como un caso particular de la derivada de un campo escalar, respecto a un vector en un punto, cuando el vector u es unitario, $\|u\| = 1$. Define la derivada parcial de un campo escalar en un punto, como casos particulares de la derivada direccional, cuando el vector dirección es un vector coordenado unitario.			
Derivadas parciales de orden superior	Calcula derivadas parciales de segundo orden, con su respectiva notación y hace énfasis en que la derivada mixta $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ no siempre es igual a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.			
Derivadas direccionales y continuidad	Expone que en teoría unidimensional, la existencia de la derivada de una función f en un punto implica la continuidad de f en aquel			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	Calculus Volumen II	Tom M. Apostol	Bogotá	1988
Contenidos				
Temas	Descripción			
	punto, sin embargo, para un campo escalar f la existencia de la derivada direccional, $f'(a;y)$ para todo vector y no implica la continuidad de f en a, presentando un contraejemplo. Justifica que el concepto de derivada direccional no constituye una extensión satisfactoria del concepto unidimensional de derivada.			
La diferencial	Presenta este concepto como una generalización conveniente de la derivada, que implica la continuidad, lo cual permite extender los principales teoremas de derivación de una dimensión al caso de mayor número de dimensiones. Expone los conceptos de diferencial de una función real de variable real y la diferencial de un campo escalar. Enuncia y demuestra el teorema, si una función f es diferenciable en un punto a, con diferencial T_a, entonces existe $f'(a;y)$ para todo y en $\mathbb{R}^n$ y $T_a(y) = f'(a;y)$.			
Gradiente de un campo escalar	Da una explicación gráfica, algebraica y analítica del vector gradiente. Para el caso de un campo escalar, $f'(a;y) = \nabla f(a) \cdot y$, enuncia y demuestra el teorema, si un campo escalar f es diferenciable en a entonces es continuo en a.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	Calculus Volumen II	Tom M. Apostol	Bogotá	1988

Contenidos	
Temas	Descripción
	Enuncia y demuestra el teorema de la condición suficiente de diferenciabilidad. Si existen las derivadas parciales $D_1f, \cdots, D_nf$ en cierta $n-$ bola $B(a)$ y son continuas en a entonces f es diferenciable en a.
Regla de la cadena para derivadas de campos escalares	Plantea y demuestra el teorema de la regla de la cadena, para hallar la derivada de la función compuesta $g = f \circ r$, de un campo escalar f y una función vectorial r en un punto.
Aplicaciones	Presenta aplicaciones geométricas, conjuntos de nivel y planos tangentes
Diferenciales de campos vectoriales	Define la derivada de un campo vectorial respecto a un vector en un punto. Representa en forma geométrica y analítica la diferenciabilidad en campos vectoriales. Formula y demuestra el teorema, si un campo vectorial es diferenciable en un punto, implica la existencia de la derivada en ese punto en cualquier dirección. Enuncia y demuestra el teorema de la regla de la cadena para campos vectoriales. Representa en forma matricial la diferencial de un campo vectorial, la matriz jacobiana. Plantea y demuestra el teorema, diferenciabilidad implica continuidad.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	Calculus Volumen II	Tom M. Apostol	Bogotá	1988
Contenidos				
Temas	Descripción			
Ejercicios	Calcular derivadas de un campo vectorial en un punto respecto a un vector dirección, derivadas parciales, direccionales y diferenciales utilizando reglas algebraicas. Aplicar las derivadas parciales. Demostrar o verificar la existencia de derivadas de funciones que satisfacen ciertas condiciones. Calcular gradientes, derivadas direccionales. Aplicar la derivada direccional a problemas geométricos. Deducir propiedades del gradiente. Verificar el cumplimiento de algunas propiedades de la diferencial. Calcular conjuntos de nivel, planos tangentes, vector tangente y espacios tangentes. Calcular la diferencial de campos vectoriales.			
Aplicaciones del cálculo diferencial	En el capítulo 9 presenta aplicaciones de la diferencial de campos escalares y vectoriales, discutidos en el capítulo 8, a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, derivación de funciones definidas implícitamente, máximos, mínimos y puntos de ensilladura, fórmula de Taylor de segundo orden para campos escalares, extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange.			

Tabla 1. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Reverté.

De la Tabla 1 se puede evidenciar que los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial para este autor son: funciones en varias variables, derivada de una función en un punto respecto a un vector, derivada parcial, derivada direccional, diferencial de un campo escalar y diferencial de un campo vectorial. Los elementos matemáticos son presentados en forma algebraica y analítica.

El siguiente texto examinado es el de la editorial John Wiley Sons, el cual hace una presentación del análisis real, que comprende tres partes: una donde caracteriza el sistema de los números reales; otra dedicada a funciones, límites, continuidad, diferenciación e integración de funciones reales; y la última destinada a sucesiones y series.

La parte dedicada al análisis de funciones inicia describiendo el sistema de los números reales, sus propiedades, operaciones y relaciones; continúa con la topología de los espacios cartesianos, espacios vectoriales, producto interior, norma, conjuntos abiertos, cerrados, compacidad, conexidad y separación; luego comprende las funciones en varias variables, funciones lineales, continuidad, continuidad uniforme y puntos fijos, sucesión de funciones continuas, límite de funciones; y finaliza con la diferenciación e integración de funciones en una y varias variables.

Los conceptos relacionados con la diferencial son expuestos en la unidad VII, titulada Diferenciación en $\mathbb{R}^p$ comprendida de la página 347 a 397.

En la Tabla 2 se exponen los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial en este texto.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>John Wiley & Sons</td><td>The Elements of Real Analysis</td><td>Robert G. Bartle</td><td>New York</td><td>1976</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivada parcial</td><td colspan="3">Hace una introducción de la diferenciación de funciones reales. Primero presenta la derivada de una función real de variable real en un punto como una aproximación lineal de la función en vecindades del punto, y posteriormente extiende este concepto a funciones en varias variables.

Indica la definición de derivada de una función vectorial de variable real con aplicaciones a trayectorias de partículas, velocidad y aceleración.

Define derivada parcial de una función con dominio un abierto A de $\mathbb{R}^p$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $p > 1$, $q > 1$, en un punto c de A y con diferentes notaciones.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivada direccional</td><td colspan="3">Define la derivada direccional de la función, $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $p > 1$, $q > 1$, en un punto c interior de A en dirección de un vector u de $\mathbb{R}^p$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La diferencial de, $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.</td><td colspan="3">Define la diferencial de una función como el funcional lineal entre los espacios vectoriales que aplica la función y presenta la interpretación analítica y geométrica del concepto.

Expone un lema sobre la unicidad de la diferencial.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
John Wiley & Sons	The Elements of Real Analysis	Robert G. Bartle	New York	1976
Contenidos				
Temas	Descripción			
La diferencial de, $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.	Enuncia y demuestra el teorema: la existencia de la diferencial implica la existencia de las derivadas parciales. Enuncia y demuestra un corolario del teorema anterior, la existencia de la diferencial de un campo escalar implica la existencia de las derivadas parciales, estableciendo que $Df(c)(u) = \nabla f(c) \cdot u$. Sin embargo, muestra que el recíproco de este corolario no es cierto. Analiza la diferencial de una función en varias variables, $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, según los valores de p y q. Enuncia y demuestra el teorema sobre la condición suficiente para la existencia de la diferencial.			
Ejercicios	Calcular derivadas parciales, direccionales y diferenciales. Demostrar la existencia de la derivada parcial, la derivada direccional, la diferenciabilidad, la continuidad y el acotamiento, para funciones en varias variables. Calcular en forma algebraica el gradiente, planos tangentes, vector tangente y espacios tangentes.			

Tabla 2. Contenidos sobre diferencial. Editorial John Wiley & Sons

Para este autor, según el resumen presentado en la Tabla 2, los elementos matemáticos que estructuran el concepto de diferencial de una función en varias variables son: derivada de una función en un punto respecto a un vector, derivada parcial, derivada direccional, diferencial de una función (real de variable real, vectorial de variable real, real de variable vectorial y vectorial de variable vectorial), condición suficiente de diferenciabilidad y teoremas de diferenciabilidad.

El tercer libro analizado es el volumen II del *Análisis Real*, editado por el Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA). Este libro comprende el estudio de los espacios euclidianos n-dimensional $\mathbb{R}^n$, y utiliza un enfoque analítico, algebraico y geométrico, que contrasta con el enfoque aritmético del volumen I, que está dedicado al análisis real para funciones de una variable.

Para el análisis real en varias variables, el texto inicia con la topología de los espacios euclídeos, ya que según el autor, el estudio topológico de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es más complicado que en el caso de $\mathbb{R}$. Cita el ejemplo en que los únicos conjuntos conexos en la recta son los intervalos, mientras que es imposible clasificar topológicamente los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ y además, el álgebra lineal que es poco necesaria en dimensión 1 (las matrices de orden 1×1 que representan las transformaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se confunden con los números reales), para el análisis real en varias variables es indispensable a fin de formular conceptos y demostrar teoremas del cálculo diferencial de funciones en más de una variable.

El estudio de la diferencial, incluido en el capítulo III, páginas 117 a 176, se basa en aproximar una función en varias variables, en una vecindad de cada punto del dominio, por una transformación lineal (llamada diferencial) y a partir de las propiedades de la transformación obtener información de la función. Este estudio requiere de conceptos de álgebra lineal, como vectores, matrices y las transformaciones lineales que representan la diferencial. El enfoque de aplicar los métodos del álgebra lineal al estudio de la diferencial, trae grandes ventajas en cuanto a conceptualización, notación, unificación y generalización.

Finalmente, el texto incluye dos capítulos dedicados a las integrales múltiples y de superficie.

En la Tabla 3 se describen los elementos matemáticos que hacen parte de la estructura conceptual de la diferencial para este autor.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
IMPA. Projeto Euclides	Curso de análise volume 2	Elon Lages Lima	Rio de Janeiro	1985
Contenidos				
Temas	Descripción			
Derivadas parciales	Define derivada parcial de una función real de variable vectorial con dominio el abierto U, $f: U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, en un punto interior a de U, en términos del límite del cociente incremental.			
Derivadas direccionales	Define la derivada de una función en un punto en dirección de un vector. Presenta ejemplos de algunas funciones que poseen derivadas direccionales en un punto en cualquier dirección, sin embargo, no son continuas en el punto. Por tanto, muestra que la existencia de las derivadas direccionales no implica la continuidad de la función. Enuncia y demuestra el teorema del valor medio.			
Funciones diferenciables	Define la diferencial de una función, $f: U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, desarrollada por Fréchet y Stolz, como generalización del concepto de derivada de una función real de variable real. Muestra que si una función es diferenciable en un punto, entonces existen todas las derivadas parciales y las derivadas direccionales en la dirección de cualquier vector.			

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>IMPA. Projeto Euclides</td><td>Curso de análise volume 2</td><td>Elon Lages Lima</td><td>Rio de Janeiro</td><td>1985</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Enuncia y demuestra el teorema: diferenciabilidad implica continuidad.
Presenta la regla de la cadena para funciones en varias variables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La diferencial de una función</td><td colspan="3">Establece que la diferencial de una función en varias variables, $f: U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, está dada como $Df(a)(u) = \nabla f(a) \cdot u$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">El gradiente de una función diferenciable</td><td colspan="3">Establece las propiedades del gradiente y presenta el significado geométrico y analítico del vector gradiente de una función real de variable vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La regla de Leibniz.
Teorema de Schwartz.</td><td colspan="3">Formula la regla de Leibniz, para calcular derivadas parciales de funciones en varias variables definidas en forma integral.
Formula la regla de Schwarz, para calcular derivadas parciales de segundo orden mixtas, o de orden superior a dos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplicaciones y ejercicios</td><td colspan="3">Propone demostrar la diferenciabilidad y la continuidad de funciones.
Aplicar el concepto de diferenciabilidad en la fórmula de Taylor infinitesimal, el resto de Lagrange y el resto Integral.
Encontrar puntos críticos y aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para optimizar funciones en varias variables.</td></tr>
</table>

Tabla 3. Contenidos sobre la diferencial. Editorial IMPA.

De la síntesis presentada en la Tabla 3, se infiere que, para el libro de la editorial IMPA, los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial de una función en varias variables son: función de varias variables, derivada parcial, derivada direccional, la diferencial, el gradiente de una función y las reglas para calcular diferenciales.

El cuarto texto analizado es de la Editorial Paraninfo, que inicia el análisis en varias variables con un capítulo dedicado a la topología del espacio euclídeo $n-$dimensional; luego destina cuatro capítulos al cálculo diferencial de funciones en varias variables que incluyen la derivabilidad y diferenciabilidad, funciones inversas e implícitas, variedades diferenciales, teoremas de rango, teoría de campos escalares y vectoriales, operadores diferenciales; y finalmente destina capítulos a la integración múltiple y la aplicación a integrales curvilíneas e integrales de superficie.

Para la presentación de los conceptos utiliza una representación analítica, que se caracteriza por seguir la secuencia definición, teorema (sin demostración), proposiciones y observaciones. Al final de cada sección expone un conjunto de ejercicios resueltos, haciendo énfasis en la representación algebraica, la cual ayuda a explicar la presentación analítica. Para algunas situaciones hay gráficas en dos y tres dimensiones y su respectiva interpretación geométrica.

El concepto de diferencial de una función en varias variables comprende los capítulos 2, 3 y 7, que se describen en la Tabla 4.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Paraninfo	Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables	Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil y Luis A. Tristán Vega	Madrid	2005
Contenidos				
Temas	Descripción			
Derivabilidad y diferenciabilidad	Define función derivable, derivada parcial y derivada direccional y función diferenciable en un punto. Enuncia el teorema: la diferencial de una función en un punto implica la continuidad de la función en el punto. Enuncia el teorema: si una función es diferenciable en un punto, entonces existen las derivadas direccionales en dicho punto, según cualquier dirección, en particular, la función es derivable en el punto. Define derivada de una función en varias variables y la representa como la matriz jacobiana. Establece que si una función f es diferenciable en un punto x_0, entonces la aplicación lineal $f'(x_0)$ está dada en forma matricial respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ por la matriz jacobiana. Define el gradiente de un campo escalar. Establece la relación entre derivabilidad y diferenciabilidad. Presenta la interpretación geométrica de la diferencial de una función en un punto.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Paraninfo	Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables	Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil y Luis A. Tristán Vega	Madrid	2005
Contenidos				
Temas		Descripción		
		Enuncia un teorema de condición suficiente de diferenciabilidad. Establece y caracteriza las operaciones con funciones diferenciales.		
Regla de la cadena		Regla de la cadena. Teorema del valor medio.		
Derivadas de orden superior		Define las derivadas parciales de orden $m \geq 1$. Define las funciones de clase C^k, como aquellas que admiten derivadas parciales de orden $k \geq 1$ en cada punto de un abierto A y estas derivadas parciales son continuas en A. Define funciones de clase C^∞. Enuncia el teorema de Schwarz. Establece las condiciones para la igualdad entre las derivadas de segundo orden mixtas.		
Fórmula de Taylor		Presenta la fórmula de Taylor. Establece las condiciones para calcular el valor de una función en vecindades de un punto a partir de su imagen y de las derivadas parciales de orden superior evaluadas en este. Presenta un análisis del error en la fórmula de Taylor y su relación con la diferencial de una función.		

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
Paraninfo	Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables	Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil y Luis A. Tristán Vega	Madrid	2005
Contenidos				
Temas	Descripción			
Ejercicios y aplicaciones	Propone optimizar funciones a partir del estudio de los extremos relativos y formas cuadráticas como una aplicación del concepto de diferencial. Presenta ejercicios resueltos y propone otros para determinar derivabilidad, diferenciabilidad y continuidad de funciones en varias variables aplicando las definiciones y teoremas. Presenta contraejemplos para mostrar que el recíproco de algunos teoremas no se cumple.			

Tabla 4. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Paraninfo.

De la Tabla 4 se infiere que los elementos matemáticos que dan la estructura al concepto de diferencial en el libro de la editorial Paraninfo son: función en varias variables, derivada direccional, derivada parcial, función derivable, función diferenciable, gradiente, matriz jacobiana, interpretación geométrica y analítica de la diferencial y teoremas para caracterizar la diferencial de una función.

El quinto texto analizado, de la segunda clasificación, es el libro de la editorial Harla, el cual desarrolla el cálculo diferencial e integral en 14 capítulos, que se caracterizan por la presentación de una manera formal de las definiciones, los teoremas y las demostraciones, acompañados de comentarios, ejemplos ilustrativos, gráficas y la aplicación en modelos de la vida real. Además, incorpora la tecnología con el objetivo de mejorar el aprendizaje del cálculo. Los ejemplos son ilustrativos y tienen como propósito mostrar el concepto, la definición o el teorema particular y constituyen un referente para la resolución de los ejercicios.

La diferenciación de funciones en varias variables la efectúa en el capítulo 11, titulado "Funciones vectoriales", que comprende: función real con valor vectorial y ecuaciones paramétricas, derivadas y diferenciales de estas funciones; y en el capítulo 12, titulado "Cálculo diferencial de funciones de más de una variable" expone: derivadas parciales, diferenciabilidad, regla de la cadena, gradiente y aplicaciones. Estos conceptos se resumen en la Tabla 5.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Harla</td><td>El cálculo con geometría analítica</td><td>Louis Leithold</td><td>México</td><td>1998</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cálculo de las funciones con valor vectorial</td><td colspan="3">Define derivada de una función vectorial, $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, n > 1$; y función vectorial diferenciable.

Presenta aplicaciones de la diferencial en el movimiento en el plano y el significado geométrico y físico de los vectores unitarios tangente y normal a una curva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas parciales</td><td colspan="3">Define derivada parcial de una función de dos variables, $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y presenta las diferentes notaciones.

Expone la interpretación geométrica de la derivada parcial de una función.

Da una interpretación analítica de la derivada parcial de una función como la razón de cambio instantánea.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Harla	El cálculo con geometría analítica	Louis Leithold	México	1998
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Define la derivada parcial de funciones con n variables.			
Diferenciabilidad y diferencial total	Define el incremento de una función de dos variables en un punto. Define función diferenciable en términos de incrementos. Enuncia y demuestra el teorema: si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en él. Muestra un ejemplo para ilustrar que la sola existencia de las derivadas parciales de una función en un punto no implica la diferenciabilidad de la función en dicho punto. Enuncia y demuestra el teorema sobre la condición suficiente para que una función sea diferenciable en un punto. Si existen y son continuas las derivadas parciales de una función en un punto, entonces la función es diferenciable en este. Define funciones continuamente diferenciables en un punto, como las que cumplen las condiciones del teorema anterior. Propone ejercicios para mostrar que el recíproco del teorema anterior no se cumple, es decir, funciones que son diferenciables en un			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Harla	El cálculo con geometría analítica	Louis Leithold	México	1998
Contenidos				
Temas	Descripción			
	punto y aun así sus derivadas parciales no son continuas en dicho punto. Concluye que la derivabilidad continua en un punto es una condición suficiente, pero no necesaria, de la diferenciabilidad. Define la diferencial total de una función de dos variables. Generaliza las definiciones de incremento, función diferenciable y diferencial total a una función de n variables. Para cada concepto muestra ejemplos ilustrativos.			
Regla de la cadena	Enuncia y demuestra el teorema de la regla de la cadena para funciones de dos variables. Enuncia y demuestra el teorema que generaliza la regla de la cadena para funciones de n variables, $n \geq 1$.			
Derivadas parciales de orden superior	Define derivadas de segundo, de tercer orden, derivadas mixtas y enuncia el teorema que da condiciones para que las derivadas mixtas coincidan, $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.			
Condiciones suficientes de diferenciabilidad	Enuncia, demuestra e ilustra el teorema del valor medio para una función de una sola			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Harla	El cálculo con geometría analítica	Louis Leithold	México	1998
Contenidos				
Temas	Descripción			
	variable, aplicado a una función de varias variables. Demuestra el teorema sobre las condiciones suficientes para la diferenciabilidad, utilizando el teorema del valor medio.			
Derivadas direccionales y gradientes	Define derivada direccional. Presenta una interpretación geométrica de la intensidad de variación de los valores funcionales $f(x, y)$ en cualquier dirección. Define gradiente de una función de dos variables. Da la interpretación geométrica del vector gradiente, que indica la dirección en la que la función presenta su mayor tasa de variación.			
Aplicaciones	Aplicaciones de la diferencial para encontrar planos tangentes y normales de las superficies. Incluye problemas y ejercicios de aplicación de la diferencial para encontrar y caracterizar valores extremos de funciones de dos variables. Define puntos críticos, valor máximo y mínimo relativo. Enuncia el teorema de la prueba de la segunda derivada para caracterizar valores extremos.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Harla	El cálculo con geometría analítica	Louis Leithold	México	1998
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Presenta y propone problemas para encontrar valores máximo, mínimo absoluto y puntos silla. Propone situaciones problema para aplicar el teorema del valor extremo para funciones de dos variables. Expone el método de los multiplicadores de Lagrange y propone ejercicios y problemas. Plantea ejercicios de obtener una función conociendo el gradiente y las diferenciales exactas.			
Ejercicios	Los ejercicios están ordenados por grados de dificultad, proporciona variedad de tipos de problemas que van desde cálculos y aplicaciones hasta problemas teóricos para la calculadora e incluye situaciones para promover la redacción			

Tabla 5. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Harla.

De la Tabla 5 se infiere que para este autor los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial son: derivada de funciones vectoriales, diferencial de una función vectorial, derivada parcial, derivada direccional, la diferencial de una función en varias variables, teoremas fundamentales sobre condiciones necesarias y suficientes de diferenciabilidad, propiedades de funciones diferenciables y aplicaciones.

El sexto texto analizado es de la editorial Thomson; en la presentación se afirma que se atiende la recomendación del movimiento de reforma de la enseñanza del cálculo, de concentrarse en la comprensión de los conceptos, dada en la conferencia de la Universidad de Tulane en 1986, y por tanto, tiene como propósito ayudar a los estudiantes a descubrir el cálculo, aplicarlo en situaciones prácticas y admirar su belleza presentando los temas en forma verbal, geométrica, numérica y algebraica.

El tema, la derivación y diferenciación de funciones en varias variables, lo aborda así: en el capítulo 13 analiza funciones con valor vectorial, sus derivadas y aplicaciones a la longitud de arco, curvatura y movimiento de partículas; en el capítulo 14 expone el concepto de derivadas parciales, derivadas direccionales, diferenciales, aproximaciones lineales y aplicaciones.

Esta exposición se caracteriza por incluir ejemplos de situaciones reales modeladas por funciones definidas por datos numéricos y gráficas, por ejemplo, la función índice de temperatura y humedad es ilustrada mediante una tabla de valores, que muestra la dependencia de esta función respecto de las dos variables temperatura del aire y la rapidez del viento. Las derivadas parciales se introducen al analizar la variación de la temperatura del aire percibido en función de la temperatura y la humedad relativa. Esta misma situación la relaciona con las aproximaciones lineales o diferenciales. La derivada direccional es incorporada a través de mapas de contorno de la temperatura, para estimar la rapidez de cambio de temperatura en una zona geográfica particular.

Con respecto al concepto de diferencial, da una interpretación geométrica, iniciando para el caso de una variable como el hecho que al acercarse a un punto de la gráfica de una función derivable, la curva no se distingue de su recta tangente y se puede aproximar la función con una función lineal. Al extender este principio en tres dimensiones, a medida que se acerca a un punto de una superficie, que es la gráfica de una función diferenciable de dos variables, la superficie se asemeja cada vez más a un plano (su plano tangente) y se puede aproximar la función mediante una función lineal de dos variables.

En la Tabla 6 se sintetizan los temas que conforman el concepto de diferencial de una función en varias variables según este autor

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Thomson Learning</td><td>Cálculo multivariable</td><td>James Stewart</td><td>México</td><td>2002</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funciones vectoriales</td><td colspan="3">Define y representa funciones vectoriales y curvas en el espacio.

Define la derivada de una función vectorial de valor real.

Presenta aplicaciones para calcular la longitud de un arco y analizar la curvatura, el movimiento en el plano y el espacio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funciones de varias variables</td><td colspan="3">Define función de dos variables (dominio, recorrido). Representa las funciones en forma verbal, numérica (tabla de valores), algebraica (por una fórmula) y visual (por gráficas o curvas de nivel).

Define, representa y caracteriza funciones de tres o más variables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas parciales</td><td colspan="3">Señala una explicación de la derivada parcial para funciones de dos variables en un punto, representadas numéricamente (tablas de valores). Define derivada parcial en forma algebraica, como el límite del cociente incremental.

Representa las derivadas parciales en diferentes notaciones.

Establece reglas algebraicas para hallar derivadas parciales.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Thomson Learning	Cálculo multivariable	James Stewart	México	2002
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Expone la interpretación geométrica de la derivada parcial de una función en un punto como pendientes, ilustra con gráficas. Define derivadas parciales para funciones de más de dos variables y representa en forma algebraica. Define las derivadas parciales de orden superior. Si f es una función de dos variables, las derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de manera que se pueden encontrar las derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$. Enuncia el teorema de Clairaut, que da condiciones bajo las cuales se puede expresar $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.			
Planos tangentes y aproximaciones lineales	Define y representa las aproximaciones lineales o aproximación del plano tangente a la función en un punto. Define la diferencial de una función de dos variables en un punto y define la diferencial total. Enuncia el teorema que establece las condiciones suficientes para que una función de dos variables sea diferenciable en un punto. Muestra un ejemplo ilustrativo para			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Thomson Learning	Cálculo multivariable	James Stewart	México	2002
Contenidos				
Temas	Descripción			
	estimar la diferencial de una función de dos variables representada en forma tabular. Define diferenciales y presenta una interpretación gráfica y algebraica. Define la derivada y la diferencial para funciones de tres o más variables.			
Regla de la cadena	Explica la regla de la cadena para diferentes casos de funciones compuestas en varias variables, representando en forma algebraica y gráfica mediante diagramas de árbol. Enuncia, demuestra y representa el teorema de la función implícita.			
Derivadas direccionales y vector gradiente	Define derivada direccional y muestra una aplicación a problemas de meteorología. Define vector gradiente y presenta el significado analítico y geométrico. Enuncia y demuestra el teorema, si una función f es diferenciable en (x, y) entonces la derivada direccional de f en un punto (x, y) en la dirección del vector $u = (a, b)$ es $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b.$ Define, representa e ilustra el concepto de derivada direccional para una función de tres variables. Expone la interpretación geométrica de la maximización de la derivada direccional.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Thomson Learning	Cálculo multivariable	James Stewart	México	2002
Contenidos				
Temas	Descripción			
Aplicaciones y ejercicios	Los ejercicios comienzan motivando al estudiante a explicar los significados de los conceptos básicos de la diferencial; otros ejercicios prueban la comprensión conceptual por medio de gráficas y tablas. La dificultad de los ejercicios se da en forma gradual desde los más básicos hasta los más complejos relacionados con aplicaciones y demostraciones. Plantea ejercicios de aplicación de la diferencial para calcular y caracterizar los valores máximos y mínimos. Explica el método de multiplicadores de Lagrange en problemas de optimización y propone problemas para su aplicación.			

Tabla 6. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Thomson.

De la Tabla 6 se concluye que los elementos matemáticos que configuran el concepto de la diferencial de una función en varias variables en este libro son: funciones vectoriales, derivadas de funciones vectoriales, funciones de varias variables, derivadas parciales, derivadas direccionales, gradientes, diferenciales y aplicaciones.

El séptimo texto analizado es el de la editorial Pearson; su propósito, según se expresa en la presentación, es preparar a los estudiantes para integrarse a la comunidad científica. Para cumplir con este objetivo, los conceptos se exponen de manera formal, siguiendo la secuencia definición, teorema, corolario, con las respectivas demostraciones, acompañados de sistemas de representación textual, gráfica y numérica, a través de diagramas y figuras, algunas generadas en computador. Además, se proponen exploraciones con programas de álgebra simbólica, para que los estudiantes activen la intuición geométrica, mejoren la capacidad de pensar en el espacio bidimensional y tridimensional y puedan resolver problemas creativamente.

Cada capítulo incluye aplicaciones y ejemplos con datos reales de situaciones familiares para los estudiantes, y cita las fuentes correspondientes. Sobre la historia y evolución de los conceptos, se indica el origen de las ideas y se mencionan algunos conflictos que surgieron. Además, se enfatizan temas de gran interés y relevancia actual, y se destaca el cálculo como una creación asombrosa de la mente humana.

En cada sección se propone una serie de ejercicios con un nivel de dificultad que va incrementándose, apropiados para trabajar tanto en forma individual como en grupos; algunos requieren utilizar la calculadora, la calculadora gráfica y programas de álgebra simbólica. Al final de cada capítulo se encuentran tres secciones que resumen el contenido en formas diferentes: preguntas de repaso, ejercicios de práctica y ejercicios adicionales.

En el capítulo 11, titulado "Funciones de valores vectoriales y movimiento en el espacio", se expone el concepto de diferenciación de funciones en varias variables; en el capítulo 12 se abordan las funciones de múltiples variables y derivadas parciales. En el capítulo 11 se indica cómo utilizar el cálculo para estudiar las trayectorias, velocidades y aceleraciones de cuerpos en movimiento con aplicaciones a movimientos de proyectiles, planetas y satélites. En el capítulo 12 se expone el cálculo de funciones de más de una variable e incluye dominio, rango, curvas de nivel, límites, continuidad, derivación y diferenciación de estas funciones. Los sistemas de representación utilizados son el gráfico, analítico, numérico y algebraico.

En la Tabla 7 se resumen los temas que configuran el concepto de diferencial de una función en varias variables para los autores de la editorial Pearson.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Pearson</td><td>Cálculo varias variables</td><td>George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir</td><td>México</td><td>1999</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funciones de valores vectoriales y movimiento en el espacio</td><td colspan="3">Define funciones de valores vectoriales y expone aplicaciones para el estudio del movimiento en el espacio.
Presenta el modelo del movimiento de un proyectil, como aplicación de estas funciones y su diferencial.
Muestra la aplicación de las funciones vectoriales para calcular la longitud de arco y la velocidad de una partícula en movimiento, como el vector tangente unitario en cada punto de la curva que representa la trayectoria.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funciones de varias variables</td><td colspan="3">Define función en varias variables y caracteriza el dominio, recorrido, variables dependientes e independientes.
Define, representa e ilustra punto interior, interior, exterior, punto frontera.
Define y caracteriza funciones acotadas y no acotadas.
Representa funciones de dos variables por medio de gráficas, curvas de nivel y líneas de contorno, algunas de ellas realizadas en computadora.</td></tr>
</table>

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
Pearson	Cálculo varias variables	George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir	México	1999
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Representa superficies de nivel de funciones de tres variables.			
Derivadas parciales	Define y representa la derivada parcial en diferentes notaciones. Da la interpretación geométrica de la derivada parcial con ejemplos e ilustraciones. Define, representa y presenta ejemplos de funciones de más de dos variables. Establece la relación entre la continuidad y la existencia de derivadas parciales. Define derivadas parciales de segundo orden. Enuncia, demuestra y presenta ejemplos de los teoremas de Euler sobre la derivada mixta. Define derivadas parciales de orden superior.			
Diferenciabilidad, linealización y diferenciales	Define la diferencial de una función. Enuncia y demuestra el teorema del incremento para funciones de dos variables. Enuncia, demuestra y presenta ejemplos del corolario del teorema del incremento para funciones de dos variables. Enuncia y demuestra el teorema, si una función es diferenciable en un punto, entonces la función es continua en este punto. Presenta contraejemplo para mostrar que el recíproco no se cumple.			

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Pearson</td><td>Cálculo varias variables</td><td>George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir</td><td>México</td><td>1999</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Expone el procedimiento para linealizar una función de dos variables.
Analiza el error de una aproximación lineal estándar.
Relaciona una aplicación de los diferenciales para predecir el cambio de una función.
Define diferencial total.
Define funciones de más de dos variables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla de la cadena</td><td colspan="3">Establece y representa la regla de la cadena para calcular la diferencial de funciones compuestas de dos o más variables.
Establece y representa regla de la cadena para funciones definidas sobre superficies.
Define y muestra ejemplos sobre la diferenciación Implícita como una aplicación de la regla de la cadena.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas parciales con variables restringidas</td><td colspan="3">Calcula derivadas parciales con variables restringidas utilizando diagramas de flechas en su representación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas direccionales, vectores gradiente y planos tangentes</td><td colspan="3">Define derivadas direccionales en el plano.
Presenta una interpretación geométrica de la derivada direccional.
Define el vector gradiente.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Pearson	Cálculo varias variables	George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir	México	1999
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Establece propiedades de la derivada direccional. Calcula gradientes y tangentes a curvas de nivel. Define, representa y muestra ejemplos de funciones de tres variables. Aplica los conceptos de derivadas parciales para calcular las ecuaciones de planos tangentes y rectas normales. Define y encuentra el plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$. Establece reglas algebraicas para operar con gradientes.			
Fórmula de Taylor	De una manera formal, con sistemas de representación analítico y algebraico, utiliza la fórmula de Taylor para deducir la prueba de la segunda derivada para valores extremos locales, y la fórmula del error para la linealización de funciones de dos variables independientes. Aplica la fórmula de Taylor en estas deducciones, la cual conduce a una extensión de la fórmula que proporciona aproximaciones polinomiales de todos los órdenes para funciones de varias variables.			
Aplicaciones y ejercicios	Propone un conjunto amplio de ejercicios sobre: funciones de valores vectoriales y movimientos			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Pearson	Cálculo varias variables	George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir	México	1999
Contenidos				
Temas	Descripción			
	en el plano y el espacio, problemas de valor inicial para funciones de valores vectoriales, rectas tangentes a curvas suaves, movimientos sobre trayectorias circulares, curvatura; sistemas coordenados polares, cilíndricos, esféricos; encontrar dominio, rango, curvas y superficies de nivel de funciones en varias variables; calcular derivadas de primer y segundo orden, derivadas parciales mixtas, uso de la definición de derivada parcial, diferenciación implícita, aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales de Laplace y la ecuación de onda; hallar linealizaciones de funciones; estimar cotas superiores para errores en aproximaciones lineales; estimar la sensibilidad al cambio; calcular derivadas parciales con variables restringidas; calcular derivadas direccionales, vectores gradiente y planos tangentes; aplicar la diferenciación de funciones en varias variables para encontrar y caracterizar valores extremos y puntos de silla.			

Tabla 7. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Pearson

De la Tabla 7 se deduce que los elementos matemáticos que configuran el concepto diferencial de una función en varias variables para los autores del texto de la editorial Pearson son: derivadas parciales, linealizaciones, diferenciación implícita, derivadas parciales con variables restringidas, derivadas direccionales, gradientes, planos tangentes, rectas normales, aplicaciones para calcular extremos absolutos de funciones y fórmula de Taylor.

Finalmente, el texto de editorial Limusa, titulado *Cálculo de varias variables*, comprende definiciones básicas y la selección de problemas resueltos, que son ilustrativos para el desarrollo de los contenidos, además en cada sección incluye un conjunto de ejercicios.

El sistema de representación más utilizado es el algebraico y verbal, con algunas gráficas. El concepto de diferencial de una función en varias variables lo aborda en los tres primeros capítulos: derivación parcial, jacobianos, transformaciones, teorema de Taylor y aplicaciones. En la Tabla 8 se describen los temas que conforman el concepto de diferencial de una función en varias variables para este autor.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Limusa</td><td>Cálculo de varias variables</td><td>L. Marder</td><td>México</td><td>1974</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivada parcial</td><td colspan="3">Define vecindad, abierto, punto frontera, cerrado, región, función, dominio, representación gráfica, límite y continuidad.

Define y presenta ejemplos de derivada parcial como el límite del cociente incremental y expone estrategias para encontrar derivadas parciales de una función de dos variables.

Da una interpretación geométrica de la derivada parcial de una función f de dos variables en el punto (x_1, y_1), como la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y los planos $x = x_1$ o $y = y_1$.

Muestra una función cuyas derivadas parciales existen en un punto, sin embargo, la función no es continua en el punto.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Limusa</td><td>Cálculo de varias variables</td><td>L. Marder</td><td>México</td><td>1974</td></tr>
<tr><td colspan="5" align="center">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Encuentra nuevas funciones, como resultado de calcular derivadas parciales.

Define, representa y muestra ejemplos para calcular segundas derivadas parciales de una función de dos variables.

Formula y demuestra la regla de la cadena para calcular la derivada de funciones compuestas.

Define e interpreta geométricamente el incremento de una función en un punto,
$\Delta f(x_1, y_1) = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)$,
como el cambio en la altura de la superficie $S: z = f(x, y)$ referidas a los ejes cartesianos rectangulares xyz en el punto (x, y) cuando este se aproxima a (x_1, y_1) y la diferencial df en (x_1, y_1) como el cambio en la altura del plano tangente a S en (x_1, y_1) cuando (x, y) se aproxima a (x_1, y_1).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jacobianos y transformaciones</td><td colspan="3">Presenta aplicaciones de las derivadas parciales a funciones implícitas y jacobianos.

Establece la dependencia funcional.

Determina las propiedades de los jacobianos, transformaciones, mapeos, imagen de una transformación, transformación inversa, aplicación a coordenadas curvilíneas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Limusa</td><td>Cálculo de varias variables</td><td>L. Marder</td><td>México</td><td>1974</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Representa en forma algebraica, gráfica y verbal las derivadas y diferenciales de funciones en varias variables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">El teorema de Taylor y sus aplicaciones</td><td colspan="3">Enuncia y demuestra el teorema de Taylor en una variable y el teorema del valor medio como un corolario.
Realiza un análisis del residuo, forma de Lagrange y de Cauchy como una aplicación de la diferencial.
Enuncia y demuestra el teorema de Taylor en dos variables. Aplica el teorema de Taylor para encontrar extremos relativos y absolutos de una función. Utiliza la matriz hessiana para caracterizar extremos relativos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicios y aplicaciones</td><td colspan="3">Presenta una sección de ejercicios para calcular derivadas parciales y su aplicación en las ecuaciones diferenciales parciales, diferenciales exactas, valor aproximado de valores de funciones en dos variables en puntos específicos.
Propone calcular derivadas de funciones en dos variables definidas implícitamente.
Calcular imágenes de regiones bajo transformaciones.
Expresar el desarrollo de una función en serie de Taylor.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Limusa	Cálculo de varias variables	L. Marder	México	1974
Contenidos				
Temas		Descripción		
		Encontrar valores extremos de funciones y caracterizarlos.		

Tabla 8. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Limusa.

Para el autor del libro de la editorial Limusa, según la Tabla 8, los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial de una función en varias variables son: derivadas parciales, el teorema de Taylor, regla de la cadena, la diferencial, aplicaciones a transformaciones y jacobianos, máximos, mínimos y puntos de silla de una función en dos variables.

En la Tabla 9 se presenta un resumen de los temas y subtemas, los elementos matemáticos, que configuran la estructura del concepto de diferencial y que aparecieron con mayor frecuencia en los textos analizados.

Elementos matemáticos	**Descomposición**
Derivada de una función	Definición de la derivada de una función en varias variables definida sobre un abierto A de $\mathbb{R}^n$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, n≥ m ≥1, en un punto a de A en la dirección del vector y de $\mathbb{R}^n$, como la existencia del límite la siguiente expresión y notada como $f'(a;y)$, $$f'(a;y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hy)-f(a)}{h}.$$ Derivada de una función cuando el vector es nulo, derivada de una función constante, derivada de una

Elementos matemáticos	**Descomposición**
	transformación lineal, derivada de la norma euclídea de un vector al cuadrado en cualquier punto. Relación entre la derivada de una función real de variable real y el comportamiento de una función f real de variable vectorial sobre una recta que pasa por los puntos a y $a + y$.
Derivada direccional	Definición de la derivada direccional, como la derivada de la función f en el punto a en la dirección del vector y cuando el vector dirección es unitario, $f'(a; y)$ con $\|y\|$=1. Interpretación geométrica de la derivada direccional. Derivadas direccionales y continuidad, la derivabilidad no implica continuidad para funciones en varias variables, ejemplo de una función real definida sobre $\mathbb{R}^2$ que posee derivada direccional en 0 en cualquier dirección pero no es continua en 0.
Derivada parcial	Definición de derivada parcial de una función real de una variable vectorial en un punto a, como la derivada direccional cuando el vector dirección es uno de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $f'(a; y)$ con $y = e_k$, (k −ésimo vector coordenado). Notación de derivada parcial. Interpretación geométrica. Interpretación de derivada parcial de funciones representadas en forma tabular. Reglas algebraicas para calcular derivadas parciales. Derivadas parciales de orden superior. Teorema de Clariaut para igualdad de las derivadas parciales de segundo orden mixtas. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales. Definición, si la función f, admite derivadas parciales respecto a todas la variables en un punto a, se dice que es derivable en dicho punto.

Elementos matemáticos	**Descomposición**
Diferencial de una función	Definición de diferencial de una función: sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, n≥ 1, m ≥1, f es diferenciable en un punto a, si existe una transformación lineal, $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y una función $r: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que $f(a+v) = f(a) + T_a(v) + r(v)$, donde $$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$$ La transformación lineal T_a se llama diferencial de f en a. Interpretación analítica y geométrica de la existencia de la diferencial. Aplicación del concepto de diferencial para demostrar que la continuidad, la derivabilidad y la linealidad de la derivada no implican la diferenciabilidad, con ejemplos ilustrativos de funciones como las siguientes, que no son diferenciables en (0,0), según las razones indirectas que se enuncian: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, posee derivables parciales en (0,0), no posee derivadas direccionales según todo vector y no es continua en (0,0); $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $g(0,0) = 0$, es continua en (0,0), posee derivadas direccionales según todo vector en (0,0) y esta derivada no depende linealmente del vector dirección; $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $h(0,0) = 0$, posee derivada direccional en (0,0) según todo vector dirección y esta derivada es lineal respecto al vector dirección, sin embargo, no es continua en (0,0); $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, $\varphi(0,0) = 0$, que es continua en todo el plano, admite en todos los puntos del plano derivadas direccionales que

Elementos matemáticos	Descomposición
	dependen linealmente del vector dirección, pero no satisface la regla de la cadena, porque al considerar el camino $\lambda(t) = \left(t, t^2 \sin\frac{1}{t}\right)$, la función compuesta $\varphi^\circ\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no es derivable en $t = 0$.
Gradiente de un campo escalar	Definición del gradiente de una función como $df = \nabla f$ $$\begin{aligned} df: \mathbb{R}^n &\to (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$ tal que, $$\begin{aligned} df(a): \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto df(a)y = \big(D_1 f(a), \cdots, D_n f(a)\big).\ y \end{aligned}$$ Relación geométrica de la derivada direccional con el vector gradiente. Reglas algebraicas para gradientes. Aplicaciones geométricas. Conjuntos de nivel. Planos tangentes, recta normal.
Teorema: diferenciabilidad implica derivabilidad	Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un abierto, $f: A \to \mathbb{R}^m$, a un punto interior de A, si una función f es diferenciable en A con diferencial T_a, entonces existe la derivada $f'(a; y)$, para todo vector y de $\mathbb{R}^n$ y $T_a(y) = f'(a; y)$. Según sean los valores de n y m, si f es diferenciable en a, la diferencial $T_a = Df(a)$ viene dada en forma matricial respecto a las bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ por la matriz jacobiana cuyas m filas son la n derivadas parciales de cada una de las m componentes f_j de f, esto es, $$T_a = Df(a) = \big(D_i f_j(a)\big)_{i=1\cdots n; j=1\cdots m} = \frac{\partial(f_1 \cdots f_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}(a).$$ La matriz jacobiana para los tipos de funciones es: Si f es una función real de variable real, $$T_a(y) = Df(a)(y) = f'(a)y.$$ Sí f es una función vectorial de una variable real,

Elementos matemáticos	**Descomposición**
	$T_a(y) = Df(a)(y) = y(f_1{}'(a), \cdots, f_m{}'(a))$. Si f es un campo escalar, $T_a(y) = Df(a)(y) = \nabla f(a) \cdot y$. Si f es una función vectorial de una variable vectorial, campo vectorial, la diferencial de f en a, $T_a(y) = Df(a)(y) = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}(a) \cdot y = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot e_k \cdot y$
Teorema: diferenciabilidad implica continuidad	Si f es una función en varias variables diferenciable en a, entonces f es continua en a.
Teorema: condición suficiente de diferenciabilidad	Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \to \mathbb{R}^m$, y a un punto interior de A. Si las derivadas parciales $D_j f_i (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)$ existen en una vecindad de A y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a con diferencial $Df(a)$ representada por la matriz jacobiana de orden $m \times n$ evaluada en a.
Fórmula de Taylor	Funciones de clase C^k. Norma de un diferencial. Aproximar localmente una función definida sobre un abierto A de $\mathbb{R}^n$ por un polinomio. Polinomio de Taylor de orden k. Resto de Taylor de orden k. Diferencial de orden m.

Tabla 9. Elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial según los libros de texto analizados

Del análisis anterior en la Tabla 10, se presentan los elementos matemáticos identificados y se registra la presencia o ausencia del elemento en cada texto según la editorial.

Elementos matemáticos	Editoriales							
	Reverté	John Wiley &	Projeto Euclides	Paraninfo	Harla	Thompson Learning	Addison Wesley	Limusa
Derivada de una función	X			X				
Derivada direccional	X	X	X	X	X	X	X	X
Derivada parcial	X	X	X	X	X	X	X	X
Diferencial de una función	X	X	X	X	X	X	X	X
Gradiente de un campo escalar	X	X	X	X	X	X	X	X
Teorema. Diferenciabilidad implica derivabilidad	X	X	X	X	X	X	X	X
Teorema. Condición suficiente de diferenciabilidad	X	X	X	X	X	X	X	X
Fórmula de Taylor	X	X	X	X				X

Tabla 10. Resumen de los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial y que aparecen reiteradamente en los libros de texto analizados

Esquema del concepto de diferencial

El análisis de investigaciones relacionadas con el concepto de diferencial, incluidas en el estado de la cuestión de la investigación, en el análisis de los libros de texto, en el desarrollo histórico del concepto, en el estudio de los conceptos relacionados y en la experiencia como docentes en el área de análisis matemático, orientó la inclusión de los siguientes aspectos necesarios para la comprensión del concepto de la diferencial de una función en varias variables: los elementos matemáticos que constituyen el concepto de diferencial, las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos y los sistemas de representación. A continuación se describe cada uno de estos aspectos.

Elementos matemáticos

Los elementos matemáticos de la diferencial de una función en varias variables, como adaptación de la definición de "elemento" de Piaget, es "el producto de una segregación o disociación de las partes y de sus propiedades"[97]. En este trabajo, al igual que en Aldana 2011[98], no se referencia la colección de acciones, procesos u objetos, que son formas de conocer los elementos matemáticos del concepto, sino la colección de elementos matemáticos que lo configuran.

Al respecto, Beker afirma:

> […] que en el propósito de resolver una tarea, las personas coordinan y sintetizan las acciones, los procesos y los objetos para formar estructuras, es decir, coordinan los elementos que constituyen el concepto matemático. Es por esto que una etapa previa en la investigación consistió en determinar cuáles son los elementos matemáticos y cómo se relacionan en términos de operaciones cognitivas, llamadas relaciones u operaciones lógicas entre los elementos matemáticos, para caracterizar el desarrollo del esquema[99].

Con estos planteamientos podemos analizar el desarrollo del pensamiento de un estudiante mediante el uso de los elementos matemáticos dados en distintos sistemas de representación y en su capacidad para establecer las relaciones lógicas entre estos elementos en la resolución de un problema.

Cuando se mencionan los elementos matemáticos vinculados al concepto, se hace referencia a las nociones matemáticas que lo configuran, y cuando se nombran los sistemas de representación gráfico *G*, algebraico *A* y analítico *AN*, se refiere a las formas en que se pueden representar dichas nociones. Estas representaciones resultaron del análisis teórico y de los libros de texto, además son las

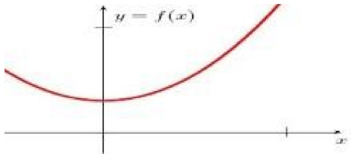
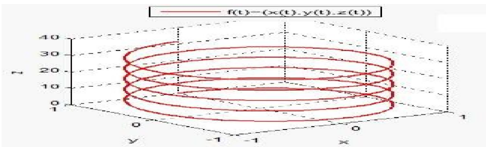
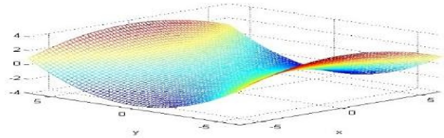
---

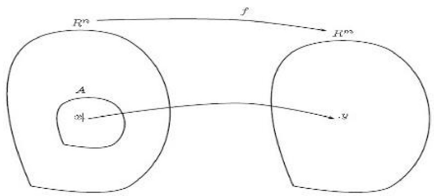
97 Jean Piaget y Rolando García, *Psicogénesis e historia de la ciencia,* Madrid: Siglo Veintiuno Editores, 1983, 8.
98 Eliécer Aldana, *Comprensión de la integral…* 100-101.
99 Bernadette Baker, Laurel Cooley y María Trigueros, "A Calculus Graphing Schema", Journal for Research in Mathematics Education, 31, 2000: 4.

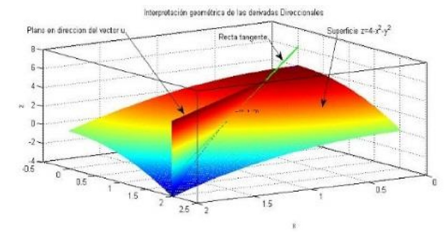
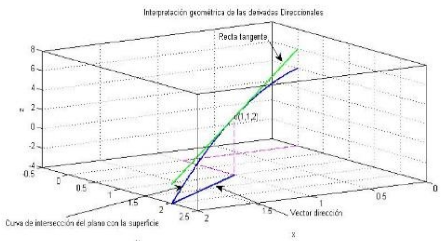
que utilizan y coordinan los estudiantes con frecuencia al resolver las tareas.

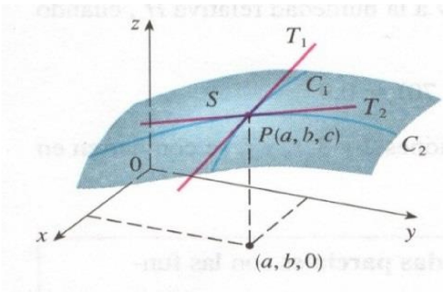
En la Tabla 11 se presenta el resumen de los elementos matemáticos del concepto de diferencial de una función en varias variables, los sistemas de representación gráfico, tabular, algebraico y analítico, como resultado del análisis teórico anterior y es una adaptación del trabajo de Aldana 2011[100].

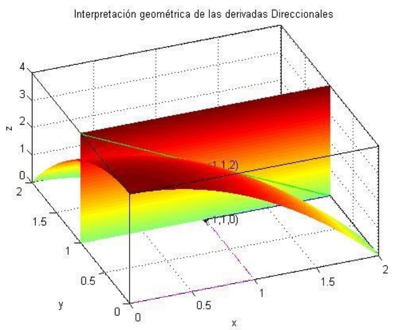
[100] Eliécer Aldana, *Comprensión de la integral…* 100-103.

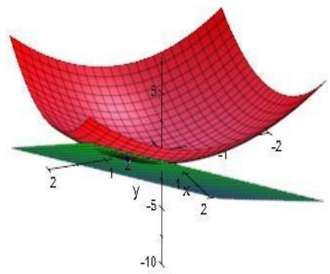
Elementos matemáticos	**Sistemas de representación**		
	Gráfico	**Algebraico**	**Analítico**
Función de varias variables (*FVV*)	 Figura 4. Función real de variable real, $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ Fuente: el autor  Figura 5. Función vectorial de variable real, $\boldsymbol{f(t) = (cost, sent)}$: Fuente: el autor  Figura 6. Campo Escalar, $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1}$: Fuente: el autor	Sea f una función cuyo dominio es el abierto A, subconjunto del espacio $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ y recorrido en el espacio $m-$dimensional, $\mathbb{R}^m$, según la expresión (1). $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $x \mapsto y = f(x)$ **(1)** La función f, según sean los valores de n y m, se denomina: Función real de una variable real, (*FR*) si $n = 1$ y $m = 1$. Función vectorial de una variable real, (*FVR*), si $n = 1$ y $m > 1$. Función real de una variable vectorial, o, campo escalar, (*CE*) si $n > 1$ y $m = 1$. Función vectorial de una variable vectorial, o, campo vectorial, (*CV*), si $n > 1$ y $m > 1$.	Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, a un punto interior de A, la aplicación f de A en $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, que a cada elemento a de A le asigna un único elemento en $\mathbb{R}^m$ se denomina *función en varias variables*.

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	**Algebraico**	**Analítico**
	 Figura 7. Campo vectorial, $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$: Fuente: el autor		
Derivada direccional (*DD*) Derivada Parcial (*DP*)	La derivada direccional del campo escalar, $n = 2$, $m = 1$ en (1), representa la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección del plano en dirección del vector u que pasa por el punto a y la gráfica de la superficie.	Sea f una función definida sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$, a un punto interior de A y u un elemento de $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Se dice que f admite derivada direccional en el punto a en la dirección del vector u si existe el límite dado en la ecuación (2), $$f'(a;u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h}. \quad \textbf{(2)}$$ Si el vector dirección es uno de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $u = e_i, i = 1, \cdots, n$, la	La expresión (2) significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\sigma(\varepsilon) > 0$, tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que satisface $0 < \lvert h \rvert < \sigma(\varepsilon)$, se tiene que, $$\left\lVert \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} - f'(a;u) \right\rVert < \varepsilon.$$ Cuando u es un vector unitario, $f'(a;u)$, se denomina *derivada*

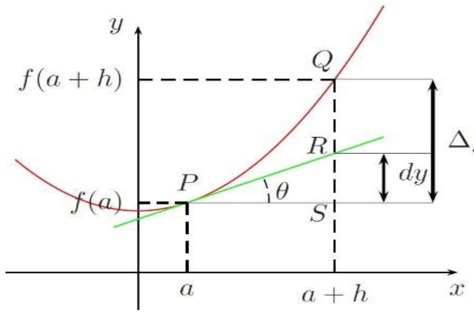
Elementos matemáticos	**Sistemas de representación**		
	Gráfico	**Algebraico**	**Analítico**
	 Figura 8. Plano en dirección $\boldsymbol{u}$, corta la superficie $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Fuente: el autor  Figura 9. Tangente a la curva de intersección del plano en dirección $\boldsymbol{u}$ con la superficie $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.	derivada se denomina derivada parcial de la función f en el punto a respecto a la i −ésima variable x_i, representada en la ecuación (3), $$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}. \quad \textbf{(3)}$$ Otras notaciones de la derivada parcial de f respecto a x_i, son: $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f.$$	*dirección al de f en a en la dirección de u.* Si $u = e_i$, la derivada direccional $f'(a; e_i)$ se denomina la *derivada parcial de f en a respecto a x_i* y se representa por (3). La derivada direccional da información del comportamiento de la gráfica función en el conjunto de dimensión uno, $\{a + tu, t \in \mathbb{R}\}$.

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
Función derivable en un punto (*DFVV*)	Las derivadas parciales $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ se interpretan geométricamente como la pendiente de las rectas tangentes en $P(a,b,c)$ a las trazas C_1 y C_2 de los planos $y=b$ y $x=a$, ver Figura 10 y Figura 11.  Figura 10. Tangentes a las curvas $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{C_2}$: Fuente: el autor	Una FVV f, es derivable en a, si existe la derivada $Df(a)$ definida como: Si f es una *FR*, $Df(a)=f'(a)$ y está dada por (4): $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$ **(4)** Si f es una *FVR*, $Df(a)=f'(a)$, está dada por (5): $f'(a)=\left(f_1'(a),\cdots,f_m'(a)\right).$ **(5)** Si f es un *CE*, $Df(a)=f'(a)$, está expresada por (6) : $\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\right).$ **(6)** Si f es una CV, $Df(a)=J(a)=f'(a)$, dada en (7):	Una FVV f, es *derivable* en un punto a interior de su domino, si f admite derivadas parciales respecto a todas las n variables en el punto a.

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
	 Figura 11. Plano $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$, corta la superficie $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$: Fuente: el autor	$$f'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \textbf{(7)}$$ Se nota también como, $$f'(a) = \frac{\partial(f_1 \cdots f_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}(a)$$	
Diferencial de una función en varias variables (*DIFVV*)	Un campo escalar $\boldsymbol{f}$ definido en un abierto $\boldsymbol{A}$ de $\mathbb{R}^{2}$, es diferenciable en un punto $\boldsymbol{a}$, si en vecindades del punto, el plano tangente a $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ aproxima bien a la gráfica de $\boldsymbol{f}$, como se puede visualizar en la Figura 12	Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m \geq 1, n \geq 1$ una FVV, f es diferenciable en un punto a de A, si existe una transformación lineal, $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $m \geq 1, n \geq 1$, y una función , $E_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida para $v \in \mathbb{R}^n$, tal que si $a + v \in A$, entonces, $$E(a,v) = \begin{cases} \frac{f(a+v) - f(a) - T_a(v)}{\lVert v \rVert}, & v \neq 0 \\ 0, & v = 0 \end{cases} \quad \textbf{(8)}$$	Sea f es una FVV, definida de un conjunto abierto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, a punto interior de A y v un vector de $\mathbb{R}^n$. La función f es diferenciable en a, si y solo si, la función definida en (8), es

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
	 Figura 12. Plano tangente a una superficie $\boldsymbol{z = f(x, y)}$. Fuente: el autor	De manera que, $$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a, v), \quad \textbf{(9)}$$ con la condición que, $\lim_{v \to 0} E(a, v) = 0$. Otra forma equivalente para que f sea diferenciable en a, es que si $v = x - a$, entonces existe la transformación lineal $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que, $$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T_a(x-a)\|_m}{\|v\|_n} = 0 \quad \textbf{(10)}$$	continua en 0. En este caso la *transformación lineal* T_a se llama *diferencial total* o la diferencial de f en a, *DIFVV*. La ecuación (9) es la fórmula de Taylor de primer orden para $f(a+v)$, es válida para todo v con $a + v \in A$ y es la aproximación lineal de $f(a+v) - f(a)$. El error cometido en la aproximación es $\|v\|E(a, v)$, que es de orden más pequeño de v, significa $\lim_{v \to 0} E(a, v) \to 0$. Si f es diferenciable en a con diferencial T_a, entonces existe $f'(a; v)$

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
			para todo $v \in \mathbb{R}^n$, y se tiene, $T_a(v) = f'(a;v) = Df(a)v$.
Diferencial de una función real de variable real (*DIFR*)	En la Figura 13, $QS = f(a+h) - f(a) = \Delta f(a)$, $RS = PS \cdot \tan\theta = h \cdot f'(a) = dy$. Al variar x una cantidad h, las variables $\Delta y = QS$ representa el cambio de altura de la curva $y = f(x)$ y $dy = RS$ representa el cambio de altura de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, con ecuación $y = f(a) + f'(a)(h)$. Si h es una variable independiente, entonces la diferencial de f en a se define como $dy = f'(a)h$. Frecuentemente se nota $h = dx$.	Una función f, real de una variable real, es diferenciable en un punto a de A, si existe una transformación lineal, $T_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h \mapsto f'(a)h,$ **(11)** y una función real de variable real, $E_a(h) = E(a,h)$, que depende de a y de h, definida como, $E(a,h) = \begin{cases} \dfrac{\Delta f(a) - f'(a)h}{h}, & si\ h \neq 0 \\ 0, & si\ h = 0. \end{cases}$ **(12)** Donde $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$, de manera que, $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \|h\|E(a,h)$ **(13)**	La función f real de variable *FR*, es diferenciable en el punto interior a de A, si existe la función lineal dada por (11), tal que, $\lim_{x \to a} \dfrac{\|\Delta f(a) - T_a(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0,$ con $\Delta f(a) = f(x+a) - f(a)$. El límite anterior significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que satisface que si, $x \in A,\ \|x-a\| < \delta,$ entonces,

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
	 Figura 13. Interpretación geométrica de la diferencial: Fuente: el autor	y $\lim_{h\to 0}\frac{\lvert h\rvert E(a,h)}{\lvert h\rvert}=0.$ **(14)** La fórmula de Taylor de primer orden (13), aproxima $f(a+h)-f(a)$ por medio de $f'(a)h$ y el error cometido es $\lvert h\rvert E(a,h)$, donde $E(a,h)$ tiende más rápido a 0 que h, es un infinitésimo de orden superior a h, como se expresa en (14).	$\lvert\Delta f(a)-T_a(x-a)\rvert < \varepsilon\lvert x-a\rvert.$ En este caso la diferencial de f en a es $T_a = f'(a)$ y verifica que $T_a(x-a)=f'(a)(x-a)$. f es diferenciable en el conjunto A, si es diferenciable en cada elemento del conjunto A.
Diferencial de una función vectorial de variable real (*DIFVR*)	Si $\boldsymbol{f}$ es una *FVR*, que representa una "Curva" en el espacio $\boldsymbol{m}$ −dimensional, el vector $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$, es llamado el "vector tangente" a la curva $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{a}$, Figura 14.	Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, para $m > 1$, la *FVR*, $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ $x \mapsto f(x) = \big(f_1(x),\cdots,f_m(x)\big).$ f es diferenciable en a si existe una transformación lineal, $T_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $v \mapsto T_a(v),$ **(15)**	Una *FVR* es diferenciable en un punto interior a de A, si y solamente si cada una de las *FR*, $f_1,\cdots,f_{,m}$, es diferenciable en a. Cuando f es una *FVR* diferenciable en a la transformación lineal (15) es $f'(a)(v)$, y

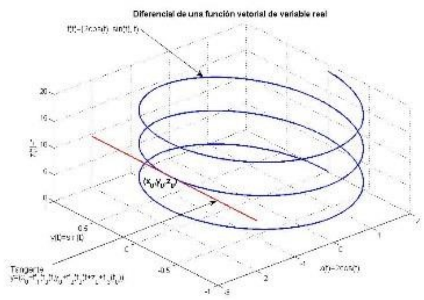
<table>
<tr><th rowspan="2">Elementos matemáticos</th><th colspan="3">Sistemas de representación</th></tr>
<tr><th>Gráfico</th><th>Algebraico</th><th>Analítico</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>

Figura 14. Representación de la diferencial de una función vectorial de variable real.
Fuente: el autor</td>
<td>y una FVR definida como,
$$E(a,v)=\begin{cases}\dfrac{\Delta f(a)-T_a(v)}{|v|}, & si\ v\neq 0\\ 0, & si\ v=0.\end{cases}$$
Con $\Delta f(a)=f(a+v)-f(a)$, tal que,
$$f(a+v)=f(a)+f'(a)v+|h|E(a,v) \quad \textbf{(16)}$$
y para $a+v\in A$, se tiene que,
$$\lim_{h\to 0}\frac{|v|E(a,v)}{|v|}=0.$$
La ecuación (16), es válida para $a+v\in A$ y proporciona una aproximación lineal $T_a(v)$, para la diferencia $f(a+v)-f(a)$. El error en la aproximación es $|v|E(a,v)$ que es de orden menor que $|v|$.
T_a es la diferencial de f en a, luego,
$$T_a(v)=Df(a)(v)=vf'(a).$$</td>
<td>representa el producto del escalar v por el vector $f'(a)$ y una aproximación lineal de la función f en vecindades del punto a.</td>
</tr>
</table>

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
Diferencial de un campo escalar (*DICE*)	En la Figura 15, la diferencial dz representa el cambio de altura del plano tangente, mientras que Δz representa el cambio de altura de la superficie $z = f(x,y)$ cuando (x,y) cambia de (a,b) a $(a+\Delta x, b+\Delta y)$. Que f sea diferenciable en (a,b) significa geométricamente que el plano tangente aproxima bien a la gráfica de f cerca del punto de tangencia.	Sea f un campo escalar, *CE*, a un punto interior de A, y $B(a;r)$ una n −bola contenida en A; v un vector tal que, $\lVert v \rVert < r$ de modo que, $a + v \in B(a,r)$. Se afirma que f es diferenciable en a, si existe una transformación lineal, $$\begin{aligned} T_a &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ v &\mapsto T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v, \end{aligned} \quad \textbf{(17)}$$ y una función, $E_a: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida como: $$E(a,v) = \begin{cases} \dfrac{\Delta f(a) - T_a(v)}{\lVert v \rVert}, & si\ v \neq 0 \\ 0, & si\ v = 0. \end{cases} \quad \textbf{(18)}$$ Con $\Delta f(a) = f(a+v) - f(a)$, tal que, $$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \lVert v \rVert E(a,v), \quad \textbf{(19)}$$ y para $\lVert v \rVert < r$ se tiene que,	Para una función de dos variables, $z = f(x,y)$, se definen los *diferenciales* dx y dy como variables independientes, es decir pueden tomar cualquiera de los valores dados. Entonces la *diferencial* dz, que también se llama *diferencial total* está definido por, $$dz = f_x dx + f_y dy \quad \textbf{(21)}$$ Si se toma $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$, en la ecuación (21), la diferencial de z es: $$\begin{aligned} dz &= f_x(a,b)(x-a) \\ &+ f_y(a,b)(y-b) \end{aligned}$$

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
		$\lim_{v\to 0}\frac{\|v\|E(a,v)}{\|v\|}=0,$ **(20)** T_a es la diferencial de f en a, luego, $T_a(v)=Df(a)(v)=\nabla f(a)\cdot v.$	En la notación de diferenciales, $f(x,y)\approx f(a,b)+dz.$

Elementos matemáticos	Sistemas de representación	
	Algebraico	Analítico
Diferencial de un campo vectorial (*DICV*)	Sea el CV, $f\colon A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, tal que, $x=(x_1,\cdots,x_n)\mapsto y=f(x).$ La imagen $y=f(x)$ se representa por el sistema de m funciones con n argumentos, $y_1=f_1(x_1,\cdots,x_n)$ $\vdots$ $y_m=f_m(x_1,\cdots,x_n)$ f es diferenciable en un punto interior a de A, si existe una transformación lineal,	Otra forma equivalente para f sea diferenciable en a es que se cumpla que, $\lim_{x\to a}\frac{\|f(x)-f(a)-T_a(x-a)\|_m}{\|x-a\|_n}=0.$ Si f es diferenciable en a, la transformación lineal, a cada vector u le asigna el vector $w=T_a(u)$ y se representa por el sistema, $w_1=D_1f_1(a)u_1+\cdots+D_nf_1(a)u_n$ $\vdots$ $w_m=D_1f_m(a)u_1+\cdots+D_nf_m(a)u_n.$

Elementos matemáticos	Sistemas de representación	
	Algebraico	Analítico
	$$T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$ $$v \mapsto T_a(v) = \mathrm{J}(a) \cdot v, \quad \textbf{(22)}$$ tal que, $$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a,v), \quad \textbf{(23)}$$ donde, $E(a,v) \to 0$ cuando $v \to 0$. La fórmula de Taylor de primer orden (23) es válida para todo v tal que $\|v\| < r$, para algún $r > 0$. El término $E(a,v)$ es un vector de $\mathbb{R}^m$. La transformación T_a se llama diferencial total o simplemente diferencial de f en a.	Luego, en forma matricial en las bases estándar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ se expresa como, $$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$ En forma compacta, $w = T_a(u) = Df(a)(u) = J(a)u$ donde $J(a)$ es la matriz jacobiana evaluada en a.
Teoremas fundamentales de diferenciación (*TFDI*)	*Teorema 1*. Si una *FVV*, f, diferenciable en a, entonces es continua en a. *Teorema 2*. Si f es una *FVV* diferenciable en a, con diferencial T_a y si $u \in \mathbb{R}^n$, entonces existe la derivada direccional en de f a, en cualquier dirección u, $$D_u f(a) = f'(a;u) = Df(a)(u) = T_a(u).$$	*Teorema 1.* Diferenciabilidad, implica continuidad, *TDICO*. *Teorema 2.* Diferenciabilidad, implica la existencia de las derivadas direccionales, *TDIDD*.

Elementos matemáticos	Sistemas de representación	
	Algebraico	Analítico
	Corolario 1. Si f es un *CE* diferenciable en a con $Df(a) = T_a$, entonces existen cada una de las derivadas parciales en dicho punto y $T_a(u) = f'(a;u) = \nabla f(a) \cdot u$. *Teorema 3*. Sea f una *FVV* y a un punto interior de A. Si las derivadas parciales, $D_j f_i$, $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$, existen en una vecindad de a y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a, además $Df(a)$ está representado por la matriz jacobiana. *Teorema* 4. Un *CV* es diferenciable en a, si y solo si cada uno de los *CE*, $f_j: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, m$, son diferenciables en a.	*Corolario 1*. La diferenciabilidad de un campo escalar, implica la existencia de las derivadas parciales, *CDIDP*. *Teorema 3*. Condición suficiente de diferenciabilidad *TCSDI*. *Teorema 4*. Diferenciabilidad de un campo vectorial, implica la diferenciabilidad de los m campos que integran el campo escalar, *TDICVDICE*. *Corolario 2*. Función de clase C^1, implica ser diferenciable, *CC1DI*. Las relaciones que se establecen en estos teoremas, se presentan en la Figura 16

Tabla 11. Elementos matemáticos y sistemas de representación del concepto de diferencial.

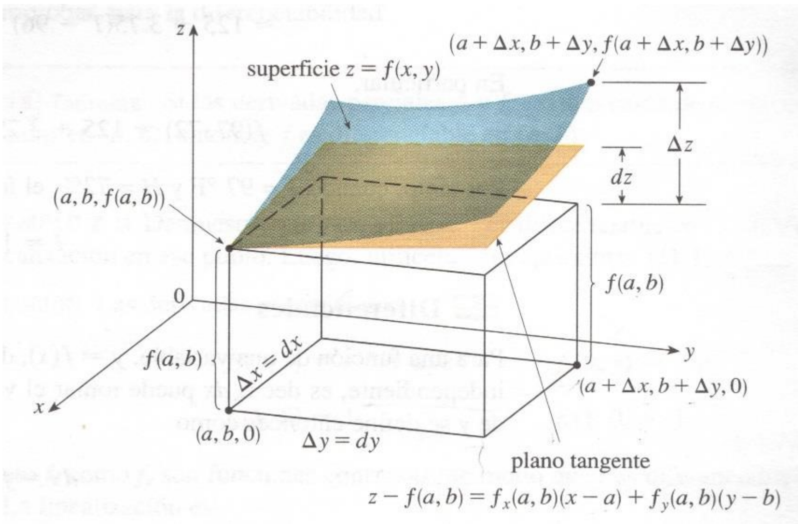


Figura 15. Interpretación geométrica de la diferencial de un campo escalar en tres dimensiones. Fuente: Stewart, 2002, p. 914.

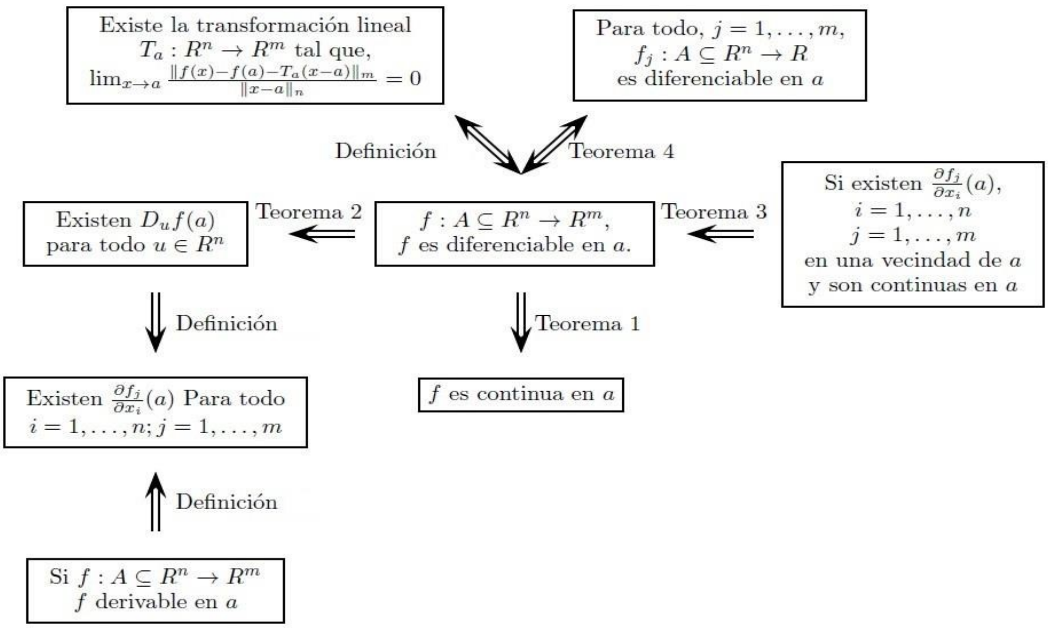


Figura 16. Relaciones de la diferenciabilidad y propiedades locales

Relaciones lógicas

Las relaciones lógicas que se establecieron entre los elementos matemáticos permiten al estudiante hacer inferencias y son, entre otras, las que a continuación se analizan.

Conjunción lógica, $p \wedge q$. La conjunción lógica ($\wedge$) entre dos proposiciones es un conector lógico cuyo valor de verdad resulta cierto solo si ambas proposiciones son ciertas y falso de cualquier otra forma. En el lenguaje formal, si las declaraciones representan proposiciones en lógica proposicional con contenido de verdad o falsedad, entonces una conjunción lógica es cierta solo si ambas declaraciones son ciertas.

Ejemplo. La diferencial es un operador lineal si cumple que para todo par de vectores u, v en $\mathbb{R}^n$, para todo α en $\mathbb{R}$,

$$Df(a)(u+v) = Df(a)(u) + Df(a)(v), \text{ y}$$
$$Df(a)(\alpha u) = \alpha Df(a)(u).$$

Condicional, $p \rightarrow q$. El condicional es una función que toma dos valores de verdad (por lo general, los valores de proposiciones, p el antecedente y q el consecuente), devuelve falso cuando los valores de verdad de p es verdadero y el de q es falso y devuelve verdadero en cualquier otro caso.

Ejemplo. Si una función en varias variables es diferenciable en un punto a, *entonces* es continua en a.

Ejemplo. Si una función en varias variables es diferenciable en un punto a, *entonces* es derivable en a.

Contrarrecíproca, $\neg q \rightarrow \neg p$. Consiste en la implicación de la negación de un consecuente con la negación de su antecedente. Formalmente, puede definirse que la condicional es lógicamente equivalente a la implicación de la negación del consecuente con la negación del antecedente (sus tablas de verdad son idénticas), formalmente se expresan por la fórmula lógica,

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p).$$

Ejemplo. Si una función en varias variables no es continua en a, *entonces* no es diferenciable en a.

Negación del condicional, $\neg(p \to q)$. Consiste en la negación lógica de una implicación, que es lógicamente equivalente a conjunción lógica del antecedente y la negación del consecuente. Formalmente, puede definirse por la fórmula lógica,

$$\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

Ejemplo. No es cierto que la continuidad implique la diferenciabilidad, ya que puede haber funciones continuas y no diferenciables.

Bicondicional, $p \leftrightarrow q$. El bicondicional es una función que toma dos valores de verdad (los valores de proposiciones p y q) y devuelve verdadero cuando p y q tienen el mismo valor de verdad, y devuelve falso en cualquier otro caso. Además, el bicondicional es lógicamente equivalente al bicondicional de la negación de las proposiciones,

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q.$$

Ejemplo. El campo escalar f es diferenciable en a *si y solo si*, el operador $Df(a)$ es lineal y, $\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v)-f(a)-Df(a)(v)}{\|v\|} = 0.$

El operador $Df(a)$ no es lineal, o, $\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v)-f(a)-Df(a)(v)}{\|v\|} \neq 0,$ *si y solo si,* el campo escalar f no es diferenciable en a.

Sistemas de representación

En matemáticas, los sistemas de representación son un lenguaje que se expresa por notaciones gráficas, algebraicas y analíticas, o también por manifestaciones verbales, por medio de las cuales se describen y definen los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades[101]. Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación, que los estudiantes utilizan para lograr la comprensión del concepto de diferencial de una función en varias variables.

Descomposición genética del concepto de la diferencial

Como resultado del análisis del concepto, el ciclo ACE y siguiendo la metodología propuesta por la teoría APOE, se describe a continuación

[101] Eliécer Aldana, *Comprensión de la integral…* 111.

la ruta hipotética, en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas, así como los mecanismos de construcción que un estudiante debe seguir para la comprensión del concepto de diferencial, como una versión refinada del modelo que se propuso en un comienzo de la investigación. Enseguida se expone la enumeración de los párrafos para hacer las respectivas referencias.

A. Construcciones previas

El concepto de función en varias variables FVV, como objeto representado por la ecuación (24), porque al desencapsularlo se tienen los siguientes elementos como procesos, según sean los valores de n y m:

1. *Función real de variable real*, FR, para $n = 1$ y $m = 1$, tal que a cada número real del dominio asigna un único número real.
2. *Función vectorial de una variable real*, FVR, para $n = 1$ y $m > 1$, tal que a cada real del dominio le asigna un único vector en $\mathbb{R}^m$.
3. Función real de una variable vectorial o *campo escalar*, CE, para $n > 1$ y $m = 1$, tal que a cada vector de un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, le asigna uno y solo un real.
4. Función vectorial de una variable vectorial o *campo vectorial*, CV para $n > 1$ y $m > 1$, tal que a cada vector en $\mathbb{R}^n$ le asigna un único vector en $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\to y = f(x). \end{aligned} \tag{24}$$

5. El espacio vectorial, $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, sobre el campo $\mathbb{R}$, como esquema, generado por la coordinación de los esquemas de conjunto, operación binaria y axioma, que incluyen: la base canónica como objeto y el producto interior entre los espacios vectoriales como proceso.
6. El concepto de transformación lineal como objeto para asimilar el espacio de las transformaciones lineales sobre el campo $\mathbb{R}$, y calcular diferentes normas.
7. El concepto de límite de una función de variable real y su generalización a funciones de varias variables como esquema.

8. El concepto de derivada como esquema para asimilar el objeto derivada de una función en un punto y la función derivada.

B. *Construcción del objeto derivada direccional de una función real de variable vectorial DD*

1. Gráfico-analítico. Dado un CE, definido de un abierto A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, un punto $P(x_0, y_0)$ de A, un vector unitario $u = (u_1, u_2)$, la *acción* de interpretar geométricamente la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario u como la pendiente de la recta tangente, a la curva formada por la intersección del plano que pasa por P en dirección del vector u con la gráfica de la función f, en el punto $(x_0, y_{0,} f(x_0, y_0))$.
2. Algebraico-analítico. Dado un CE f, definido de un abierto A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, un punto $P(x_0, y_0)$ de A, un vector unitario $u = (u_1, u_2)$, la *acción* de calcular la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario u, aplicando la ecuación (25).

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big((x_0, y_0) + t(u_1, u_2)\big) - f(x_0, y_0)}{t} \qquad \textbf{(25)}$$

3. *Interiorizar las acciones* ***B.1***, en el proceso que: dado un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $(a_1, \dots, a_n)$ en A, un CE, definido de A en $\mathbb{R}$, y un vector $u = (u_1, \dots, u_n)$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, representa e interpreta la derivada direccional de f en el punto a en dirección del vector u como la razón de cambio de f cerca del punto a en el conjunto unidimensional $\{a + tu : t \in \mathbb{R}\}$.
4. *Interiorizar las acciones* ***B.2***, en el proceso que: dado un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $(a_1, \dots, a_n)$ en A, un CE f, definido de A en $\mathbb{R}$, y un vector $u = (u_1, \dots, u_n)$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, calcula la derivada direccional de f en el punto a en dirección del vector u verificando ecuación (26).

$$D_u f(a_1, \dots a_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tu_1, \dots, a_n + tu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}. \qquad \textbf{(26)}$$

5. *Coordinar* los procesos ***B.3*** y ***B.4*** en el proceso, que dado un CE definido sobre un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $(a_1, \dots, a_n)$ en A, un CE f, definido de A en $\mathbb{R}$, y un vector $u = (u_1, \dots, u_n)$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$,

calcula la derivada direccional de f en el punto a en dirección del vector u y da una interpretación geométrica de esta derivada.

6. *Encapsular* el proceso ***B.5*** en el objeto derivada direccional del CE f en el punto a en dirección del vector unitario u, y notarla como $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = D_u f(a)$ que se interpreta como la razón de cambio del CE f en el punto a en dirección de un vector unitario u y se calcula aplicando la expresión (27)˙

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u}(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+hu_1,\dots,a_n+hu_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hu)-f(a)}{h} \end{aligned} \qquad \textbf{(27)}$$

C. Construcción del objeto derivada parcial de una función real de variable vectorial o CE

1. Gráfico-analítico. Dado un CE f, definido sobre un abierto A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, un punto fijo (a,b) de A, la *acción* de interpretar geométricamente la derivada parcial de f respecto a la variable x, como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = f(x,b)$ (representa la traza de la superficie $z = f(x,y)$ en el plano $y = b$) en el punto $\big(a,b,f(a,b)\big)$, y la derivada parcial de f respecto a la variable y como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $h(y) = f(a,y)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$.
2. Algebraico-analítico. Dado un CE, definido sobre un abierto A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, un punto fijo (a,b) de A, los vectores unitarios $\hat{\imath} = e_1 = (1,0)$ y $\hat{\jmath} = e_2 = (0,1)$, la *acción* de calcular la derivada parcial de f respecto a la variable x en el punto (a,b) según la ecuación (28) y la derivada parcial de f respecto a la variable y en el punto (a,b) según la ecuación (29):

$$\begin{aligned} g'(a) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(a+t)-g(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f\big((a,b)+te_1\big)-f(a,b)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b). \end{aligned} \qquad \textbf{(28)}$$

$$\begin{aligned} h'(b) = \lim_{t\to 0}\frac{h(b+h)-h(b)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f\big((a,b)+te_2\big)-f(a,b)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial y}(a,b). \end{aligned} \quad \textbf{(29)}$$

3. *Repetir* las acciones ***C.1*** para diferentes puntos (a,b) y para otros CE. Para CE generales definidos sobre abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $n>1$, considerar que la derivada parcial de f respecto a x_j, $j=1,\dots,n$, en el punto $a=(a_1,\dots,a_n)$ da información del comportamiento de f para valores x cercanos al punto a, cuando x está en el conjunto $M=\{a+te_j: t\in\mathbb{R}\}$.
4. *Interiorizar* las acciones ***C.2***, en el proceso que: dado un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $a=(a_1,\dots a_n)$ de A, un CE f de A en $\mathbb{R}$, un vector $u=e_j$ en $\mathbb{R}^n-\{0\}$, $j=1,\dots,n$, con $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,\dots,0)$, $e_n=(0,0,\dots,1)$, vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, calcula la derivada parcial de f respecto a la variable x_j, en el punto a según la ecuación (30):

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f\big(a+te_j\big)-f(a)}{t}. \quad \textbf{(30)}$$

5. *Coordinar* los procesos ***C.3*** y ***C.4*** en el proceso que, dada una FRV definida sobre un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $a=(a_1,\dots,a_n)$ de A, un CE f de A en $\mathbb{R}$, un vector $u=e_j$ en $\mathbb{R}^n-\{0\}$, $j=1,\dots,n$, con $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,\dots,0)$, $e_n=(0,0,\dots,1)$, vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, calcula e interpreta, gráfica, analítica y numéricamente la derivada parcial de f respecto a la variable x_j, $j=1,\dots,n$, en el punto a.
6. *Encapsular* el proceso ***C.5*** en el objeto derivada parcial, DP, de f respecto a la variable x_j, en el punto a, representarla como $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, e interpretarla como la razón de cambio de f con respecto a la variable x_j cuando las demás variables x_k, $k\neq j$, son fijas, o también como la variación de la función en vecindades del punto

a en la dirección del vector e_j de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y algebraicamente se expresa por la ecuación (31).

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\big(a_1,\dots,a_j+h,\dots a_n\big)-f\big(a_1,\dots,a_j,\dots,a_n\big)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\big(a+he_j\big)-f(a)}{h}\end{aligned} \quad \textbf{(31)}$$

D. Construcción del objeto derivada de una función real de variable vectorial en un punto respecto a un vector DFRV

1. *Desencapsular* el objeto derivada direccional de la función f en el punto a en dirección del vector u, en el proceso que dado f, un punto a y un vector arbitrario (no necesariamente unitario o de la base canónica) w, encuentra si existe el limite dado por la ecuación (32),

$$D_w f(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+hw_1,\dots,a_n+hw_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}, \quad \textbf{(32)}$$

e interpretar $D_w f(a)$ como la razón de cambio de f en el punto a, en la dirección de un vector arbitrario w de $\mathbb{R}^n$.
2. *Encapsular* el proceso ***D.1*** en el objeto la derivada de la función f en el punto a respecto al vector w, hallando si existe el límite de la ecuación (32).

E. Construcción del objeto diferencial de una función real de variable real DIFR

1. Gráfico-numérico. Dada una función FR, f, definida sobre un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}$ y un punto a de A, la *acción* de interpretar geométricamente la DIFR como el cambio de altura de recta tangente, $T(x)$, a la gráfica de la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, al variar x en el intervalo $[a, a+h]$ con $h > 0$.
2. Algebraico-numérico. Dada una función f real de variable real definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y el valor numérico de un elemento a de A, la *acción* de calcular la diferencial de f en a: desencapsulando el objeto derivada de la función en un punto, verificando si existe la aplicación descrita en (33), y si esta aplicación es lineal, $T_a(\alpha u + \beta v) = \alpha T_a(u) + \beta T_a(v)$, α, β reales.

$$T_a: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto T_a(u) = f'(a)(u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} u \quad (33)$$

Además, verificar si la función error definida en la expresión (34) es continua en 0, $\lim_{h \to 0} E_a(h) = 0$.

$$E_a: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$h \mapsto E_a(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{|h|}, & si\ h \neq 0 \\ 0, & si\ h = 0 \end{cases} \quad (34)$$

3. Gráfico-analítico. *Interiorizar* las acciones ***E.1***, en el proceso que interpreta geométricamente la diferencial de la función f en un punto a, como la posibilidad de linealizar la función en vecindades del punto.
4. Algebraico-analítico. *Interiorizar* las acciones ***E.2***, en el proceso que calcula la diferencial de la función f en el punto a, al aproximar un punto arbitrario x al punto fijo a.
5. Gráfico-analítico. *Coordinar* los procesos descritos en ***E.3*** y ***E.4*** en el proceso que establece que una FR, f es diferenciable en un punto a, como la posibilidad de aproximar $f(x)$, para x suficientemente cerca a a por la aplicación afín, $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$, e interpretar geométricamente como la posibilidad de linealizar la función $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, aproximar la gráfica de la función por la tangente en vecindades del punto $(a, f(a))$.
6. *Encapsular* el proceso ***E.5*** en el objeto matemático la función real de variable real diferenciable en un punto, *DIFR* y representarla como la aplicación lineal dada por la expresión (35) :

$$\begin{aligned} Df(a)&: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ h &\mapsto Df(a)h = f'(a)h. \end{aligned} \quad (35)$$

F. Construcción del objeto diferencial de una función vectorial de variable real DIFVR

1. Gráfico-*numérico*. Dada una FVR f, definida de un abierto A de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, un real a de A, la *acción* de graficar la curva en el plano que representa a f, el punto $f(a)$ y encontrar el vector tangente a f en el punto $f(a)$.
2. Algebraico-analítico. Dada una FVR, definida sobre un abierto A de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, y un punto a interior de A, la *acción* de calcular el incremento de f al variar x en el intervalo $[a, a+h]$ y compararlo con los cambios del vector tangente a f en $(a, f(a))$.
3. Gráfico-analítico. *Interiorizar* las acciones ***F.1*** en el proceso que determina si una función vectorial de variable real es diferenciable e interpretarla geométricamente que cuando $x \to a$, el vector $f'(a)(x-a)$ tiende a la porción de curva,
$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a).$$
4. Algebraico-analítico. *Interiorizar* las acciones ***F.2*** en el proceso, que dada una función vectorial de variable real, $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ determinar si la función es diferenciable en a al verificar si el operador dado por (36) es lineal y si $\lim_{|u| \to 0} \frac{\|f(a+u) - f(a) - Df(a)u\|_2}{|u|} = 0$.
$$\begin{aligned} &Df(a): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\quad x \mapsto Df(a)(x) = f'(a)(x) = (f_1'(a)x, f_2'(a)x). \end{aligned} \qquad \textbf{(36)}$$
5. Algebraico-analítico. *Coordinar* los procesos ***F.3*** y ***F.4*** en el proceso que dada una FVR y un punto a de su dominio, $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m > 1$, determina que f es diferenciable en a, si existe una transformación lineal, $T_a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m > 1$, tal que, $T_a(u) = \left(f_1'(a), \dots, f_m'(a)\right)u$, y que $\lim_{|u| \to 0} \frac{\|f(a+u) - f(a) - Df(a)u\|_m}{|u|} = 0$, e interpretar geométricamente la diferencial como la posibilidad de linealizar (existencia del vector tangente a la curva f en el punto $f(a)$) en vecindades de $f(a)$.
6. *Encapsular* el proceso ***F.5*** en el objeto diferencial de una función vectorial de variable real, DIFVR.

$$D_w f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hw) - f(a)}{h}. \qquad \textbf{(37)}$$

G. Construcción del objeto diferencial de un campo escalar DICE

1. Analítico-algebraico. Dada una función de dos variables, la *acción* de verificar que la existencia de la derivada de la función en un punto respecto a cualquier vector no implica que la función sea continua en el punto. Ejemplo, la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida como $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $x \neq 0$, $f(0,y) = 0$, existen las derivadas direccionales en (0,0) en dirección de cualquier vector, sin embargo la función no es continua en (0,0).
2. Analítico-algebraico. Dada una función de dos variables, la *acción* de verificar que la existencia de la derivada de f en un punto respecto a cualquier vector w y que sea continua en el punto, no implica que la derivada sea un operador lineal. Ejemplo, para la función $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida como $g(0,0) = 0$ y $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$, existen las derivadas direccionales en (0,0) en dirección de cualquier vector, además es continua en (0,0); sin embargo, la derivada direccional en (0,0) no es lineal respecto al vector dirección.
3. Analítico-algebraico. Dada una función de dos variables con derivada direccional lineal respecto al vector dirección en un punto y discontinua en este punto, la *acción* de verificar que la existencia de la derivada de f en un punto respecto a cualquier vector w, no implica la continuidad de la función en el punto. Ejemplo, la función $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $h(0,0) = 0$ y $h(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, existen las derivadas direccionales en (0,0) y dependen linealmente del vector dirección, sin embargo es discontinua en el origen.
4. Repetir las acciones ***G.1, G.2, G.3***, para varios casos de funciones e *interiorizarlas* en el proceso que dado un CE f y un punto a de su dominio, la existencia de su derivada en a no garantiza la continuidad y la diferenciabilidad de f en a, como sí ocurre para el caso de las funciones reales de variable real.
5. Encapsular el proceso ***G.4*** en la propiedad que en un CE la derivabilidad no implica continuidad.
6. Gráfico-analítico. La acción de interpretar geométricamente la diferencial de una función de f definida de $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ en un

punto (a,b) como el cambio de altura del plano tangente a la superficie f en el punto $\big(a,b,f(a,b)\big)$ cuando un punto (x,y) cambia del punto (a,b) al punto $(a+\Delta x, b+\Delta y)$.

7. Analítico-algebraico. Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, un punto (a,b) interior de A, la ***acción*** de calcular la diferencial de f en (a,b), estableciendo si el, $\lim_{\|(\Delta x,\Delta y)\|\to 0} E(\Delta x,\Delta y)$ es 0, que es equivalente a la ecuación (38), y su diferencial es $Df(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$.

$$\lim_{\|(\Delta x,\Delta y)\|\to 0} \frac{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0. \quad \textbf{(38)}$$

8. *Interiorizar* la acción ***G.6*** en el proceso que dado un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a de A, interpretar geométricamente la diferencial de f en a, $Df(a)$, definida como el operador de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que tiene la propiedad de ser lineal y se utiliza para linealizar la función f en a.
9. *Interiorizar* la acción ***G.7*** en el proceso, que dado un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a de A, determina si f es diferenciable en el punto a y calcula su diferencial por la ecuación (39), denominarla como el vector gradiente de la función f evaluado en el punto a,

$$Df(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\right). \quad \textbf{(39)}$$

10. Coordinar los procesos ***G.8*** y ***G.9*** en el proceso que dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a de A, determina si f es diferenciable en el punto a y calcula su diferencial dando una interpretación geométrica y analítica.
11. *Encapsular* el proceso ***G.10*** en el objeto campo escalar diferenciable f en el punto a, DICE.
12. Desencapsular el objeto DICE, en el proceso que dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a,

prueba que si f es diferenciable en un punto a, entonces f es continua en a.

13. Encapsular el proceso ***G.12*** en el objeto matemático, diferenciabilidad implica continuidad, TDICO.
14. Desencapsular el objeto DICE, en el proceso que dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a, prueba que si f es diferenciable en un punto a, entonces existe la derivada direccional de f en el punto a en cualquier vector dirección w, $f'(a; w)$.
15. Encapsular el proceso ***G.14*** en el objeto, para campos escalares diferenciabilidad implica derivabilidad. TDIDE.
16. Desencapsular DICE en el proceso de encontrar la mejor estimación de un campo escalar f, definido en forma tabular, en puntos no registrados en la tabla.

H. Construcción del objeto diferencial de un campo vectorial DICV

1. Analítico-algebraico. Dado un subconjunto de A de $\mathbb{R}^2$ un campo vectorial $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, un punto a de A, la *acción* de establecer si f es diferenciable en a determinando si los CE $f_1, f_2, f_3,$ definidos de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ son diferenciables en a.
2. Analítico-algebraico. Dado un subconjunto de A de $\mathbb{R}^2$ un campo vectorial $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, un punto a de A, la *acción* de establecer si f es diferenciable en a verificando si la aplicación definida en (40) es lineal, para α y β escalares y u, v vectores en $\mathbb{R}^2$,

$$T_a(\alpha u + \beta v) = \alpha T_a(u) + \beta T_a(v).$$

$$\begin{aligned} T_a: \mathbb{R}^2 \quad &\to \quad \mathbb{R}^3 \\ u \quad &\longmapsto \quad T_a(u) = Df(a)(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(40)}$$

Además, verificar si la función definida en la expresión (41), $E(a, v) \to \mathbf{0}$, cuando $\|v\|_2 \to 0$.

$$Ea: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$v \to E(a,v) = \begin{cases} \dfrac{\|f(a+v) - f(a) - Df(a)(v)\|_3}{\|v\|_2}, si\ v \neq 0 \\ 0, \qquad si\ v = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(41)}$$

3. *Interiorizar* las acciones de ***H.1***, en el proceso que dado un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, un CV $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un punto a de A, la *acción* de establecer si f es diferenciable en a determinando si los CE, $f_1, \dots, f_m$, definidos de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ son diferenciables en a.
4. Analítico-algebraico. Interiorizar las acciones ***H.2***, en el proceso que dado un subconjunto de A de $\mathbb{R}^n$ un CV $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un punto a de A, determina si f es diferenciable en a verificando si la aplicación definida en la ecuación (42) es lineal (para α y β escalares y u,v vectores en $\mathbb{R}^n$, $T_a(\alpha u + \beta v) = \alpha T_a(u) + \beta T_a(v)$.

$$T_a: \mathbb{R}^n \quad \to \quad \mathbb{R}^m$$
$$u \quad \longmapsto \quad T_a(u) = Df(a)(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\mathrm{n}}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \qquad \textbf{(42)}$$

Además, verificar si la función definida en (43), satisface $\lim\limits_{\|v\|_n \to 0} \frac{\|E(a,v)\|_m}{\|v\|_n} = 0$.

$$E_a: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$v \to E_a(v) = E(a,v) = \begin{cases} \dfrac{f(a+v) - f(a) - Df(a)(v)}{\|v\|_n}, si\ v \neq 0 \\ 0, \qquad si\ v = 0. \end{cases} \qquad \textbf{(43)}$$