

MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presenta el marco teórico y metodológico que fundamenta el análisis de la comprensión de la diferencial. A continuación se definen conceptos que orientan y sustentan el trabajo de investigación, los cuales son tomados de los referentes bibliográficos.

Pensamiento matemático avanzado (PMA)

La naturaleza del pensamiento matemático está relacionada con los procesos cognitivos que dan lugar a los conocimientos matemáticos. Una clase de estos pensamientos es el avanzado (PMA), que se define como un fenómeno en el que interactúan los procesos mentales para representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer, definir, formalizar y demostrar. Se caracteriza por la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla, el rigor y el formalismo, que con frecuencia sigue la secuencia: teorema, demostración y aplicación. Es propio de los últimos años de bachillerato y de las matemáticas superiores de la universidad¹⁶.

Las consideraciones filosóficas del PMA se tienen en cuenta al estudiar las obras de matemáticos, donde se distinguen las siguientes tendencias o diferentes tipos de mente: una clase está conformada por los preocupados por la lógica, y la otra, por los guiados por la intuición¹⁷. Estas tendencias desarrollaron las siguientes corrientes filosóficas de la matemática a principios del siglo XX: la intuicionista, representada por Kronecker, quien afirmaba que los conceptos

¹⁶ David Tall, "The Psychology of Advanced Mathematical Thinking", en *Advanced Mathematical thinking*, eds. David Tall (New York, Kluwer Academic Publishers, 2002), 3-26, [mi traducción].

¹⁷ Henri Poincaré, *Foundations of Science*, trad. Halsted G.B. New York: The Science Press, 1913, 210, citado por David Tall, "The Psychology of Advanced Mathematical Thinking" [mi traducción].

matemáticos solo existen cuando su construcción se demuestra a partir de los números enteros; la formalista, representada por Hilbert, quien afirmaba que la matemática es la manipulación significativa de conceptos y definiciones; y la logicista, representada por Bertrand Russell, quien declaró que las matemáticas consisten en deducciones que utilizan las leyes de la lógica.

Según estas corrientes, la práctica de los matemáticos se caracteriza por definir y demostrar teoremas, como se percibe en el siglo XX con la creación de un gran número de sistemas formales sobre la base de la deducción lógica a partir de definiciones y axiomas. Sin embargo, con la introducción de la tecnología y la informática se advierte el renacimiento de la constructibilidad para probar hipótesis y compilar datos con facilidad, los cuales eran accesibles solo por aplicación de técnicas sofisticadas. Este renacimiento afecta el tipo de problemas que los matemáticos trabajan y la forma como ellos piensan¹⁸.

Otro aspecto filosófico es considerar la matemática como una cultura compartida y con aspectos dependientes del contexto. Por ejemplo, la concepción de un diferencial para un analista puede ser muy diferente a la de un matemático aplicado, y tales actitudes pueden causar conflictos en los estudiantes¹⁹.

Aspectos similares a las corrientes filosóficas y al contexto de la matemática presentan los estudiantes y profesores, quienes tienen procesos de pensamiento diferentes, en función de las experiencias previas; por tanto, cualquier teoría de la psicología del pensamiento matemático debe considerarse en el contexto más amplio de la actividad mental y cultural. No hay un camino verdadero, absoluto, de pensar en las matemáticas, sino diversas formas de pensamiento, culturalmente desarrolladas, en que varios aspectos están relacionados con el contexto²⁰.

En lo que respecta al rango del PMA para el desarrollo de las ideas y conceptos matemáticos, este surge de la conjetura, continua

¹⁸ David Tall, "The Psychology of Advanced... 5.

¹⁹ David Tall, "The Psychology of Advanced... 6.

²⁰ David Tall, "The Psychology of Advanced... 6.

con el teorema y finaliza con la prueba o demostración, y está caracterizado por los siguientes procesos:

Generalización y abstracción

La generalización es una extensión de los procesos familiares, mientras que la abstracción requiere de una reorganización mental masiva. Ambos términos se utilizan en matemáticas tanto para referirse a los procesos en que los conceptos se ven en un contexto más amplio, como a los productos de esos procesos.

Harel estableció las siguientes clases de generalización, de conformidad con las actividades cognitivas involucradas: generalización expansiva, extiende la estructura cognitiva existente sin requerir cambios en las ideas presentes; generalización reconstructiva, requiere la reconstrucción de la estructura cognitiva existente; generalización disyuntiva, consiste en recordar las ideas nuevas como una colección de información que se aprende de memoria y se añade a los conocimientos, sin ningún intento de integración y relación con las ideas anteriores. En esta terminología, las derivadas direccional y parcial son una generalización expansiva del concepto de derivada de una función real de variable real, mientras que la diferencial es tanto una abstracción como una generalización reconstructiva²¹.

De manera similar, para generalizar el concepto de diferencial de una función en varias variables, debe generarse una cadena de ideas que comprende: la derivada y diferencial de una función real de variable real, el concepto de derivada de un campo escalar en un punto respecto a un vector dirección (derivada direccional y parcial), la diferencial del campo escalar en un punto como consecuencia de la existencia y continuidad de todas las derivadas parciales en el punto, y la extensión de estos conceptos a campos vectoriales²².

El proceso de abstracción considera el objeto mental diferencial de una función en un punto, como la transformación lineal que representa la función en vecindades del punto, y es descrito y

²¹ Guershon Harel y David Tall, "The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics", *For the Learning of Mathematics*, 11, 1991: 2, [mi traducción].

²² Tom Apostol, *Calculus Volumen 2...* 308-330.

formalizado mediante teoremas que relacionan propiedades locales y globales de la función entre los elementos que la configuran, como derivabilidad, continuidad, aproximación y linealización²³.

Intuición y rigor

La intuición es producida por las imágenes del concepto que posee un individuo; cuanto más desarrollado el pensamiento lógico, más probable que la imagen del concepto individual dé respuestas lógicas. Esto es evidente en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, que pasan de las intuiciones iniciales producto de los sentidos a la imaginación, antes e independientemente de la instrucción sistemática; seguidamente, la generalización por inducción; y por último, la intuición de número puro basada en las matemáticas más refinadas cuando la experiencia crece²⁴.

Los aspectos de la lógica también pueden ser perfeccionados para hacer más “intuitiva” la mente matemática. El desarrollo de esta intuición lógica refinada debe ser uno de los principales objetivos de la educación matemática avanzada²⁵.

El rigor hace énfasis en establecer y usar las definiciones y el razonamiento lógico en las pruebas formales para demostrar verdades en la matemática.

Síntesis y análisis

La síntesis comprende tres fases: comienza con el acto consciente de juntar las ideas; seguido de una actividad más intuitiva, cuando las imágenes del concepto subconscientes interactúan; y finaliza cuando los nuevos conceptos vinculados emergen en la conciencia.

El análisis, por el contrario, es una actividad que organiza las nuevas ideas en forma lógica y refinada para dar afirmaciones y deducciones más precisas.

La enseñanza en los niños hace hincapié en la síntesis de los conocimientos, a partir de conceptos simples construidos de la

²³ Tom Apostol, *Calculus Volumen 2...* 314.

²⁴ David Tall, “The Psychology of ...” 13-14.

²⁵ David Tall, “The Psychology of ...” 314.

experiencia y de ejemplos, hasta conceptos más generales; mientras que la enseñanza en la universidad frecuentemente acentúa el análisis de los conceptos, a partir de abstracciones generales y formando cadenas de deducción que se pueden aplicar en una variedad de contextos²⁶.

La prueba matemática

La prueba o demostración es la etapa final del pensamiento matemático, en la que se precisan las ideas e implica examinar cada uno de los silogismos que la componen, razonar sobre su orden y determinar la veracidad de conformidad con las reglas de la lógica. La prueba no solo debe ser lógica, sino explicar por qué funciona.

Al respecto, Mason describe el proceso de verificar del PMA en tres niveles: convencerse a sí mismo, convencer a un amigo y convencer a un enemigo. Convencerse a uno mismo implica tener una idea del porqué alguna aseveración puede ser verdad, convencer a un amigo requiere que los argumentos se organicen en una forma más coherente, y convencer a un enemigo significa que los argumentos deben ser analizados y perfeccionados para que resistan la crítica, esto es lo más cercano que lleva a pensar matemáticamente la noción de prueba²⁷.

Por otra parte, sobre el desarrollo cognitivo del PMA y el aprendizaje, Tall considera varias teorías, entre ellas la teoría conductista y la constructivista²⁸.

La teoría conductista se fundamenta en la observación externa del estímulo y la respuesta, se niega a especular sobre el funcionamiento interno de la mente. Esta teoría proporciona evidencia observable y repetible de la conducta de los seres humanos y de los animales como resultados a los estímulos. Sin embargo, una crítica a esta teoría es que la mecánica algorítmica y rutinaria tiene una aplicación limitada del pensamiento matemático.

²⁶ David Tall, "The Psychology of ... 15.

²⁷ John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey, *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley, 1982, citados por David Tall, "The Psychology of ... 20.

²⁸ David Tall, "The Psychology of... 7-8.

La teoría constructivista, por el contrario, intenta analizar cómo las ideas se crean en la mente de cada individuo y da información sobre los procesos creativos de los investigadores y de las dificultades que presentan los estudiantes para la comprensión de conceptos.

Al respecto, Piaget analizó la necesidad del individuo de estar en equilibrio dinámico con el medio ambiente, como un tema principal de una de sus obras. Él afirma que, cognitivamente, el equilibrio se altera por la confrontación entre los nuevos conocimientos con los antiguos y se genera un período de transición donde la estructura del conocimiento se reconstruye para llegar a un nivel más maduro de equilibrio.

Piaget analizó la evolución cognitiva del niño hasta la edad adulta, a través de una serie de etapas de equilibrio, cada una más rica que la anterior. Él identificó cuatro etapas principales: la primera, la sensoriomotora, como anterior al desarrollo del habla con significado; la segunda, la preoperacional, caracterizada cuando el niño comprende la permanencia de los objetos que continúan existiendo en su mente, aun cuando aquellos estén temporalmente fuera de la vista; la tercera, la de operaciones concretas, cuando el niño considera conceptos relacionados con los objetos físicos; y la cuarta, la de operaciones formales, en la adolescencia temprana, cuando las hipótesis del tipo “si entonces” son posibles en su mente.

La teoría de las etapas de Piaget ha sido extendida al PMA y ha generado otros análisis teóricos para establecer la distinción entre lo concreto y lo formal por varios investigadores. Hart, por ejemplo, la utiliza como punto de partida útil para determinar jerarquías locales de dificultad en los estudios extensivos en el rango entre 11 a 16 años de edad²⁹; Orton la referencia para desarrollar los primeros conceptos de cálculo³⁰; Biggs sugiere una repetición de la etapa de las operaciones formales sucesivamente hasta niveles más altos, en cada nivel se lleva a cabo el ciclo de aprendizaje uniestructural,

²⁹ K. M Hart. *Children's Understanding of Mathematics*. London: John Murray, 1981, 11-16, citado por David Tall, “The Psychology of... 8.

³⁰ A. Orton, *A Cross-Sectional Study of the Understanding of Elementary Calculus in Adolescents and Young Adults*, (Ph.D. thesis, Leeds University, 1980), citado por David Tall, “The Psychology of... 8.

multiestructural y relacional³¹; y Ellerton plantea que el ciclo sensoriomotor, preoperacional y concreto de la teoría de Piaget es el primer nivel de un desarrollo cognitivo en espiral en que la etapa formal es el comienzo de otro ciclo del mismo tipo pero en un nivel más alto de abstracción³².

Un aporte valioso de la teoría de Piaget es el proceso de transición entre los estados mentales, caracterizado por la inestabilidad entre las ideas previas sobre los conceptos y la influencia de los nuevos conocimientos. Él utiliza el término *asimilación* como el proceso de adquisición de nuevos datos, y el término *acomodación* como el proceso por el cual el individuo incorpora la información y modifica la estructura cognitiva. La asimilación y la acomodación son, por tanto, complementarias.

La matemática avanzada critica la teoría de las etapas de Piaget, afirmando que puede ser una trivialización lineal de un sistema en el que el cambio es mucho más complejo, un sistema no lineal, cuando las rutas posibles a través de una red de ideas se hacen más numerosas, como ocurre en PMA³³.

El paso del PME al PMA implica una significativa transición para adquirir coherencia entre las entidades abstractas, las cuales se deducen de manera lógica a partir de las definiciones formales, de la descripción a la definición, de convencer a probar. Esta transición requiere de una reconstrucción cognitiva que se percibe en los estudiantes de primer año de universidad cuando abordan las abstracciones formales³⁴.

La abstracción reflexiva

El término de abstracción reflexiva fue introducido por Piaget para describir la construcción de las estructuras lógico-matemáticas de un

³¹ John Biggs y Kevin Collis, *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy*. New York: Academic Press, 1982, citado por David Tall, "The Psychology of... 8.

³² Nerida Ellerton, *The Development of Abstract Reasoning. Results from a Large Scale Mathematics Study in Australia and New Zealand*, 1985, citado por David Tall, "The Psychology of... 8.

³³ David Tall, "The Psychology of... 8-9.

³⁴ David Tall, "The Psychology of... 20.

individuo durante el curso de su desarrollo cognitivo. La abstracción reflexiva no tiene principio absoluto, sino que está presente desde las edades más tempranas y se manifiesta en la coordinación de las estructuras sensoriomotoras y continúa en las matemáticas superiores. La historia de la evolución de la matemática desde la antigüedad hasta nuestros días puede considerarse como un ejemplo del proceso de abstracción reflexiva³⁵. En la mayor parte de su trabajo, Piaget se concentra en el desarrollo de conocimientos matemáticos en las primeras edades, rara vez va más allá de la adolescencia. Sin embargo, como él sugiere, puede extenderse a conceptos del PMA³⁶.

La abstracción reflexiva es considerada actualmente como una teoría para la construcción y adquisición del conocimiento matemático mediante el fenómeno de la comprensión de conceptos. Al estudiar la comprensión de un concepto matemático, el investigador, en una primera fase, la usa para analizar y entender el concepto y posteriormente examina la imagen exterior del concepto que presentan los estudiantes en sus intentos por resolver situaciones problemáticas.

Piaget distingue tres tipos de abstracción: la empírica, la pseudoempírica y la reflexiva.

Abstracción empírica. Es la que se deriva del conocimiento de las propiedades de los objetos, conduce a la extracción de las propiedades comunes y a las generalizaciones extensionales; es decir, el paso de algunos a todos o de lo particular a lo general³⁷.

Abstracción pseudoempírica. Es una burda generalización de las propiedades, producto de las acciones de los sujetos sobre los objetos³⁸.

³⁵ Ilana Arnon y otros, *APOS Theory...* 6.

³⁶ Ed Dubinsky. "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking". En *Advanced Mathematical Thinking*, eds. D. Tall. (New York: Kluwer Academic Publishers, 2000), 95-96.

³⁷ Jean Piaget y Rolando García, *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Madrid: Siglo veintiuno editores, 1983, 299.

³⁸ Jean Piaget, *The Equilibration of Cognitive Structures*, trad. T. T. Brown. (Cambridge: Harvard University Press, 1985), 18-19.

Abstracción reflexiva. Es el proceso por el cual se construyen objetos mentales a través de acciones sobre estos objetos. Se extrae de lo que Piaget llama coordinaciones generales de acciones; la fuente es el sujeto y es completamente interna³⁹. Este tipo de abstracción conduce a una generalización como resultado de nuevas síntesis, donde las leyes particulares adquieren nuevo significado⁴⁰. Piaget considera la abstracción reflexiva como el método por el cual todas las estructuras lógico-matemáticas se derivan y conducen a una clase de pensamiento matemático donde forma o proceso se separan del contenido y los procesos mismos se convierten en objetos de contenido, en la mente del matemático⁴¹.

Los tres tipos de abstracción no son completamente independientes. Las acciones que se realizan sobre los objetos conducen a la abstracción pseudoempírica y reflexiva, pero las propiedades de los objetos solo se llegan a conocer a través de la abstracción empírica. Por otra parte, la abstracción empírica solo se hace posible a través de esquemas de asimilación que se construyen por abstracción reflexiva⁴².

Las abstracciones empírica y pseudoempírica se basan en el conocimiento de los objetos a través de la ejecución o la imaginación de acciones sobre ellos. La abstracción reflexiva interioriza y coordina estas acciones para formar nuevas acciones y, en última instancia, nuevos objetos, los cuales pueden ser ya no físicos, sino más bien matemáticos. La abstracción empírica se utiliza para extraer los datos de estos nuevos objetos a través de acciones mentales sobre ellos y así sucesivamente⁴³.

En la abstracción empírica, el sujeto observa un número de objetos y abstrae una propiedad común. En la abstracción pseudoempírica se procede de forma similar, después de que las acciones han sido realizadas sobre los objetos. La abstracción reflexiva,

³⁹ Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction... 97-99.

⁴⁰ Jean Piaget y Rolando García, *Psicogénesis e historia...* 199.

⁴¹ Jean Piaget, *The principles of Genetic Epistemology*, trad. W. Mays. London: Neubauer, P. B. 1972, 63-64 y 70-71.

⁴² Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction... 98.

⁴³ Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction... 98.

sin embargo, es mucho más complicada, ocurre cuando se desarrollan las estructuras cognitivas, las nuevas construcciones matemáticas⁴⁴.

La abstracción reflexiva se diferencia de la abstracción empírica en que la reflexiva trata de acciones en lugar de objetos, y se diferencia de la pseudoempírica en que esta última se refiere no tanto a acciones en sí mismas, sino a las interrelaciones entre las acciones, que Piaget llama coordinaciones⁴⁵.

Las construcciones por abstracción reflexiva son:

Representar

Es la capacidad de utilizar símbolos, lenguajes, imágenes, e imágenes mentales, para construir procesos internos como formas de encontrar significados de los fenómenos percibidos. Piaget denominó a esta capacidad como *interiorización* y la definió como “la traducción de una serie de acciones materiales en un sistema de operaciones”⁴⁶. Un ejemplo de interiorización en la comprensión del concepto de diferencial es graficar una superficie y en un punto particular el plano tangente.

Coordinar

Es la composición de dos o más procesos para la construcción de una nueva acción, proceso u objeto⁴⁷. Por ejemplo, al considerar que una función es diferenciable en un punto se deben coordinar los procesos de verificar la existencia y continuidad de todas las derivadas parciales.

Encapsular

Es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático). La encapsulación ocurre cuando el individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, toma conciencia de este como un todo y es capaz de hacer transformaciones sobre estas acciones o procesos. En términos de Piaget, son las acciones u operaciones que se convierten en objetos tematizados de pensamiento

⁴⁴ Ed Dubinsky, “Reflective Abstraction... 99.

⁴⁵ Ed Dubinsky, “Reflective Abstraction... 99.

⁴⁶ Jean Piaget, *Psicología y pedagogía*. Buenos Aires: Ariel, 1980, 90.

⁴⁷ Ed Dubinsky, “Reflective Abstraction... 101.

o asimilación⁴⁸. Por ejemplo, al reflexionar sobre la existencia de la transformación lineal aplicada a un punto de la función junto con el error de aproximación, se encapsula este proceso como el objeto matemático diferencial de la función en el punto.

Generalizar

Es la capacidad de aplicar un esquema existente particular a un conjunto más amplio de fenómenos y se considera como la forma más simple y más familiar de la abstracción reflexiva. La generalización puede ocurrir cuando el sujeto se da cuenta de la aplicabilidad más amplia del esquema o cuando un proceso se encapsula en un objeto⁴⁹.

Invertir

Una vez que un proceso existe internamente, para el sujeto es posible invertirlo, no en el sentido de deshacer, sino como un medio de construir un nuevo proceso⁵⁰. Ejemplo de este acto es considerar la integración como el proceso inverso de la diferenciación.

Se conjetura que la construcción de la mayoría de los conceptos matemáticos se puede describir en términos de las cinco formas de abstracción reflexiva: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización e inversión, como lo afirmó Piaget: las matemáticas, por lo tanto, pueden considerarse en términos de la construcción de estructuras, entidades matemáticas que pasan de un nivel a otro, una operación de tales entidades se convierte, a su vez, en objeto de la teoría, y este proceso se repite hasta llegar a estructuras que se van alternando para convertirse en estructuras más fuertes⁵¹.

La teoría APOE

La teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema) toma como marco de referencia epistemológico la teoría de Piaget que estudia y analiza el conocimiento existente del concepto y su proyección a un plano

⁴⁸Jean Piaget, *The Equilibration of ...* 49.

⁴⁹ Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction..." 101.

⁵⁰ Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction..." 101.

⁵¹ Jean Piaget, *The Principles of ...* 70.

superior de pensamiento, donde se reorganiza y reconstruye para formar nuevas estructuras⁵².

La teoría tiene sus orígenes en las ideas de Piaget, que se extienden a las matemáticas del pregrado, sobre la abstracción reflexiva, desequilibración, acomodación, asimilación, reflexión y desarrollo de esquemas. Con el propósito de desarrollar la noción de abstracción reflexiva en el PMA, se aíslan las características esenciales de esta abstracción y se hace un análisis del papel que estas desempeñan en las matemáticas superiores, para formar una teoría de la evolución de los conceptos en este pensamiento que sea coherente en conocimiento y construcción⁵³.

El enfoque APOE ha sido desarrollado por Ed Dubinsky y sus colegas Asiala, Brown, De Vries, Matheus y Tomás, entre otros, y por la contribución de los estudios de un grupo de investigadores en educación matemática del pregrado de Estados Unidos, Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC)⁵⁴.

La teoría APOE ayuda a entender el proceso de aprendizaje, porque proporciona explicaciones de los fenómenos que podemos observar en los estudiantes cuando están tratando de comprender los conceptos y, por tanto, orienta la pedagogía que puede tener éxito en este proceso de aprendizaje⁵⁵.

La acción, el proceso, el objeto y el esquema son estructuras mentales construidas por mecanismos de abstracción reflexiva de interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y tematización. Las estructuras y los mecanismos están representados en la Figura 1, y se definen a continuación.

⁵² Thomas Ayers y otros, "Computer Experiences in Learning Composition of Functions", *Computer Experiences in Learning Composition of Functions*, 19, 1988: 248.

⁵³ Asiala y otros, "A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics Education", *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues in Mathematics*, 1996, 6, [mi traducción].

⁵⁴ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 11-15.

⁵⁵ María Trigueros. "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, 17, 2005.

Acción

Es la transformación o manipulación de objetos que el individuo percibe como externos. La acción ocurre cuando el sujeto reacciona ante estímulos externos con datos precisos de cómo actuar en cada paso que da. Algunas acciones van más allá del cálculo numérico⁵⁶. Un ejemplo es la acción de calcular el error cometido al aproximar una función en una variable, en un entorno de un punto a , por la tangente a la función en a . Conociendo el valor de h y el de la derivada $f'(a)$, el error se calcula como,

$$E(a, h) = \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a), & \text{si } h \neq 0 \\ 0, & \text{si } h = 0 \end{cases}.$$

Proceso

Es una reflexión e interiorización de una secuencia o repetición de acciones. El sujeto percibe un proceso como algo interno y bajo su control, que ejecuta la misma acción pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Cuando un estudiante posee la concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describirla y hasta llegar a invertir los pasos⁵⁷.

Por ejemplo, al repetir la acción de aproximar una función diferenciable mediante una función lineal y al reflexionar sobre esta acción se encuentra que la siguiente expresión es válida incluso para $h = 0$ y es conocida como la fórmula de Taylor de primer orden para aproximar $f(a + h) - f(a)$ por medio de la transformación lineal $f'(a)h$,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + hE(a, h).$$

Al interiorizar esta acción podrá establecer que el error cometido es $hE(a, h)$. Además $E(a, h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ y que $hE(a, h)$ es de orden menor que h para valores pequeños de h . En el sentido que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{hE(a, h)}{h} = 0$.

⁵⁶ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 19.

⁵⁷ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 20-21.

Objeto

Son entidades físicas o mentales, que pueden ser el producto de la encapsulación de un proceso. El estudiante está pensando el proceso como un objeto cuando reflexiona sobre las operaciones aplicadas sobre este, toma conciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones (acciones o procesos) sobre el proceso⁵⁸. Por ejemplo, el objeto matemático diferencial de una función real de variable real en un punto a se encapsula en el objeto operador lineal $df(a)$ tal que a cada vector v de \mathbb{R} lo aplica en el elemento $df(a)(v) = f'(a)v$.

Esquema

Es la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas elaborados previamente que conforman un conocimiento individual de un concepto en matemáticas. La formación de esquemas es una actividad dinámica y es un sistema retroalimentado circular.

El sujeto tiende a invocar un esquema para entender, tratar, organizar o dar sentido a una situación problema. Así, una persona tendrá una amplia gama de esquemas que estarán relacionados entre sí en una organización compleja⁵⁹. Por ejemplo, el esquema de diferencial se obtendrá cuando la persona pueda extender la propiedad de aproximar una función diferenciable mediante una función lineal para el caso de funciones definidas entre espacios de cualquier dimensión y pueda aplicar teoremas para determinar la existencia de la diferencial y calcularla.

⁵⁸ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 21-22.

⁵⁹ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 24-25.

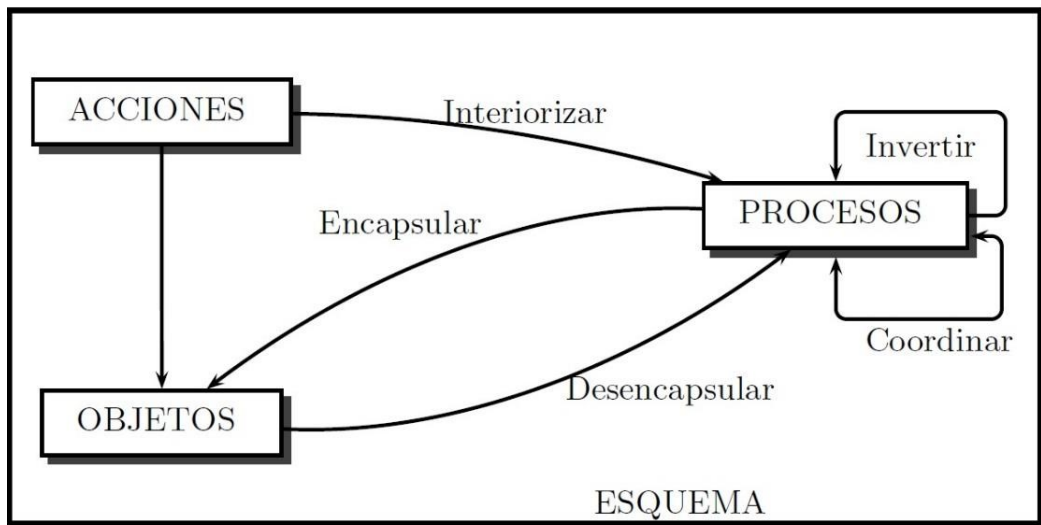


Figura 1. Estructuras mentales y mecanismos de construcción de un concepto.

Fuente: Arnon y otros, 2014.

Niveles de desarrollo del esquema

La construcción y desarrollo de un esquema se caracteriza por tres niveles denominados Intra, Inter y Trans, que se definen a continuación.

Intra

En este nivel, el estudiante centra su atención en una acción repetitiva u operación entre algunos componentes del esquema y los elementos matemáticos que comprende, como acciones, procesos u objetos. Se lleva a cabo de forma aislada respecto a otros elementos cognitivos⁶⁰.

Piaget y García establecen que,

[...] lo propio de este nivel es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de

⁶⁰ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 114.

errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse⁶¹.

En este estudio, el descubrimiento de una acción operatoria se asume como la utilización de uno o más elementos matemáticos en la solución de tareas, para construir el objeto de la diferencial de una función real de variable real y considerarlo de forma aislada o tener la capacidad de establecer algunas relaciones, pero solo como acciones, entre este objeto con la diferencial: de una función vectorial de variable real, un campo escalar y un campo vectorial.

El análisis interno se asume como las representaciones de los elementos matemáticos y las relaciones que se establecen entre estos para configurar la diferencial de una función real de variable real.

Inter

Según Piaget y García, este nivel se caracteriza porque:

Una vez comprendida la operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras similares hasta constituir sistemas que involucran transformaciones. Si bien se presenta una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho que las composiciones son restringidas, ya que solamente pueden proceder de ejemplos contiguos⁶².

Además, las relaciones y transformaciones que logra establecer son entre elementos matemáticos comprendidos como procesos u objetos que componen el esquema. En esta etapa, el estudiante puede comenzar a agrupar elementos contiguos e incluso llamarlos por el mismo nombre⁶³.

Adaptando las ideas anteriores a esta investigación, cuando el estudiante ha comprendido como proceso u objeto la diferencial de una función real de variable real, lo relaciona con el elemento próximo cognitivo (contiguo) de la función vectorial de variable real, que es entendido como proceso, y por mecanismos de coordinación entre

⁶¹ Jean Piaget, *Psicogénesis e historia...* 70.

⁶² Jean Piaget, *Psicogénesis e historia...* 165.

⁶³ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 14 y 116.

estos dos junto con otros procesos construye la nueva estructura mental, la diferencial de una función vectorial de variable real.

En este nivel se empiezan a agrupar las informaciones de naturaleza similar y se comienzan a construir relaciones entre acciones, procesos y objetos.

De manera similar, cuando ha comprendido la diferencial de una función real de variable real como proceso u objeto, la relaciona con el elemento matemático “contiguo”, la función real de variable vectorial o campo escalar entendido como proceso u objeto, y por mecanismos de coordinación de estos y otros procesos construye las siguientes estructuras mentales: la derivada parcial, la derivada direccional y la diferencial de un campo escalar.

Además, empieza a agrupar los elementos anteriores, que son contiguos, en funciones continuas, funciones derivables y funciones diferenciables. Este tipo de relaciones que logra establecer entre los elementos matemáticos son evidencias de la “continuidad cognitiva”, en términos de Piaget.

Trans

En este nivel, “las relaciones están definidas en función de lo que precede, involucrando transformaciones y síntesis entre ellas. Estas síntesis dan por resultado la construcción de estructuras”⁶⁴.

Además, es característico en este nivel que el estudiante, al reflexionar sobre los elementos matemáticos construidos y las relaciones establecidas en el nivel Inter, logre sintetizar y construir estructuras más amplias y coherentes del esquema⁶⁵.

La coherencia del esquema se manifiesta cuando el estudiante toma conciencia de la completez de este, muestra la capacidad de juzgar qué elementos y relaciones del esquema puede aplicar para

⁶⁴ Jean Piaget, *Psicogénesis e historia...* 167.

⁶⁵ Gloria Sánchez-Matamoros, Mercedes García Blanco y Salvador Llinares Ciscar. “El desarrollo del Esquema de derivada”, *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias*, 24, 2006: 87.

resolver situaciones problema y, además, puede percibir propiedades globales que no eran accesibles en otros niveles⁶⁶.

En esta investigación se considera que el estudiante se ubica en este nivel cuando ha comprendido la diferencial de un campo escalar como objeto, lo desencapsula en el proceso que lo generó y lo aplica para determinar la diferenciabilidad de un campo vectorial en un punto del dominio y, en general, para una función en varias variables. Además, puede establecer relaciones de conjunción, condicional, equivalencia lógica, recíproca y contrarrecíproca, entre los elementos que configuran el esquema, a través de teoremas, y los aplica para resolver situaciones problema.

Descomposición genética de un concepto (DG)

En términos de la abstracción reflexiva y con base en datos empíricos, la DG se define como una descripción de las matemáticas involucradas en la estructura del concepto y como la manera en que el sujeto podría hacer construcciones mentales que lo llevarían a su comprensión. Además es una trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto para conjeturar cómo se desarrolla su comprensión aislando pequeñas porciones de las estructuras complejas de pensamiento y dando descripciones explícitas de las posibles relaciones entre los esquemas⁶⁷.

La DG se considera como una propuesta, producto de observaciones de aprendizaje que el sujeto hace conforme aprende el concepto matemático, que se constituirá en un referente para el diseño de tratamientos de instrucción, además esta no es única para un concepto⁶⁸.

La DG se diferencia de la formulación matemática del concepto, porque la formulación se ocupa de cómo el concepto se encuentra en la teoría matemática y el papel que este desempeña en esta teoría⁶⁹.

⁶⁶ Eliécer Aldana Bermúdez, "Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE" (Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca, 2011), 72.

⁶⁷ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 27-28.

⁶⁸ María Trigueros., "La noción de esquema..." 7-8.

⁶⁹ Arnon Ilana y otros, *Apos Theory, A Framework...* 29.

El ciclo ACE, actividades, discusión en clase, ejercicios, que están representados en Figura 2, es el conjunto de actividades con el fin de implementar secuencias de instrucciones basadas en los análisis teóricos que posibilitan construcciones mentales para la comprensión de un concepto matemático.

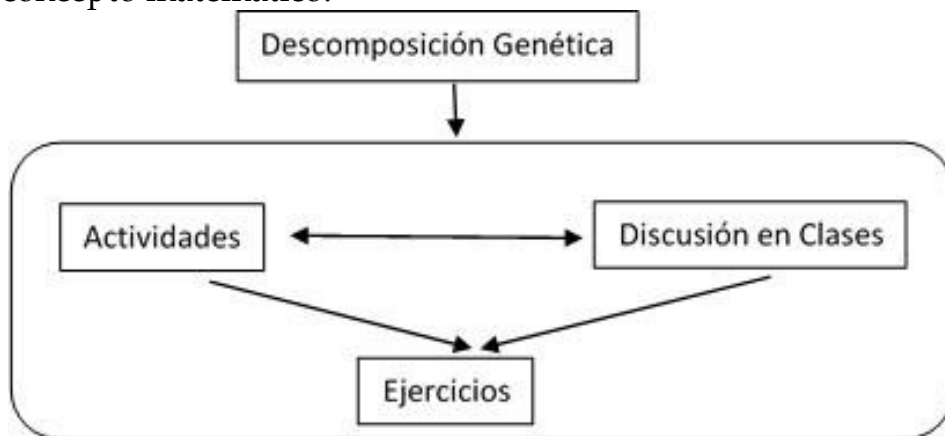


Figura 2. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la DG. Fuente: Arnon y otros, 2014.

METODOLOGÍA

Método de investigación

El tipo de investigación que se utilizó es cualitativa orientada a la comprensión, “que tiene por objetivo describir e interpretar la realidad educativa desde dentro”⁷⁰. Además, teniendo en cuenta que se adoptó el enfoque teórico APOE, el trabajo investigativo es sobre el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes⁷¹ acerca del concepto diferencial de una función en varias variables, quienes participaron en la ejecución de una secuencia de actividades pedagógicas basadas en la teoría APOE o en la enseñanza tradicional.

Al respecto, se hizo un estudio de casos que involucran aspectos descriptivos y explicativos de los temas objeto de estudio⁷².

⁷⁰ Rafael Bisguerra Alzina y otros, “Características generales de la metodología cualitativa”, En *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla. S.A., 2009, 281.

⁷¹ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 29.

⁷² César Augusto Bernal, *Metodología de la investigación*, México: Prentice Hall, 2006, 116.

Se analizó primero la construcción de los conceptos por cada uno de los estudiantes y posteriormente se examinó el desempeño global del grupo sobre la activación de los mecanismos mentales para construir las estructuras de acción, proceso, objeto o esquema, y con esta información se caracterizaron los niveles de desarrollo del esquema de diferencial.

Ámbito de la investigación

La investigación se llevó a cabo en la Universidad Pedagógica de Colombia con estudiantes de programas de pregrado de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas que cursaron la asignatura de Cálculo en varias variables. El rango de edad de los estudiantes es de 16 a 25 años, y provienen de la provincia de la zona de influencia de la UPTC.

El concepto de diferencial de una función en varias variables hace parte del análisis matemático y frecuentemente se desarrolla en la asignatura denominada Cálculo Diferencial e Integral en Campos Escalares y Vectoriales (Cálculo Multivariable, Cálculo III, Análisis Real II). La asignatura tiene como prerrequisito las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral, que comprenden los conceptos de función en una variable, límites, continuidad, derivadas e integrales⁷³.

El programa de Matemáticas tiene un total de 165 créditos e incluye la asignatura Cálculo en varias variables de cuatro créditos (un crédito equivale a 48 horas, entre docencia directa y el tiempo que debe dedicar el estudiante a preparar la asignatura), se imparte durante cuatro horas semanales de docencia directa, para un total 64 horas presenciales y 128 horas de trabajo independiente por parte del estudiante, está previsto desarrollarlo en 16 semanas de clases⁷⁴.

Los objetivos relacionados con el concepto para este curso son:

⁷³ Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas y Estadística, *Proyecto Académico Educativo-PAE Matemáticas*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2010.

⁷⁴ Resolución 6339/2013, de 23 de mayo, del Ministerio de Educación Nacional, por medio de la cual se resuelve la solicitud de renovación de registro calificado del programa de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia ofrecido bajo la metodología presencial en Tunja, Boyacá.

- Generalizar los conceptos del cálculo de una variable y observar similitudes y diferencias con el cálculo en varias variables.
- Comprender los conceptos de límites y continuidad, derivada direccional y parcial, diferencial, diferencial total en campos escalares y vectoriales.
- Aplicar algoritmos para el cálculo de límites, derivadas direccionales, matriz jacobiana.
- Resolver problemas de optimización calculando valores extremos y matriz hessiana.
- Formular y resolver problemas utilizando conceptos y teoremas fundamentales.

Para introducir la noción de diferencial se enseñan los conceptos previos de vectores en el plano y el espacio, funciones vectoriales, funciones en varias variables y límites, en las cuatro primeras semanas, según la planeación temática de la asignatura⁷⁵.

Los contenidos relacionados con el concepto de *diferencial* son: derivada direccional y derivadas parciales, diferencial total, gradiente de un campo escalar, regla de la cadena para derivadas de campos escalares, curvas de nivel, recta normal y plano tangente, derivadas de campos vectoriales, regla de la cadena para derivadas de campos vectoriales, forma matricial de la regla de la cadena, diferenciación implícita. Además, se dedica una unidad a las aplicaciones de las derivadas parciales, que incluye: derivadas de funciones implícitas, máximos y mínimos, puntos de silla, fórmula de Taylor de orden dos para campos escalares, matriz hessiana, criterio de la segunda derivada para extremos de funciones de dos variables, multiplicadores de Lagrange. Está previsto estudiar estos conceptos en cuatro semanas.

La metodología de enseñanza es la tradicional, que consiste en exposición magistral de los conceptos y ejemplos ilustrativos por parte del profesor, la toma de apuntes, desarrollo de ejercicios, solución de

⁷⁵ Programa Académico Matemáticas, “Plan de estudios Cálculo Multivariable”, http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/facultades/f_ciencias/pregrado/matematicas/inf_general/document/IV/calculo_multivariable.pdf, (consultado el 24-8-2017).

problemas y evaluaciones escritas. Las clases se refuerzan con la utilización de *software* a la medida o manipuladores algebraicos como Derive, Matlab, Maple o calculadoras programables.

Los estudiantes complementan el aprendizaje con los textos de Apostol, 1988; Bartle, 1975; Stewart, 2006; Marsden y Tromba, 1991; Thomas, Finney y Weir, 1999. Algunos de estos libros se tendrán en cuenta como parte del análisis teórico.

Fases de la investigación

Comprende un cíclico de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de un tratamiento instruccional, recolección y análisis de información, que se encuentra representado en la Figura 3.

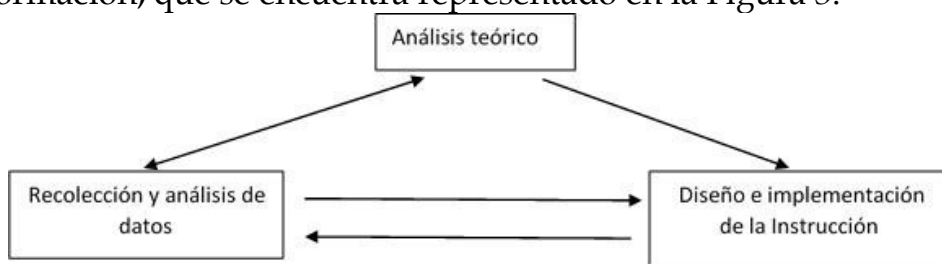


Figura 3. Ciclo de investigación. Fuente: adaptado de Arnon y otros, 2014.

Como lo indican las flechas de la Figura 3, los tres componentes del ciclo de investigación tienen influencia mutua. El análisis teórico dirige el diseño de actividades, clases y ejercicios que, al implementarlos en secuencias de instrucción, tienen el propósito de fomentar las construcciones mentales descritas por la DG. La implementación de la instrucción ofrece la oportunidad para la recolección de datos; y su análisis, que está dirigido por la DG, permite responder las siguientes preguntas: (1) ¿Los estudiantes han construido las estructuras mentales descritas por la DG? (2) ¿Los estudiantes comprenden correctamente el concepto matemático? Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, se debe revisar y reconsiderar la instrucción. Si la respuesta a la primera pregunta es afirmativa, pero la respuesta a la segunda pregunta es negativa, se debe revisar y reconsiderar el análisis teórico. El ciclo se repite hasta cuando las dos respuestas sean afirmativas; situación en la cual se infiere que la evidencia empírica y el análisis teórico describen las

mismas construcciones mentales requeridas para comprender el concepto matemático por los estudiantes⁷⁶.

Primera fase. Análisis teórico del concepto

Esta fase correspondió al análisis de la cognición del concepto de la diferencial de una función en varias variables, a partir de su historia y epistemología, la presentación en textos seleccionados y la experiencia como estudiantes y profesores. Como resultado de este análisis se determinaron los elementos matemáticos (acciones, procesos, objetos y esquemas), las relaciones lógicas entre ellos, los sistemas de representación que configuran el concepto, y se propuso una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante puede desarrollar para comprenderlo, es decir, según el marco teórico, configurar una DG, la cual orienta la intención de la instrucción, la recolección y el análisis de la información.

Segunda fase. Diseño e implementación de una secuencia instruccional

Comprendió el diseño y la aplicación de actividades de instrucción y materiales, para fomentar la construcción de las estructuras mentales predichas por la DG, que incluye acciones sobre objetos, interiorizar las acciones en procesos, encapsular los procesos en objetos, coordinar dos o más procesos para construir nuevos procesos e interactuar con las acciones, procesos y objetos para dar lugar a la tematización del esquema de diferencial. La implementación de la instrucción da oportunidad para la recolección y el análisis de los datos.

Recolección y análisis de la información

Consistió en la recolección de información a través de cuestionarios escritos, entrevistas y mapas conceptuales. Tiene por objeto analizar la información bajo el enfoque teórico y metodológico APOE, mediante la triangulación de los resultados de los instrumentos, para determinar si los estudiantes realizaron las construcciones mentales descritas por la DG, establecer los niveles de comprensión del concepto y el paso de un nivel al siguiente.

⁷⁶ Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework...* 93-94.

Finalizado el proceso iterativo de las tres etapas, se presenta el modelo refinado de la DG del concepto de diferencial que orientará la instrucción, las conclusiones y las perspectivas para el futuro.