

LA COGNICIÓN Y LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE  
DIFERENCIAL, DESDE LA TEORÍA APOE. UN APORTE A LA  
FORMACIÓN DE PROFESORES EN MATEMÁTICAS



**Zagalo Enrique Suárez Aguilar**

**LA COGNICIÓN Y LA ENSEÑANZA DEL  
CONCEPTO DE DIFERENCIAL, DESDE LA TEORÍA  
APOE. UN APORTE A LA FORMACIÓN DE  
PROFESORES EN MATEMÁTICAS**



Colección Tesis Doctorales UPTC-RUDECOLOMBIA  
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia  
Facultad de Ciencias de la Educación  
Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA  
Red de Universidades Estatales de Colombia  
2019

La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas. Suárez Aguilar, Zagalo Enrique. Tunja: Editorial UPTC, 2019, p. 278.

ISBN: 978-958-660-344-7

1. Comprensión, 2. Diferencial, 3. Función en varias variables, 4. Abstracción reflexiva, 5. Esquema.

Dewey. 510.7 Matemáticas. Formación de educadores en Matemáticas.



**Uptc**<sup>®</sup>  
Universidad Pedagógica y  
Tecnológica de Colombia

ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL  
DE ALTA CALIDAD  
MULTICAMPUS  
RESOLUCIÓN 3910 DE 2015 MEN / 6 AÑOS



### **La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas**

Primera Edición, 2019  
200 ejemplares (impresos)  
ISBN: 978-958-660-344-7

Colección Tesis Doctorales UPTC -RUDECOLOMBIA  
Tomo No. 13  
ISBN de la Colección: 978-958-44-3246-9

© Zagalo Enrique Suárez Aguilar  
© Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2019  
© Red de Universidades Estatales de Colombia.  
RUDECOLOMBIA

#### **Rector, UPTC**

Óscar Hernán Ramírez

#### **Comité Editorial**

Manuel Humberto Restrepo Domínguez, Ph.D.  
Enrique Vera López, Ph.D.  
Yolima Bolívar Suárez, Mg.  
Sandra Gabriela Numpaque Piracoca, Mg.  
Olga Yaneth Acuña Rodríguez, Ph.D.  
María Eugenia Morales Puentes, Ph.D.  
Zaida Zarely Ojeda Pérez, Ph.D.  
Carlos Mauricio Moreno Téllez, Ph. D.

#### **Editora en Jefe:**

Lida Esperanza Riscanevo Espitia, Ph.D.

#### **Coordinadora Editorial:**

Andrea María Numpaque Acosta, Mg.

#### **Editorial UPTC**

Edificio Administrativo - Piso 4  
Avenida Central del Norte 39-115  
comite.editorial@uptc.edu.co  
www.uptc.edu.co  
Tunja - Boyacá - Colombia

#### **Impresión**

SB Digital - Publicidad  
Calle 17 No. 13-52 Tunja.  
Tel. 7449246

Libro financiado por el Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA. Este material publicado en papel y versión digital son propiedad de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Se permite la reproducción parcial citando la fuente y con la autorización expresa de los titulares del derecho de autor. Este libro es registrado en Depósito Legal, según lo establecido en la Ley 44 de 1993, el Decreto 460 del 16 de marzo de 1995, el Decreto 2150 de 1995 y el Decreto 358 de 2000.

#### **Libro de investigación.**

Citación: Suárez Aguilar, Zagalo Enrique. *La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas*, Tunja: Editorial Uptc, Colección Tesis Doctorales UPTC-RUDECOLOMBIA. Tomo No. 13, Facultad de Ciencias de la Educación, 2019.

**Colección Tesis Doctorales UPTC- RUDECOLOMBIA  
Tomo No. 13**



**Facultad de Ciencias de la Educación**  
Julio Aldemar Gómez Castañeda, Ph.D.  
Decano

**Directora de la Colección**  
Diana Elvira Soto Arango, Ph.D.  
Directora académica  
Doctorado en Ciencias de la Educación RUDECOLOMBIA, UPTC.

**Subcomité especializado de evaluación de obras de la Facultad de Ciencias de la Educación**  
Dr. Antonio E. de Pedro (Doctor en Historia del Arte)  
Mg. Myriam Cecilia Leguizamón González (Magíster en TIC aplicadas a la Educación)  
Dr. Pedro María Argüello García (Doctor en Antropología)  
Dr. Rafael Enrique Buitrago Bonilla (Doctor en Educación Musical)  
Dra. Claudia Liliana Sánchez Saenz (Doctora en Educación)

**Revisión editorial**  
**Colectivo de publicaciones del Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA**  
Diana Elvira Soto Arango, Ph.D.  
Jaime Andrés Argüello Parra, Ph.D.  
Celina de Jesús Trimiño, Ph.D.  
Sara Cristina Guerrero, Mg.  
Diego Eduardo Naranjo Patiño, Mg.  
Sandra Liliana Bernal Villate, Mg.

**Corrección de estilo**  
Claudia Helena del Carmen Amarillo Forero

**Diseño y diagramación**  
Baudilio Galindo Ávila

**Autor**  
Zagalo Enrique Zuárez Aguilar

Título: La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas

**Imagen Portada:**  
Collage Maurice Fréchet y gráficas resultado de la investigación  
Autor: Zagalo Enrique Zuárez Aguilar

Las ideas expuestas en la obra son responsabilidad exclusiva del autor, la UPTC y el Doctorado en Ciencias de la Educación RUDECOLOMBIA, no se hacen responsables en ningún caso de la autenticidad del escrito.



## Dedicatoria

A Omaidá, Camilo y Sebastián; a mis hermanos; y a mis padres que desde la eternidad bendicen e iluminan el camino por seguir.

“Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad”.

Albert Einstein



# Agradecimientos

A Dios, por darme salud, sapiencia, perseverancia y voluntad para alcanzar esta meta.

Al doctor Eliécer Aldana Bermúdez, de la Universidad del Quindío, por la capacitación sobre marcos teóricos en educación matemática, las sugerencias, las orientaciones y los aportes en el enfoque teórico y metodológico APOE, que contribuyeron a la consolidación y al progreso de la investigación.

Al doctor Juan Francisco Ruiz Hidalgo, de la Universidad de Granada en España, por su colaboración y orientación en temas de análisis funcional y didáctico durante la pasantía internacional.

Al doctor Luis Rico y a la doctora Encarnación Castro, quienes, a través de la orientación de seminarios, textos y artículos, ayudaron a comprender temas relacionados con la investigación.

Al doctor Viçent Font Moll, quien con su amplia experiencia investigativa en educación matemática, me orientó e hizo sugerencias para el desarrollo de la investigación.

Al Doctor Álvaro Calvache Archila por la lectura del texto, por las sugerencias y observaciones que fueron un gran aporte al desarrollo del trabajo.

Al doctor Leonardo Rendón, de la Universidad Nacional de Colombia, por los cursos y seminarios de la Maestría en Matemáticas, en particular sobre la diferenciabilidad, la dirección del trabajo de grado de la Maestría y por sus aportes en la validación del cuestionario.

Al doctor Ángel José Chacón Velasco, por su dedicación, orientación y discusión en la dirección de la investigación.

Al grupo de profesores del programa del Doctorado en Educación: Diana Elvira Soto, Celina Trimiño, Alfonso Jiménez, Aracely

Forero, Martha Pardo, Carlos Londoño, Nubia Agudelo, Jorge Tomás Uribe, Wilson Valenzuela, Luisa Amézquita, por compartir sus conocimientos y contribuir en mi formación doctoral.

Al profesor Luis Alfonso Salcedo Plazas, director de la Escuela de Matemáticas y Estadística, de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), y al Comité Curricular, por la asignación académica en semestres consecutivos de los cursos de Cálculo Multivariable, Análisis Real II, y Métodos Numéricos, donde se diseñaron, aplicaron y depuraron actividades incluidas en el trabajo.

A los profesores en la línea de análisis y didáctica de la matemática: Alejandra Sánchez, Gilberto Pérez, Misael González, Luis Carlos Canarúa, Miguel Arcángel Díaz, por sus aportes y observaciones en la validación del cuestionario.

A Omaidá Sepúlveda Delgado, directora del Grupo de Álgebra y Análisis, y a la Dirección de Investigaciones de la UPTC, por la gestión y suministro de equipos y *software* para el desarrollo del trabajo.

A los estudiantes de formación matemática de la UPTC del programa de Matemáticas, por su colaboración, aportes y participación en las actividades del proceso investigativo.

A Omaidá, Camilo y Sebastián, por su paciencia, colaboración y estímulo.

## CONTENIDO

Presentación.....	23
Introducción.....	27
Marco Referencial.....	34
Pensamiento matemático avanzado (PMA) .....	35
Generalización y abstracción .....	37
Intuición y rigor .....	38
Síntesis y análisis.....	38
La prueba matemática.....	39
La abstracción reflexiva .....	41
Representar .....	44
Coordinar .....	44
Encapsular.....	44
Generalizar.....	45
Invertir .....	45
La teoría APOE .....	45
Acción.....	47
Proceso.....	47
Objeto.....	48
Esquema .....	48
Niveles de desarrollo del esquema .....	49
Descomposición genética de un concepto (DG).....	52
Metodología .....	53
Método de investigación .....	53
Ámbito de la investigación .....	54

Fases de la investigación .....	56
Primera fase. Análisis teórico del concepto .....	57
Segunda fase. Diseño e implementación de una secuencia instruccional .....	57
Recolección y análisis de la información .....	57
Análisis teórico de la diferencial .....	59
Historia del concepto de la diferencial .....	59
La diferencial según Leibniz y Newton .....	60
La diferencial según Cauchy .....	64
La diferencial según Fréchet .....	65
Análisis de la diferencial en los libros de texto .....	67
Esquema del concepto de diferencial .....	107
Elementos matemáticos .....	108
Relaciones lógicas .....	124
Sistemas de representación .....	125
Descomposición genética del concepto de la diferencial .....	125
A. Construcciones previas .....	126
B. Construcción del objeto derivada direccional de una función real de variable vectorial DD .....	127
C. Construcción del objeto derivada parcial de una función real de variable vectorial o CE .....	128
D. Construcción del objeto derivada de una función real de variable vectorial en un punto respecto a un vector DFRV .....	130
E. Construcción del objeto diferencial de una función real de variable real DIFR .....	130
F. Construcción del objeto diferencial de una función vectorial de variable real DIFVR .....	132
G. Construcción del objeto diferencial de un campo escalar .....	133

H. Construcción del objeto diferencial de un campo vectorial DICV .....	135
Diseño e implementación de la instrucción .....	137
Actividades computacionales basadas en la DG .....	137
A. Construcciones previas .....	138
B. Construcción del objeto derivada direccional de una función real de variable vectorial DD .....	141
C. Construcción del objeto derivada parcial de una función real de variable vectorial o CE .....	147
D. Derivada de una función en varias variables .....	151
E. Construcción del objeto diferencial de una función real de variable real DIFR .....	154
F. Construcción del objeto diferencial de una función vectorial de variable real DIFVR .....	156
G. Construcción del objeto diferencial de un campo escalar.....	158
H. Construcción del objeto diferencial de un campo vectorial DICV .....	161
I. Teoremas fundamentales .....	167
Diseño del cuestionario .....	174
Identificación de los contenidos del cuestionario .....	174
Elaboración del precuestionario .....	175
Sujetos.....	176
Validación del cuestionario por expertos.....	176
Cuestionario definitivo .....	183
Recolección y análisis de la información .....	205
Primera etapa: identificar categorías del cuestionario definitivo.	206
Segunda etapa: relaciones entre los elementos matemáticos.....	213
Tercera etapa: análisis de las entrevistas.....	223

Cuarta etapa: niveles de desarrollo del esquema .....	228
Nivel Intra 1 .....	228
Nivel Intra .....	229
Nivel Inter 1 .....	229
Nivel Inter 2 .....	229
Nivel Inter .....	230
Nivel Trans 1 .....	230
Nivel Trans .....	230
Resultados .....	233
Análisis de cada estudiante.....	233
Nivel Intra .....	234
Nivel Inter .....	235
Nivel Trans .....	238
Análisis global de los estudiantes .....	244
Desarrollo del esquema del concepto de diferencial .....	246
Conclusiones .....	259
Sobre el fenómeno de la comprensión.....	259
Sobre el análisis del concepto .....	261
Elementos matemáticos .....	262
Relaciones lógicas .....	262
Registros de representación. ....	264
Implicaciones en la enseñanza.....	264
Sobre el desarrollo del esquema.....	266
Limitaciones y perspectivas futuras .....	270
Bibliografía .....	273
Libros.....	273

Artículos de Revistas.....	275
Consultas de Internet.....	276
Documento legal.....	276

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Estructuras mentales y mecanismos de construcción de un concepto. Fuente: Arnon y otros, 2014.	49
Figura 2. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la DG. Fuente: Arnon y otros, 2014.	53
Figura 3. Ciclo de investigación. Fuente: adaptado de Arnon y otros, 2014.	56
Figura 4. Función real de variable real, $y = x^2 + 1$ . Fuente: el autor	110
Figura 5. Función vectorial de variable real, $f(t) = (\cos t, \sin t)$ . Fuente: el autor	110
Figura 6. Campo Escalar, $f(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1$ : Fuente: el autor	110
Figura 7. Campo vectorial, $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Fuente: el autor	111
Figura 8. Plano en dirección $u$ , corta la superficie $z = f(x, y)$ . Fuente: el autor	112
Figura 9. Tangente a la curva de intersección del plano en dirección $u$ con la superficie $z = f(x, y)$ .	112
Figura 10. Tangentes a las curvas $C1$ y $C2$ . Fuente: el autor	113
Figura 11. Plano $y = c$ , corta la superficie $z = f(x, y)$ . Fuente: el autor	114
Figura 12. Plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$ . Fuente: el autor	115
Figura 13. Interpretación geométrica de la diferencial: Fuente: el autor	117
Figura 14. Representación de la diferencial de una función vectorial de variable real. Fuente: el autor.	118
Figura 15. Interpretación geométrica de la diferencial de un campo escalar en tres dimensiones. Fuente: Stewart, 2002, p. 914.	123
Figura 16. Relaciones de la diferenciabilidad y propiedades locales	123
Figura 17. Función vectorial $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ . Fuente: el autor	139
Figura 18. Campo escalar $f(x, y) = z = y^2/9 - x^2/16 - 1$ . Fuente: el autor.	140

Figura 19. Recta tangente a la función  $f(x) = x^2$ , en el punto (2,4).  
 Fuente: el autor..... 143

Figura 20. Tangente a la función  $f(x) = 4 - x^2$  en el punto (1,3).  
 Fuente: el autor..... 144

Figura 21. Interpretación geométrica de la derivada direccional, el plano de la dirección del vector  $u$ , corta la gráfica de la superficie. 146

Figura 22. Interpretación geométrica de la derivada direccional, la pendiente de la recta tangente a la curva formada por la intersección del plano en la dirección  $u$  y la gráfica del campo escalar  $z = f(x, y)$  ..... 147

Figura 23. Interpretación geométrica de la derivada parcial de  $f$  respecto a  $x$ ,  $\partial f / \partial x(1,1)$ . Fuente: el autor. .... 150

Figura 24. Interpretación geométrica de la derivada parcial de  $f$  respecto a  $y$ ,  $\partial f / \partial y(1,1)$ . Fuente: el autor ..... 150

Figura 25. Interpretación geométrica de la diferencial  $f(x) = x^2$  en  $x=2$ . Fuente: el autor. .... 156

Figura 26. Interpretación geométrica de la diferencial  $f(t) = (2\cos t, \sin t, t)$  en el punto  $a = f(t_0) = f(3\pi) = (2\cos 3\pi, \sin 3\pi, 3\pi)$ .  
 Fuente: el autor..... 157

Figura 27. Plano tangente a la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el punto (1,1,2). Fuente: el autor ..... 160

Figura 28. Interpretación geométrica de la diferencial de  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en el punto (1,1,2). Fuente: el autor. .... 161

Figura 29. Interpretación geométrica del espacio tangente a una superficie en forma paramétrica. Fuente: el autor. .... 166

Figura 30. Interpretación geométrica del espacio tangente a una superficie en forma paramétrica. Fuente: el autor. .... 166

Figura 31. Interpretación geométrica de una función continua pero no diferenciable en (0,0). Fuente: el autor..... 169

Figura 32. Interpretación geométrica de una función discontinua y no diferenciable en (0,0). Fuente: el autor. .... 171

Figura 33. Interpretación geométrica de una función diferenciable en (0,0). Fuente: el autor. .... 173

Figura 34. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 1..... 178

Figura 35. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 2..... 178

Figura 36. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 3..... 179

Figura 37. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 4..... 179

Figura 38. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 5..... 180

Figura 39. Representaciones, grados de dificultad y relevancia, de la tarea 6..... 180

Figura 40. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 7..... 181

Figura 41. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 8..... 181

Figura 42. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 9..... 182

Figura 43. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 10..... 182

Figura 44. Gráfica de la solución de la tarea 1. .... 185

Figura 45. Tangente a la curva de intersección del plano  $x = 1$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el punto (1,2,5). Fuente: el autor..... 189

Figura 46. Tangente a la curva de intersección del plano  $y = 2$  y la superficie  $z = x^2 + y^2$  en el punto (1,2,5). Fuente: el autor..... 190

Figura 47. Red semántica de la Tarea 1. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. .... 214

Figura 48. Red semántica de la Tarea 2. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. .... 215

Figura 49. Red semántica de la Tarea 3. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. .... 215

Figura 50. Red semántica de la Tarea 4. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. .... 216

Figura 51. Red semántica de la Tarea 5. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. ....	217
Figura 52. Red semántica de la Tarea 6. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. ....	218
Figura 53. Red semántica de la Tarea 7. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. ....	219
Figura 54. Red semántica de la Tarea 8. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. ....	220
Figura 55. Red semántica de la Tarea 8. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. ....	220
Figura 56. Red semántica de la Tarea 10. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. ....	221
Figura 57. Red semántica de la DG. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. ....	222
Figura 58. Red semántica de la entrevista ET1E1. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor. ....	226

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Reverté.....	72
Tabla 2. Contenidos sobre diferencial. Editorial John Wiley & Sons	75
Tabla 3. Contenidos sobre la diferencial. Editorial IMPA.....	79
Tabla 4. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Paranifo .....	82
Tabla 5. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Harla .....	87
Tabla 6. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Thomson.....	92
Tabla 7. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Pearson .....	98
Tabla 8. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Limusa. ....	102
Tabla 9. Elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial según los libros de texto analizados .....	106
Tabla 10. Resumen de los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial y que aparecen reiteradamente en los libros de texto analizados.....	107
Tabla 11. Elementos matemáticos y sistemas de representación del concepto de diferencial.....	122
Tabla 12. Encuesta sobre la Tarea 1 del cuestionario .....	177
Tabla 13. Categoría y subcategorías que emergen de las Tareas. ....	211
Tabla. 14 Categorías mostradas por los estudiantes al resolver las tareas del cuestionario .....	213
Tabla 15. Análisis de la entrevista de la Tarea 1, Estudiante 1. ....	225
Tabla 16. Categorías mostradas por los estudiantes en las entrevistas. ....	228
Tabla 17. Caracterización de los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables...	231
Tabla 18. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación del nivel Intra 1 e Intra del esquema de diferencial.....	254

Tabla 19. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación del nivel Inter 1, Inter 2 e Inter del esquema de diferencial de una función en varias variables ..... 256

Tabla 20. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan el nivel Trans 1 y Trans del esquema de diferencial de una función en varias variables ..... 257

Tabla 21. Estudiantes y características según niveles de desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables. .... 258



## PRESENTACIÓN

El propósito de la investigación denominada “La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas”, es describir y explicar la forma en que los estudiantes de pregrado comprenden la diferencial de una función en varias variables, que es una propiedad de algunas aplicaciones matemáticas con dominio en un subconjunto abierto del espacio  $n$  –dimensional  $\mathbb{R}^n$  y recorrido en el espacio  $m$ -dimensional  $\mathbb{R}^m$  de poder ser aproximadas por una transformación lineal en un punto de su dominio<sup>1</sup>.

El estudio del fenómeno de la comprensión, fundamentado en la noción del desarrollo del esquema, es importante en didáctica de la matemática en el campo de la formación de profesores, porque se determinan aspectos en los que hay que poner mayor énfasis en la docencia y proporciona indicadores sobre la forma de hacerlo a través del diseño actividades de instrucción y la elaboración de material didáctico validado en pruebas experimentales<sup>2</sup>.

El marco teórico utilizado es APOE, un enfoque para el estudio de la comprensión conocido en inglés como Actions, Process, Object, Schema (APOS), desarrollado por Dubinsky y sus colegas, con la contribución de trabajos de investigaciones en educación matemática. Este enfoque extiende las ideas de la abstracción reflexiva del pensamiento matemático elemental al avanzado y define la comprensión como el resultado de realizar acciones sobre objetos, de interiorizar las acciones en procesos, coordinar dos o más procesos para generar uno nuevo, encapsular procesos para construir objetos o desencapsular objetos en procesos y organizar las estructuras de

---

<sup>1</sup> Tom Apostol, *Calculus Volumen 2*. Barcelona: Reverté, 1988, 328.

<sup>2</sup> María Trigueros, “La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior”, *Educación Matemática*, 17, 2005: 6.

acciones, procesos y objetos en esquemas, con el propósito de utilizarlos en la resolución de problemas. El progreso en la comprensión se produce cuando se reconstruye una situación problemática similar a una ya resuelta, pero con un nivel superior de dificultad<sup>3</sup>.

El tipo de investigación es cualitativa orientada a la comprensión, que tiene por objetivo describir e interpretar la realidad educativa desde adentro. Y con este propósito se realizó un ciclo de tres componentes: el análisis teórico, el diseño e implementación de la instrucción y la recolección y análisis de información<sup>4</sup>.

El propósito del análisis teórico es establecer y caracterizar los elementos matemáticos, las relaciones lógicas que configuran el concepto y sus formas de representación, a través del estudio histórico y epistemológico y de la presentación en los libros de texto de la diferencial de una función en varias variables (DIFVV) y de los conceptos relacionados. Este análisis permitió diseñar una ruta hipotética de aprendizaje del concepto, denominada descomposición genética preliminar (DG), que orientó el diseño de actividades, clases y ejercicios, denominado el ciclo ACE.

La implementación de la instrucción fomentó la construcción de las estructuras mentales descritas por la descomposición genética preliminar (DG) y facilitó recoger la información a través de la aplicación de un cuestionario y la realización de entrevistas semiestructuradas.

El análisis de la información según la DG permitió inferir que la evidencia empírica y el análisis teórico describieron las mismas construcciones mentales requeridas para comprender el concepto por algunos estudiantes, ubicar a cada estudiante en un nivel de desarrollo del esquema, detectar errores y dificultades, y refinar la DG.

---

<sup>3</sup> Mark Asiala y otros, "A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education", *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1996, 1-32.

<sup>4</sup> Ilana Arnon y otros, *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer Science, 2014, 1-4.

Los resultados obtenidos del desarrollo del esquema están vinculados con la capacidad que demuestran los estudiantes para relacionar los elementos que configuran la DIFVV durante la resolución de las tareas del cuestionario y las argumentaciones en las entrevistas. Las características de cada nivel se describieron en términos de la teoría, la idea de síntesis, la coherencia y completez del esquema, y se organizaron de la siguiente forma:

Nivel Intra. Se consideran dos subniveles: el Intra 1, donde se ubicaron los estudiantes que no comprenden como objeto la diferencial de ninguna función de varias variables; el Intra, donde se ubicaron los estudiantes que comprenden la diferencial de una función real de variable real.

Nivel Inter. Tiene tres subniveles: el Inter 1, que corresponde a estudiantes que comprenden la diferencial de una función vectorial de variable real; Inter 2, donde se ubicaron los estudiantes que comprenden la derivada parcial y la derivada direccional; Inter, donde se ubicaron quienes comprenden la diferencial de un campo escalar.

Nivel Trans. Incorpora dos subniveles: Trans 1, que corresponde a estudiantes que demostraron comprender la diferencial de un campo vectorial; y Trans, donde se ubicaron estudiantes que comprenden la diferencial de cualquier función en varias variables.

Al finalizar el ciclo de investigación se expone la versión refinada de la DG, según los errores y dificultades que tuvieron los estudiantes para comprender la DIFVV.

*Palabras clave:* comprensión, diferencial, función en varias variables, APOE, abstracción reflexiva, esquema, niveles de desarrollo.



## INTRODUCCIÓN

La investigación tiene como propósito describir y explicar la forma en que los estudiantes de pregrado comprenden el concepto de la diferencial de una función en varias variables (DIFVV) y caracterizar los niveles de desarrollo del esquema, que se define como “la estructura o la organización de acciones, que se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas”<sup>5</sup>.

Al respecto, la comprensión es un proceso interminable de construcción de esquemas iterativos infinitos, a través del desarrollo cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano superior de pensamiento, conocido como abstracción reflexiva<sup>6</sup>.

Investigar sobre la comprensión es muy importante en la formación de docentes para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes – porque permite obtener información útil para diseñar e implementar tratamientos de instrucción, elaborar y utilizar material didáctico validado por pruebas experimentales –, y para posibilitar la utilización y aplicación de este concepto en situaciones problema.

En este sentido, Stewart manifiesta que pretender buenos niveles de comprensión debe ser el principal objetivo de la enseñanza del cálculo y para lograrlo los temas deben tener variadas representaciones que permitan cambiar la forma de enseñar el razonamiento conceptual<sup>7</sup>. Sin embargo, es un proceso complejo,

---

<sup>5</sup> Jean Piaget y Barbel Inhelder, *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata, 1978, 20.

<sup>6</sup> Ilana Arnon y otros, *APOS Theory, ...* 7.

<sup>7</sup> James Stewart, *Cálculo Multivariable*. Mexico: Thompson. Learning, 2002, 2.

debido a las múltiples interacciones entre los aspectos históricos, teóricos, epistemológicos, pedagógicos y didácticos que intervienen.

Para afrontar esta complejidad, la comunidad de educación matemática ha desarrollado y validado diversos enfoques teóricos, como los constructivistas, socioconstructivistas, interaccionistas y antropológicos, entre otros. Dentro de los enfoques constructivistas está APOE, que para estudiar la cognición y la enseñanza de los conceptos analiza los objetos mentales, sus transformaciones y relaciones.

El enfoque APOE ha demostrado ser pertinente para investigar y explicar cómo los estudiantes universitarios comprenden y son capaces de integrar los conceptos matemáticos del pensamiento matemático avanzado (PMA). Por eso, los estudios apoyados en la noción de esquema señalan las relaciones en las que hay que poner mayor énfasis en la docencia y proporcionan indicadores de la forma de hacerlo<sup>8</sup>.

Respecto a una función en varias variables, esta se define como una aplicación con dominio en un subconjunto abierto del espacio  $n$  –dimensional  $\mathbb{R}^n$  y recorrido en el espacio  $m$ -dimensional  $\mathbb{R}^m$ . Sobre la importancia de este tipo de funciones, Thomas y otros autores afirman que desde el punto de vista matemático y de sus aplicaciones, estas se presentan con más frecuencia que las funciones de una sola variable, el cálculo es aún más complejo y su desarrollo es uno de los logros más contundentes de la ciencia<sup>9</sup>.

Una complejidad en su estudio se manifiesta cuando [...] al trabajar con aplicaciones definidas sobre abiertos del espacio  $n$  –dimensional,  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , carece de sentido considerar cocientes incrementales de tales aplicaciones y por lo tanto no se puede generalizar el concepto de derivada en esos términos, sino en términos de la diferencial de una función. Sin embargo, es posible generalizar el concepto de derivada a subespacios de dimensión uno. Aparece así

---

<sup>8</sup> María Trigueros, “La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior”, *Educación Matemática*, 17, 2005: 5-31.

<sup>9</sup> George Thomas y otros, *Cálculo con geometría analítica. 6a. edición*, Bogotá: Addison-Wesley Iberoamericana, 1999, 909.

el concepto de derivada direccional y, como caso particular, la derivada parcial<sup>10</sup>.

La diferencial de una función en varias variables es una propiedad de algunas aplicaciones matemáticas con dominio en un subconjunto abierto del espacio  $n$  –dimensional  $\mathbb{R}^n$  y recorrido en el espacio  $m$ -dimensional  $\mathbb{R}^m$  de poder ser aproximadas por una transformación lineal en un punto de su dominio<sup>11</sup>.

Sobre la historia del concepto de diferenciabilidad, este generó controversia entre los matemáticos que hicieron aportes para su desarrollo, sobre la conveniencia de su enseñanza y aprendizaje en los niveles secundario y superior, como se evidencia desde los precursores del cálculo, Fermat, Barrow, Newton y Leibniz, hasta la actualidad. Entre las razones que propiciaron este hecho se pueden mencionar el haber considerado en la evolución del concepto cantidades como metafísicas (infinitamente pequeñas), no se había formalizado el concepto de límite y la falta de claridad del lenguaje utilizado para su representación.

Además, la comprensión de la DIFVV presenta obstáculos epistemológicos, debido a que varias propiedades que se cumplen para contextos restringidos a funciones en una variable, no se cumplen para funciones de varias variables, tales como las siguientes:

- Existen funciones en dos o más variables que pueden ser continuas respecto a cada variable separadamente y en cambio ser discontinuas como función de dos o más variables. Ejemplo, la función,

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0,$$

es separadamente continua respecto a las variable  $x$  e  $y$  en  $x=0$  y  $y=0$ , respectivamente; sin embargo, es discontinua en el punto  $(0, 0)$ . Por tanto, la existencia de las derivadas parciales de una

---

<sup>10</sup> Félix Galindo Soto y otros, *Cálculo infinitesimal en varias variables. Guía práctica*. Madrid: Paraninfo, 2005, 47.

<sup>11</sup> Tom Apostol, *Calculus Volumen 2*. Barcelona: Reverté, 1988, 328.

función en un punto no garantiza la existencia de todas las derivadas direccionales de la función en este punto<sup>12</sup>.

- Existen funciones que, aunque poseen todas las derivadas direccionales en un punto, no son continuas en el punto y, por tanto, no son diferenciables allí. Es decir, la condición que la derivabilidad de una función en un punto implica la continuidad de la función en este, es válida para funciones en una variable, pero no se cumple para funciones de varias variables. Por ejemplo, para la función,

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0, y) = 0,$$

posee derivadas direccionales en  $(0,0)$ , en cualquier vector dirección, sin embargo no es continua en  $(0,0)$ <sup>13</sup>.

- Existen funciones que poseen las derivadas parciales en un punto, pero no son diferenciables en este, por ejemplo la función

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = (0,0),$$

es continua y las derivadas parciales existen en  $(0,0)$  pero no es diferenciable en este punto<sup>14</sup>.

- Existe la tendencia en estudiantes y profesores a creer que el concepto de diferencial es equivalente al de derivada, debido a los conocimientos previos de estos conceptos en funciones reales de variable real, lo cual, en ausencia de contraejemplos para funciones en varias variables, crea obstáculos cognitivos. Otro aspecto es que no comprenden fácilmente la derivada como una transformación lineal.

Además, en la organización del cálculo, el concepto de diferencial tiene un papel secundario respecto al de la derivada, atribuido a Cauchy, porque no considera la diferencial como un incremento infinitesimal, que ocasiona inconvenientes para interpretarla como la posibilidad de aproximar la variación de la

---

<sup>12</sup> Rober Bartle, *The Elements of Real Analysis*. New York: Jhon Wiley & Sons, 1975, 356.

<sup>13</sup> Tom Apostol, *Calculus Volumen 2...* 314.

<sup>14</sup> Robert Bartle, *The Elements...* 352.

función en vecindades de un punto por una transformación lineal más un error, situación que es conocida como la fórmula de Taylor de primer orden,

$$f(a + v) - f(a) = T_a(v) + \|v\|E(a, v).$$

Sin embargo, la diferencial ocupa el centro del sistema conceptual del cálculo, en el que la mayoría de las aplicaciones de este objeto matemático a problemas de ingeniería es posible, en virtud de que los procesos y magnitudes se modelan como funciones diferenciales en un punto o en un abierto<sup>15</sup>.

Por eso, las funciones en varias variables y sus diferenciales se utilizan para diseñar modelos en términos matemáticos que describen el comportamiento de un fenómeno o sistema. Las leyes que rigen dicho sistema implican razón o tasa de cambio de una o más variables, y las relaciones se describen por ecuaciones o sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales.

En lo referente a la metodología de la enseñanza del concepto de diferencial se presenta una disyuntiva: si optar por un énfasis del cálculo utilizando reglas de diferenciación de funciones de una variable para hallar derivadas direccionales y parciales, gradientes, matrices jacobianas, o si optar por el énfasis del análisis matemático.

Por tanto, los aspectos expuestos anteriormente motivan y hacen pertinente la investigación acerca de presentar un modelo de cognición de la diferencial, validado y refinado, y establecer los niveles de desarrollo del esquema que darán directrices para determinar en cuáles aspectos se debe poner mayor énfasis en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para cumplir con estos propósitos, el texto, resultado de la investigación, se organizó de la siguiente forma:

El capítulo 2, “Marco de referencia”, comprende la fundamentación teórica y metodológica de la investigación sobre la comprensión del concepto de diferencial.

---

<sup>15</sup> Pablo Ignacio Gómez Fuentes y Juan Raúl Delgado Rubí, “La diferenciabilidad de funciones en varias variables, una propuesta de tratamiento metodológico”, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 25, 2012: 605.

El capítulo 3, titulado “Análisis teórico de la diferencial”, explica el análisis teórico del concepto de la DIFVV. Este capítulo está organizado en las siguientes secciones:

- Historia de la evolución del concepto: su propósito es establecer los alcances, las limitaciones, los éxitos, las dificultades y las rutas que los matemáticos siguieron para la invención, el desarrollo y la formalización del concepto.
- Análisis de la diferencial en los libros de texto: detalla la organización lógica y didáctica del concepto que es expuesto por diferentes autores.
- El esquema del concepto de diferencial: presenta los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los sistemas de representación que configuran el concepto y que se consideran necesarios para la comprensión de este.
- Descomposición genética DG preliminar de la DIFVV: propone un modelo hipotético que un estudiante debe seguir para comprender el concepto en términos de las estructuras mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas, así como los mecanismos para su construcción, que conciernen a la interiorización de acciones, la coordinación o inversión de procesos, la encapsulación de procesos en objetos o desencapsulación de objetos en procesos y la tematización del esquema.

En el capítulo 4, denominado “Diseño e implementación de la instrucción, teniendo como referencia la DG preliminar de la diferencial”, se muestra un conjunto de actividades de instrucción mediadas por programas informáticos en el *software* MATLAB, que fueron diseñadas, implementadas y depuradas con los grupos de estudiantes que participaron en el ciclo de actividades, clases y ejercicios (ACE), y que tenían como propósito fomentar la construcción de las estructuras mentales con la activación de los respectivos mecanismos utilizando diferentes formas de representación.

Además, se presenta el diseño y la validación de un cuestionario que permitió recoger y analizar la información siguiendo la DG preliminar del concepto.

En el capítulo 5 se expone la recolección de la información, según la DG del concepto, el ciclo ACE con los grupos de estudiantes que participaron en la investigación, la solución plausible del cuestionario, las soluciones de los estudiantes al cuestionario definitivo y las entrevistas. Posteriormente se analizó esta información en las siguientes etapas.

ET1. Codificación de las categorías para cada tarea, según las soluciones individuales del cuestionario y la solución plausible del cuestionario.

ET2. Determinación de las relaciones entre los elementos matemáticos en la solución plausible del cuestionario, según la DG preliminar y las categorías identificadas en la etapa anterior, lo cual generó redes semánticas para cada tarea y una general.

ET3. Análisis de las entrevistas semiestructuradas según la DG.

ET4. Análisis del fenómeno de la comprensión de la DIFVV con la información recogida y organizada en las etapas anteriores.

ET5. Agrupación de las categorías para caracterizar los niveles y subniveles de comprensión del desarrollo del esquema de la DIFVV. Esta etapa permitió validar y refinar la DG preliminar.

En el capítulo 6 se muestran los resultados del desarrollo del esquema de la DIFVV por cada estudiante, según el análisis efectuado en el capítulo anterior. Los niveles se describen y explican en términos de los elementos matemáticos, de las relaciones lógicas que se lograron establecer entre estos y los sistemas de representación utilizados.

Posteriormente, se expone un análisis global del desempeño de los estudiantes según los niveles previamente determinados, el desarrollo del esquema de la DIFVV y una versión refinada de la DG.

En el capítulo 7 se indican las conclusiones sobre los siguientes aspectos de la investigación: el fenómeno de la comprensión, el análisis del concepto, las implicaciones en la enseñanza, el desarrollo del esquema, las limitaciones y las perspectivas futuras.

En último término está la bibliografía, que corresponde a la relación de libros y artículos de investigación que fueron referencia de consulta para llevar a cabo el trabajo de investigación.