LA COGNICIÓN Y LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL, DESDE LA TEORÍA APOE. UN APORTE A LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN MATEMÁTICAS

Zagalo Enrique Suárez Aguilar

LA COGNICIÓN Y LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DIFERENCIAL, DESDE LA TEORÍA APOE. UN APORTE A LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN MATEMÁTICAS

CIENCIAS
DOCTORADO
EDUCACION
RUDECOLOMBIA

Colección Tesis Doctorales UPTC-RUDECOLOMBIA
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Facultad de Ciencias de la Educación
Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA
Red de Universidades Estatales de Colombia
2019

La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas. Suárez Aguilar, Zagalo Enrique. Tunja: Editorial UPTC, 2019, p. 278.

ISBN: 978-958-660-344-7

1. Comprensión, 2. Diferencial, 3. Función en varias variables, 4. Abstracción reflexiva, 5. Esquema.

Dewey. 510.7 Matemáticas. Formación de educadores en Matemáticas.

La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas

Primera Edición, 2019
200 ejemplares (impresos)
ISBN: 978-958-660-344-7

Colección Tesis Doctorales UPTC -RUDECOLOMBIA
Tomo No. 13
ISBN de la Colección: 978-958-44-3246-9

Editorial UPTC
Edificio Administrativo – Piso 4
Avenida Central del Norte 39-115
comite.editorial@uptc.edu.co
www.uptc.edu.co
Tunja - Boyacá - Colombia

Impresión
SB Digital - Publicidad
Calle 17 No. 13-52 Tunja.
Tel. 7449246

Libro financiado por el Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA.

Libro de investigación.

Citación: Suárez Aguilar, Zagalo Enrique. *La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas*, Tunja: Editorial Uptc, Colección Tesis Doctorales UPTC-RUDECOLOMBIA. Tomo No. 13, Facultad de Ciencias de la Educación, 2019.

Colección Tesis Doctorales UPTC- RUDECOLOMBIA
Tomo No. 13

Facultad de Ciencias de la Educación
Julio Aldemar Gómez Castañeda, Ph.D.
Decano

Directora de la Colección
Diana Elvira Soto Arango, Ph.D.
Directora académica
Doctorado en Ciencias de la Educación RUDECOLOMBIA, UPTC.

Subcomité especializado de evaluación de obras de la Facultad de Ciencias de la Educación
Dr. Antonio E. de Pedro (Doctor en Historia del Arte)
Mg. Myriam Cecilia Leguizamón González (Magíster en TIC aplicadas a la Educación)
Dr. Pedro María Argüello García (Doctor en Antropología)
Dr. Rafael Enrique Buitrago Bonilla (Doctor en Educación Musical)
Dra. Claudia Liliana Sánchez Saenz (Doctora en Educación)

Revisión editorial
Colectivo de publicaciones del Doctorado en Ciencias de la Educación UPTC-RUDECOLOMBIA
Diana Elvira Soto Arango, Ph.D.
Jaime Andrés Argüello Parra, Ph.D.
Celina de Jesús Trimiño, Ph.D.
Sara Cristina Guerrero, Mg.
Diego Eduardo Naranjo Patiño, Mg.
Sandra Liliana Bernal Villate, Mg.

Corrección de estilo
Claudia Helena del Carmen Amarillo Forero

Diseño y diagramación
Baudilio Galindo Ávila

Autor
Zagalo Enrique Zuárez Aguilar

Título: La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas

Imagen Portada:
Collage Maurice Fréchet y gráficas resultado de la investigación
Autor: Zagalo Enrique Zuárez Aguilar

Dedicatoria

A Omaida, Camilo y Sebastián; a mis hermanos; y a mis padres que desde la eternidad bendicen e iluminan el camino por seguir.

"Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad".

Albert Einstein

Agradecimientos

A Dios, por darme salud, sapiencia, perseverancia y voluntad para alcanzar esta meta.

Al doctor Eliécer Aldana Bermúdez, de la Universidad del Quindío, por la capacitación sobre marcos teóricos en educación matemática, las sugerencias, las orientaciones y los aportes en el enfoque teórico y metodológico APOE, que contribuyeron a la consolidación y al progreso de la investigación.

Al doctor Juan Francisco Ruiz Hidalgo, de la Universidad de Granada en España, por su colaboración y orientación en temas de análisis funcional y didáctico durante la pasantía internacional.

Al doctor Luis Rico y a la doctora Encarnación Castro, quienes, a través de la orientación de seminarios, textos y artículos, ayudaron a comprender temas relacionados con la investigación.

Al doctor Viçent Font Moll, quien con su amplia experiencia investigativa en educación matemática, me orientó e hizo sugerencias para el desarrollo de la investigación.

Al Doctor Álvaro Calvache Archila por la lectura del texto, por las sugerencias y observaciones que fueron un gran aporte al desarrollo del trabajo.

Al doctor Leonardo Rendón, de la Universidad Nacional de Colombia, por los cursos y seminarios de la Maestría en Matemáticas, en particular sobre la diferenciabilidad, la dirección del trabajo de grado de la Maestría y por sus aportes en la validación del cuestionario.

Al doctor Ángel José Chacón Velasco, por su dedicación, orientación y discusión en la dirección de la investigación.

Al grupo de profesores del programa del Doctorado en Educación: Diana Elvira Soto, Celina Trimiño, Alfonso Jiménez, Aracely

Forero, Martha Pardo, Carlos Londoño, Nubia Agudelo, Jorge Tomás Uribe, Wilson Valenzuela, Luisa Amézquita, por compartir sus conocimientos y contribuir en mi formación doctoral.

Al profesor Luis Alfonso Salcedo Plazas, director de la Escuela de Matemáticas y Estadística, de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), y al Comité Curricular, por la asignación académica en semestres consecutivos de los cursos de Cálculo Multivariable, Análisis Real II, y Métodos Numéricos, donde se diseñaron, aplicaron y depuraron actividades incluidas en el trabajo.

A los profesores en la línea de análisis y didáctica de la matemática: Alejandra Sánchez, Gilberto Pérez, Misael González, Luis Carlos Canaría, Miguel Arcángel Díaz, por sus aportes y observaciones en la validación del cuestionario.

A Omaida Sepúlveda Delgado, directora del Grupo de Algebra y Análisis, y a la Dirección de Investigaciones de la UPTC, por la gestión y suministro de equipos y *software* para el desarrollo del trabajo.

A los estudiantes de formación matemática de la UPTC del programa de Matemáticas, por su colaboración, aportes y participación en las actividades del proceso investigativo.

A Omaida, Camilo y Sebastián, por su paciencia, colaboración y estímulo.

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

PRESENTACIÓN

El propósito de la investigación denominada "La cognición y la enseñanza del concepto de diferencial, desde la teoría APOE. Un aporte a la formación de profesores en matemáticas", es describir y explicar la forma en que los estudiantes de pregrado comprenden la diferencial de una función en varias variables, que es una propiedad de algunas aplicaciones matemáticas con dominio en un subconjunto abierto del espacio n −dimensional $\mathbb{R}^n$ y recorrido en el espacio m-dimensional $\mathbb{R}^m$ de poder ser aproximadas por una transformación lineal en un punto de su dominio[1].

El estudio del fenómeno de la comprensión, fundamentado en la noción del desarrollo del esquema, es importante en didáctica de la matemática en el campo de la formación de profesores, porque se determinan aspectos en los que hay que poner mayor énfasis en la docencia y proporciona indicadores sobre la forma de hacerlo a través del diseño actividades de instrucción y la elaboración de material didáctico validado en pruebas experimentales[2].

El marco teórico utilizado es APOE, un enfoque para el estudio de la comprensión conocido en inglés como Actions, Process, Object, Schema (APOS), desarrollado por Dubinsky y sus colegas, con la contribución de trabajos de investigaciones en educación matemática. Este enfoque extiende las ideas de la abstracción reflexiva del pensamiento matemático elemental al avanzado y define la comprensión como el resultado de realizar acciones sobre objetos, de interiorizar las acciones en procesos, coordinar dos o más procesos para generar uno nuevo, encapsular procesos para construir objetos o desencapsular objetos en procesos y organizar las estructuras de

[1] Tom Apostol, *Calculus Volumen 2*. Barcelona: Reverté, 1988, 328.

[2] María Trigueros, "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, 17, 2005: 6.

acciones, procesos y objetos en esquemas, con el propósito de utilizarlos en la resolución de problemas. El progreso en la comprensión se produce cuando se reconstruye una situación problemática similar a una ya resuelta, pero con un nivel superior de dificultad[3].

El tipo de investigación es cualitativa orientada a la comprensión, que tiene por objetivo describir e interpretar la realidad educativa desde adentro. Y con este propósito se realizó un ciclo de tres componentes: el análisis teórico, el diseño e implementación de la instrucción y la recolección y análisis de información[4].

El propósito del análisis teórico es establecer y caracterizar los elementos matemáticos, las relaciones lógicas que configurarán el concepto y sus formas de representación, a través del estudio histórico y epistemológico y de la presentación en los libros de texto de la diferencial de una función en varias variables (DIFVV) y de los conceptos relacionados. Este análisis permitió diseñar una ruta hipotética de aprendizaje del concepto, denominada descomposición genética preliminar (DG), que orientó el diseño de actividades, clases y ejercicios, denominado el ciclo ACE.

La implementación de la instrucción fomentó la construcción de las estructuras mentales descritas por la descomposición genética preliminar (DG) y facilitó recoger la información a través de la aplicación de un cuestionario y la realización de entrevistas semiestructuradas.

El análisis de la información según la DG posibilitó inferir que la evidencia empírica y el análisis teórico describieron las mismas construcciones mentales requeridas para comprender el concepto por algunos estudiantes, ubicar a cada estudiante en un nivel de desarrollo del esquema, detectar errores y dificultades, y refinar la DG.

---

[3] Mark Asiala y otros, "A Framework for Research and Development in Undergraduate Mathematics Education", *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1996, 1-32.

[4] Ilana Arnon y otros, *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer Science, 2014, 1-4.

Los resultados obtenidos del desarrollo del esquema están vinculados con la capacidad que demuestran los estudiantes para relacionar los elementos que configuran la DIFVV durante la resolución de las tareas del cuestionario y las argumentaciones en las entrevistas. Las características de cada nivel se describieron en términos de la teoría, la idea de síntesis, la coherencia y completez del esquema, y se organizaron de la siguiente forma:

Nivel Intra. Se consideran dos subniveles: el Intra 1, donde se ubicaron los estudiantes que no comprenden como objeto la diferencial de ninguna función de varias variables; el Intra, donde se ubicaron los estudiantes que comprenden la diferencial de una función real de variable real.

Nivel Inter. Tiene tres subniveles: el Inter 1, que corresponde a estudiantes que comprenden la diferencial de una función vectorial de variable real; Inter 2, donde se ubicaron los estudiantes que comprenden la derivada parcial y la derivada direccional; Inter, donde se ubicaron quienes comprenden la diferencial de un campo escalar.

Nivel Trans. Incorpora dos subniveles: Trans 1, que corresponde a estudiantes que demostraron comprender la diferencial de un campo vectorial; y Trans, donde se ubicaron estudiantes que comprenden la diferencial de cualquier función en varias variables.

Al finalizar el ciclo de investigación se expone la versión refinada de la DG, según los errores y dificultades que tuvieron los estudiantes para comprender la DIFVV.

Palabras clave: comprensión, diferencial, función en varias variables, APOE, abstracción reflexiva, esquema, niveles de desarrollo.

INTRODUCCIÓN

La investigación tiene como propósito describir y explicar la forma en que los estudiantes de pregrado comprenden el concepto de la diferencial de una función en varias variables (DIFVV) y caracterizar los niveles de desarrollo del esquema, que se define como "la estructura o la organización de acciones, que se transfieren o se generalizan con motivo de la repetición de una acción determinada en circunstancias iguales o análogas"[5].

Al respecto, la comprensión es un proceso interminable de construcción de esquemas iterativos infinitos, a través del desarrollo cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano superior de pensamiento, conocido como abstracción reflexiva[6].

Investigar sobre la comprensión es muy importante en la formación de docentes para promover el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes —porque permite obtener información útil para diseñar e implementar tratamientos de instrucción, elaborar y utilizar material didáctico validado por pruebas experimentales—, y para posibilitar la utilización y aplicación de este concepto en situaciones problema.

En este sentido, Stewart manifiesta que pretender buenos niveles de comprensión debe ser el principal objetivo de la enseñanza del cálculo y para lograrlo los temas deben tener variadas representaciones que permitan cambiar la forma de enseñar el razonamiento conceptual[7]. Sin embargo, es un proceso complejo,

---

[5] Jean Piaget y Barbel Inhelder, *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata, 1978, 20.

[6] Ilana Arnon y otros, *APOS Theory, …* 7.

[7] James Stewart, *Cálculo Multivariable.* Mexico: Thompson. Learning, 2002, 2.

debido a las múltiples interacciones entre los aspectos históricos, teóricos, epistemológicos, pedagógicos y didácticos que intervienen.

Para afrontar esta complejidad, la comunidad de educación matemática ha desarrollado y validado diversos enfoques teóricos, como los constructivistas, socioconstructivistas, interaccionistas y antropológicos, entre otros. Dentro de los enfoques constructivistas está APOE, que para estudiar la cognición y la enseñanza de los conceptos analiza los objetos mentales, sus transformaciones y relaciones.

El enfoque APOE ha demostrado ser pertinente para investigar y explicar cómo los estudiantes universitarios comprenden y son capaces de integrar los conceptos matemáticos del pensamiento matemático avanzado (PMA). Por eso, los estudios apoyados en la noción de esquema señalan las relaciones en las que hay que poner mayor énfasis en la docencia y proporcionan indicadores de la forma de hacerlo[8].

Respecto a una función en varias variables, esta se define como una aplicación con dominio en un subconjunto abierto del espacio $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ y recorrido en el espacio m-dimensional $\mathbb{R}^m$. Sobre la importancia de este tipo de funciones, Thomas y otros autores afirman que desde el punto de vista matemático y de sus aplicaciones, estas se presentan con más frecuencia que las funciones de una sola variable, el cálculo es aún más complejo y su desarrollo es uno de los logros más contundentes de la ciencia[9].

Una complejidad en su estudio se manifiesta cuando [...] al trabajar con aplicaciones definidas sobre abiertos del espacio $n-$dimensional, $\mathbb{R}^n, n > 1$, carece de sentido considerar cocientes incrementales de tales aplicaciones y por lo tanto no se puede generalizar el concepto de derivada en esos términos, sino en términos de la diferencial de una función. Sin embargo, es posible generalizar el concepto de derivada a subespacios de dimensión uno. Aparece así

[8] María Trigueros, "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, 17, 2005: 5-31.

[9] George Thomas y otros, *Cálculo con geometría analítica. 6a. edición,* Bogotá: Addison-Wesley Iberoamericana, 1999, 909.

el concepto de derivada direccional y, como caso particular, la derivada parcial[10].

La diferencial de una función en varias variables es una propiedad de algunas aplicaciones matemáticas con dominio en un subconjunto abierto del espacio n −dimensional $\mathbb{R}^n$ y recorrido en el espacio m-dimensional $\mathbb{R}^m$ de poder ser aproximadas por una transformación lineal en un punto de su dominio[11].

Sobre la historia del concepto de diferenciabilidad, este generó controversia entre los matemáticos que hicieron aportes para su desarrollo, sobre la conveniencia de su enseñanza y aprendizaje en los niveles secundario y superior, como se evidencia desde los precursores del cálculo, Fermat, Barrow, Newton y Leibniz, hasta la actualidad. Entre las razones que propiciaron este hecho se pueden mencionar el haber considerado en la evolución del concepto cantidades como metafísicas (infinitamente pequeñas), no se había formalizado el concepto de límite y la falta de claridad del lenguaje utilizado para su representación.

Además, la comprensión de la DIFVV presenta obstáculos epistemológicos, debido a que varias propiedades que se cumplen para contextos restringidos a funciones en una variable, no se cumplen para funciones de varias variables, tales como las siguientes:

- Existen funciones en dos o más variables que pueden ser continuas respecto a cada variable separadamente y en cambio ser discontinuas como función de dos o más variables. Ejemplo, la función,
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \ si \ (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0,$$
es separadamente continua respecto a las variable x e y en $x=0$ y $y=0$, respectivamente; sin embargo, es discontinua en el punto (0,0). Por tanto, la existencia de las derivadas parciales de una

[10] Félix Galindo Soto y otros, *Cálculo infinitesimal en varias variables. Guía práctica*. Madrid: Paraninfo, 2005, 47.
[11] Tom Apostol, *Calculus Volumen 2*. Barcelona: Reverté, 1988, 328.

función en un punto no garantiza la existencia de todas las derivadas direccionales de la función en este punto[12].

- Existen funciones que, aunque poseen todas las derivadas direccionales en un punto, no son continuas en el punto y, por tanto, no son diferenciables allí. Es decir, la condición que la derivabilidad de una función en un punto implica la continuidad de la función en este, es válida para funciones en una variable, pero no se cumple para funciones de varias variables. Por ejemplo, para la función,

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \quad si\ x \neq 0,\ f(0,y) = 0,$$

posee derivadas direccionales en (0,0), en cualquier vector dirección, sin embargo no es continua en (0,0)[13].

- Existen funciones que poseen las derivadas parciales en un punto, pero no son diferenciables en este, por ejemplo la función

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad si\ (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = (0,0),$$

es continua y las derivadas parciales existen en (0,0) pero no es diferenciable en este punto[14].

- Existe la tendencia en estudiantes y profesores a creer que el concepto de diferencial es equivalente al de derivada, debido a los conocimientos previos de estos conceptos en funciones reales de variable real, lo cual, en ausencia de contraejemplos para funciones en varias variables, crea obstáculos cognitivos. Otro aspecto es que no comprenden fácilmente la derivada como una transformación lineal.

Además, en la organización del cálculo, el concepto de diferencial tiene un papel secundario respecto al de la derivada, atribuido a Cauchy, porque no considera la diferencial como un incremento infinitesimal, que ocasiona inconvenientes para interpretarla como la posibilidad de aproximar la variación de la

---

[12] Rober Bartle, *The Elements of Real Analysis.* New York: Jhon Wiley & Sons, 1975, 356.

[13] Tom Apostol, *Calculus Volumen 2…* 314.

[14] Robert Bartle, *The Elements…* 352.

función en vecindades de un punto por una transformación lineal más un error, situación que es conocida como la fórmula de Taylor de primer orden,

$$f(a+v)-f(a)=T_a\,(v)+\|v\|E(a,v).$$

Sin embargo, la diferencial ocupa el centro del sistema conceptual del cálculo, en el que la mayoría de las aplicaciones de este objeto matemático a problemas de ingeniería es posible, en virtud de que los procesos y magnitudes se modelan como funciones diferenciales en un punto o en un abierto[15].

Por eso, las funciones en varias variables y sus diferenciales se utilizan para diseñar modelos en términos matemáticos que describen el comportamiento de un fenómeno o sistema. Las leyes que rigen dicho sistema implican razón o tasa de cambio de una o más variables, y las relaciones se describen por ecuaciones o sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales.

En lo referente a la metodología de la enseñanza del concepto de diferencial se presenta una disyuntiva: si optar por un énfasis del cálculo utilizando reglas de diferenciación de funciones de una variable para hallar derivadas direccionales y parciales, gradientes, matrices jacobianas, o si optar por el énfasis del análisis matemático.

Por tanto, los aspectos expuestos anteriormente motivan y hacen pertinente la investigación acerca de presentar un modelo de cognición de la diferencial, validado y refinado, y establecer los niveles de desarrollo del esquema que darán directrices para determinar en cuáles aspectos se debe poner mayor énfasis en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Para cumplir con estos propósitos, el texto, resultado de la investigación, se organizó de la siguiente forma:

El capítulo 2, “Marco de referencia”, comprende la fundamentación teórica y metodológica de la investigación sobre la comprensión del concepto de diferencial.

---

[15] Pablo Ignacio Gómez Fuentes y Juan Raúl Delgado Rubí, “La diferenciabilidad de funciones en varias variables, una propuesta de tratamiento metodológico”, *Acta Latinoamericana de Matemática Educactiva,* 25, 2012: 605.

El capítulo 3, titulado "Análisis teórico de la diferencial", explica el análisis teórico del concepto de la DIFVV. Este capítulo está organizado en las siguientes secciones:

- Historia de la evolución del concepto: su propósito es establecer los alcances, las limitaciones, los éxitos, las dificultades y las rutas que los matemáticos siguieron para la invención, el desarrollo y la formalización del concepto.
- Análisis de la diferencial en los libros de texto: detalla la organización lógica y didáctica del concepto que es expuesto por diferentes autores.
- El esquema del concepto de diferencial: presenta los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los sistemas de representación que configuran el concepto y que se consideran necesarios para la comprensión de este.
- Descomposición genética DG preliminar de la DIFVV: propone un modelo hipotético que un estudiante debe seguir para comprender el concepto en términos de las estructuras mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas, así como los mecanismos para su construcción, que conciernen a la interiorización de acciones, la coordinación o inversión de procesos, la encapsulación de procesos en objetos o desencapsulación de objetos en procesos y la tematización del esquema.

En el capítulo 4, denominado "Diseño e implementación de la instrucción, teniendo como referencia la DG preliminar de la diferencial", se muestra un conjunto de actividades de instrucción mediadas por programas informáticos en el *software* MATLAB, que fueron diseñadas, implementadas y depuradas con los grupos de estudiantes que participaron en el ciclo de actividades, clases y ejercicios (ACE), y que tenían como propósito fomentar la construcción de las estructuras mentales con la activación de los respectivos mecanismos utilizando diferentes formas de representación.

Además, se presenta el diseño y la validación de un cuestionario que permitió recoger y analizar la información siguiendo la DG preliminar del concepto.

En el capítulo 5 se expone la recolección de la información, según la DG del concepto, el ciclo ACE con los grupos de estudiantes que participaron en la investigación, la solución plausible del cuestionario, las soluciones de los estudiantes al cuestionario definitivo y las entrevistas. Posteriormente se analizó esta información en las siguientes etapas.

ET1. Codificación de las categorías para cada tarea, según las soluciones individuales del cuestionario y la solución plausible del cuestionario.

ET2. Determinación de las relaciones entre los elementos matemáticos en la solución plausible del cuestionario, según la DG preliminar y las categorías identificadas en la etapa anterior, lo cual generó redes semánticas para cada tarea y una general.

ET3. Análisis de las entrevistas semiestructuradas según la DG.

ET4. Análisis del fenómeno de la comprensión de la DIFVV con la información recogida y organizada en las etapas anteriores.

ET5. Agrupación de las categorías para caracterizar los niveles y subniveles de comprensión del desarrollo del esquema de la DIFVV. Esta etapa permitió validar y refinar la DG preliminar.

En el capítulo 6 se muestran los resultados del desarrollo del esquema de la DIFVV por cada estudiante, según el análisis efectuado en el capítulo anterior. Los niveles se describen y explican en términos de los elementos matemáticos, de las relaciones lógicas que se lograron establecer entre estos y los sistemas de representación utilizados.

Posteriormente, se expone un análisis global del desempeño de los estudiantes según los niveles previamente determinados, el desarrollo del esquema de la DIFVV y una versión refinada de la DG.

En el capítulo 7 se indican las conclusiones sobre los siguientes aspectos de la investigación: el fenómeno de la comprensión, el análisis del concepto, las implicaciones en la enseñanza, el desarrollo del esquema, las limitaciones y las perspectivas futuras.

En último término está la bibliografía, que corresponde a la relación de libros y artículos de investigación que fueron referencia de consulta para llevar a cabo el trabajo de investigación.

MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se presenta el marco teórico y metodológico que fundamenta el análisis de la comprensión de la diferencial. A continuación se definen conceptos que orientan y sustentan el trabajo de investigación, los cuales son tomados de los referentes bibliográficos.

Pensamiento matemático avanzado (PMA)

La naturaleza del pensamiento matemático está relacionada con los procesos cognitivos que dan lugar a los conocimientos matemáticos. Una clase de estos pensamientos es el avanzado (PMA), que se define como un fenómeno en el que interactúan los procesos mentales para representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer, definir, formalizar y demostrar. Se caracteriza por la complejidad de los contenidos y la forma de controlarla, el rigor y el formalismo, que con frecuencia sigue la secuencia: teorema, demostración y aplicación. Es propio de los últimos años de bachillerato y de las matemáticas superiores de la universidad[16].

Las consideraciones filosóficas del PMA se tienen en cuenta al estudiar las obras de matemáticos, donde se distinguen las siguientes tendencias o diferentes tipos de mente: una clase está conformada por los preocupados por la lógica, y la otra, por los guiados por la intuición[17]. Estas tendencias desarrollaron las siguientes corrientes filosóficas de la matemática a principios del siglo XX: la intuicionista, representada por Kronecker, quien afirmaba que los conceptos

[16] David Tall, "The Psychology of Advanced Mathematical Thinking", en *Advanced Mathematical thinking, eds.* David Tall (New York, Kluwer Academic Publishers, 2002), 3-26, [mi traducción].

[17] Henri Poincaré, *Foundations of Science,* trad. Halsted G.B. New York: The Science Press, 1913, 210, citado por David Tall, "The Psychology of Advanced Mathematical Thinking" [mi traducción].

matemáticos solo existen cuando su construcción se demuestra a partir de los números enteros; la formalista, representada por Hilbert, quien afirmaba que la matemática es la manipulación significativa de conceptos y definiciones; y la logicista, representada por Bertrand Russell, quien declaró que las matemáticas consisten en deducciones que utilizan las leyes de la lógica.

Según estas corrientes, la práctica de los matemáticos se caracteriza por definir y demostrar teoremas, como se percibe en el siglo XX con la creación de un gran número de sistemas formales sobre la base de la deducción lógica a partir de definiciones y axiomas. Sin embargo, con la introducción de la tecnología y la informática se advierte el renacimiento de la constructibilidad para probar hipótesis y compilar datos con facilidad, los cuales eran accesibles solo por aplicación de técnicas sofisticadas. Este renacimiento afecta el tipo de problemas que los matemáticos trabajan y la forma como ellos piensan[18].

Otro aspecto filosófico es considerar la matemática como una cultura compartida y con aspectos dependientes del contexto. Por ejemplo, la concepción de un diferencial para un analista puede ser muy diferente a la de un matemático aplicado, y tales actitudes pueden causar conflictos en los estudiantes[19].

Aspectos similares a las corrientes filosóficas y al contexto de la matemática presentan los estudiantes y profesores, quienes tienen procesos de pensamiento diferentes, en función de las experiencias previas; por tanto, cualquier teoría de la psicología del pensamiento matemático debe considerarse en el contexto más amplio de la actividad mental y cultural. No hay un camino verdadero, absoluto, de pensar en las matemáticas, sino diversas formas de pensamiento, culturalmente desarrolladas, en que varios aspectos están relacionados con el contexto[20].

En lo que respecta al rango del PMA para el desarrollo de las ideas y conceptos matemáticos, este surge de la conjetura, continua

[18] David Tall, "The Psychology of Advanced… 5.
[19] David Tall, "The Psychology of Advanced… 6.
[20] David Tall, "The Psychology of Advanced… 6.

con el teorema y finaliza con la prueba o demostración, y está caracterizado por los siguientes procesos:

Generalización y abstracción

La generalización es una extensión de los procesos familiares, mientras que la abstracción requiere de una reorganización mental masiva. Ambos términos se utilizan en matemáticas tanto para referirse a los procesos en que los conceptos se ven en un contexto más amplio, como a los productos de esos procesos.

Harel estableció las siguientes clases de generalización, de conformidad con las actividades cognitivas involucradas: generalización expansiva, extiende la estructura cognitiva existente sin requerir cambios en las ideas presentes; generalización reconstructiva, requiere la reconstrucción de la estructura cognitiva existente; generalización disyuntiva, consiste en recordar las ideas nuevas como una colección de información que se aprende de memoria y se añade a los conocimientos, sin ningún intento de integración y relación con las ideas anteriores. En esta terminología, las derivadas direccional y parcial son una generalización expansiva del concepto de derivada de una función real de variable real, mientras que la diferencial es tanto una abstracción como una generalización reconstructiva[21].

De manera similar, para generalizar el concepto de diferencial de una función en varias variables, debe generarse una cadena de ideas que comprende: la derivada y diferencial de una función real de variable real, el concepto de derivada de un campo escalar en un punto respecto a un vector dirección (derivada direccional y parcial), la diferencial del campo escalar en un punto como consecuencia de la existencia y continuidad de todas las derivadas parciales en el punto, y la extensión de estos conceptos a campos vectoriales[22].

El proceso de abstracción considera el objeto mental diferencial de una función en un punto, como la transformación lineal que representa la función en vecindades del punto, y es descrito y

[21] Guershon Harel y David Tall, "The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics", *For the Learning of Mathematics*, 11, 1991: 2, [mi traducción].
[22] Tom Apostol, *Calculus Volumen 2…* 308-330.

formalizado mediante teoremas que relacionan propiedades locales y globales de la función entre los elementos que la configuran, como derivabilidad, continuidad, aproximación y linealización[23].

Intuición y rigor

La intuición es producida por las imágenes del concepto que posee un individuo; cuanto más desarrollado el pensamiento lógico, más probable que la imagen del concepto individual dé respuestas lógicas. Esto es evidente en el desarrollo del pensamiento de los estudiantes, que pasan de las intuiciones iniciales producto de los sentidos a la imaginación, antes e independientemente de la instrucción sistemática; seguidamente, la generalización por inducción; y por último, la intuición de número puro basada en las matemáticas más refinadas cuando la experiencia crece[24].

Los aspectos de la lógica también pueden ser perfeccionados para hacer más "intuitiva" la mente matemática. El desarrollo de esta intuición lógica refinada debe ser uno de los principales objetivos de la educación matemática avanzada[25].

El rigor hace énfasis en establecer y usar las definiciones y el razonamiento lógico en las pruebas formales para demostrar verdades en la matemática.

Síntesis y análisis

La síntesis comprende tres fases: comienza con el acto consciente de juntar las ideas; seguido de una actividad más intuitiva, cuando las imágenes del concepto subconscientes interactúan; y finaliza cuando los nuevos conceptos vinculados emergen en la conciencia.

El análisis, por el contrario, es una actividad que organiza las nuevas ideas en forma lógica y refinada para dar afirmaciones y deducciones más precisas.

La enseñanza en los niños hace hincapié en la síntesis de los conocimientos, a partir de conceptos simples construidos de la

[23] Tom Apostol, *Calculus Volumen 2…* 314.
[24] David Tall, "The Psychology of … 13-14.
[25] David Tall, "The Psychology of … 314.

experiencia y de ejemplos, hasta conceptos más generales; mientras que la enseñanza en la universidad frecuentemente acentúa el análisis de los conceptos, a partir de abstracciones generales y formando cadenas de deducción que se pueden aplicar en una variedad de contextos[26].

La prueba matemática

La prueba o demostración es la etapa final del pensamiento matemático, en la que se precisan las ideas e implica examinar cada uno de los silogismos que la componen, razonar sobre su orden y determinar la veracidad de conformidad con las reglas de la lógica. La prueba no solo debe ser lógica, sino explicar por qué funciona.

Al respecto, Mason describe el proceso de verificar del PMA en tres niveles: convencerse a sí mismo, convencer a un amigo y convencer a un enemigo. Convencerse a uno mismo implica tener una idea del porqué alguna aseveración puede ser verdad, convencer a un amigo requiere que los argumentos se organicen en una forma más coherente, y convencer a un enemigo significa que los argumentos deben ser analizados y perfeccionados para que resistan la crítica, esto es lo más cercano que lleva a pensar matemáticamente la noción de prueba[27].

Por otra parte, sobre el desarrollo cognitivo del PMA y el aprendizaje, Tall considera varias teorías, entre ellas la teoría conductista y la constructivista[28].

La teoría conductista se fundamenta en la observación externa del estímulo y la respuesta, se niega a especular sobre el funcionamiento interno de la mente. Esta teoría proporciona evidencia observable y repetible de la conducta de los seres humanos y de los animales como resultados a los estímulos. Sin embargo, una crítica a esta teoría es que la mecánica algorítmica y rutinaria tiene una aplicación limitada del pensamiento matemático.

[26] David Tall, "The Psychology of … 15.

[27] John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey, *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley, 1982, citados por David Tall, "The Psychology of … 20.

[28] David Tall, "The Psychology of… 7-8.

La teoría constructivista, por el contrario, intenta analizar cómo las ideas se crean en la mente de cada individuo y da información sobre los procesos creativos de los investigadores y de las dificultades que presentan los estudiantes para la comprensión de conceptos.

Al respecto, Piaget analizó la necesidad del individuo de estar en equilibrio dinámico con el medio ambiente, como un tema principal de una de sus obras. Él afirma que, cognitivamente, el equilibrio se altera por la confrontación entre los nuevos conocimientos con los antiguos y se genera un período de transición donde la estructura del conocimiento se reconstruye para llegar a un nivel más maduro de equilibrio.

Piaget analizó la evolución cognitiva del niño hasta la edad adulta, a través de una serie de etapas de equilibrio, cada una más rica que la anterior. Él identifico cuatro etapas principales: la primera, la sensoriomotora, como anterior al desarrollo del habla con significado; la segunda, la preoperacional, caracterizada cuando el niño comprende la permanencia de los objetos que continúan existiendo en su mente, aun cuando aquellos estén temporalmente fuera de la vista; la tercera, la de operaciones concretas, cuando el niño considera conceptos relacionados con los objetos físicos; y la cuarta, la de operaciones formales, en la adolescencia temprana, cuando las hipótesis del tipo "si entonces" son posibles en su mente.

La teoría de las etapas de Piaget ha sido extendida al PMA y ha generado otros análisis teóricos para establecer la distinción entre lo concreto y lo formal por varios investigadores. Hart, por ejemplo, la utiliza como punto de partida útil para determinar jerarquías locales de dificultad en los estudios extensivos en el rango entre 11 a 16 años de edad[29]; Orton la referencia para desarrollar los primeros conceptos de cálculo[30]; Biggs sugiere una repetición de la etapa de las operaciones formales sucesivamente hasta niveles más altos, en cada nivel se lleva a cabo el ciclo de aprendizaje uniestructural,

[29] K. M Hart. *Children's Understanding of Mathematics.* London: John Murray, 1981, 11–16, citado por David Tall, "The Psychology of… 8.

[30] A. Orton, *A Cross-Sectional Study of the Understanding of Elementary Calculus in Adolescents and Young* Adults, (Ph.D. thesis, Leeds University, 1980), citado por David Tall, "The Psychology of… 8.

multiestructural y relacional[31]; y Ellerton plantea que el ciclo sensoriomotor, preoperacional y concreto de la teoría de Piaget es el primer nivel de un desarrollo cognitivo en espiral en que la etapa formal es el comienzo de otro ciclo del mismo tipo pero en un nivel más alto de abstracción[32].

Un aporte valioso de la teoría de Piaget es el proceso de transición entre los estados mentales, caracterizado por la inestabilidad entre las ideas previas sobre los conceptos y la influencia de los nuevos conocimientos. Él utiliza el término *asimilación* como el proceso de adquisición de nuevos datos, y el término *acomodación* como el proceso por el cual el individuo incorpora la información y modifica la estructura cognitiva. La asimilación y la acomodación son, por tanto, complementarias.

La matemática avanzada critica la teoría de las etapas de Piaget, afirmando que puede ser una trivialización lineal de un sistema en el que el cambio es mucho más complejo, un sistema no lineal, cuando las rutas posibles a través de una red de ideas se hacen más numerosas, como ocurre en PMA[33].

El paso del PME al PMA implica una significativa transición para adquirir coherencia entre las entidades abstractas, las cuales se deducen de manera lógica a partir de las definiciones formales, de la descripción a la definición, de convencer a probar. Esta transición requiere de una reconstrucción cognitiva que se percibe en los estudiantes de primer año de universidad cuando abordan las abstracciones formales[34].

La abstracción reflexiva

El término de abstracción reflexiva fue introducido por Piaget para describir la construcción de las estructuras lógico-matemáticas de un

---

[31] John Biggs y Kevin Collis, *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy*. New York: Academic Press, 1982, citado por David Tall, "The Psychology of… 8.
[32] Nerida Ellerton, *The Development of Abstract Reasoning. Results from a Large Scale Mathematics Study in Australia and New Zealand*, 1985, citado por David Tall, "The Psychology of… 8.
[33] David Tall, "The Psychology of… 8-9.
[34] David Tall, "The Psychology of… 20.

individuo durante el curso de su desarrollo cognitivo. La abstracción reflexiva no tiene principio absoluto, sino que está presente desde las edades más tempranas y se manifiesta en la coordinación de las estructuras sensoriomotoras y continúa en las matemáticas superiores. La historia de la evolución de la matemática desde la antigüedad hasta nuestros días puede considerarse como un ejemplo del proceso de abstracción reflexiva[35]. En la mayor parte de su trabajo, Piaget se concentra en el desarrollo de conocimientos matemáticos en las primeras edades, rara vez va más allá de la adolescencia. Sin embargo, como él sugiere, puede extenderse a conceptos del PMA[36].

La abstracción reflexiva es considerada actualmente como una teoría para la construcción y adquisición del conocimiento matemático mediante el fenómeno de la comprensión de conceptos. Al estudiar la comprensión de un concepto matemático, el investigador, en una primera fase, la usa para analizar y entender el concepto y posteriormente examina la imagen exterior del concepto que presentan los estudiantes en sus intentos por resolver situaciones problemáticas.

Piaget distingue tres tipos de abstracción: la empírica, la pseudoempírica y la reflexiva.

Abstracción empírica. Es la que se deriva del conocimiento de las propiedades de los objetos, conduce a la extracción de las propiedades comunes y a las generalizaciones extensionales; es decir, el paso de algunos a todos o de lo particular a lo general[37].

Abstracción pseudoempírica. Es una burda generalización de las propiedades, producto de las acciones de los sujetos sobre los objetos[38].

[35] Ilana Arnon y otros, *APOS Theory…* 6.

[36] Ed Dubinsky. "Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking". En *Advanced Mathematical Thinking*, eds. D. Tall. (New York: Kluwer Academic Publishers, 2000), 95-96.

[37] Jean Piaget y Rolando García, *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Madrid: Siglo veintiuno editores, 1983, 299.

[38] Jean Piaget, *The Equilibration of Cognitive Structures*, trad. T. T. Brown. (Cambridge: Harvard University Press, 1985), 18-19.

Abstracción reflexiva. Es el proceso por el cual se construyen objetos mentales a través de acciones sobre estos objetos. Se extrae de lo que Piaget llama coordinaciones generales de acciones; la fuente es el sujeto y es completamente interna[39]. Este tipo de abstracción conduce a una generalización como resultado de nuevas síntesis, donde las leyes particulares adquieren nuevo significado[40]. Piaget considera la abstracción reflexiva como el método por el cual todas las estructuras lógico-matemáticas se derivan y conducen a una clase de pensamiento matemático donde forma o proceso se separan del contenido y los procesos mismos se convierten en objetos de contenido, en la mente del matemático[41].

Los tres tipos de abstracción no son completamente independientes. Las acciones que se realizan sobre los objetos conducen a la abstracción pseudoempírica y reflexiva, pero las propiedades de los objetos solo se llegan a conocer a través de la abstracción empírica. Por otra parte, la abstracción empírica solo se hace posible a través de esquemas de asimilación que se construyen por abstracción reflexiva[42].

Las abstracciones empírica y pseudoempírica se basan en el conocimiento de los objetos a través de la ejecución o la imaginación de acciones sobre ellos. La abstracción reflexiva interioriza y coordina estas acciones para formar nuevas acciones y, en última instancia, nuevos objetos, los cuales pueden ser ya no físicos, sino más bien matemáticos. La abstracción empírica se utiliza para extraer los datos de estos nuevos objetos a través de acciones mentales sobre ellos y así sucesivamente[43].

En la abstracción empírica, el sujeto observa un número de objetos y abstrae una propiedad común. En la abstracción pseudoempírica se procede de forma similar, después de que las acciones han sido realizadas sobre los objetos. La abstracción reflexiva,

---

39 Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction… 97-99.

40 Jean Piaget y Rolando García, *Psicogénesis e historia…* 199.

41 Jean Piaget, *The principles of Genetic Epistemology,* trad. W. Mays. London: Neubauer, P. B. 1972, 63-64 y 70-71.

42 Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction… 98.

43 Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction… 98.

sin embargo, es mucho más complicada, ocurre cuando se desarrollan las estructuras cognitivas, las nuevas construcciones matemáticas[44].

La abstracción reflexiva se diferencia de la abstracción empírica en que la reflexiva trata de acciones en lugar de objetos, y se diferencia de la pseudoempírica en que esta última se refiere no tanto a acciones en sí mismas, sino a las interrelaciones entre las acciones, que Piaget llama coordinaciones[45].

Las construcciones por abstracción reflexiva son:

Representar

Es la capacidad de utilizar símbolos, lenguajes, imágenes, e imágenes mentales, para construir procesos internos como formas de encontrar significados de los fenómenos percibidos. Piaget denominó a esta capacidad como *interiorización* y la definió como "la traducción de una serie de acciones materiales en un sistema de operaciones"[46]. Un ejemplo de interiorización en la comprensión del concepto de diferencial es graficar una superficie y en un punto particular el plano tangente.

Coordinar

Es la composición de dos o más procesos para la construcción de una nueva acción, proceso u objeto[47]. Por ejemplo, al considerar que una función es diferenciable en un punto se deben coordinar los procesos de verificar la existencia y continuidad de todas las derivadas parciales.

Encapsular

Es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto (estático). La encapsulación ocurre cuando el individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso particular, toma conciencia de este como un todo y es capaz de hacer transformaciones sobre estas acciones o procesos. En términos de Piaget, son las acciones u operaciones que se convierten en objetos tematizados de pensamiento

---

[44] Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction… 99.
[45] Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction… 99.
[46] Jean Piaget, *Psicología y pedagogía.* Buenos Aires: Ariel, 1980, 90.
[47] Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction… 101.

o asimilación[48]. Por ejemplo, al reflexionar sobre la existencia de la transformación lineal aplicada a un punto de la función junto con el error de aproximación, se encapsula este proceso como el objeto matemático diferencial de la función en el punto.

Generalizar

Es la capacidad de aplicar un esquema existente particular a un conjunto más amplio de fenómenos y se considera como la forma más simple y más familiar de la abstracción reflexiva. La generalización puede ocurrir cuando el sujeto se da cuenta de la aplicabilidad más amplia del esquema o cuando un proceso se encapsula en un objeto[49].

Invertir

Una vez que un proceso existe internamente, para el sujeto es posible invertirlo, no en el sentido de deshacer, sino como un medio de construir un nuevo proceso[50]. Ejemplo de este acto es considerar la integración como el proceso inverso de la diferenciación.

Se conjetura que la construcción de la mayoría de los conceptos matemáticos se puede describir en términos de las cinco formas de abstracción reflexiva: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización e inversión, como lo afirmó Piaget: las matemáticas, por lo tanto, pueden considerarse en términos de la construcción de estructuras, entidades matemáticas que pasan de un nivel a otro, una operación de tales entidades se convierte, a su vez, en objeto de la teoría, y este proceso se repite hasta llegar a estructuras que se van alternando para convertirse en estructuras más fuertes[51].

La teoría APOE

La teoría APOE (acción, proceso, objeto, esquema) toma como marco de referencia epistemológico la teoría de Piaget que estudia y analiza el conocimiento existente del concepto y su proyección a un plano

[48]Jean Piaget, *The Equilibration of* … 49.
[49] Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction… 101.
[50] Ed Dubinsky, "Reflective Abstraction… 101.
[51] Jean Piaget, *The Principles of* … 70.

superior de pensamiento, donde se reorganiza y reconstruye para formar nuevas estructuras[52].

La teoría tiene sus orígenes en las ideas de Piaget, que se extienden a las matemáticas del pregrado, sobre la abstracción reflexiva, desequilibración, acomodación, asimilación, reflexión y desarrollo de esquemas. Con el propósito de desarrollar la noción de abstracción reflexiva en el PMA, se aíslan las características esenciales de esta abstracción y se hace un análisis del papel que estas desempeñan en las matemáticas superiores, para formar una teoría de la evolución de los conceptos en este pensamiento que sea coherente en conocimiento y construcción[53].

El enfoque APOE ha sido desarrollado por Ed Dubinsky y sus colegas Asiala, Brown, De Vries, Matheus y Thomás, entre otros, y por la contribución de los estudios de un grupo de investigadores en educación matemática del pregrado de Estados Unidos, Research in Undergraduate Mathematics Education Community (RUMEC)[54].

La teoría APOE ayuda a entender el proceso de aprendizaje, porque proporciona explicaciones de los fenómenos que podemos observar en los estudiantes cuando están tratando de comprender los conceptos y, por tanto, orienta la pedagogía que puede tener éxito en este proceso de aprendizaje[55].

La acción, el proceso, el objeto y el esquema son estructuras mentales construidas por mecanismos de abstracción reflexiva de interiorización, coordinación, inversión, encapsulación, desencapsulación y tematización. Las estructuras y los mecanismos están representados en la Figura 1, y se definen a continuación.

[52] Thomas Ayers y otros, "Computer Experiences in Learning Composition of Functions", Computer Experiences in Learning Composition of Functions, 19, 1988: 248.

[53] Asiala y otros, "A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics Education", *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues in Mathematics,* 1996, 6, [mi traducción].

[54] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 11-15.

[55] María Trigueros. "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior", *Educación Matemática*, 17, 2005.

Acción

Es la trasformación o manipulación de objetos que el individuo percibe como externos. La acción ocurre cuando el sujeto reacciona ante estímulos externos con datos precisos de cómo actuar en cada paso que da. Algunas acciones van más allá del cálculo numérico[56]. Un ejemplo es la acción de calcular el error cometido al aproximar una función en una variable, en un entorno de un punto a, por la tangente a la función en a. Conociendo el valor de h y el de la derivada $f'(a)$, el error se calcula como,

$$E(a,h) = \begin{cases} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a), & si\ \ h \neq 0 \\ 0\,, & si\ h = 0 \end{cases}.$$

Proceso

Es una reflexión e interiorización de una secuencia o repetición de acciones. El sujeto percibe un proceso como algo interno y bajo su control, que ejecuta la misma acción pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Cuando un estudiante posee la concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describirla y hasta llegar a invertir los pasos[57].

Por ejemplo, al repetir la acción de aproximar una función diferenciable mediante una función lineal y al reflexionar sobre esta acción se encuentra que la siguiente expresión es válida incluso para $h = 0$ y es conocida como la fórmula de Taylor de primer orden para aproximar $f(a+h) - f(a)$ por medio de la transformación lineal $f'(a)h$,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + hE(a,h).$$

Al interiorizar esta acción podrá establecer que el error cometido es $hE(a,h)$. Además $E(a,h) \to 0$ cuando $h \to 0$ y que $hE(a,h)$ es de orden menor que h para valores pequeños de h. En el sentido que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{hE(a,h)}{h} = 0$.

[56] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 19.
[57] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 20-21.

Objeto

Son entidades físicas o mentales, que pueden ser el producto de la encapsulación de un proceso. El estudiante está pensando el proceso como un objeto cuando reflexiona sobre las operaciones aplicadas sobre este, toma conciencia del proceso como un todo, realiza transformaciones (acciones o procesos) sobre el proceso[58]. Por ejemplo, el objeto matemático diferencial de una función real de variable real en un punto a se encapsula en el objeto operador lineal $df(a)$ tal que a cada vector v de $\mathbb{R}$ lo aplica en el elemento $df(a)(v) = f'(a)v$.

Esquema

Es la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas elaborados previamente que conforman un conocimiento individual de un concepto en matemáticas. La formación de esquemas es una actividad dinámica y es un sistema retroalimentado circular.

El sujeto tiende a invocar un esquema para entender, tratar, organizar o dar sentido a una situación problema. Así, una persona tendrá una amplia gama de esquemas que estarán relacionados entre sí en una organización compleja[59]. Por ejemplo, el esquema de diferencial se obtendrá cuando la persona pueda extender la propiedad de aproximar una función diferenciable mediante una función lineal para el caso de funciones definidas entre espacios de cualquier dimensión y pueda aplicar teoremas para determinar la existencia de la diferencial y calcularla.

[58] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 21-22.
[59] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 24-25.

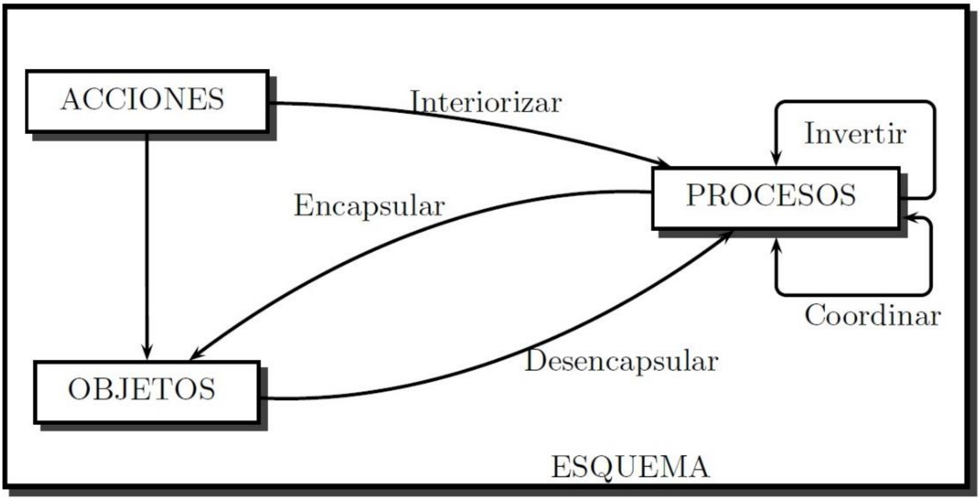


Figura 1. Estructuras mentales y mecanismos de construcción de un concepto.
Fuente: Arnon y otros, 2014.

Niveles de desarrollo del esquema

La construcción y desarrollo de un esquema se caracteriza por tres niveles denominados Intra, Inter y Trans, que se definen a continuación.

Intra

En este nivel, el estudiante centra su atención en una acción repetitiva u operación entre algunos componentes del esquema y los elementos matemáticos que comprende, como acciones, procesos u objetos. Se lleva a cabo de forma aislada respecto a otros elementos cognitivos[60].

Piaget y García establecen que,

> […] lo propio de este nivel es el descubrimiento de una acción operatoria cualquiera y la búsqueda del análisis de sus diversas propiedades internas o de sus consecuencias inmediatas, pero con una doble limitación. En primer lugar, no hay coordinación de esta preoperación con otras en un agrupamiento organizado; pero además el análisis interno de la operación en juego se acompaña de

[60] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 114.

> errores que se corregirán progresivamente, así como de lagunas en la inferencia que de ella puedan deducirse[61].

En este estudio, el descubrimiento de una acción operatoria se asume como la utilización de uno o más elementos matemáticos en la solución de tareas, para construir el objeto de la diferencial de una función real de variable real y considerarlo de forma aislada o tener la capacidad de establecer algunas relaciones, pero solo como acciones, entre este objeto con la diferencial: de una función vectorial de variable real, un campo escalar y un campo vectorial.

El análisis interno se asume como las representaciones de los elementos matemáticos y las relaciones que se establecen entre estos para configurar la diferencial de una función real de variable real.

Inter

Según Piaget y García, este nivel se caracteriza porque:

> Una vez comprendida la operación inicial es posible deducir de ella las operaciones que están implicadas, o de coordinarlas con otras similares hasta constituir sistemas que involucran transformaciones. Si bien se presenta una situación nueva, existen sin embargo limitaciones que provienen del hecho que las composiciones son restringidas, ya que solamente pueden proceder de ejemplos contiguos[62].

Además, las relaciones y transformaciones que logra establecer son entre elementos matemáticos comprendidos como procesos u objetos que componen el esquema. En esta etapa, el estudiante puede comenzar a agrupar elementos contiguos e incluso llamarlos por el mismo nombre[63].

Adaptando las ideas anteriores a esta investigación, cuando el estudiante ha comprendido como proceso u objeto la diferencial de una función real de variable real, lo relaciona con el elemento próximo cognitivo (contiguo) de la función vectorial de variable real, que es entendido como proceso, y por mecanismos de coordinación entre

[61] Jean Piaget, *Psicogénesis e historia…* 70.
[62] Jean Piaget, *Psicogénesis e historia…* 165.
[63] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 14 y 116.

estos dos junto con otros procesos construye la nueva estructura mental, la diferencial de una función vectorial de variable real.

En este nivel se empiezan a agrupar las informaciones de naturaleza similar y se comienzan a construir relaciones entre acciones, procesos y objetos.

De manera similar, cuando ha comprendido la diferencial de una función real de variable real como proceso u objeto, la relaciona con el elemento matemático "contiguo", la función real de variable vectorial o campo escalar entendido como proceso u objeto, y por mecanismos de coordinación de estos y otros procesos construye las siguientes estructuras mentales: la derivada parcial, la derivada direccional y la diferencial de un campo escalar.

Además, empieza a agrupar los elementos anteriores, que son contiguos, en funciones continuas, funciones derivables y funciones diferenciables. Este tipo de relaciones que logra establecer entre los elementos matemáticos son evidencias de la "continuidad cognitiva", en términos de Piaget.

Trans

En este nivel, "las relaciones están definidas en función de lo que precede, involucrando transformaciones y síntesis entre ellas. Estas síntesis dan por resultado la construcción de estructuras"[64].

Además, es característico en este nivel que el estudiante, al reflexionar sobre los elementos matemáticos construidos y las relaciones establecidas en el nivel Inter, logre sintetizar y construir estructuras más amplias y coherentes del esquema[65].

La coherencia del esquema se manifiesta cuando el estudiante toma conciencia de la completez de este, muestra la capacidad de juzgar qué elementos y relaciones del esquema puede aplicar para

[64] Jean Piaget, *Psicogénesis e historia…* 167.

[65] Gloria Sánchez-Matamoros, Mercedes García Blanco y Salvador Llinares Ciscar. "El desarrollo del Esquema de derivada", *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias*, 24, 2006: 87.

resolver situaciones problema y, además, puede percibir propiedades globales que no eran accesibles en otros niveles[66].

En esta investigación se considera que el estudiante se ubica en este nivel cuando ha comprendido la diferencial de un campo escalar como objeto, lo desencapsula en el proceso que lo generó y lo aplica para determinar la diferenciabilidad de un campo vectorial en un punto del dominio y, en general, para una función en varias variables. Además, puede establecer relaciones de conjunción, condicional, equivalencia lógica, recíproca y contrarrecíproca, entre los elementos que configuran el esquema, a través de teoremas, y los aplica para resolver situaciones problema.

Descomposición genética de un concepto (DG)

En términos de la abstracción reflexiva y con base en datos empíricos, la DG se define como una descripción de las matemáticas involucradas en la estructura del concepto y como la manera en que el sujeto podría hacer construcciones mentales que lo llevarían a su comprensión. Además es una trayectoria hipotética de aprendizaje del concepto para conjeturar cómo se desarrolla su comprensión aislando pequeñas porciones de las estructuras complejas de pensamiento y dando descripciones explícitas de las posibles relaciones entre los esquemas[67].

La DG se considera como una propuesta, producto de observaciones de aprendizaje que el sujeto hace conforme aprende el concepto matemático, que se constituirá en un referente para el diseño de tratamientos de instrucción, además esta no es única para un concepto[68].

La DG se diferencia de la formulación matemática del concepto, porque la formulación se ocupa de cómo el concepto se encuentra en la teoría matemática y el papel que este desempeña en esta teoría[69].

[66] Eliécer Aldana Bermúdez, "Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría APOE" (Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca, 2011), 72.
[67] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 27-28.
[68] María Trigueros., "La noción de esquema… 7-8.
[69] Arnon Ilana y otros, *Apos Theory, A Framework…* 29.

El ciclo ACE, actividades, discusión en clase, ejercicios, que están representados en Figura 2, es el conjunto de actividades con el fin de implementar secuencias de instrucciones basadas en los análisis teóricos que posibilitan construcciones mentales para la comprensión de un concepto matemático.

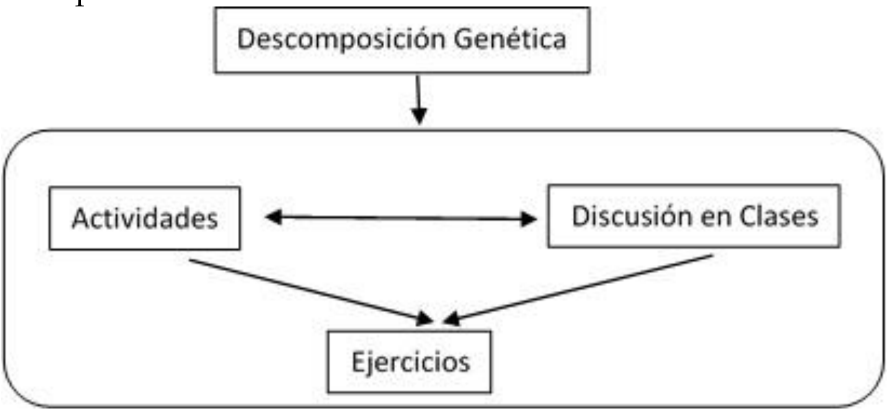


Figura 2. Relación entre el ciclo de enseñanza ACE y la DG. Fuente: Arnon y otros, 2014.

METODOLOGÍA

Método de investigación

El tipo de investigación que se utilizó es cualitativa orientada a la comprensión, "que tiene por objetivo describir e interpretar la realidad educativa desde dentro"[70]. Además, teniendo en cuenta que se adoptó el enfoque teórico APOE, el trabajo investigativo es sobre el nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes[71] acerca del concepto diferencial de una función en varias variables, quienes participaron en la ejecución de una secuencia de actividades pedagógicas basadas en la teoría APOE o en la enseñanza tradicional.

Al respecto, se hizo un estudio de casos que involucran aspectos descriptivos y explicativos de los temas objeto de estudio[72].

---

[70] Rafael Bisguerra Alzina y otros, "Características generales de la metodología cualitativa", En *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla. S.A., 2009, 281.
[71] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 29.
[72] César Augusto Bernal, *Metodología de la investigación,* México: Prentice Hall, 2006, 116.

Se analizó primero la construcción de los conceptos por cada uno de los estudiantes y posteriormente se examinó el desempeño global del grupo sobre la activación de los mecanismos mentales para construir las estructuras de acción, proceso, objeto o esquema, y con esta información se caracterizaron los niveles de desarrollo del esquema de diferencial.

Ámbito de la investigación

La investigación se llevó a cabo en la Universidad Pedagógica de Colombia con estudiantes de programas de pregrado de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas que cursaron la asignatura de Cálculo en varias variables. El rango de edad de los estudiantes es de 16 a 25 años, y provienen de la provincia de la zona de influencia de la UPTC.

El concepto de diferencial de una función en varias variables hace parte del análisis matemático y frecuentemente se desarrolla en la asignatura denominada Cálculo Diferencial e Integral en Campos Escalares y Vectoriales (Cálculo Multivariable, Cálculo III, Análisis Real II). La asignatura tiene como prerrequisito las asignaturas de Cálculo Diferencial e Integral, que comprenden los conceptos de función en una variable, límites, continuidad, derivadas e integrales[73].

El programa de Matemáticas tiene un total de 165 créditos e incluye la asignatura Cálculo en varias variables de cuatro créditos (un crédito equivale a 48 horas, entre docencia directa y el tiempo que debe dedicar el estudiante a preparar la asignatura), se imparte durante cuatro horas semanales de docencia directa, para un total 64 horas presenciales y 128 horas de trabajo independiente por parte del estudiante, está previsto desarrollarlo en 16 semanas de clases[74].

Los objetivos relacionados con el concepto para este curso son:

---

[73] Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas y Estadística, *Proyecto Académico Educativo-PAE Matemáticas*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2010.

[74] Resolución 6339/2013, de 23 de mayo, del Ministerio de Educación Nacional, por medio de la cual se resuelve la solicitud de renovación de registro calificado del programa de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia ofrecido bajo la metodología presencial en Tunja, Boyacá.

- Generalizar los conceptos del cálculo de una variable y observar similitudes y diferencias con el cálculo en varias variables.
- Comprender los conceptos de límites y continuidad, derivada direccional y parcial, diferencial, diferencial total en campos escalares y vectoriales.
- Aplicar algoritmos para el cálculo de límites, derivadas direccionales, matriz jacobiana.
- Resolver problemas de optimización calculando valores extremos y matriz hessiana.
- Formular y resolver problemas utilizando conceptos y teoremas fundamentales.

Para introducir la noción de diferencial se enseñan los conceptos previos de vectores en el plano y el espacio, funciones vectoriales, funciones en varias variables y límites, en las cuatro primeras semanas, según la planeación temática de la asignatura[75].

Los contenidos relacionados con el concepto de *diferencial* son: derivada direccional y derivadas parciales, diferencial total, gradiente de un campo escalar, regla de la cadena para derivadas de campos escalares, curvas de nivel, recta normal y plano tangente, derivadas de campos vectoriales, regla de la cadena para derivadas de campos vectoriales, forma matricial de la regla de la cadena, diferenciación implícita. Además, se dedica una unidad a las aplicaciones de las derivadas parciales, que incluye: derivadas de funciones implícitas, máximos y mínimos, puntos de silla, fórmula de Taylor de orden dos para campos escalares, matriz hessiana, criterio de la segunda derivada para extremos de funciones de dos variables, multiplicadores de Lagrange. Está previsto estudiar estos conceptos en cuatro semanas.

La metodología de enseñanza es la tradicional, que consiste en exposición magistral de los conceptos y ejemplos ilustrativos por parte del profesor, la toma de apuntes, desarrollo de ejercicios, solución de

[75] Programa Académico Matemáticas, "Plan de estudios Cálculo Multivariable", http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/facultades/f_ciencias/pregrado/matematicas/inf_general/document/IV/calculo_multivariable.pdf, (consultado el 24-8-2017).

problemas y evaluaciones escritas. Las clases se refuerzan con la utilización de *software* a la medida o manipuladores algebraicos como Derive, Matlab, Maple o calculadoras programables.

Los estudiantes complementan el aprendizaje con los textos de Apostol, 1988; Bartle, 1975; Stewart, 2006; Marsden y Tromba, 1991; Thomas, Finney y Weir, 1999. Algunos de estos libros se tendrán en cuenta como parte del análisis teórico.

Fases de la investigación

Comprende un cíclico de tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de un tratamiento instruccional, recolección y análisis de información, que se encuentra representado en la Figura 3.

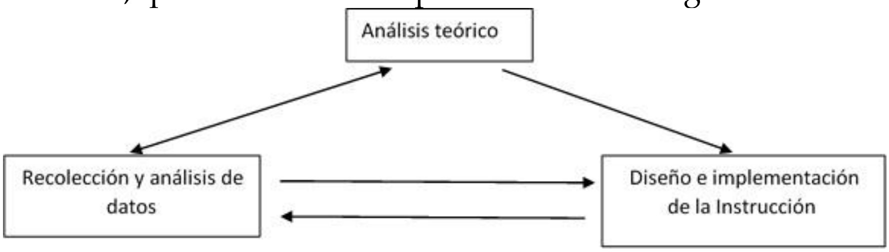


Figura 3. Ciclo de investigación. Fuente: adaptado de Arnon y otros, 2014.

Como lo indican las flechas de la Figura 3, los tres componentes del ciclo de investigación tienen influencia mutua. El análisis teórico dirige el diseño de actividades, clases y ejercicios que, al implementarlos en secuencias de instrucción, tienen el propósito de fomentar las construcciones mentales descritas por la DG. La implementación de la instrucción ofrece la oportunidad para la recolección de datos; y su análisis, que está dirigido por la DG, permite responder las siguientes preguntas: (1) ¿Los estudiantes han construido las estructuras mentales descritas por la DG? (2) ¿Los estudiantes comprenden correctamente el concepto matemático? Si la respuesta a la primera pregunta es negativa, se debe revisar y reconsiderar la instrucción. Si la respuesta a la primera pregunta es afirmativa, pero la respuesta a la segunda pregunta es negativa, se debe revisar y reconsiderar el análisis teórico. El ciclo se repite hasta cuando las dos respuestas sean afirmativas; situación en la cual se infiere que la evidencia empírica y el análisis teórico describen las mismas construcciones mentales requeridas para comprender el concepto matemático por los estudiantes[76].

Primera fase. Análisis teórico del concepto

Esta fase correspondió al análisis de la cognición del concepto de la diferencial de una función en varias variables, a partir de su historia y epistemología, la presentación en textos seleccionados y la experiencia como estudiantes y profesores. Como resultado de este análisis se determinaron los elementos matemáticos (acciones, procesos, objetos y esquemas), las relaciones lógicas entre ellos, los sistemas de representación que configuran el concepto, y se propuso una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante puede desarrollar para comprenderlo, es decir, según el marco teórico, configurar una DG, la cual orienta la intención de la instrucción, la recolección y el análisis de la información.

Segunda fase. Diseño e implementación de una secuencia instruccional

Comprendió el diseño y la aplicación de actividades de instrucción y materiales, para fomentar la construcción de las estructuras mentales predichas por la DG, que incluye acciones sobre objetos, interiorizar las acciones en procesos, encapsular los procesos en objetos, coordinar dos o más procesos para construir nuevos procesos e interactuar con las acciones, procesos y objetos para dar lugar a la tematización del esquema de diferencial. La implementación de la instrucción da oportunidad para la recolección y el análisis de los datos.

Recolección y análisis de la información

Consistió en la recolección de información a través de cuestionarios escritos, entrevistas y mapas conceptuales. Tiene por objeto analizar la información bajo el enfoque teórico y metodológico APOE, mediante la triangulación de los resultados de los instrumentos, para determinar si los estudiantes realizaron las construcciones mentales descritas por la DG, establecer los niveles de comprensión del concepto y el paso de un nivel al siguiente.

[76] Arnon Ilana y otros, *APOS Theory, A Framework…* 93-94.

Finalizado el proceso iterativo de las tres etapas, se presenta el modelo refinado de la DG del concepto de diferencial que orientará la instrucción, las conclusiones y las perspectivas para el futuro.

ANÁLISIS TEÓRICO DE LA DIFERENCIAL

En este capítulo se describe la primera fase de la investigación, el análisis teórico del concepto de diferencial de una función en varias variables. Comprende los siguientes apartados:

La historia de la evolución del concepto, que permitió determinar los principales alcances y limitaciones que encontraron los matemáticos para la invención, desarrollo y formalización.

El análisis de la aproximación al concepto en algunos libros de texto clásicos adoptados en los programas de pregrado, que posibilitó establecer los conceptos relacionados con la diferencial y la organización teórica y didáctica adoptada por los autores.

El estudio y el resumen monográfico del concepto, como resultado del análisis anterior, que se tomó como referencia para ser adoptado en la investigación y comprende los conceptos previos, la derivabilidad, diferenciabilidad y teoremas fundamentales.

En último término se exponen, como resultado de este capítulo, los elementos matemáticos, las relaciones lógicas, los sistemas de representación y la versión refinada de la DG de la diferencial. Este resultado orientó las siguientes fases de la investigación.

Historia del concepto de la diferencial

Este estudio permitirá contextualizar las dificultades de los estudiantes por los obstáculos que afrontaron los matemáticos para la elaboración del concepto, así como la explicación de estas dificultades en términos cognitivos[77].

La presentación actual del concepto de diferencial difiere bastante del desarrollo histórico, que fue paralelo al de la física matemática. Se determinan las siguientes épocas: la griega, caracterizada por la aplicación de los métodos exhaustivos para el cálculo de áreas y volúmenes; antes del siglo XVII, que se caracterizó

[77] Mark Asiala y otros, "A Framework for… 5-6.

por el desarrollo y aplicación de los métodos geométricos para calcular tangentes y aproximaciones lineales a funciones; el siglo XVII, que se destacó por el intento de resolver cuatro problemas clásicos (encontrar las tangentes a una curva, las razones de cambio instantáneo, maximizar o minimizar funciones y calcular longitudes de curvas); el siglo XVIII, época en la que sobresalen los intentos de dotar de rigor al cálculo; y el siglo XIX, que es considerado el del rigor y la formalización[78].

Al respecto, se relacionan los siguientes matemáticos que hicieron aportes geométricos al avance del cálculo diferencial: Giles Persone de Roverval (1602-1657) generalizó el método de Arquímedes para obtener la tangente a una curva espiral en cualquier punto; Fermat (1601-1665) formuló el método para hallar la tangente a una curva; Descartes (1596-1650) contribuyó con un método algebraico para hallar la tangente a una curva sin incluir el concepto de límite; Isaac Barrow (1630-1677) recurrió a métodos geométricos para hallar tangentes a curvas sin utilizar conceptos relacionados con límites; Kepler (1571-1630) propuso métodos exhaustivos para calcular áreas, volúmenes, centros de gravedad y longitud de curvas; Galileo (1564-1642) resolvió problemas sobre movimiento uniformemente acelerado y demostró que el área encerrada bajo la curva tiempo-velocidad es la distancia, y Bonaventura Cavalieri (1598-1647) desarrolló las ideas de los indivisibles mediante un método geométrico.

La diferencial según Leibniz y Newton

Un hecho fundamental para el desarrollo de la matemática se registró en el siglo XVII, con los aportes de Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Leibniz (1646-1716), quienes son considerados como los inventores del cálculo. En Inglaterra, Newton definió los momentos como cantidades infinitamente pequeñas, indivisibles o infinitesimales y dio un método general para obtener el cambio relativo de una variable con respecto a la otra.

Newton consideró las variables, denominadas fluyentes, como las generadas por el movimiento de puntos, rectas y planos, diferente

[78] Morris Kline, *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros días*, I y II, Madrid: Alianza Editorial, 1972, 512.

a la concepción de elementos estáticos, para considerarlos como infinitesimales y los notó como x e y. Al cambio relativo de la fluyente con respecto al tiempo lo denominó fluxión, por su carácter físico, y los representó por $\dot{x}$ e $\dot{y}$. Con estos conceptos, Newton estableció claramente el problema fundamental del cálculo: dada la relación entre dos fluyentes obtener la relación entre sus fluxiones[79].

Por su parte, Leibniz en Alemania, considerado además como el fundador de las matemáticas formales, estableció los conceptos de diferencias finitas, los diferenciales como cantidades arbitrariamente pequeñas, y determinó que la integración es un proceso de sumación y es el proceso inverso de la diferenciación. La notación de Leibniz, $\frac{dy}{dx}$, hoy generalizada, combina una percepción primitiva y una cierta referencia del paso a límite abstracto implícito en el concepto de diferencial[80].

Los siguientes ejemplos describen el uso original de las cantidades infinitesimales por Newton y Leibniz en sus cálculos y razonamientos.

- Para calcular la derivada de la función $y = x^2$, consideraban que una variación infinitesimal dx produciría una variación también infinitesimal dy: $y + dy = (x + dx)^2 = x^2 + 2xdx + dx^2$; por tanto: $dy = 2xdx + dx^2$. Después dividían ambos miembros por dx: $dy/dx = 2x + dx$, y sólo en este momento despreciaban los sumandos infinitesimales, obteniendo: $dy/dx = 2x$.
- Para demostrar la relación inversa entre la derivación y el cálculo del área $A(x)$ bajo una curva $y(x)$, consideraban que una variación infinitesimal dx produciría una variación infinitesimal dA, la cual podía aproximarse por el rectángulo de altura $y(x)$ y base dx, resultando: $dA = y \cdot dx$; dividiendo ambos miembros por dx, obtenían la relación básica: $dA/dx = y$.

Como puede apreciarse, el uso de los infinitesimales presentaba ciertas ventajas: se escribía como igualdad lo que solo podía considerarse como aproximación si se utilizaban incrementos finitos;

---

79 Morris Kilne, *El pensamiento matemático…* 478-479.
80 Morris Kilne, *El pensamiento matemático…* 496-496.

además, los términos que contenían estas cantidades podían despreciarse en el momento justo del razonamiento que se considerase oportuno y, por tanto, el uso de los infinitesimales generaba grandes dudas y fuertes críticas[81].

Posteriormente, en el siglo XVIII, la evolución del concepto de diferencial se caracterizó por los intentos de dotar de rigor al cálculo infinitesimal. Se destacan los aportes y críticas de los siguientes matemáticos: Brook Taylor (1685-1731) contribuyó con métodos de incrementos finitos y la manipulación formal de expresiones algebraicas; Colin Maclaurin (1698-1746) intentó fundamentar las fluxiones en la geometría griega y el método de la exhausción, evitando el concepto de límite[82]; aparece el primer libro de texto para entender las líneas curvas, denominado *Análisis de lo infinitamente pequeño*, que fue publicado por el marqués de L'Hospital (l696); Lagrange (1736-1813) intenta definir la derivada sin la noción de límite y utiliza la expansión de una función en series de potencias; D'Alembert (1717-1783) aporta las definiciones de límite y diferencial muy cercanas a las actuales[83] .

Por otra parte, algunos opositores y críticos al desarrollo del cálculo son Michel Rolle, quien opina que el cálculo infinitesimal es una colección de falacias ingeniosas, y George Berkely (1685-1753), quien critica las ideas de Newton, afirmando

> […] este razonamiento no parece ni correcto ni honesto. Cuando se dice que los incrementos ya no son nada o que no hay más incrementos, la suposición anterior en el sentido de que los incrementos fueron algo o que hubo incrementos es destruido, sin embargo, una consecuencia de la suposición es retenida (...) Este es un razonamiento falso[84].

Benjamin Robins (1707-17051), por su parte, apoya las fluxiones pero rechaza los infinitesimales; Carnot (1753-1823) critica los

---

[81] Rafael López-Gay Lucio-Villegas, "La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la Física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora" (Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Madrid, 2001), 35.
[82] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 567.
[83] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 759-780.
[84] David Tall, "The Psychology of… 168,169.

infinitesimales e intenta probar que el fundamento lógico estriba en el método exhaustivo y abre el paso al siglo XIX, considerado el del rigor para el cálculo diferencial[85].

Se cree que en el siglo XVIII se ubican los comienzos del cálculo infinitesimal de funciones de dos y tres variables, con los aportes de Newton para obtener expresiones a partir de ecuaciones polinomiales en x e y, es decir, ecuaciones de la forma $f(x, y) = 0$, las cuales son equivalentes a las encontradas por derivación parcial de f respecto a x e y en el cálculo reciente. Su trabajo no fue publicado[86].

Al principio, la diferencia entre una derivada parcial y una ordinaria no fue reconocida explícitamente y se utilizaba el mismo símbolo d para ambas. Para el caso de funciones en varias variables independientes, era el significado el que indicaba de qué derivada se trataba, correspondiente a los cambios en una única variable.

Jacques Bernoulli (1654-1705) utilizó derivadas parciales en su trabajo sobre problemas isoperimétricos, como también lo hizo Nicolás Bernoulli (1687-1749) en un artículo del Acta Eruditorum de 1720 sobre trayectorias ortogonales. Sin embargo, fueron Euler, Clairaut y D'Alembert quienes crearon la teoría de derivadas parciales[87].

Clairaut fue quien obtuvo la condición para que $dz = pdx + qdy$, donde p y q son funciones de x e y, sea una diferencial exacta, es decir, proviene de la función $z = f(x, y)$ al formar la diferencial,

$$dz = (\partial f/\partial x)dx + (\partial f/\partial y)dy,$$

su resultado fue que $pdx + qdy$ es una diferencial exacta si y solo si $\partial p/\partial y = \partial q/\partial x$. Además, en un artículo de 1734, demuestra que dada una función definida sobre un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ y si existen las segundas derivadas parciales de $z = f(x, y)$ y son continuas en un abierto, entonces,

85 Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 575-577.
86 Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 565.
87 Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 565.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

En otros artículos, escritos de 1748 a 1766, trata sobre los cambios de variables, inversión de derivadas parciales y determinantes funcionales[88].

El principal impulso para trabajar con derivadas de funciones de dos o más variables vino de los primeros trabajos en ecuaciones en derivadas parciales sobre la ecuación de onda, ecuación del calor y teoría del potencial. Así, Euler (1707-1783), con sus trabajos de funciones a partir de una manera formal, es decir, razonando desde su representación algebraica, en su libro sobre cálculo diferencial enuncia la forma de calcular la diferencial de una función de dos variables, las derivadas parciales no eran más que un paso intermedio hacia su objetivo principal: el cálculo del diferencial. Euler desarrolló el cálculo de derivadas parciales en una serie de artículos dedicados a problemas de hidrodinámica.

Por su parte, D'Alembert, en trabajos realizados en 1744 y 1745 sobre dinámica, extendió el cálculo de derivadas parciales[89].

La diferencial según Cauchy

En el siglo XIX se destacan por sus aportes al cálculo: Gauss (1777-1855) y Cauchy (1789-1857), quienes rechazan el concepto de derivada en términos de series de potencias de Lagrange y lo establecen utilizando el límite, con un tratamiento aritmético relacionan la integral con la derivada. Cauchy define la diferencial como el producto de la derivada por un incremento arbitrario de la variable independiente[90].

Otros aportes son los de Weierstrass (1815-1897), quien define el número real y el límite en términos de (ε, δ) con lo cual contribuye a la aritmetización del análisis; y Heine (1821-1881), quien da una

[88] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 565.
[89] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 565, 566.
[90] Michèle Artigue, "Analysis", 1985, en *David Tall*, "The Psychology of… 169-170.

definición rigurosa de infinitesimales como una cantidad variable, contrario a la idea intuitiva como una constante[91].

Durante el siglo XVIII y principios del XIX, la forma de trabajar con los diferenciales de funciones de varias variables continuó siendo la misma utilizada por Euler. Solo a finales del siglo XIX, cuando aparecen ejemplos de funciones no clasificadas entre las que hoy se denominan elementales, se produce un cuestionamiento inevitable a este tratamiento "por separado" de cada una de las variables.

En tiempos más recientes aparen los aportes de H. A. Schwartz (1843-1921), con los resultados de sus investigaciones en torno a las funciones reales de varias variables; él presenta una función que no es continua en (0,0), pero que posee derivadas parciales, cuestión que contrastaba fuertemente con las propiedades conocidas para funciones de una variable. A Schwartz se le atribuye la formalización del teorema de las derivadas mixtas o cruzadas[92].

Posteriormente, Hilbert (1872-1943) define espacio elucídelo de infinitas dimensiones; Stolz, en 1893, introduce la noción de diferenciabilidad de funciones de varias variables reales; W. H. Young (1908) define la diferencial como una trasformación lineal, y en 1911 Fréchet (1878-1973) incorpora el concepto de diferencial en su interpretación moderna, en términos de transformaciones lineales tangentes[93].

La diferencial según Fréchet

Fréchet (1878-1973), en 1911, introduce el concepto de diferencial en su interpretación moderna, en términos de transformaciones lineales tangentes, de la siguiente forma:

Una función $f(x, y, z, t)$ admite una diferencial en el punto (x_0, y_0, z_0, t_0) si existe una función lineal y homogénea de los incrementos, sea: $A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + D \cdot \Delta t$, que no difiere del incremento de la función Δf a partir del valor $f(x_0, y_0, z_0, t_0)$ más que

[91] Morris Kline, *El pensamiento matemático…* 1250-1251.
[92] Pablo Ignacio Gómez Fuentes y Juan Raúl Delgado, "La diferenciabilidad de funciones… 603-604.
[93] David Tall, *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002, 168.

en un infinitamente pequeño, con relación a la distancia δ entre los puntos (x_0, y_0, z_0, t_0) y $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t)$, entonces la diferencial es, por definición:

$$df = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + C \cdot \Delta z + D \cdot \Delta t.$$

Podemos entender por distancia entre dos puntos la suma de los valores absolutos del incremento de cada variable, o la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de esos incrementos, o incluso el mayor de todos esos incrementos.

Esta definición es expresada por la fórmula: $\Delta f = df + \varepsilon \cdot \delta$ donde ε tiende a cero. Recuerda a la antigua definición como la parte principal y presenta todas sus ventajas, pero escapando a las objeciones de rigor que muy justamente se le habían hecho[94].

Esto significa que $(\Delta f - df)$ tiende a cero más rápidamente que δ, es decir, que el límite de $(\Delta f - df)/\delta$ es cero cuando δ tiende a cero:

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Delta f - df}{\delta} = 0.$$

Esto es, como lo aclara Fréchet, la expresión "$\Delta f - df$ es infinitamente más pequeña que δ", indica que df es una función lineal y homogénea de los incrementos que permite expresar,

$$\Delta f = df + \varepsilon \cdot \delta, \text{ donde: } \lim_{\delta \to 0} \varepsilon = 0.$$

La definición de Fréchet es tan precisa como la de Cauchy, pero sin quitarle significado ni reducirla a un ente formal útil para abreviar desarrollos. Al contrario, con Fréchet la diferencial recupera el carácter de aproximación y el importante papel que había desempeñado en los orígenes del cálculo —y que sigue desempeñando hoy día en cualquier análisis que requiera el uso del cálculo diferencial—. Desde esta nueva concepción, las expresiones o fórmulas diferenciales adquieren un significado preciso en sí mismas, independientemente del tratamiento operatorio que vayan a recibir después, y no ligado necesariamente a las cantidades infinitamente pequeñas[95].

---

[94] Maurice Fréchet. "Sur la notion de différentielle", *Journal de Mathématiques*, volumen XVI, 1937: 233-250. [Mi traducción].

[95] Lucio López-Gay y Rafael Villegas, "La introducción y utilización… 46-48.

El último giro en la historia ocurrió en 1960, cuando Robinson formuló una teoría rigurosa de análisis no estándar, reintroduciendo los infinitesimales sobre una base lógica después de un siglo de rechazo[96].

Análisis de la diferencial en los libros de texto

Para determinar los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial, la estrategia seguida fue analizar textos con las siguientes características en la presentación de los conceptos: la teórica formal, que da relevancia a los sistemas de representación analítica y algebraica; y la teórica aplicada, que hace énfasis en los sistemas de representación gráfica, numérica, algebraica y analítica.

Con respecto a la presentación teórica de los conceptos, se analizaron los siguientes textos:

- Apóstol, Tom M. *Calculus, Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades.* Volumen 2, segunda edición, Barcelona: Editorial Reverté, 1998.
- Bartle, Robert G. *The Elements of Real Analysis.* Segunda edición. New York: Editorial John Wiley & Sons, 1975.
- Lima, Elon Lages. *Curso de análise*. Volumen 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Projeto Euclides, 1985.
- Galindo Soto, Félix, Javier Sanz Gill y Luis Tristán Vega. *Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables.* Madrid: Editorial Paraninfo, 2005.

En cuanto a la presentación de los conceptos en forma teórica y práctica, se analizaron los siguientes textos:

- Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. Séptima edición. México: Oxford University press-Harla, 1998.

[96] Michèle Artigue, "Analysis", 1985, en *Advanced Mathematical Thinking*, ed. David Tall. (Dordrecht: Mathematics Education Library, Kluwer Academic Publishers, 2002), 168.

- Stewart, James. *Cálculo multivariable*. Segunda edición. México: Thompson Learning, 2002.
- Thomas, George, Finney Ross y Maurice Weir. *Cálculo varias variable*. México: Addison Wesley, 1999.
- Marder, L. *Cálculo de varias variables*. Volumen 2. México: Limusa, 1974.

Los primeros textos se escogieron, porque exponen los temas con un desarrollo teórico riguroso, característico de la matemática moderna y el formalismo; además, presentan definiciones, teoremas y corolarios con sus respectivas demostraciones, ejemplos y contraejemplos.

Los segundos textos muestran los conceptos en forma geométrica, numérica, algebraica, verbal o descriptiva, lo que promueve la comprensión del cálculo por el descubrimiento, el poder en la práctica, la utilidad y la competencia técnica.

Para cada texto, como se indica en los siguientes párrafos, se analizó la organización de la unidad de la diferencial, los conceptos, los ejemplos y los ejercicios propuestos, que se relacionan de la Tabla 1 a la Tabla 8, en las cuales las dos primeras filas corresponden a la identificación del texto, en las siguientes filas a dos columnas se hace un resumen de la presentación de los contenidos (la primera columna es una transcripción de los títulos de las secciones y subsecciones y la segunda columna es una síntesis del desarrollo de los conceptos), y en la última fila se describe el enfoque metodológico de las actividades propuestas y los ejercicios de aplicación.

El libro de la editorial Reverté organiza los contenidos en tres partes: análisis lineal, análisis no lineal y temas especiales. Los conceptos relacionados con la diferencial están expuestos en la parte del análisis no lineal, en el capítulo 8, titulado "Cálculo diferencial en campos escalares y vectoriales", comprendido entre las páginas 297 a 342. En la Tabla 1 se presenta un resumen del correspondiente análisis.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	Calculus Volumen II	Tom M. Apostol	Bogotá	1988
Contenidos				

Temas	Descripción
Derivada de un campo escalar respecto a un vector en un punto	Define la derivada de un campo escalar, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, en un punto a interior de A, respecto a un vector arbitrario y de $\mathbb{R}^n$ y sus diferentes notaciones. Presenta ejemplos de esta derivada cuando el vector $y = 0$, la derivada de una transformación lineal, la derivada de la norma euclídea al cuadrado. Enuncia y demuestra el teorema del valor medio para derivadas de campos escalares.
Derivadas direccionales y derivadas parciales	Define la derivada direccional como un caso particular de la derivada de un campo escalar, respecto a un vector en un punto, cuando el vector u es unitario, $\|u\| = 1$. Define la derivada parcial de un campo escalar en un punto, como casos particulares de la derivada direccional, cuando el vector dirección es un vector coordenado unitario.
Derivadas parciales de orden superior	Calcula derivadas parciales de segundo orden, con su respectiva notación y hace énfasis en que la derivada mixta $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ no siempre es igual a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
Derivadas direccionales y continuidad	Expone que en teoría unidimensional, la existencia de la derivada de una función f en un punto implica la continuidad de f en aquel

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	Calculus Volumen II	Tom M. Apostol	Bogotá	1988
Contenidos				
Temas	Descripción			
	punto, sin embargo, para un campo escalar f la existencia de la derivada direccional, $f'(a;y)$ para todo vector y no implica la continuidad de f en a, presentando un contraejemplo. Justifica que el concepto de derivada direccional no constituye una extensión satisfactoria del concepto unidimensional de derivada.			
La diferencial	Presenta este concepto como una generalización conveniente de la derivada, que implica la continuidad, lo cual permite extender los principales teoremas de derivación de una dimensión al caso de mayor número de dimensiones. Expone los conceptos de diferencial de una función real de variable real y la diferencial de un campo escalar. Enuncia y demuestra el teorema, si una función f es diferenciable en un punto a, con diferencial T_a, entonces existe $f'(a;y)$ para todo y en $\mathbb{R}^n$ y $T_a(y) = f'(a;y)$.			
Gradiente de un campo escalar	Da una explicación gráfica, algebraica y analítica del vector gradiente. Para el caso de un campo escalar, $f'(a;y) = \nabla f(a) \cdot y$, enuncia y demuestra el teorema, si un campo escalar f es diferenciable en a entonces es continuo en a.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	Calculus Volumen II	Tom M. Apostol	Bogotá	1988
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Enuncia y demuestra el teorema de la condición suficiente de diferenciabilidad. Si existen las derivadas parciales $D_1 f, \cdots, D_n f$ en cierta $n-$ bola $B(a)$ y son continuas en a entonces f es diferenciable en a.			
Regla de la cadena para derivadas de campos escalares	Plantea y demuestra el teorema de la regla de la cadena, para hallar la derivada de la función compuesta $g = f \circ r$, de un campo escalar f y una función vectorial r en un punto.			
Aplicaciones	Presenta aplicaciones geométricas, conjuntos de nivel y planos tangentes			
Diferenciales de campos vectoriales	Define la derivada de un campo vectorial respecto a un vector en un punto. Representa en forma geométrica y analítica la diferenciabilidad en campos vectoriales. Formula y demuestra el teorema, si un campo vectorial es diferenciable en un punto, implica la existencia de la derivada en ese punto en cualquier dirección. Enuncia y demuestra el teorema de la regla de la cadena para campos vectoriales. Representa en forma matricial la diferencial de un campo vectorial, la matriz jacobiana. Plantea y demuestra el teorema, diferenciabilidad implica continuidad.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Reverté	Calculus Volumen II	Tom M. Apostol	Bogotá	1988
Contenidos				
Temas	Descripción			
Ejercicios	Calcular derivadas de un campo vectorial en un punto respecto a un vector dirección, derivadas parciales, direccionales y diferenciales utilizando reglas algebraicas. Aplicar las derivadas parciales. Demostrar o verificar la existencia de derivadas de funciones que satisfacen ciertas condiciones. Calcular gradientes, derivadas direccionales. Aplicar la derivada direccional a problemas geométricos. Deducir propiedades del gradiente. Verificar el cumplimiento de algunas propiedades de la diferencial. Calcular conjuntos de nivel, planos tangentes, vector tangente y espacios tangentes. Calcular la diferencial de campos vectoriales.			
Aplicaciones del cálculo diferencial	En el capítulo 9 presenta aplicaciones de la diferencial de campos escalares y vectoriales, discutidos en el capítulo 8, a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, derivación de funciones definidas implícitamente, máximos, mínimos y puntos de ensilladura, fórmula de Taylor de segundo orden para campos escalares, extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange.			

Tabla 1. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Reverté.

De la Tabla 1 se puede evidenciar que los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial para este autor son: funciones en varias variables, derivada de una función en un punto respecto a un vector, derivada parcial, derivada direccional, diferencial de un campo escalar y diferencial de un campo vectorial. Los elementos matemáticos son presentados en forma algebraica y analítica.

El siguiente texto examinado es el de la editorial John Wiley Sons, el cual hace una presentación del análisis real, que comprende tres partes: una donde caracteriza el sistema de los números reales; otra dedicada a funciones, límites, continuidad, diferenciación e integración de funciones reales; y la última destinada a sucesiones y series.

La parte dedicada al análisis de funciones inicia describiendo el sistema de los números reales, sus propiedades, operaciones y relaciones; continúa con la topología de los espacios cartesianos, espacios vectoriales, producto interior, norma, conjuntos abiertos, cerrados, compacidad, conexidad y separación; luego comprende las funciones en varias variables, funciones lineales, continuidad, continuidad uniforme y puntos fijos, sucesión de funciones continuas, límite de funciones; y finaliza con la diferenciación e integración de funciones en una y varias variables.

Los conceptos relacionados con la diferencial son expuestos en la unidad VII, titulada Diferenciación en $\mathbb{R}^p$ comprendida de la página 347 a 397.

En la Tabla 2 se exponen los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial en este texto.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
John Wiley & Sons	The Elements of Real Analysis	Robert G. Bartle	New York	1976
Contenidos				
Temas		Descripción		
Derivada parcial		Hace una introducción de la diferenciación de funciones reales. Primero presenta la derivada de una función real de variable real en un punto como una aproximación lineal de la función en vecindades del punto, y posteriormente extiende este concepto a funciones en varias variables. Indica la definición de derivada de una función vectorial de variable real con aplicaciones a trayectorias de partículas, velocidad y aceleración. Define derivada parcial de una función con dominio un abierto A de $\mathbb{R}^p$, $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $p > 1$, $q > 1$, en un punto c de A y con diferentes notaciones.		
Derivada direccional		Define la derivada direccional de la función, $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, $p > 1$, $q > 1$, en un punto c interior de A en dirección de un vector u de $\mathbb{R}^p$.		
La diferencial de, $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$.		Define la diferencial de una función como el funcional lineal entre los espacios vectoriales que aplica la función y presenta la interpretación analítica y geométrica del concepto. Expone un lema sobre la unicidad de la diferencial.		

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>John Wiley & Sons</td><td>The Elements of Real Analysis</td><td>Robert G. Bartle</td><td>New York</td><td>1976</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">La diferencial de, $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.</td><td colspan="3">Enuncia y demuestra el teorema: la existencia de la diferencial implica la existencia de las derivadas parciales.
Enuncia y demuestra un corolario del teorema anterior, la existencia de la diferencial de un campo escalar implica la existencia de las derivadas parciales, estableciendo que $Df(c)(u) = \nabla f(c) \cdot u$. Sin embargo, muestra que el recíproco de este corolario no es cierto.
Analiza la diferencial de una función en varias variables, $f: A \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, según los valores de p y q.
Enuncia y demuestra el teorema sobre la condición suficiente para la existencia de la diferencial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicios</td><td colspan="3">Calcular derivadas parciales, direccionales y diferenciales.
Demostrar la existencia de la derivada parcial, la derivada direccional, la diferenciabilidad, la continuidad y el acotamiento, para funciones en varias variables. Calcular en forma algebraica el gradiente, planos tangentes, vector tangente y espacios tangentes.</td></tr>
</table>

Tabla 2. Contenidos sobre diferencial. Editorial John Wiley & Sons

Para este autor, según el resumen presentado en la Tabla 2, los elementos matemáticos que estructuran el concepto de diferencial de una función en varias variables son: derivada de una función en un punto respecto a un vector, derivada parcial, derivada direccional, diferencial de una función (real de variable real, vectorial de variable real, real de variable vectorial y vectorial de variable vectorial), condición suficiente de diferenciabilidad y teoremas de diferenciabilidad.

El tercer libro analizado es el volumen II del *Análisis Real*, editado por el Instituto de Matemática Pura y Aplicada (IMPA). Este libro comprende el estudio de los espacios euclidianos n-dimensional $\mathbb{R}^n$, y utiliza un enfoque analítico, algebraico y geométrico, que contrasta con el enfoque aritmético del volumen I, que está dedicado al análisis real para funciones de una variable.

Para el análisis real en varias variables, el texto inicia con la topología de los espacios euclídeos, ya que según el autor, el estudio topológico de los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es más complicado que en el caso de $\mathbb{R}$. Cita el ejemplo en que los únicos conjuntos conexos en la recta son los intervalos, mientras que es imposible clasificar topológicamente los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^n$ y además, el álgebra lineal que es poco necesaria en dimensión 1 (las matrices de orden 1×1 que representan las transformaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ se confunden con los números reales), para el análisis real en varias variables es indispensable a fin de formular conceptos y demostrar teoremas del cálculo diferencial de funciones en más de una variable.

El estudio de la diferencial, incluido en el capítulo III, páginas 117 a 176, se basa en aproximar una función en varias variables, en una vecindad de cada punto del dominio, por una transformación lineal (llamada diferencial) y a partir de las propiedades de la transformación obtener información de la función. Este estudio requiere de conceptos de álgebra lineal, como vectores, matrices y las transformaciones lineales que representan la diferencial. El enfoque de aplicar los métodos del álgebra lineal al estudio de la diferencial, trae grandes ventajas en cuanto a conceptualización, notación, unificación y generalización.

Finalmente, el texto incluye dos capítulos dedicados a las integrales múltiples y de superficie.

En la Tabla 3 se describen los elementos matemáticos que hacen parte de la estructura conceptual de la diferencial para este autor.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>IMPA. Projeto Euclides</td><td>Curso de análise volume 2</td><td>Elon Lages Lima</td><td>Rio de Janeiro</td><td>1985</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas parciales</td><td colspan="3">Define derivada parcial de una función real de variable vectorial con dominio el abierto U, $f: U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, en un punto interior a de U, en términos del límite del cociente incremental.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas direccionales</td><td colspan="3">Define la derivada de una función en un punto en dirección de un vector.

Presenta ejemplos de algunas funciones que poseen derivadas direccionales en un punto en cualquier dirección, sin embargo, no son continuas en el punto. Por tanto, muestra que la existencia de las derivadas direccionales no implica la continuidad de la función.

Enuncia y demuestra el teorema del valor medio.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funciones diferenciables</td><td colspan="3">Define la diferencial de una función, $f: U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, desarrollada por Fréchet y Stolz, como generalización del concepto de derivada de una función real de variable real.

Muestra que si una función es diferenciable en un punto, entonces existen todas las derivadas parciales y las derivadas direccionales en la dirección de cualquier vector.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>IMPA. Projeto Euclides</td><td>Curso de análise volume 2</td><td>Elon Lages Lima</td><td>Rio de Janeiro</td><td>1985</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Enuncia y demuestra el teorema: diferenciabilidad implica continuidad.
Presenta la regla de la cadena para funciones en varias variables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La diferencial de una función</td><td colspan="3">Establece que la diferencial de una función en varias variables, $f: U \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, está dada como $Df(a)(u) = \nabla f(a) \cdot u$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">El gradiente de una función diferenciable</td><td colspan="3">Establece las propiedades del gradiente y presenta el significado geométrico y analítico del vector gradiente de una función real de variable vectorial.</td></tr>
<tr><td colspan="2">La regla de Leibniz.
Teorema de Schwartz.</td><td colspan="3">Formula la regla de Leibniz, para calcular derivadas parciales de funciones en varias variables definidas en forma integral.
Formula la regla de Schwarz, para calcular derivadas parciales de segundo orden mixtas, o de orden superior a dos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aplicaciones y ejercicios</td><td colspan="3">Propone demostrar la diferenciabilidad y la continuidad de funciones.
Aplicar el concepto de diferenciabilidad en la fórmula de Taylor infinitesimal, el resto de Lagrange y el resto Integral.
Encontrar puntos críticos y aplicar el método de multiplicadores de Lagrange para optimizar funciones en varias variables.</td></tr>
</table>

Tabla 3. Contenidos sobre la diferencial. Editorial IMPA.

De la síntesis presentada en la Tabla 3, se infiere que, para el libro de la editorial IMPA, los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial de una función en varias variables son: función de varias variables, derivada parcial, derivada direccional, la diferencial, el gradiente de una función y las reglas para calcular diferenciales.

El cuarto texto analizado es de la Editorial Paraninfo, que inicia el análisis en varias variables con un capítulo dedicado a la topología del espacio euclídeo n −dimensional; luego destina cuatro capítulos al cálculo diferencial de funciones en varias variables que incluyen la derivabilidad y diferenciabilidad, funciones inversas e implícitas, variedades diferenciales, teoremas de rango, teoría de campos escalares y vectoriales, operadores diferenciales; y finalmente destina capítulos a la integración múltiple y la aplicación a integrales curvilíneas e integrales de superficie.

Para la presentación de los conceptos utiliza una representación analítica, que se caracteriza por seguir la secuencia definición, teorema (sin demostración), proposiciones y observaciones. Al final de cada sección expone un conjunto de ejercicios resueltos, haciendo énfasis en la representación algebraica, la cual ayuda a explicar la presentación analítica. Para algunas situaciones hay gráficas en dos y tres dimensiones y su respectiva interpretación geométrica.

El concepto de diferencial de una función en varias variables comprende los capítulos 2, 3 y 7, que se describen en la Tabla 4.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Paraninfo	Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables	Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil y Luis A. Tristán Vega	Madrid	2005
Contenidos				
Temas	Descripción			
Derivabilidad y diferenciabilidad	Define función derivable, derivada parcial y derivada direccional y función diferenciable en un punto. Enuncia el teorema: la diferencial de una función en un punto implica la continuidad de la función en el punto. Enuncia el teorema: si una función es diferenciable en un punto, entonces existen las derivadas direccionales en dicho punto, según cualquier dirección, en particular, la función es derivable en el punto. Define derivada de una función en varias variables y la representa como la matriz jacobiana. Establece que si una función f es diferenciable en un punto x_0, entonces la aplicación lineal $f'(x_0)$ está dada en forma matricial respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ por la matriz jacobiana. Define el gradiente de un campo escalar. Establece la relación entre derivabilidad y diferenciabilidad. Presenta la interpretación geométrica de la diferencial de una función en un punto.			

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
Paraninfo	Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables	Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil y Luis A. Tristán Vega	Madrid	2005
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Enuncia un teorema de condición suficiente de diferenciabilidad. Establece y caracteriza las operaciones con funciones diferenciales.			
Regla de la cadena	Regla de la cadena. Teorema del valor medio.			
Derivadas de orden superior	Define las derivadas parciales de orden $m \geq 1$. Define las funciones de clase C^k, como aquellas que admiten derivadas parciales de orden $k \geq 1$ en cada punto de un abierto A y estas derivadas parciales son continuas en A. Define funciones de clase C^∞. Enuncia el teorema de Schwarz. Establece las condiciones para la igualdad entre las derivadas de segundo orden mixtas.			
Fórmula de Taylor	Presenta la fórmula de Taylor. Establece las condiciones para calcular el valor de una función en vecindades de un punto a partir de su imagen y de las derivadas parciales de orden superior evaluadas en este. Presenta un análisis del error en la fórmula de Taylor y su relación con la diferencial de una función.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Paraninfo	Guía práctica de cálculo infinitesimal en varias variables	Félix Galindo Soto, Javier Sanz Gil y Luis A. Tristán Vega	Madrid	2005
Contenidos				
Temas	Descripción			
Ejercicios y aplicaciones	Propone optimizar funciones a partir del estudio de los extremos relativos y formas cuadráticas como una aplicación del concepto de diferencial. Presenta ejercicios resueltos y propone otros para determinar derivabilidad, diferenciabilidad y continuidad de funciones en varias variables aplicando las definiciones y teoremas. Presenta contraejemplos para mostrar que el recíproco de algunos teoremas no se cumple.			

Tabla 4. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Paraninfo.

De la Tabla 4 se infiere que los elementos matemáticos que dan la estructura al concepto de diferencial en el libro de la editorial Paraninfo son: función en varias variables, derivada direccional, derivada parcial, función derivable, función diferenciable, gradiente, matriz jacobiana, interpretación geométrica y analítica de la diferencial y teoremas para caracterizar la diferencial de una función.

El quinto texto analizado, de la segunda clasificación, es el libro de la editorial Harla, el cual desarrolla el cálculo diferencial e integral en 14 capítulos, que se caracterizan por la presentación de una manera formal de las definiciones, los teoremas y las demostraciones, acompañados de comentarios, ejemplos ilustrativos, gráficas y la aplicación en modelos de la vida real. Además, incorpora la tecnología con el objetivo de mejorar el aprendizaje del cálculo. Los ejemplos son ilustrativos y tienen como propósito mostrar el concepto, la definición o el teorema particular y constituyen un referente para la resolución de los ejercicios.

La diferenciación de funciones en varias variables la efectúa en el capítulo 11, titulado "Funciones vectoriales", que comprende: función real con valor vectorial y ecuaciones paramétricas, derivadas y diferenciales de estas funciones; y en el capítulo 12, titulado "Cálculo diferencial de funciones de más de una variable" expone: derivadas parciales, diferenciabilidad, regla de la cadena, gradiente y aplicaciones. Estos conceptos se resumen en la Tabla 5.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Harla</td><td>El cálculo con geometría analítica</td><td>Louis Leithold</td><td>México</td><td>1998</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Cálculo de las funciones con valor vectorial</td><td colspan="3">Define derivada de una función vectorial, $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, n > 1$; y función vectorial diferenciable.

Presenta aplicaciones de la diferencial en el movimiento en el plano y el significado geométrico y físico de los vectores unitarios tangente y normal a una curva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas parciales</td><td colspan="3">Define derivada parcial de una función de dos variables, $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y presenta las diferentes notaciones.

Expone la interpretación geométrica de la derivada parcial de una función.

Da una interpretación analítica de la derivada parcial de una función como la razón de cambio instantánea.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Harla	El cálculo con geometría analítica	Louis Leithold	México	1998
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Define la derivada parcial de funciones con n variables.			
Diferenciabilidad y diferencial total	Define el incremento de una función de dos variables en un punto. Define función diferenciable en términos de incrementos. Enuncia y demuestra el teorema: si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en él. Muestra un ejemplo para ilustrar que la sola existencia de las derivadas parciales de una función en un punto no implica la diferenciabilidad de la función en dicho punto. Enuncia y demuestra el teorema sobre la condición suficiente para que una función sea diferenciable en un punto. Si existen y son continuas las derivadas parciales de una función en un punto, entonces la función es diferenciable en este. Define funciones continuamente diferenciables en un punto, como las que cumplen las condiciones del teorema anterior. Propone ejercicios para mostrar que el recíproco del teorema anterior no se cumple, es decir, funciones que son diferenciables en un			

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
Harla	El cálculo con geometría analítica	Louis Leithold	México	1998
Contenidos				
Temas	Descripción			
	punto y aun así sus derivadas parciales no son continuas en dicho punto. Concluye que la derivabilidad continua en un punto es una condición suficiente, pero no necesaria, de la diferenciabilidad. Define la diferencial total de una función de dos variables. Generaliza las definiciones de incremento, función diferenciable y diferencial total a una función de n variables. Para cada concepto muestra ejemplos ilustrativos.			
Regla de la cadena	Enuncia y demuestra el teorema de la regla de la cadena para funciones de dos variables. Enuncia y demuestra el teorema que generaliza la regla de la cadena para funciones de n variables, $n \geq 1$.			
Derivadas parciales de orden superior	Define derivadas de segundo, de tercer orden, derivadas mixtas y enuncia el teorema que da condiciones para que las derivadas mixtas coincidan, $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.			
Condiciones suficientes de diferenciabilidad	Enuncia, demuestra e ilustra el teorema del valor medio para una función de una sola			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Harla	El cálculo con geometría analítica	Louis Leithold	México	1998
Contenidos				
Temas	Descripción			
	variable, aplicado a una función de varias variables. Demuestra el teorema sobre las condiciones suficientes para la diferenciabilidad, utilizando el teorema del valor medio.			
Derivadas direccionales y gradientes	Define derivada direccional. Presenta una interpretación geométrica de la intensidad de variación de los valores funcionales $f(x, y)$ en cualquier dirección. Define gradiente de una función de dos variables. Da la interpretación geométrica del vector gradiente, que indica la dirección en la que la función presenta su mayor tasa de variación.			
Aplicaciones	Aplicaciones de la diferencial para encontrar planos tangentes y normales de las superficies. Incluye problemas y ejercicios de aplicación de la diferencial para encontrar y caracterizar valores extremos de funciones de dos variables. Define puntos críticos, valor máximo y mínimo relativo. Enuncia el teorema de la prueba de la segunda derivada para caracterizar valores extremos.			

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
Harla	El cálculo con geometría analítica	Louis Leithold	México	1998
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Presenta y propone problemas para encontrar valores máximo, mínimo absoluto y puntos silla. Propone situaciones problema para aplicar el teorema del valor extremo para funciones de dos variables. Expone el método de los multiplicadores de Lagrange y propone ejercicios y problemas. Plantea ejercicios de obtener una función conociendo el gradiente y las diferenciales exactas.			
Ejercicios	Los ejercicios están ordenados por grados de dificultad, proporciona variedad de tipos de problemas que van desde cálculos y aplicaciones hasta problemas teóricos para la calculadora e incluye situaciones para promover la redacción			

Tabla 5. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Harla.

De la Tabla 5 se infiere que para este autor los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial son: derivada de funciones vectoriales, diferencial de una función vectorial, derivada parcial, derivada direccional, la diferencial de una función en varias variables, teoremas fundamentales sobre condiciones necesarias y suficientes de diferenciabilidad, propiedades de funciones diferenciables y aplicaciones.

El sexto texto analizado es de la editorial Thomson; en la presentación se afirma que se atiende la recomendación del movimiento de reforma de la enseñanza del cálculo, de concentrarse en la comprensión de los conceptos, dada en la conferencia de la Universidad de Tulane en 1986, y por tanto, tiene como propósito ayudar a los estudiantes a descubrir el cálculo, aplicarlo en situaciones prácticas y admirar su belleza presentando los temas en forma verbal, geométrica, numérica y algebraica.

El tema, la derivación y diferenciación de funciones en varias variables, lo aborda así: en el capítulo 13 analiza funciones con valor vectorial, sus derivadas y aplicaciones a la longitud de arco, curvatura y movimiento de partículas; en el capítulo 14 expone el concepto de derivadas parciales, derivadas direccionales, diferenciales, aproximaciones lineales y aplicaciones.

Esta exposición se caracteriza por incluir ejemplos de situaciones reales modeladas por funciones definidas por datos numéricos y gráficas, por ejemplo, la función índice de temperatura y humedad es ilustrada mediante una tabla de valores, que muestra la dependencia de esta función respecto de las dos variables temperatura del aire y la rapidez del viento. Las derivadas parciales se introducen al analizar la variación de la temperatura del aire percibido en función de la temperatura y la humedad relativa. Esta misma situación la relaciona con las aproximaciones lineales o diferenciales. La derivada direccional es incorporada a través de mapas de contorno de la temperatura, para estimar la rapidez de cambio de temperatura en una zona geográfica particular.

Con respecto al concepto de diferencial, da una interpretación geométrica, iniciando para el caso de una variable como el hecho que al acercarse a un punto de la gráfica de una función derivable, la curva no se distingue de su recta tangente y se puede aproximar la función con una función lineal. Al extender este principio en tres dimensiones, a medida que se acerca a un punto de una superficie, que es la gráfica de una función diferenciable de dos variables, la superficie se asemeja cada vez más a un plano (su plano tangente) y se puede aproximar la función mediante una función lineal de dos variables.

En la Tabla 6 se sintetizan los temas que conforman el concepto de diferencial de una función en varias variables según este autor

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Thomson Learning	Cálculo multivariable	James Stewart	México	2002
Contenidos				
Temas	Descripción			
Funciones vectoriales	Define y representa funciones vectoriales y curvas en el espacio. Define la derivada de una función vectorial de valor real. Presenta aplicaciones para calcular la longitud de un arco y analizar la curvatura, el movimiento en el plano y el espacio.			
Funciones de varias variables	Define función de dos variables (dominio, recorrido). Representa las funciones en forma verbal, numérica (tabla de valores), algebraica (por una fórmula) y visual (por gráficas o curvas de nivel). Define, representa y caracteriza funciones de tres o más variables.			
Derivadas parciales	Señala una explicación de la derivada parcial para funciones de dos variables en un punto, representadas numéricamente (tablas de valores). Define derivada parcial en forma algebraica, como el límite del cociente incremental. Representa las derivadas parciales en diferentes notaciones. Establece reglas algebraicas para hallar derivadas parciales.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Thomson Learning	Cálculo multivariable	James Stewart	México	2002
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Expone la interpretación geométrica de la derivada parcial de una función en un punto como pendientes, ilustra con gráficas. Define derivadas parciales para funciones de más de dos variables y representa en forma algebraica. Define las derivadas parciales de orden superior. Si f es una función de dos variables, las derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de manera que se pueden encontrar las derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $\left(f_y\right)_x$, $\left(f_y\right)_y$. Enuncia el teorema de Clairaut, que da condiciones bajo las cuales se puede expresar $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$.			
Planos tangentes y aproximaciones lineales	Define y representa las aproximaciones lineales o aproximación del plano tangente a la función en un punto. Define la diferencial de una función de dos variables en un punto y define la diferencial total. Enuncia el teorema que establece las condiciones suficientes para que una función de dos variables sea diferenciable en un punto. Muestra un ejemplo ilustrativo para			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Thomson Learning	Cálculo multivariable	James Stewart	México	2002
Contenidos				
Temas	Descripción			
	estimar la diferencial de una función de dos variables representada en forma tabular. Define diferenciales y presenta una interpretación gráfica y algebraica. Define la derivada y la diferencial para funciones de tres o más variables.			
Regla de la cadena	Explica la regla de la cadena para diferentes casos de funciones compuestas en varias variables, representando en forma algebraica y gráfica mediante diagramas de árbol. Enuncia, demuestra y representa el teorema de la función implícita.			
Derivadas direccionales y vector gradiente	Define derivada direccional y muestra una aplicación a problemas de meteorología. Define vector gradiente y presenta el significado analítico y geométrico. Enuncia y demuestra el teorema, si una función f es diferenciable en (x, y) entonces la derivada direccional de f en un punto (x, y) en la dirección del vector $u = (a, b)$ es $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b.$ Define, representa e ilustra el concepto de derivada direccional para una función de tres variables. Expone la interpretación geométrica de la maximización de la derivada direccional.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Thomson Learning	Cálculo multivariable	James Stewart	México	2002
Contenidos				
Temas		Descripción		
Aplicaciones y ejercicios		Los ejercicios comienzan motivando al estudiante a explicar los significados de los conceptos básicos de la diferencial; otros ejercicios prueban la comprensión conceptual por medio de gráficas y tablas. La dificultad de los ejercicios se da en forma gradual desde los más básicos hasta los más complejos relacionados con aplicaciones y demostraciones. Plantea ejercicios de aplicación de la diferencial para calcular y caracterizar los valores máximos y mínimos. Explica el método de multiplicadores de Lagrange en problemas de optimización y propone problemas para su aplicación.		

Tabla 6. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Thomson.

De la Tabla 6 se concluye que los elementos matemáticos que configuran el concepto de la diferencial de una función en varias variables en este libro son: funciones vectoriales, derivadas de funciones vectoriales, funciones de varias variables, derivadas parciales, derivadas direccionales, gradientes, diferenciales y aplicaciones.

El séptimo texto analizado es el de la editorial Pearson; su propósito, según se expresa en la presentación, es preparar a los estudiantes para integrarse a la comunidad científica. Para cumplir con este objetivo, los conceptos se exponen de manera formal, siguiendo la secuencia definición, teorema, corolario, con las respectivas demostraciones, acompañados de sistemas de representación textual, gráfica y numérica, a través de diagramas y figuras, algunas generadas en computador. Además, se proponen exploraciones con programas de álgebra simbólica, para que los estudiantes activen la intuición geométrica, mejoren la capacidad de pensar en el espacio bidimensional y tridimensional y puedan resolver problemas creativamente.

Cada capítulo incluye aplicaciones y ejemplos con datos reales de situaciones familiares para los estudiantes, y cita las fuentes correspondientes. Sobre la historia y evolución de los conceptos, se indica el origen de las ideas y se mencionan algunos conflictos que surgieron. Además, se enfatizan temas de gran interés y relevancia actual, y se destaca el cálculo como una creación asombrosa de la mente humana.

En cada sección se propone una serie de ejercicios con un nivel de dificultad que va incrementándose, apropiados para trabajar tanto en forma individual como en grupos; algunos requieren utilizar la calculadora, la calculadora gráfica y programas de álgebra simbólica. Al final de cada capítulo se encuentran tres secciones que resumen el contenido en formas diferentes: preguntas de repaso, ejercicios de práctica y ejercicios adicionales.

En el capítulo 11, titulado "Funciones de valores vectoriales y movimiento en el espacio", se expone el concepto de diferenciación de funciones en varias variables; en el capítulo 12 se abordan las funciones de múltiples variables y derivadas parciales. En el capítulo 11 se indica cómo utilizar el cálculo para estudiar las trayectorias, velocidades y aceleraciones de cuerpos en movimiento con aplicaciones a movimientos de proyectiles, planetas y satélites. En el capítulo 12 se expone el cálculo de funciones de más de una variable e incluye dominio, rango, curvas de nivel, límites, continuidad, derivación y diferenciación de estas funciones. Los sistemas de representación utilizados son el gráfico, analítico, numérico y algebraico.

En la Tabla 7 se resumen los temas que configuran el concepto de diferencial de una función en varias variables para los autores de la editorial Pearson.

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Pearson	Cálculo varias variables	George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir	México	1999
Contenidos				
Temas	Descripción			
Funciones de valores vectoriales y movimiento en el espacio	Define funciones de valores vectoriales y expone aplicaciones para el estudio del movimiento en el espacio. Presenta el modelo del movimiento de un proyectil, como aplicación de estas funciones y su diferencial. Muestra la aplicación de las funciones vectoriales para calcular la longitud de arco y la velocidad de una partícula en movimiento, como el vector tangente unitario en cada punto de la curva que representa la trayectoria.			
Funciones de varias variables	Define función en varias variables y caracteriza el dominio, recorrido, variables dependientes e independientes. Define, representa e ilustra punto interior, interior, exterior, punto frontera. Define y caracteriza funciones acotadas y no acotadas. Representa funciones de dos variables por medio de gráficas, curvas de nivel y líneas de contorno, algunas de ellas realizadas en computadora.			

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Pearson	Cálculo varias variables	George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir	México	1999
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Representa superficies de nivel de funciones de tres variables.			
Derivadas parciales	Define y representa la derivada parcial en diferentes notaciones. Da la interpretación geométrica de la derivada parcial con ejemplos e ilustraciones. Define, representa y presenta ejemplos de funciones de más de dos variables. Establece la relación entre la continuidad y la existencia de derivadas parciales. Define derivadas parciales de segundo orden. Enuncia, demuestra y presenta ejemplos de los teoremas de Euler sobre la derivada mixta. Define derivadas parciales de orden superior.			
Diferenciabilidad, linealización y diferenciales	Define la diferencial de una función. Enuncia y demuestra el teorema del incremento para funciones de dos variables. Enuncia, demuestra y presenta ejemplos del corolario del teorema del incremento para funciones de dos variables. Enuncia y demuestra el teorema, si una función es diferenciable en un punto, entonces la función es continua en este punto. Presenta contraejemplo para mostrar que el recíproco no se cumple.			

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Pearson</td><td>Cálculo varias variables</td><td>George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir</td><td>México</td><td>1999</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Expone el procedimiento para linealizar una función de dos variables.
Analiza el error de una aproximación lineal estándar.
Relaciona una aplicación de los diferenciales para predecir el cambio de una función.
Define diferencial total.
Define funciones de más de dos variables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Regla de la cadena</td><td colspan="3">Establece y representa la regla de la cadena para calcular la diferencial de funciones compuestas de dos o más variables.
Establece y representa regla de la cadena para funciones definidas sobre superficies.
Define y muestra ejemplos sobre la diferenciación Implícita como una aplicación de la regla de la cadena.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas parciales con variables restringidas</td><td colspan="3">Calcula derivadas parciales con variables restringidas utilizando diagramas de flechas en su representación.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivadas direccionales, vectores gradiente y planos tangentes</td><td colspan="3">Define derivadas direccionales en el plano.
Presenta una interpretación geométrica de la derivada direccional.
Define el vector gradiente.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Pearson	Cálculo varias variables	George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir	México	1999

Contenidos	
Temas	Descripción
	Establece propiedades de la derivada direccional. Calcula gradientes y tangentes a curvas de nivel. Define, representa y muestra ejemplos de funciones de tres variables. Aplica los conceptos de derivadas parciales para calcular las ecuaciones de planos tangentes y rectas normales. Define y encuentra el plano tangente a una superficie $z = f(x, y)$. Establece reglas algebraicas para operar con gradientes.
Fórmula de Taylor	De una manera formal, con sistemas de representación analítico y algebraico, utiliza la fórmula de Taylor para deducir la prueba de la segunda derivada para valores extremos locales, y la fórmula del error para la linealización de funciones de dos variables independientes. Aplica la fórmula de Taylor en estas deducciones, la cual conduce a una extensión de la fórmula que proporciona aproximaciones polinomiales de todos los órdenes para funciones de varias variables.
Aplicaciones y ejercicios	Propone un conjunto amplio de ejercicios sobre: funciones de valores vectoriales y movimientos

Editorial	Título	Autores	Ciudad	Año
Pearson	Cálculo varias variables	George B. Thomas, Ross L. Finney, Maurice D. Weir	México	1999
Contenidos				
Temas	Descripción			
	en el plano y el espacio, problemas de valor inicial para funciones de valores vectoriales, rectas tangentes a curvas suaves, movimientos sobre trayectorias circulares, curvatura; sistemas coordenados polares, cilíndricos, esféricos; encontrar dominio, rango, curvas y superficies de nivel de funciones en varias variables; calcular derivadas de primer y segundo orden, derivadas parciales mixtas, uso de la definición de derivada parcial, diferenciación implícita, aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales de Laplace y la ecuación de onda; hallar linealizaciones de funciones; estimar cotas superiores para errores en aproximaciones lineales; estimar la sensibilidad al cambio; calcular derivadas parciales con variables restringidas; calcular derivadas direccionales, vectores gradiente y planos tangentes; aplicar la diferenciación de funciones en varias variables para encontrar y caracterizar valores extremos y puntos de silla.			

Tabla 7. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Pearson

De la Tabla 7 se deduce que los elementos matemáticos que configuran el concepto diferencial de una función en varias variables para los autores del texto de la editorial Pearson son: derivadas parciales, linealizaciones, diferenciación implícita, derivadas parciales con variables restringidas, derivadas direccionales, gradientes, planos tangentes, rectas normales, aplicaciones para calcular extremos absolutos de funciones y fórmula de Taylor.

Finalmente, el texto de editorial Limusa, titulado *Cálculo de varias variables*, comprende definiciones básicas y la selección de problemas resueltos, que son ilustrativos para el desarrollo de los contenidos, además en cada sección incluye un conjunto de ejercicios.

El sistema de representación más utilizado es el algebraico y verbal, con algunas gráficas. El concepto de diferencial de una función en varias variables lo aborda en los tres primeros capítulos: derivación parcial, jacobianos, transformaciones, teorema de Taylor y aplicaciones. En la Tabla 8 se describen los temas que conforman el concepto de diferencial de una función en varias variables para este autor.

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Limusa</td><td>Cálculo de varias variables</td><td>L. Marder</td><td>México</td><td>1974</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2">Derivada parcial</td><td colspan="3">Define vecindad, abierto, punto frontera, cerrado, región, función, dominio, representación gráfica, límite y continuidad.

Define y presenta ejemplos de derivada parcial como el límite del cociente incremental y expone estrategias para encontrar derivadas parciales de una función de dos variables.

Da una interpretación geométrica de la derivada parcial de una función f de dos variables en el punto (x_1, y_1), como la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y los planos $x = x_1$ o $y = y_1$.

Muestra una función cuyas derivadas parciales existen en un punto, sin embargo, la función no es continua en el punto.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Limusa	Cálculo de varias variables	L. Marder	México	1974
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Encuentra nuevas funciones, como resultado de calcular derivadas parciales. Define, representa y muestra ejemplos para calcular segundas derivadas parciales de una función de dos variables. Formula y demuestra la regla de la cadena para calcular la derivada de funciones compuestas. Define e interpreta geométricamente el incremento de una función en un punto, $\Delta f(x_1, y_1) = f(x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y) - f(x_1, y_1)$, como el cambio en la altura de la superficie $S: z = f(x, y)$ referidas a los ejes cartesianos rectangulares xyz en el punto (x, y) cuando este se aproxima a (x_1, y_1) y la diferencial df en (x_1, y_1) como el cambio en la altura del plano tangente a S en (x_1, y_1) cuando (x, y) se aproxima a (x_1, y_1).			
Jacobianos y transformaciones	Presenta aplicaciones de las derivadas parciales a funciones implícitas y jacobianos. Establece la dependencia funcional. Determina las propiedades de los jacobianos, transformaciones, mapeos, imagen de una transformación, transformación inversa, aplicación a coordenadas curvilíneas.			

<table>
<tr><th>Editorial</th><th>Título</th><th>Autores</th><th>Ciudad</th><th>Año</th></tr>
<tr><td>Limusa</td><td>Cálculo de varias variables</td><td>L. Marder</td><td>México</td><td>1974</td></tr>
<tr><td colspan="5">Contenidos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Temas</td><td colspan="3">Descripción</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="3">Representa en forma algebraica, gráfica y verbal las derivadas y diferenciales de funciones en varias variables.</td></tr>
<tr><td colspan="2">El teorema de Taylor y sus aplicaciones</td><td colspan="3">Enuncia y demuestra el teorema de Taylor en una variable y el teorema del valor medio como un corolario.

Realiza un análisis del residuo, forma de Lagrange y de Cauchy como una aplicación de la diferencial.

Enuncia y demuestra el teorema de Taylor en dos variables. Aplica el teorema de Taylor para encontrar extremos relativos y absolutos de una función. Utiliza la matriz hessiana para caracterizar extremos relativos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ejercicios y aplicaciones</td><td colspan="3">Presenta una sección de ejercicios para calcular derivadas parciales y su aplicación en las ecuaciones diferenciales parciales, diferenciales exactas, valor aproximado de valores de funciones en dos variables en puntos específicos.

Propone calcular derivadas de funciones en dos variables definidas implícitamente.

Calcular imágenes de regiones bajo transformaciones.

Expresar el desarrollo de una función en serie de Taylor.</td></tr>
</table>

Editorial	**Título**	**Autores**	**Ciudad**	**Año**
Limusa	Cálculo de varias variables	L. Marder	México	1974
Contenidos				
Temas	Descripción			
	Encontrar valores extremos de funciones y caracterizarlos.			

Tabla 8. Contenidos sobre la diferencial. Editorial Limusa.

Para el autor del libro de la editorial Limusa, según la Tabla 8, los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial de una función en varias variables son: derivadas parciales, el teorema de Taylor, regla de la cadena, la diferencial, aplicaciones a transformaciones y jacobianos, máximos, mínimos y puntos de silla de una función en dos variables.

En la Tabla 9 se presenta un resumen de los temas y subtemas, los elementos matemáticos, que configuran la estructura del concepto de diferencial y que aparecieron con mayor frecuencia en los textos analizados.

Elementos matemáticos	**Descomposición**
Derivada de una función	Definición de la derivada de una función en varias variables definida sobre un abierto A de $\mathbb{R}^n$, $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, n≥ m ≥1, en un punto a de A en la dirección del vector y de $\mathbb{R}^n$, como la existencia del límite la siguiente expresión y notada como $f'(a;y)$, $$f'(a;y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hy)-f(a)}{h}.$$ Derivada de una función cuando el vector es nulo, derivada de una función constante, derivada de una

Elementos matemáticos	**Descomposición**
	transformación lineal, derivada de la norma euclídea de un vector al cuadrado en cualquier punto. Relación entre la derivada de una función real de variable real y el comportamiento de una función f real de variable vectorial sobre una recta que pasa por los puntos a y $a+y$.
Derivada direccional	Definición de la derivada direccional, como la derivada de la función f en el punto a en la dirección del vector y cuando el vector dirección es unitario, $f'(a;y)$ con $\|y\|$=1. Interpretación geométrica de la derivada direccional. Derivadas direccionales y continuidad, la derivabilidad no implica continuidad para funciones en varias variables, ejemplo de una función real definida sobre $\mathbb{R}^2$ que posee derivada direccional en 0 en cualquier dirección pero no es continua en 0.
Derivada parcial	Definición de derivada parcial de una función real de una variable vectorial en un punto a, como la derivada direccional cuando el vector dirección es uno de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $f'(a;y)$ con $y=e_k$, (k −ésimo vector coordenado). Notación de derivada parcial. Interpretación geométrica. Interpretación de derivada parcial de funciones representadas en forma tabular. Reglas algebraicas para calcular derivadas parciales. Derivadas parciales de orden superior. Teorema de Clariaut para igualdad de las derivadas parciales de segundo orden mixtas. Aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales. Definición, si la función f, admite derivadas parciales respecto a todas la variables en un punto a, se dice que es derivable en dicho punto.

Elementos matemáticos	**Descomposición**
Diferencial de una función	Definición de diferencial de una función: sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, n≥ 1, m ≥1, f es diferenciable en un punto a, si existe una transformación lineal, $T_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, y una función $r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $f(a+v) = f(a) + T_a(v) + r(v)$, donde $\lim_{\|v\| \to 0} \frac{r(v)}{\|v\|} = 0.$ La transformación lineal T_a se llama diferencial de f en a. Interpretación analítica y geométrica de la existencia de la diferencial. Aplicación del concepto de diferencial para demostrar que la continuidad, la derivabilidad y la linealidad de la derivada no implican la diferenciabilidad, con ejemplos ilustrativos de funciones como las siguientes, que no son diferenciables en (0,0), según las razones indirectas que se enuncian: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0{,}0)$, $f(0{,}0) = 0$, posee derivables parciales en (0,0), no posee derivadas direccionales según todo vector y no es continua en (0,0); $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0{,}0)$, $g(0{,}0) = 0$, es continua en (0,0), posee derivadas direccionales según todo vector en (0,0) y esta derivada no depende linealmente del vector dirección; $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$, $(x,y) \neq (0{,}0)$, $h(0{,}0) = 0$, posee derivada direccional en (0,0) según todo vector dirección y esta derivada es lineal respecto al vector dirección, sin embargo, no es continua en (0,0); $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = \frac{x^3y}{x^4+y^2}$, $(x,y) \neq (0{,}0)$, $\varphi(0{,}0) = 0$, que es continua en todo el plano, admite en todos los puntos del plano derivadas direccionales que

Elementos matemáticos	Descomposición
	dependen linealmente del vector dirección, pero no satisface la regla de la cadena, porque al considerar el camino $\lambda(t) = \left(t, t^2 \sin\frac{1}{t}\right)$, la función compuesta $\varphi^\circ\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, no es derivable en $t = 0$.
Gradiente de un campo escalar	Definición del gradiente de una función como $df = \nabla f$ $$\begin{aligned} df: \mathbb{R}^n &\to (\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$ tal que, $$\begin{aligned} df(a): \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto df(a)y = \big(D_1 f(a), \cdots, D_n f(a)\big).\ y \end{aligned}$$ Relación geométrica de la derivada direccional con el vector gradiente. Reglas algebraicas para gradientes. Aplicaciones geométricas. Conjuntos de nivel. Planos tangentes, recta normal.
Teorema: diferenciabilidad implica derivabilidad	Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, un abierto, $f: A \to \mathbb{R}^m$, a un punto interior de A, si una función f es diferenciable en A con diferencial T_a, entonces existe la derivada $f'(a; y)$, para todo vector y de $\mathbb{R}^n$ y $T_a(y) = f'(a; y)$. Según sean los valores de n y m, si f es diferenciable en a, la diferencial $T_a = Df(a)$ viene dada en forma matricial respecto a las bases de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ por la matriz jacobiana cuyas m filas son la n derivadas parciales de cada una de las m componentes f_j de f, esto es, $$T_a = Df(a) = \big(D_i f_j(a)\big)_{i=1\cdots n; j=1\cdots m} = \frac{\partial(f_1 \cdots f_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}(a).$$ La matriz jacobiana para los tipos de funciones es: Si f es una función real de variable real, $$T_a(y) = Df(a)(y) = f'(a)y.$$ Sí f es una función vectorial de una variable real,

Elementos matemáticos	**Descomposición**
	$T_a(y) = Df(a)(y) = y(f_1{}'(a), \cdots, f_m{}'(a)).$ Si f es un campo escalar, $T_a(y) = Df(a)(y) = \nabla f(a) \cdot y.$ Si f es una función vectorial de una variable vectorial, campo vectorial, la diferencial de f en a, $T_a(y) = Df(a)(y) = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}(a) \cdot y = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot e_k \cdot y$
Teorema: diferenciabilidad implica continuidad	Si f es una función en varias variables diferenciable en a, entonces f es continua en a.
Teorema: condición suficiente de diferenciabilidad	Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, y a un punto interior de A. Si las derivadas parciales $D_j f_i (i = 1, \cdots, m;\ j = 1, \cdots, n)$ existen en una vecindad de A y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a con diferencial $Df(a)$ representada por la matriz jacobiana de orden $m \times n$ evaluada en a.
Fórmula de Taylor	Funciones de clase C^k. Norma de un diferencial. Aproximar localmente una función definida sobre un abierto A de $\mathbb{R}^n$ por un polinomio. Polinomio de Taylor de orden k. Resto de Taylor de orden k. Diferencial de orden m.

Tabla 9. Elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial según los libros de texto analizados

Del análisis anterior en la Tabla 10, se presentan los elementos matemáticos identificados y se registra la presencia o ausencia del elemento en cada texto según la editorial.

Elementos matemáticos	Editoriales							
	Reverté	John Wiley &	Projeto Euclides	Paraninfo	Harla	Thompson Learning	Addison Wesley	Limusa
Derivada de una función	X			X				
Derivada direccional	X	X	X	X	X	X	X	X
Derivada parcial	X	X	X	X	X	X	X	X
Diferencial de una función	X	X	X	X	X	X	X	X
Gradiente de un campo escalar	X	X	X	X	X	X	X	X
Teorema. Diferenciabilidad implica derivabilidad	X	X	X	X	X	X	X	X
Teorema. Condición suficiente de diferenciabilidad	X	X	X	X	X	X	X	X
Fórmula de Taylor	X	X	X	X				X

Tabla 10. Resumen de los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial y que aparecen reiteradamente en los libros de texto analizados

Esquema del concepto de diferencial

El análisis de investigaciones relacionadas con el concepto de diferencial, incluidas en el estado de la cuestión de la investigación, en el análisis de los libros de texto, en el desarrollo histórico del concepto, en el estudio de los conceptos relacionados y en la experiencia como docentes en el área de análisis matemático, orientó la inclusión de los siguientes aspectos necesarios para la comprensión del concepto de la diferencial de una función en varias variables: los elementos matemáticos que constituyen el concepto de diferencial, las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos matemáticos y los sistemas de representación. A continuación se describe cada uno de estos aspectos.

Elementos matemáticos

Los elementos matemáticos de la diferencial de una función en varias variables, como adaptación de la definición de "elemento" de Piaget, es "el producto de una segregación o disociación de las partes y de sus propiedades"[97]. En este trabajo, al igual que en Aldana 2011[98], no se referencia la colección de acciones, procesos u objetos, que son formas de conocer los elementos matemáticos del concepto, sino la colección de elementos matemáticos que lo configuran.

Al respecto, Beker afirma:

> […] que en el propósito de resolver una tarea, las personas coordinan y sintetizan las acciones, los procesos y los objetos para formar estructuras, es decir, coordinan los elementos que constituyen el concepto matemático. Es por esto que una etapa previa en la investigación consistió en determinar cuáles son los elementos matemáticos y cómo se relacionan en términos de operaciones cognitivas, llamadas relaciones u operaciones lógicas entre los elementos matemáticos, para caracterizar el desarrollo del esquema[99].

Con estos planteamientos podemos analizar el desarrollo del pensamiento de un estudiante mediante el uso de los elementos matemáticos dados en distintos sistemas de representación y en su capacidad para establecer las relaciones lógicas entre estos elementos en la resolución de un problema.

Cuando se mencionan los elementos matemáticos vinculados al concepto, se hace referencia a las nociones matemáticas que lo configuran, y cuando se nombran los sistemas de representación gráfico G, algebraico A y analítico AN, se refiere a las formas en que se pueden representar dichas nociones. Estas representaciones resultaron del análisis teórico y de los libros de texto, además son las

[97] Jean Piaget y Rolando García, *Psicogénesis e historia de la ciencia,* Madrid: Siglo Veintiuno Editores, 1983, 8.
[98] Eliécer Aldana, *Comprensión de la integral…* 100-101.
[99] Bernadette Baker, Laurel Cooley y María Trigueros, "A Calculus Graphing Schema", Journal for Research in Mathematics Education, 31, 2000: 4.

que utilizan y coordinan los estudiantes con frecuencia al resolver las tareas.

En la Tabla 11 se presenta el resumen de los elementos matemáticos del concepto de diferencial de una función en varias variables, los sistemas de representación gráfico, tabular, algebraico y analítico, como resultado del análisis teórico anterior y es una adaptación del trabajo de Aldana 2011[100].

[100] Eliécer Aldana, *Comprensión de la integral…* 100-103.

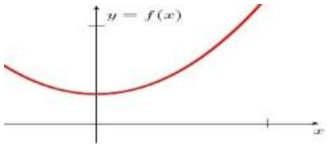
<table>
<tr><th rowspan="2">Elementos matemáticos</th><th colspan="3">Sistemas de representación</th></tr>
<tr><th>Gráfico</th><th>Algebraico</th><th>Analítico</th></tr>
<tr>
<td>Función de varias variables (FVV)</td>
<td>

Figura 4. Función real de variable real, $\boldsymbol{y = x^2 + 1}$ Fuente: el autor

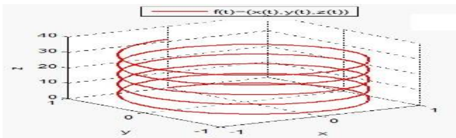



Figura 5. Función vectorial de variable real, $\boldsymbol{f(t) = (cost, sent)}$: Fuente: el autor

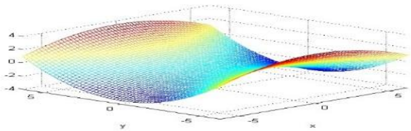
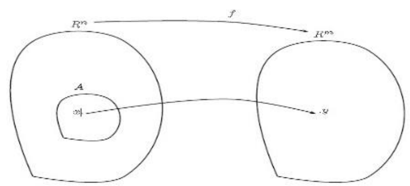



Figura 6. Campo Escalar, $\boldsymbol{f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - 1}$: Fuente: el autor</td>
<td>Sea f una función cuyo dominio es el abierto A, subconjunto del espacio $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$ y recorrido en el espacio $m-$dimensional, $\mathbb{R}^m$, según la expresión (1).
$$\begin{aligned} f: A \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned} \quad \textbf{(1)}$$
La función f, según sean los valores de n y m, se denomina:
Función real de una variable real, (FR) si $n = 1$ y $m = 1$.
Función vectorial de una variable real, (FVR), si $n = 1$ y $m > 1$.
Función real de una variable vectorial, o, campo escalar, (CE) si $n > 1$ y $m = 1$.
Función vectorial de una variable vectorial, o, campo vectorial, (CV), si $n > 1$ y $m > 1$.</td>
<td>Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, a un punto interior de A, la aplicación f de A en $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, que a cada elemento a de A le asigna un único elemento en $\mathbb{R}^m$ se denomina función en varias variables.</td>
</tr>
</table>

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	**Algebraico**	**Analítico**
	 Figura 7. Campo vectorial, $\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$: Fuente: el autor		
Derivada direccional (*DD*) Derivada Parcial (*DP*)	La derivada direccional del campo escalar, $n = 2$, $m = 1$ en (1), representa la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección del plano en dirección del vector u que pasa por el punto a y la gráfica de la superficie.	Sea f una función definida sobre un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y con valores en $\mathbb{R}^m$, a un punto interior de A y u un elemento de $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Se dice que f admite derivada direccional en el punto a en la dirección del vector u si existe el límite dado en la ecuación (2), $$f'(a;u) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+hu) - f(a)}{h}. \quad \textbf{(2)}$$ Si el vector dirección es uno de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $u = e_i, i = 1, \cdots, n,$ la	La expresión (2) significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\sigma(\varepsilon) > 0$, tal que para todo $h \in \mathbb{R}$ que satisface $0 < \lvert h \rvert < \sigma(\varepsilon)$, se tiene que, $\left\lVert \frac{f(a+hu) - f(a)}{h} - f'(a;u) \right\rVert < \varepsilon.$ Cuando u es un vector unitario, $f'(a;u)$, se denomina *derivada*

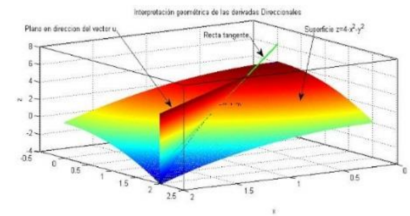
<table>
<tr><th rowspan="2">Elementos matemáticos</th><th colspan="3">Sistemas de representación</th></tr>
<tr><th>Gráfico</th><th>Algebraico</th><th>Analítico</th></tr>
<tr><td></td>
<td>

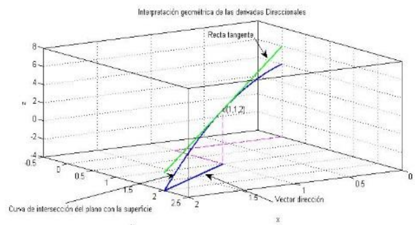
Figura 8. Plano en dirección $\boldsymbol{u}$, corta la superficie $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Fuente: el autor


Figura 9. Tangente a la curva de intersección del plano en dirección $\boldsymbol{u}$ con la superficie $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.</td>
<td>derivada se denomina derivada parcial de la función f en el punto a respecto a la i −ésima variable x_i, representada en la ecuación (3),

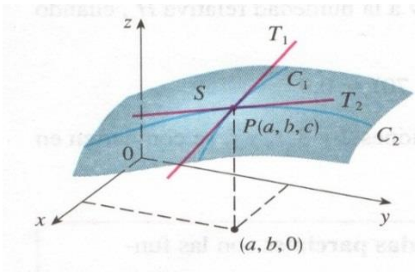
$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h}. \qquad \textbf{(3)}$$

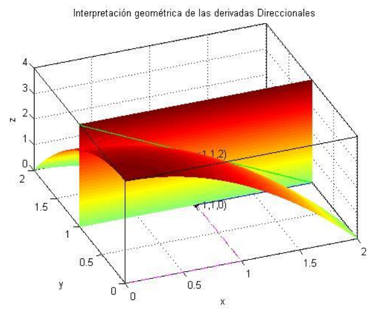
Otras notaciones de la derivada parcial de f respecto a x_i, son:

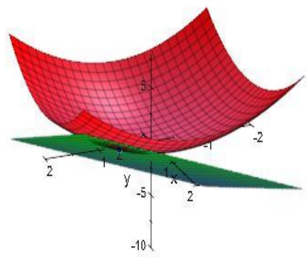
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f.$$</td>
<td>direccional de f en a en la dirección de u.

Si $u = e_i$, la derivada direccional $f'(a; e_i)$ se denomina la derivada parcial de f en a respecto a x_i y se representa por (3).

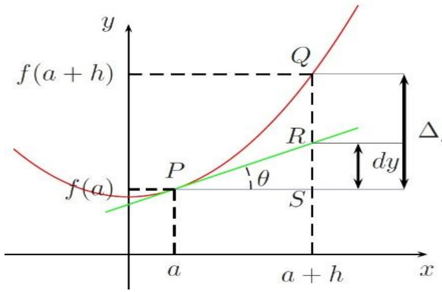
La derivada direccional da información del comportamiento de la gráfica función en el conjunto de dimensión uno, $\{a + tu, t \in \mathbb{R}\}$.</td></tr>
</table>

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
Función derivable en un punto ($DFVV$)	Las derivadas parciales $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ se interpretan geométricamente como la pendiente de las rectas tangentes en $P(a,b,c)$ a las trazas C_1 y C_2 de los planos $y=b$ y $x=a$, ver Figura 10 y Figura 11.  Figura 10. Tangentes a las curvas $\boldsymbol{C_1}$ y $\boldsymbol{C_2}$: Fuente: el autor	Una FVV f, es derivable en a, si existe la derivada $Df(a)$ definida como: Si f es una FR, $Df(a)=f'(a)$ y está dada por (4): $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \quad \textbf{(4)}$$ Si f es una FVR, $Df(a)=f'(a)$, está dada por (5): $$f'(a)=\left(f_1'(a),\cdots,f_m'(a)\right). \quad \textbf{(5)}$$ Si f es un CE, $Df(a)=f'(a)$, está expresada por (6) : $$\nabla f(a)=\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\right). \quad \textbf{(6)}$$ Si f es una CV, $Df(a)=J(a)=f'(a)$, dada en (7):	Una FVV f, es *derivable* en un punto a interior de su domino, si f admite derivadas parciales respecto a todas las n variables en el punto a.

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
	 Figura 11. Plano $\boldsymbol{y = c}$, corta la superficie $\boldsymbol{z = f(x, y)}$: Fuente: el autor	$f'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ **(7)** Se nota también como, $f'(a) = \frac{\partial(f_1 \cdots f_m)}{\partial(x_1 \cdots x_n)}(a)$	
Diferencial de una función en varias variables (*DIFVV*)	Un campo escalar $\boldsymbol{f}$ definido en un abierto $\boldsymbol{A}$ de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en un punto $\boldsymbol{a}$, si en vecindades del punto, el plano tangente a $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{a}$ aproxima bien a la gráfica de $\boldsymbol{f}$, como se puede visualizar en la Figura 12	Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, m \geq 1, n \geq 1$ una FVV, f es diferenciable en un punto a de A, si existe una transformación lineal, $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $m \geq 1, n \geq 1$, y una función , $E_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida para $v \in \mathbb{R}^n$, tal que si $a + v \in A$, entonces, $E(a, v) = \begin{cases} \frac{f(a+v) - f(a) - T_a(v)}{\lVert v \rVert}, & v \neq 0 \\ 0, & v = 0 \end{cases}$ **(8)**	Sea f es una FVV, definida de un conjunto abierto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, a punto interior de A y v un vector de $\mathbb{R}^n$. La función f es diferenciable en a, si y solo si, la función definida en (8), es

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
	 Figura 12. Plano tangente a una superficie $\boldsymbol{z = f(x, y)}$. Fuente: el autor	De manera que, $$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\| E(a, v), \quad \textbf{(9)}$$ con la condición que, $\lim_{v \to 0} E(a, v) = 0$. Otra forma equivalente para que f sea diferenciable en a, es que si $v = x - a$, entonces existe la transformación lineal $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que, $$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T_a(x-a)\|_m}{\|v\|_n} = 0 \quad \textbf{(10)}$$	continua en 0. En este caso la *transformación lineal* T_a se llama *diferencial total* o la diferencial de f en a, *DIFVV*. La ecuación (9) es la fórmula de Taylor de primer orden para $f(a+v)$, es válida para todo v con $a + v \in A$ y es la aproximación lineal de $f(a+v) - f(a)$. El error cometido en la aproximación es $\|v\| E(a, v)$, que es de orden más pequeño de v, significa $\lim_{v \to 0} E(a, v) \to 0$. Si f es diferenciable en a con diferencial T_a, entonces existe $f'(a; v)$

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
			para todo $v \in \mathbb{R}^n$, y se tiene, $T_a(v) = f'(a;v) = Df(a)v.$
Diferencial de una función real de variable real (*DIFR*)	En la Figura 13, $QS = f(a+h) - f(a) = \Delta f(a),$ $RS = PS \cdot \tan\theta = h \cdot f'(a) = dy.$ Al variar x una cantidad h, las variables $\Delta y = QS$ representa el cambio de altura de la curva $y = f(x)$ y $dy = RS$ representa el cambio de altura de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, con ecuación $y = f(a) + f'(a)(h)$. Si h es una variable independiente, entonces la diferencial de f en a se define como $dy = f'(a)h$. Frecuentemente se nota $h = dx$.	Una función f, real de una variable real, es diferenciable en un punto a de A, si existe una transformación lineal, $T_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h \mapsto f'(a)h,$ **(11)** y una función real de variable real, $E_a(h) = E(a,h)$, que depende de a y de h, definida como, $E(a,h) = \begin{cases} \dfrac{\Delta f(a) - f'(a)h}{h}, & si\ h \neq 0 \\ 0, & si\ h = 0. \end{cases}$ **(12)** Donde $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$, de manera que, $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \|h\|E(a,h)$ **(13)**	La función f real de variable *FR*, es diferenciable en el punto interior a de A, si existe la función lineal dada por (11), tal que, $\lim_{x \to a} \frac{\|\Delta f(a) - T_a(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0,$ con $\Delta f(a) = f(x+a) - f(a).$ El límite anterior significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que satisface que si, $x \in A,\ \|x-a\| < \delta,$ entonces,

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
	 Figura 13. Interpretación geométrica de la diferencial: Fuente: el autor	y $$\lim_{h\to 0}\frac{\|h\|E(a,h)}{\|h\|}=0. \quad \textbf{(14)}$$ La fórmula de Taylor de primer orden (13), aproxima $f(a+h)-f(a)$ por medio de $f'(a)h$ y el error cometido es $\|h\|E(a,h)$, donde $E(a,h)$ tiende más rápido a 0 que h, es un infinitésimo de orden superior a h, como se expresa en (14).	$\|\Delta f(a)-T_a(x-a)\|$ $< \varepsilon\|x-a\|$. En este caso la diferencial de f en a es $T_a = f'$(a) y verifica que $T_a(x-a) = f'(a)(x-a)$. f es diferenciable en el conjunto A, si es diferenciable en cada elemento del conjunto A.
Diferencial de una función vectorial de variable real (*DIFVR*)	Si $\boldsymbol{f}$ es una *FVR*, que representa una "Curva" en el espacio $\boldsymbol{m}$ −dimensional, el vector $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{a})$, es llamado el "vector tangente" a la curva $\boldsymbol{f}$ en el punto $\boldsymbol{a}$, Figura 14.	Sea $A \subseteq \mathbb{R}$, para $m>1$, la *FVR*, $$f: A \to \mathbb{R}^m$$ $$x \mapsto f(x) = \big(f_1(x), \cdots, f_m(x)\big).$$ f es diferenciable en a si existe una transformación lineal, $$T_a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$ $$v \mapsto T_a(v), \quad \textbf{(15)}$$	Una *FVR* es diferenciable en un punto interior a de A, si y solamente si cada una de las *FR*, $f_1, \cdots, f_{,m}$, es diferenciable en a. Cuando f es una *FVR* diferenciable en a la transformación lineal (15) es $f'(a)(v)$, y

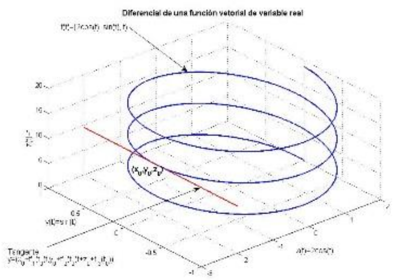
<table>
<tr><th rowspan="2">Elementos matemáticos</th><th colspan="3">Sistemas de representación</th></tr>
<tr><th>Gráfico</th><th>Algebraico</th><th>Analítico</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td>

Figura 14. Representación de la diferencial de una función vectorial de variable real.
Fuente: el autor</td>
<td>y una FVR definida como,
$$E(a,v)=\begin{cases}\dfrac{\Delta f(a)-T_a(v)}{|v|}, & si\ v\neq 0\\ 0, & si\ v=0.\end{cases}$$
Con $\Delta f(a)=f(a+v)-f(a)$, tal que,
$$f(a+v)=f(a)+f'(a)v+|h|E(a,v) \quad \textbf{(16)}$$
y para $a+v\in A$, se tiene que,
$$\lim_{h\to 0}\frac{|v|E(a,v)}{|v|}=0.$$
La ecuación (16), es válida para $a+v\in A$ y proporciona una aproximación lineal $T_a(v)$, para la diferencia $f(a+v)-f(a)$. El error en la aproximación es $|v|E(a,v)$ que es de orden menor que $|v|$.
T_a es la diferencial de f en a, luego,
$$T_a(v)=Df(a)(v)=vf'(a).$$</td>
<td>representa el producto del escalar v por el vector $f'(a)$ y una aproximación lineal de la función f en vecindades del punto a.</td>
</tr>
</table>

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
Diferencial de un campo escalar (*DICE*)	En la Figura 15, la diferencial dz representa el cambio de altura del plano tangente, mientras que Δz representa el cambio de altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) cambia de (a, b) a $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Que f sea diferenciable en (a, b) significa geométricamente que el plano tangente aproxima bien a la gráfica de f cerca del punto de tangencia.	Sea f un campo escalar, *CE*, a un punto interior de A, y $B(a; r)$ una n −bola contenida en A; v un vector tal que, $\lVert v \rVert < r$ de modo que, $a + v \in B(a, r)$. Se afirma que f es diferenciable en a, si existe una transformación lineal, $$\begin{aligned} T_a: \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ v \mapsto T_a(v) &= \nabla f(a) \cdot v, \end{aligned} \quad \textbf{(17)}$$ y una función, $E_a: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definida como: $$E(a, v) = \begin{cases} \dfrac{\Delta f(a) - T_a(v)}{\lVert v \rVert}, & si\ v \neq 0 \\ 0, & si\ v = 0. \end{cases} \quad \textbf{(18)}$$ Con $\Delta f(a) = f(a + v) - f(a)$, tal que, $$f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \lVert v \rVert E(a, v), \quad \textbf{(19)}$$ y para $\lVert v \rVert < r$ se tiene que,	Para una función de dos variables, $z = f(x, y)$, se definen los *diferenciales* dx y dy como variables independientes, es decir pueden tomar cualquiera de los valores dados. Entonces la *diferencial* dz, que también se llama *diferencial total* está definido por, $$dz = f_x dx + f_y dy \quad \textbf{(21)}$$ Si se toma $dx = \Delta x = x - a$ y $dy = \Delta y = y - b$, en la ecuación (21), la diferencial de z es: $$dz = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

Elementos matemáticos	Sistemas de representación		
	Gráfico	Algebraico	Analítico
		$\lim_{v \to 0} \frac{\|v\| E(a,v)}{\|v\|} = 0,$ **(20)** T_a es la diferencial de f en a, luego, $T_a(v) = Df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v.$	En la notación de diferenciales, $f(x,y) \approx f(a,b) + dz.$

Elementos matemáticos	Sistemas de representación	
	Algebraico	Analítico
Diferencial de un campo vectorial (*DICV*)	Sea el CV, $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tal que, $x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto y = f(x).$ La imagen $y = f(x)$ se representa por el sistema de m funciones con n argumentos, $y_1 = f_1(x_1, \cdots, x_n)$ $\vdots$ $y_m = f_m(x_1, \cdots, x_n)$ f es diferenciable en un punto interior a de A, si existe una transformación lineal,	Otra forma equivalente para f sea diferenciable en a es que se cumpla que, $\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - T_a(x-a)\|_m}{\|x - a\|_n} = 0.$ Si f es diferenciable en a, la transformación lineal, a cada vector u le asigna el vector $w = T_a(u)$ y se representa por el sistema, $w_1 = D_1 f_1(a) u_1 + \cdots + D_n f_1(a) u_n$ $\vdots$ $w_m = D_1 f_m(a) u_1 + \cdots + D_n f_m(a) u_n.$

Elementos matemáticos	Sistemas de representación	
	Algebraico	Analítico
	$T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $v \mapsto T_a(v) = \mathrm{J}(a) \cdot v,$ **(22)** tal que, $f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \\|v\\| E(a,v),$ **(23)** donde, $E(a,v) \to 0$ cuando $v \to 0$. La fórmula de Taylor de primer orden (23) es válida para todo v tal que $\\|v\\| < r$, para algún $r > 0$. El término $E(a,v)$ es un vector de $\mathbb{R}^m$. La transformación T_a se llama diferencial total o simplemente diferencial de f en a.	Luego, en forma matricial en las bases estándar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ se expresa como, $\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ En forma compacta, $w = T_a(u) = Df(a)(u) = J(a)u$ donde $J(a)$ es la matriz jacobiana evaluada en a.
Teoremas fundamentales de diferenciación (*TFDI*)	*Teorema 1*. Si una *FVV*, f, diferenciable en a, entonces es continua en a. *Teorema 2*. Si f es una *FVV* diferenciable en a, con diferencial T_a y si $u \in \mathbb{R}^n$, entonces existe la derivada direccional en de f a, en cualquier dirección u, $D_u f(a) = f'(a;u) = Df(a)(u) = T_a(u).$	*Teorema 1*. Diferenciabilidad, implica continuidad, *TDICO*. *Teorema 2*. Diferenciabilidad, implica la existencia de las derivadas direccionales, *TDIDD*.

Elementos matemáticos	Sistemas de representación	
	Algebraico	Analítico
	Corolario 1. Si f es un *CE* diferenciable en a con $Df(a) = T_a$, entonces existen cada una de las derivadas parciales en dicho punto y $T_a(u) = f'(a;u) = \nabla f(a) \cdot u$. *Teorema 3*. Sea f una *FVV* y a un punto interior de A. Si las derivadas parciales, $D_j f_i$, $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$, existen en una vecindad de a y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a, además $Df(a)$ está representado por la matriz jacobiana. *Teorema* 4. Un *CV* es diferenciable en a, si y solo si cada uno de los *CE*, $f_j: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1, \cdots, m$, son diferenciables en a.	*Corolario 1***.** La diferenciabilidad de un campo escalar, implica la existencia de las derivadas parciales, *CDIDP*. *Teorema 3***.** Condición suficiente de diferenciabilidad *TCSDI*. *Teorema 4*. Diferenciabilidad de un campo vectorial, implica la diferenciabilidad de los m campos que integran el campo escalar, *TDICVDICE***.** *Corolario 2*. Función de clase C^1, implica ser diferenciable, *CC1DI*. Las relaciones que se establecen en estos teoremas, se presentan en la Figura 16

Tabla 11**.** Elementos matemáticos y sistemas de representación del concepto de diferencial.

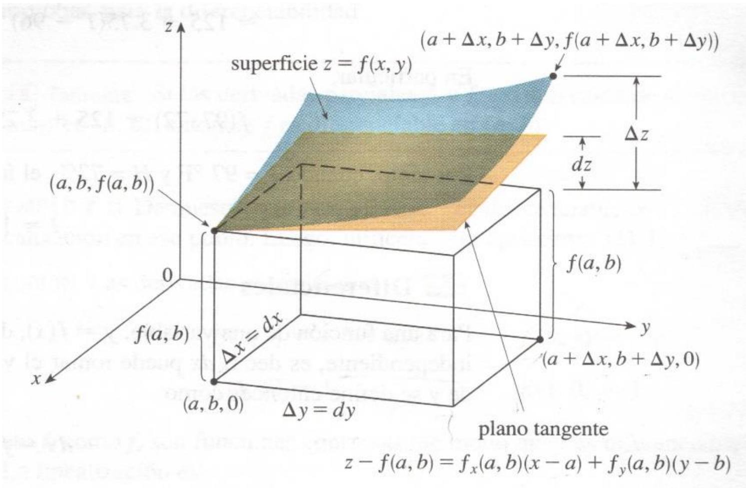


Figura 15. Interpretación geométrica de la diferencial de un campo escalar en tres dimensiones. Fuente: Stewart, 2002, p. 914.

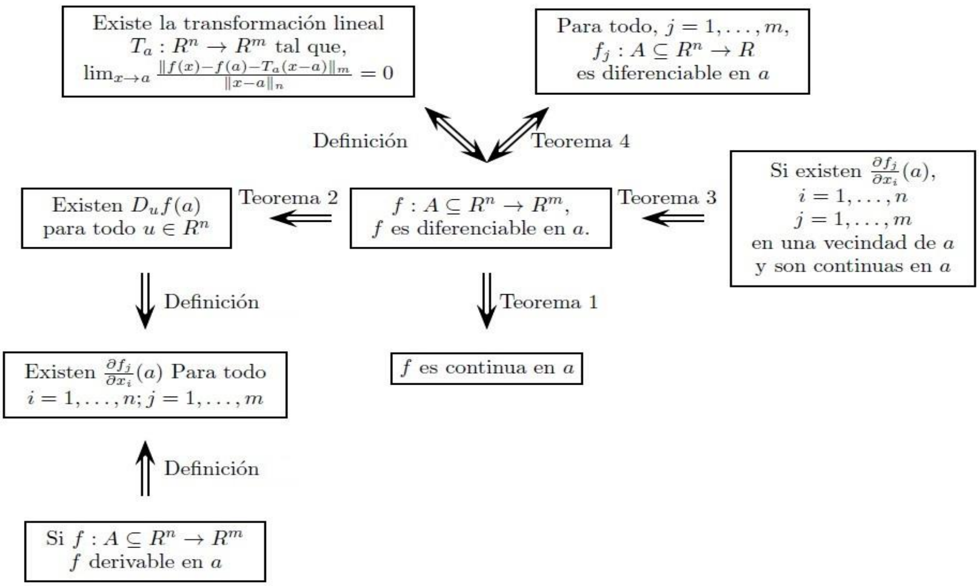


Figura 16. Relaciones de la diferenciabilidad y propiedades locales

Relaciones lógicas

Las relaciones lógicas que se establecieron entre los elementos matemáticos permiten al estudiante hacer inferencias y son, entre otras, las que a continuación se analizan.

Conjunción lógica, $p \wedge q$. La conjunción lógica ($\wedge$) entre dos proposiciones es un conector lógico cuyo valor de verdad resulta cierto solo si ambas proposiciones son ciertas y falso de cualquier otra forma. En el lenguaje formal, si las declaraciones representan proposiciones en lógica proposicional con contenido de verdad o falsedad, entonces una conjunción lógica es cierta solo si ambas declaraciones son ciertas.

Ejemplo. La diferencial es un operador lineal si cumple que para todo par de vectores u, v en $\mathbb{R}^n$, para todo α en $\mathbb{R}$,

$$Df(a)(u+v) = Df(a)(u) + Df(a)(v), \text{ y}$$
$$Df(a)(\alpha u) = \alpha Df(a)(u).$$

Condicional, $p \rightarrow q$. El condicional es una función que toma dos valores de verdad (por lo general, los valores de proposiciones, p el antecedente y q el consecuente), devuelve falso cuando los valores de verdad de p es verdadero y el de q es falso y devuelve verdadero en cualquier otro caso.

Ejemplo. Si una función en varias variables es diferenciable en un punto a, *entonces* es continua en a.

Ejemplo. Si una función en varias variables es diferenciable en un punto a, *entonces* es derivable en a.

Contrarrecíproca, $\neg q \rightarrow \neg p$. Consiste en la implicación de la negación de un consecuente con la negación de su antecedente. Formalmente, puede definirse que la condicional es lógicamente equivalente a la implicación de la negación del consecuente con la negación del antecedente (sus tablas de verdad son idénticas), formalmente se expresan por la fórmula lógica,

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p).$$

Ejemplo. Si una función en varias variables no es continua en a, *entonces* no es diferenciable en a.

Negación del condicional, $\neg(p \to q)$. Consiste en la negación lógica de una implicación, que es lógicamente equivalente a conjunción lógica del antecedente y la negación del consecuente. Formalmente, puede definirse por la fórmula lógica,

$$\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q.$$

Ejemplo. No es cierto que la continuidad implique la diferenciabilidad, ya que puede haber funciones continuas y no diferenciables.

Bicondicional, $p \leftrightarrow q$. El bicondicional es una función que toma dos valores de verdad (los valores de proposiciones p y q) y devuelve verdadero cuando p y q tienen el mismo valor de verdad, y devuelve falso en cualquier otro caso. Además, el bicondicional es lógicamente equivalente al bicondicional de la negación de las proposiciones,

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \neg p \leftrightarrow \neg q.$$

Ejemplo. El campo escalar f es diferenciable en a *si y solo si*, el operador $Df(a)$ es lineal y, $\lim\limits_{v \to 0} \frac{f(a+v)-f(a)-Df(a)(v)}{\|v\|} = 0.$

El operador $Df(a)$ no es lineal, o, $\lim\limits_{v \to 0} \frac{f(a+v)-f(a)-Df(a)(v)}{\|v\|} \neq 0$, *si y solo si*, el campo escalar f no es diferenciable en a.

Sistemas de representación

En matemáticas, los sistemas de representación son un lenguaje que se expresa por notaciones gráficas, algebraicas y analíticas, o también por manifestaciones verbales, por medio de las cuales se describen y definen los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades[101]. Estas representaciones se agrupan en diferentes registros de representación, que los estudiantes utilizan para lograr la comprensión del concepto de diferencial de una función en varias variables.

Descomposición genética del concepto de la diferencial

Como resultado del análisis del concepto, el ciclo ACE y siguiendo la metodología propuesta por la teoría APOE, se describe a continuación

[101] Eliécer Aldana, *Comprensión de la integral…* 111.

la ruta hipotética, en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas, así como los mecanismos de construcción que un estudiante debe seguir para la comprensión del concepto de diferencial, como una versión refinada del modelo que se propuso en un comienzo de la investigación. Enseguida se expone la enumeración de los párrafos para hacer las respectivas referencias.

A. Construcciones previas

El concepto de función en varias variables FVV, como objeto representado por la ecuación (24), porque al desencapsularlo se tienen los siguientes elementos como procesos, según sean los valores de n y m:

1. *Función real de variable real*, FR, para $n = 1$ y $m = 1$, tal que a cada número real del dominio asigna un único número real.
2. *Función vectorial de una variable real*, FVR, para $n = 1$ y $m > 1$, tal que a cada real del dominio le asigna un único vector en $\mathbb{R}^m$.
3. Función real de una variable vectorial o *campo escalar*, CE, para $n > 1$ y $m = 1$, tal que a cada vector de un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, le asigna uno y solo un real.
4. Función vectorial de una variable vectorial o *campo vectorial*, CV para n >1 y $m > 1$, tal que a cada vector en $\mathbb{R}^n$ le asigna un único vector en $\mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} f\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ x &\to y = f(x). \end{aligned} \tag{24}$$

5. El espacio vectorial, $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, sobre el campo $\mathbb{R}$, como esquema, generado por la coordinación de los esquemas de conjunto, operación binaria y axioma, que incluyen: la base canónica como objeto y el producto interior entre los espacios vectoriales como proceso.
6. El concepto de transformación lineal como objeto para asimilar el espacio de las transformaciones lineales sobre el campo $\mathbb{R}$, y calcular diferentes normas.
7. El concepto de límite de una función de variable real y su generalización a funciones de varias variables como esquema.

8. El concepto de derivada como esquema para asimilar el objeto derivada de una función en un punto y la función derivada.

B. *Construcción del objeto derivada direccional de una función real de variable vectorial DD*

1. Gráfico-analítico. Dado un CE, definido de un abierto A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, un punto $P(x_0, y_0)$ de A, un vector unitario $u = (u_1, u_2)$, la *acción* de interpretar geométricamente la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario u como la pendiente de la recta tangente, a la curva formada por la intersección del plano que pasa por P en dirección del vector u con la gráfica de la función f, en el punto $(x_0, y_{0,}f(x_0, y_0))$.
2. Algebraico-analítico. Dado un CE f, definido de un abierto A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, un punto $P(x_0, y_0)$ de A, un vector unitario $u = (u_1, u_2)$, la *acción* de calcular la derivada direccional de f en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario u, aplicando la ecuación (25).

$$D_u f(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f\big((x_0, y_0) + t(u_1, u_2)\big) - f(x_0, y_0)}{t} \qquad \textbf{(25)}$$

3. *Interiorizar las acciones* ***B.1***, en el proceso que: dado un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $(a_1, \dots, a_n)$ en A, un CE, definido de A en $\mathbb{R}$, y un vector $u = (u_1, \dots, u_n)$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, representa e interpreta la derivada direccional de f en el punto a en dirección del vector u como la razón de cambio de f cerca del punto a en el conjunto unidimensional $\{a + tu \colon t \in \mathbb{R}\}$.
4. *Interiorizar las acciones* ***B.2***, en el proceso que: dado un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $(a_1, \dots, a_n)$ en A, un CE f, definido de A en $\mathbb{R}$, y un vector $u = (u_1, \dots, u_n)$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, calcula la derivada direccional de f en el punto a en dirección del vector u verificando ecuación (26).

$$D_u f(a_1, \dots a_n) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + tu_1, \dots, a_n + tu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}. \quad \textbf{(26)}$$

5. *Coordinar* los procesos ***B.3*** y ***B.4*** en el proceso, que dado un CE definido sobre un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $(a_1, \dots, a_n)$ en A, un CE f, definido de A en $\mathbb{R}$, y un vector $u = (u_1, \dots, u_n)$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$,

calcula la derivada direccional de f en el punto a en dirección del vector u y da una interpretación geométrica de esta derivada.

6. *Encapsular* el proceso ***B.5*** en el objeto derivada direccional del CE f en el punto a en dirección del vector unitario u, y notarla como $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = D_u f(a)$ que se interpreta como la razón de cambio del CE f en el punto a en dirección de un vector unitario u y se calcula aplicando la expresión (27)·

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a + hu) - f(a)}{h}\end{aligned} \qquad \textbf{(27)}$$

C. Construcción del objeto derivada parcial de una función real de variable vectorial o CE

1. Gráfico-analítico. Dado un CE f, definido sobre un abierto A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, un punto fijo (a, b) de A, la *acción* de interpretar geométricamente la derivada parcial de f respecto a la variable x, como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $g(x) = f(x, b)$ (representa la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano $y = b$) en el punto $\big(a, b, f(a, b)\big)$, y la derivada parcial de f respecto a la variable y como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $h(y) = f(a, y)$ en el punto $(a, b, f(a, b))$.
2. Algebraico-analítico. Dado un CE, definido sobre un abierto A de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, un punto fijo (a, b) de A, los vectores unitarios $\hat{\imath} = e_1 = (1,0)$ y $\hat{\jmath} = e_2 = (0,1)$, la *acción* de calcular la derivada parcial de f respecto a la variable x en el punto (a, b) según la ecuación (28) y la derivada parcial de f respecto a la variable y en el punto (a, b) según la ecuación (29):

$$\begin{aligned}g'(a) &= \lim_{t\to 0}\frac{g(a + t) - g(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{f\big((a, b) + te_1\big) - f(a, b)}{t} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).\end{aligned} \qquad \textbf{(28)}$$

$$
\begin{aligned}
h'(b) = \lim_{t\to 0}\frac{h(b+h)-h(b)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a,b+t)-f(a,b)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{f\big((a,b)+te_2\big)-f(a,b)}{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial y}(a,b).
\end{aligned}
\tag{29}
$$

3. *Repetir* las acciones ***C.1*** para diferentes puntos (a,b) y para otros CE. Para CE generales definidos sobre abiertos de $\mathbb{R}^n$, con $n>1$, considerar que la derivada parcial de f respecto a x_j, $j=1,\dots,n$, en el punto $a=(a_1,\dots,a_n)$ da información del comportamiento de f para valores x cercanos al punto a, cuando x está en el conjunto $M=\{a+te_j\colon t\in\mathbb{R}\}$.
4. *Interiorizar* las acciones ***C.2***, en el proceso que: dado un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $a=(a_1,\dots a_n)$ de A, un CE f de A en $\mathbb{R}$, un vector $u=e_j$ en $\mathbb{R}^n-\{0\}$, $j=1,\dots,n$, con $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,\dots,0)$, $e_n=(0,0,\dots,1)$, vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, calcula la derivada parcial de f respecto a la variable x_j, en el punto a según la ecuación (30):

$$
\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f\big(a+te_j\big)-f(a)}{t}. \tag{30}
$$

5. *Coordinar* los procesos ***C.3*** y ***C.4*** en el proceso que, dada una FRV definida sobre un abierto A en $\mathbb{R}^n$, un punto $a=(a_1,\dots,a_n)$ de A, un CE f de A en $\mathbb{R}$, un vector $u=e_j$ en $\mathbb{R}^n-\{0\}$, $j=1,\dots,n$, con $e_1=(1,0,\dots,0)$, $e_2=(0,1,\dots,0)$, $e_n=(0,0,\dots,1)$, vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, calcula e interpreta, gráfica, analítica y numéricamente la derivada parcial de f respecto a la variable x_j, $j=1,\dots,n$, en el punto a.
6. *Encapsular* el proceso ***C.5*** en el objeto derivada parcial, DP, de f respecto a la variable x_j, en el punto a, representarla como $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, e interpretarla como la razón de cambio de f con respecto a la variable x_j cuando las demás variables x_k, $k\neq j$, son fijas, o también como la variación de la función en vecindades del punto

a en la dirección del vector e_j de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y algebraicamente se expresa por la ecuación (31).

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(a_1,\dots,a_j+h,\dots a_n\right)-f\left(a_1,\dots,a_j,\dots,a_n\right)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f\left(a+he_j\right)-f(a)}{h}\end{aligned} \tag{31}$$

D. Construcción del objeto derivada de una función real de variable vectorial en un punto respecto a un vector DFRV

1. *Desencapsular* el objeto derivada direccional de la función f en el punto a en dirección del vector u, en el proceso que dado f, un punto a y un vector arbitrario (no necesariamente unitario o de la base canónica) w, encuentra si existe el limite dado por la ecuación (32),

$$D_w f(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+hw_1,\dots,a_n+hw_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}, \tag{32}$$

   e interpretar $D_w f(a)$ como la razón de cambio de f en el punto a, en la dirección de un vector arbitrario w de $\mathbb{R}^n$.
2. *Encapsular* el proceso ***D.1*** en el objeto la derivada de la función f en el punto a respecto al vector w, hallando si existe el límite de la ecuación (32).

E. Construcción del objeto diferencial de una función real de variable real DIFR

1. Gráfico-numérico. Dada una función FR, f, definida sobre un subconjunto abierto A de $\mathbb{R}$ y un punto a de A, la *acción* de interpretar geométricamente la DIFR como el cambio de altura de recta tangente, $T(x)$, a la gráfica de la curva $y=f(x)$ en el punto $(a,f(a))$, al variar x en el intervalo $[a,a+h]$ con $h>0$.

2. Algebraico-numérico. Dada una función f real de variable real definida sobre un subconjunto A de $\mathbb{R}$ y el valor numérico de un elemento a de A, la *acción* de calcular la diferencial de f en a: desencapsulando el objeto derivada de la función en un punto, verificando si existe la aplicación descrita en (33), y si esta aplicación es lineal, $T_a(\alpha u+\beta v)=\alpha T_a(u)+\beta T_a(v)$, α,β reales.

$$T_a: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, u \mapsto T_a(u) = f'(a)(u) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} u \quad (33)$$

Además, verificar si la función error definida en la expresión (34) es continua en 0, $\lim_{h\to 0} E_a(h) = 0$.

$$E_a: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h \mapsto E_a(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{|h|}, & si\ h \neq 0 \\ 0, & si\ h = 0 \end{cases} \quad (34)$$

3. Gráfico-analítico. *Interiorizar* las acciones ***E.1***, en el proceso que interpreta geométricamente la diferencial de la función f en un punto a, como la posibilidad de linealizar la función en vecindades del punto.
4. Algebraico-analítico. *Interiorizar* las acciones ***E.2***, en el proceso que calcula la diferencial de la función f en el punto a, al aproximar un punto arbitrario x al punto fijo a.
5. Gráfico-analítico. *Coordinar* los procesos descritos en ***E.3*** y ***E.4*** en el proceso que establece que una FR, f es diferenciable en un punto a, como la posibilidad de aproximar $f(x)$, para x suficientemente cerca a a por la aplicación afín, $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$, e interpretar geométricamente como la posibilidad de linealizar la función $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$, aproximar la gráfica de la función por la tangente en vecindades del punto $(a, f(a))$.
6. *Encapsular* el proceso ***E.5*** en el objeto matemático la función real de variable real diferenciable en un punto, *DIFR* y representarla como la aplicación lineal dada por la expresión (35) :

$$Df(a): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \mapsto Df(a)h = f'(a)h. \quad (35)$$

F. Construcción del objeto diferencial de una función vectorial de variable real DIFVR

1. Gráfico-*numérico*. Dada una FVR f, definida de un abierto A de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, un real a de A, la *acción* de graficar la curva en el plano que representa a f, el punto $f(a)$ y encontrar el vector tangente a f en el punto $f(a)$.
2. Algebraico-analítico. Dada una FVR, definida sobre un abierto A de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, y un punto a interior de A, la *acción* de calcular el incremento de f al variar x en el intervalo $[a, a+h]$ y compararlo con los cambios del vector tangente a f en $(a, f(a))$.
3. Gráfico-analítico. *Interiorizar* las acciones ***F.1*** en el proceso que determina si una función vectorial de variable real es diferenciable e interpretarla geométricamente que cuando $x \to a$, el vector $f'(a)(x-a)$ tiende a la porción de curva,
$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a).$$
4. Algebraico-analítico. *Interiorizar* las acciones ***F.2*** en el proceso, que dada una función vectorial de variable real, $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ determinar si la función es diferenciable en a al verificar si el operador dado por (36) es lineal y si $\lim_{|u|\to 0} \frac{\|f(a+u)-f(a)-Df(a)u\|_2}{|u|} = 0$.
$$\begin{aligned} &Df(a): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ &\quad x \mapsto Df(a)(x) = f'(a)(x) = (f_1'(a)x, f_2'(a)x). \end{aligned} \quad \textbf{(36)}$$
5. Algebraico-analítico. *Coordinar* los procesos ***F.3*** y ***F.4*** en el proceso que dada una FVR y un punto a de su dominio, $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m > 1$, determina que f es diferenciable en a, si existe una transformación lineal, $T_a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m > 1$, tal que, $T_a(u) = \left(f_1'(a), \dots, f_m'(a)\right)u$, y que $\lim_{|u|\to 0} \frac{\|f(a+u)-f(a)-Df(a)u\|_m}{|u|} = 0$, e interpretar geométricamente la diferencial como la posibilidad de linealizar (existencia del vector tangente a la curva f en el punto $f(a)$) en vecindades de $f(a)$.
6. *Encapsular* el proceso ***F.5*** en el objeto diferencial de una función vectorial de variable real, DIFVR.

$$D_w f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hw) - f(a)}{h}. \quad \textbf{(37)}$$

G. Construcción del objeto diferencial de un campo escalar DICE

1. Analítico-algebraico. Dada una función de dos variables, la *acción* de verificar que la existencia de la derivada de la función en un punto respecto a cualquier vector no implica que la función sea continua en el punto. Ejemplo, la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida como $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ si $x \neq 0$, $f(0,y) = 0$, existen las derivadas direccionales en (0,0) en dirección de cualquier vector, sin embargo la función no es continua en (0,0).
2. Analítico-algebraico. Dada una función de dos variables, la *acción* de verificar que la existencia de la derivada de f en un punto respecto a cualquier vector w y que sea continua en el punto, no implica que la derivada sea un operador lineal. Ejemplo, para la función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida como $g(0,0) = 0$ y $g(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ si $x^2 + y^2 \neq 0$, existen las derivadas direccionales en (0,0) en dirección de cualquier vector, además es continua en (0,0); sin embargo, la derivada direccional en (0,0) no es lineal respecto al vector dirección.
3. Analítico-algebraico. Dada una función de dos variables con derivada direccional lineal respecto al vector dirección en un punto y discontinua en este punto, la *acción* de verificar que la existencia de la derivada de f en un punto respecto a cualquier vector w, no implica la continuidad de la función en el punto. Ejemplo, la función $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $h(0,0) = 0$ y $h(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, existen las derivadas direccionales en (0,0) y dependen linealmente del vector dirección, sin embargo es discontinua en el origen.
4. Repetir las acciones ***G.1, G.2, G.3***, para varios casos de funciones e *interiorizarlas* en el proceso que dado un CE f y un punto a de su dominio, la existencia de su derivada en a no garantiza la continuidad y la diferenciabilidad de f en a, como sí ocurre para el caso de las funciones reales de variable real.
5. Encapsular el proceso ***G.4*** en la propiedad que en un CE la derivabilidad no implica continuidad.
6. Gráfico-analítico. La acción de interpretar geométricamente la diferencial de una función de f definida de $A \subseteq \mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ en un

punto (a,b) como el cambio de altura del plano tangente a la superficie f en el punto $\big(a,b,f(a,b)\big)$ cuando un punto (x,y) cambia del punto (a,b) al punto $(a+\Delta x, b+\Delta y)$.

7. Analítico-algebraico. Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ una función $f: A \to \mathbb{R}$, un punto (a,b) interior de A, la ***acción*** de calcular la diferencial de f en (a,b), estableciendo si el, $\lim_{\|(\Delta x,\Delta y)\|\to 0} E(\Delta x,\Delta y)$ es 0, que es equivalente a la ecuación (38), y su diferencial es $Df(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$.

$$\lim_{\|(\Delta x,\Delta y)\|\to 0} \frac{f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0. \quad \textbf{(38)}$$

8. *Interiorizar* la acción ***G.6*** en el proceso que dado un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a de A, interpretar geométricamente la diferencial de f en a, $Df(a)$, definida como el operador de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que tiene la propiedad de ser lineal y se utiliza para linealizar la función f en a.
9. *Interiorizar* la acción ***G.7*** en el proceso, que dado un abierto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a de A, determina si f es diferenciable en el punto a y calcula su diferencial por la ecuación (39), denominarla como el vector gradiente de la función f evaluado en el punto a,

$$Df(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n}\right). \quad \textbf{(39)}$$

10. Coordinar los procesos ***G.8*** y ***G.9*** en el proceso que dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a de A, determina si f es diferenciable en el punto a y calcula su diferencial dando una interpretación geométrica y analítica.
11. *Encapsular* el proceso ***G.10*** en el objeto campo escalar diferenciable f en el punto a, DICE.
12. Desencapsular el objeto DICE, en el proceso que dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a,

prueba que si f es diferenciable en un punto a, entonces f es continua en a.

13. Encapsular el proceso ***G.12*** en el objeto matemático, diferenciabilidad implica continuidad, TDICO.
14. Desencapsular el objeto DICE, en el proceso que dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f: A \to \mathbb{R}$ y un punto interior a, prueba que si f es diferenciable en un punto a, entonces existe la derivada direccional de f en el punto a en cualquier vector dirección w, $f'(a; w)$.
15. Encapsular el proceso ***G.14*** en el objeto, para campos escalares diferenciabilidad implica derivabilidad. TDIDE.
16. Desencapsular DICE en el proceso de encontrar la mejor estimación de un campo escalar f, definido en forma tabular, en puntos no registrados en la tabla.

H. Construcción del objeto diferencial de un campo vectorial DICV

1. Analítico-algebraico. Dado un subconjunto de A de $\mathbb{R}^2$ un campo vectorial $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, un punto a de A, la *acción* de establecer si f es diferenciable en a determinando si los CE $f_1, f_2, f_3,$ definidos de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ son diferenciables en a.
2. Analítico-algebraico. Dado un subconjunto de A de $\mathbb{R}^2$ un campo vectorial $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, un punto a de A, la *acción* de establecer si f es diferenciable en a verificando si la aplicación definida en (40) es lineal, para α y β escalares y u,v vectores en $\mathbb{R}^2$,
$$T_a(\alpha u + \beta v) = \alpha T_a(u) + \beta T_a(v).$$

$$\begin{aligned} T_a: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ u &\mapsto T_a(u) = Df(a)(u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad \textbf{(40)}$$

Además, verificar si la función definida en la expresión (41), $E(a, v) \to \mathbf{0}$, cuando $\|v\|_2 \to 0$.

$$Ea: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$v \to E(a,v) = \begin{cases} \dfrac{\|f(a+v) - f(a) - Df(a)(v)\|_3}{\|v\|_2}, & si\ v \neq 0 \\ 0, & si\ v = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(41)}$$

3. *Interiorizar* las acciones de ***H.1***, en el proceso que dado un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, un CV $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un punto a de A, la *acción* de establecer si f es diferenciable en a determinando si los CE, $f_1, \dots, f_m$, definidos de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ son diferenciables en a.
4. Analítico-algebraico. Interiorizar las acciones ***H.2***, en el proceso que dado un subconjunto de A de $\mathbb{R}^n$ un CV $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, un punto a de A, determina si f es diferenciable en a verificando si la aplicación definida en la ecuación (42) es lineal (para α y β escalares y u,v vectores en $\mathbb{R}^n$, $T_a(\alpha u + \beta v) = \alpha T_a(u) + \beta T_a(v)$.

$$T_a: \mathbb{R}^n \quad \to \quad \mathbb{R}^m$$
$$u \quad \longmapsto \quad T_a(u) = Df(a)(u) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \textbf{(42)}$$

Además, verificar si la función definida en (43), satisface $\lim_{\|v\|_n \to 0} \frac{\|E(a,v)\|_m}{\|v\|_n} = 0$.

$$E_a: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$v \to E_a(v) = E(a,v) = \begin{cases} \dfrac{f(a+v) - f(a) - Df(a)(v)}{\|v\|_n}, & si\ v \neq 0 \\ 0, & si\ v = 0. \end{cases} \quad \textbf{(43)}$$

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA INSTRUCCIÓN

Actividades computacionales basadas en la DG

Siguiendo los apartados de la descomposición genética del concepto, se expone a continuación el diseño de actividades de instrucción medidas por el *software* MATLAB, las cuales tienen como propósito simular la construcción de las estructuras mentales de acciones, procesos, objetos y esquemas a través de mecanismos para interiorizar acciones, coordinar o invertir procesos, encapsular procesos en objetos o desencapsular objetos en procesos y tematizar esquemas.

Las instrucciones y programas se diseñaron, probaron, ejecutaron y depuraron en las salas de informática de la Universidad con el grupo de estudiantes que participaron en la investigación, quienes previamente habían asistido a las clases magistrales, realizando tareas, talleres, y estaban familiarizados con la sintaxis del *software*. Para la presentación de estas actividades de instrucción se adoptó la numeración establecida en la DG del capítulo anterior.

El *software* utilizado tiene las siguientes características:

```
-------------------------------------------------------------
MATLAB Version: 8.2.0.701 (R2013b)
MATLAB License Number: 931317
Operating System: Microsoft Windows 7 Version 6.1(Build 7600)
Java Version: Java 1.7.0_11-b21 with Oracle Corporation Java
HotSpot(TM) 64-Bit Server VM mixed mode
-------------------------------------------------------------
MATLAB                                Version 8.2        (R2013b)
Simulink                              Version 8.2        (R2013b)
Control System Toolbox                Version 9.6        (R2013b)
Data Acquisition Toolbox              Version 3.4        (R2013b)
Fixed-Point Designer                  Version 4.1        (R2013b)
Partial Differential Equation Toolbox Version 1.3        (R2013b)
Simulink Control Design               Version 3.8        (R2013b)
Statistics Toolbox                    Version 8.3        (R2013b)
Symbolic Math Toolbox                 Version 5.11       (R2013b)
-------------------------------------------------------------
```

A. *Construcciones previas*

1. El objeto matemático función real de variable real.

MATLAB proporciona diferentes formas para definir y evaluar las funciones, entre ellas: una desde la ventana de comandos, que se caracteriza por el prompt >>, disponible mientras se trabaja en una sesión; y otra crearla como un programa para utilizarla en posteriores sesiones de trabajos.

En los siguientes apartados se explica cada una de estas formas y al frente de cada instrucción se da la explicación o documentación precedida del carácter porcentaje.

En la ventana de comandos de MATLAB realizar las siguientes acciones, como formas diferentes para definir el objeto función.

a. Con el comando *handle*. Al nombre dado a la función se le asigna el nombre de la variable o variables precedidos del signo @ y luego la expresión o fórmula analítica. Por ejemplo, para definir la función $f(x) = x^2 + 3x + 5$ en la ventana de comandos, y hallar $f(3)$, el código es:

```
>> f=@(x) x^2+3*x+5    % Definir la función.
f = @(x)x^2+3*x+5
>> f(3)                % Evaluar la función en x=3.
    ans = 23           % Respuesta generada por MATLAB.
```

b. Con el comando *inline*. Al nombre de la función se le asigna con el comando *inline* y entre paréntesis y apóstrofos la expresión algebraica que define la función y el nombre de la variable independiente. Por ejemplo, para definir la función anterior,

```
>> f=inline('x^2+3*x+5','x')% Definir la función.
>> f(3)
ans =
    23
```

c. En forma *simbólica*. Definir el nombre de la variable como simbólica, asignar al nombre de la función la expresión algebraica que la define y luego utilizar el comando *subs* para hallar el valor de f en el valor deseado. Para el ejemplo anterior se debe digitar:

```
>> syms x        % Definir a x como variable simbólica.
>> f=x^2+3*x+5   % Definir la función.
```

```
>> subs(f,3)     % Evaluar la función en x=3.
 ans =
        23
```

d. Como un *módulo, script*. Con la palabra reservada `function`, se definen funciones y quedan disponibles para utilizarlas en otros módulos al grabarla como un archivo de MATLAB. Para el caso del ejemplo, guardar el siguiente código digitado en el procesador de texto de MATLAB con el nombre *f.m*

```
function y=f(x)
% f es el nombre de la función
% y es la variable de salida,
% x, es la variable independiente o argumento.
    y=x^2+3*x+5;     % Asignar la función.
>> f(3)              % Evaluar f en x=3.
ans =
    23
```

2. El objeto matemático función vectorial de variable real FVR

Para construir este objeto mental se diseñaron las siguientes acciones:

a. Para definir la función particular, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto f(t) = (\cos t, \sin t, t)$, y representarla en forma gráfica, realizar las siguientes *acciones*, digitando lo siguiente:

```
>>f=@(t)[cos(t) sin(t) t] % Definir la función vectorial.
>>t=0:0.1:12*pi;       % Asignar el dominio de la función.
>>plot3(cos(t),sin(t),t,'r','linewidth',2);
  %graficar la función
>>grid on;                   % Incluir cuadrícula.
>>xlabel('x');ylabel('y');% Asignar etiquetas para ejes.
>>zlabel('z');
>>title('Gráfica de la función f(t)=[cos(t) sen(t) t]');
                         % Incluir título de la gráfica.
```

El resultado de estas acciones genera la gráfica de la función vectorial de la Figura 17.

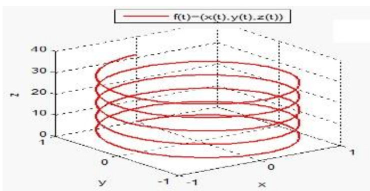


Figura 17. Función vectorial $\boldsymbol{f(t) = (\cos t, \sin t, t)}$. Fuente: el autor

3. El objeto matemático campo escalar CE

Para construir el campo escalar, realizar las siguientes acciones:

a. Para definir y graficar el campo escalar,

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y) = z = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} - 1,$$

escribir el siguiente código en MATLAB,

```
>>f=@(x,y) y.^2./9-x.^2./16-1  % Definir el campo escalar.
>>[x,y]=meshgrid(-6:.01:6,-6:0.01:6);% Rango a graficar.
>>mesh(x,y,f(x,y))                 % Graficar la función.
>>grid on
>>xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z=f(x,y)')
>>title('Gráfica de f(x,y)=y^2/9-x^2/16-1')
```

El resultado de estas acciones se puede observar e interpretar en la Figura 18.

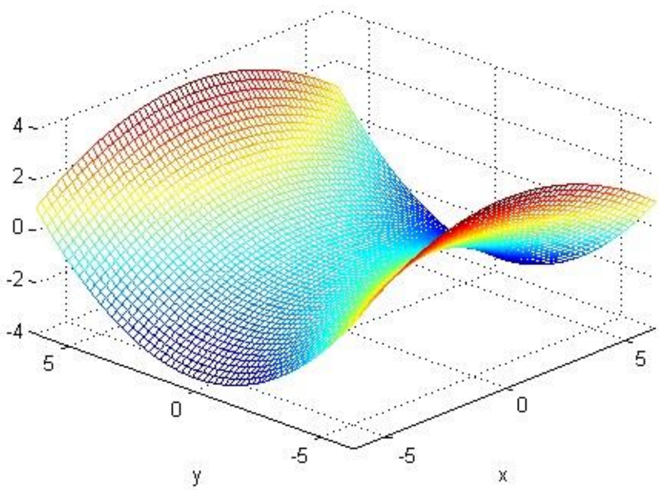


Figura 18. Campo escalar $\boldsymbol{f(x,y) = z = \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} - 1}$. Fuente: el autor.

4. El objeto matemático campo vectorial CV

Para construir un campo vectorial, realizar las siguientes acciones:

a. Definir el campo vectorial,

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto w = f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 - yz + z^2, xyz).$$

Evaluar el campo en el vector (1,2,3).

b. Utilizar variables simbólicas, escribir en MATLAB

```
>>syms x y z            % Definir variables simbólicas.
>>F=[x^2+y^2+z^2;x^2-y*z+z^2;x*y*z]% Definir el C. V.
>>subs(F,{x,y,z},[1 2 3])         % Evaluar F(1,2,3).
```

c. Utilizar el concepto de función de MATLAB, en un *script* digitar,

```
function [f1 f2 f3]=CV(x,y,z)% Definir el campo vectorial
f1=x^2+y^2+z^2;         % Definir f1, componente del C. V.
f2=x^2-y*z+z^2;         % Definir f2, componente del C. V.
f3=x*y*z;               % Definir f3, componente del C. V.
```

d. Grabar el anterior código con el nombre *CV.m* y para evaluarlo en el vector (1,2,3), digitar en la ventana de comandos,

```
>>[f1 f2 f3]=CV(1,2,3)
```

e. Utilizar funciones handles

```
>>f1=@(x,y,z) x^2+y^2+z^2; % Definir f1, del C. V.
>>f2=@(x,y,z) x^2-y*z+z^2; % Definir f2, del C. V.
>>f3=@(x,y,z) x*y*z;       % Definir f3, del C. V.
>>F=@(x,y,z)[f1(x,y,z) f2(x,y,z) f3(x,y,z)]
                           % Definir el campo vectorial
>>F(1,2,3)                 % Evaluar F en (1,2,3)
ans =
    14     4     6
```

B. Construcción del objeto derivada direccional de una función real de variable vectorial DD

Para construir el objeto derivada direccional, realizar las siguientes acciones:

1. En el caso particular de calcular la derivada direccional del campo escalar, $f(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + 3z$, en el punto $a = (1,1,0)$ en la dirección del vector $u = (1,-1,2)$ y luego hacer la generalización, se diseñaron las siguientes *acciones*:

a. Digitar las siguientes instrucciones

```
>>f=inline('x^3+2*y^3+3*z','x','y','z')
% Definir el campo escalar.
>>a=[1 1 0]             % Asignar el valor de a.
>>u=[1 -1 2]            % Asignar el vector dirección.
>>h=0.00001             % Aproximar h a 0.
>>b=a+h*u               % Calcular a+hu.
>>dd=(f(b(1),b(2),b(3))-f(a(1),a(2),a(3)))/h
% Aproximar  la derivada direccional.
```

b. *Repetir* las acciones anteriores en varios valores del punto a, en diferentes direcciones u y en otros campos escalares definidos de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$.

2. *Interiorizar* las acciones anteriores en un proceso, similar al codificado en el siguiente *script*.

```
clear;clc;
fu=input('defina el campo escalar?','s');% Capturar el C. E.
a=input('Valor en el punto ?');         % Capturar el punto.
u=input('valor del vector dirección ?');% Capturar vector
                                        % dirección.
f=inline(fu,'x','y','z');  % Definir el campo escalar.
h=0.00001;
b=a+h*u;
dd=(f(b(1),b(2),b(3))-f(a(1),a(2),a(3)))/h;
% Calcular la derivada direccional.
```

3. Modificar el proceso anterior cuando se definan otros campos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

4. Encapsular el campo escalar en un objeto matemático y denominarlo `mifunción`, digitando el siguiente *script* en MATLAB

```
f=mifuncion(x,y,z)
f=x^3+2*y^3+3*z;
```

5. *Encapsular* el proceso para calcular la derivada direccional de un campo escalar definido de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. en el objeto matemático denominado `ddR3`.

```
function y=ddR3(fu,a,u)
f=fu;
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(f(b(1),b(2),b(3))-f(a(1),a(2),a(3)))/h;
```

6. Realizar *acciones* sobre el objeto `ddR3`, para el caso del ejemplo propuesto.

```
>> ddR3(@mifuncion,[1 1 0],[1 -1 2])
ans = 3.0001
```

7. *Desencapsular* el campo escalar y modificarlo para otros campos cuando $n = 3$ y utilizar el objeto `ddR3`.

8. Modificar los objetos matemáticos `mifunción` y `ddR3` para otros campos escalares, por ejemplo cuando $n = 2,\ n = 4$.

9. *Interpretar* geométricamente la existencia de la derivada direccional de una función real de variable real f, en un punto, como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto. Para inducir esta interpretación se diseñaron las siguientes *acciones*.

a. Digitar y analizar el siguiente código en un *script*.

```
f=inline('x.^2','x')% Definir la función.
h=0.0001;             % Asignar a h un valor cerca a 0.
a=2;                  % Asignar punto a calcular la DD.
df=(f(a+h)-f(a))/h;   % Aproximar la derivada de f en
                      % el punto (a,f(a)).
x=-1:0.1:6;           % Asignar dominio de la función.
rt=df.*(x-a)+f(a);    % Asignar la ecuación de la recta
                      % tangente a f en el punto (a,f(a)).
plot(x,f(x),'b',x,rt,'r');% Graficar de la función
                          % y la tangente.
punto=['o(',num2str(a),',',num2str(f(a)),')'];
                       % Asignar etiqueta para el punto.
text(a,f(a),punto);    % Imprimir el punto en la gráfica.
xlabel('x');ylabel('y'); grid on;
title('Interpretación geométrica de la derivada');
```

El resultado de estas acciones se observa en la Figura 19.

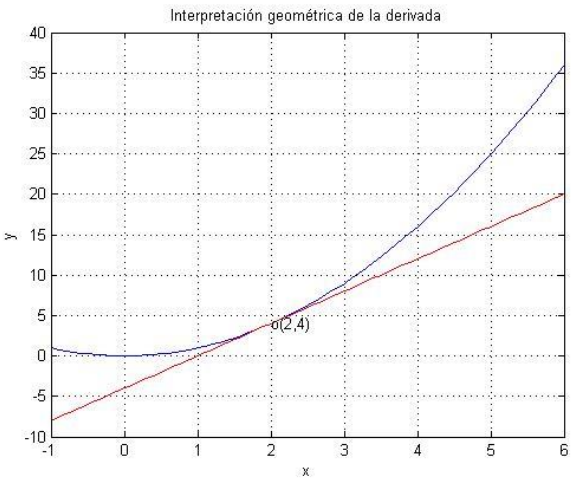


Figura 19. Recta tangente a la función $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, en el punto (2,4). Fuente: el autor.

b. Las *acciones* anteriores se repiten para diferentes puntos y funciones que inducen a *interiorizarlas* en el *proceso* de interpretar geométricamente el concepto de derivada de una función real de variable real.

c. El proceso se *encapsula* en el objeto matemático *tangente1d*, escribiendo la siguiente función en MATLAB:

```
function t=tangente1d(fu,a)
% Para hallar la tangente a la gráfica de la función en
% el punto (a,f(a)), se debe digitar tangente1d(fu,a),
% donde fu es la expresión algebraica de la función y a
% el punto. Por ejemplo tangente1d('x.^2',2).
f=inline(fu,'x');
h=0.00001;
df=(f(a+h)-f(a))/h;
x=a-2:0.1:a+2;        % Asignar dominio de la función.
rt=df.*(x-a)+f(a);    % Asignar la ecuación de la recta.
                      % tangente a f en el punto (a,f(a)).
plot(x,f(x),'b',x,rt,'r');% Graficar función y tangente.
grid on;
punto=['o(',num2str(a),',',num2str(f(a)),')'];
% Definir etiqueta del punto.
text(a,f(a),punto);   % Escribir el punto en la gráfica.
xlabel('x');ylabel('y');
title('Interpretación geométrica de la derivada');
```

Sobre el objeto mental se pueden realizar acciones como,

```
>>tangente1d('4-x.^2',1)
```

Que genera la Figura 20.

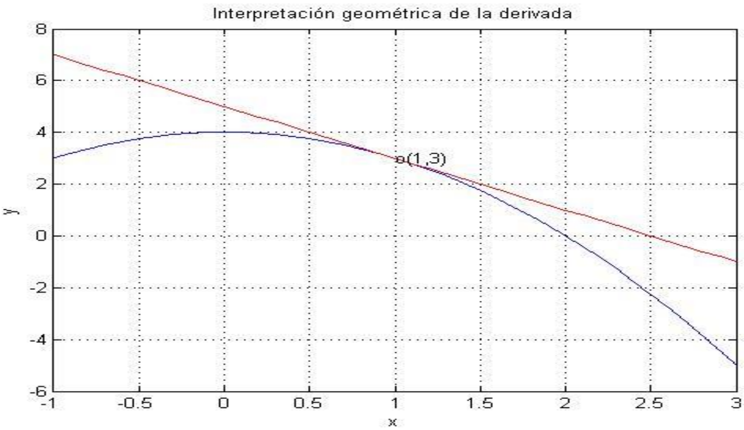


Figura 20. Tangente a la función $\boldsymbol{f(x) = 4 - x^2}$ en el punto (1,3). Fuente: el autor

10. *Interpretar* geométricamente la derivada direccional para campo escalar $z = f(x, y)$. La derivada de f en el punto a en dirección del vector u se interpreta como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva de intersección entre la superficie representada por f y el plano, en dirección del vector u en el punto $(a, f(a))$. Para inducir esta interpretación se diseñaron las siguientes acciones:

a. Para un *ejemplo* particular, algunas acciones se realizan sobre objetos previamente encapsulados como plano, recta, funciones vectoriales, escribiendo lo siguiente en MATLAB:

```
hold on;
clear;
a=[1 1];           % Asignar punto de tangencia.
u=[1 1];           % Asignar vector dirección.
f=inline('4-x.^2-y.^2','x','y'); % Definir la  función.
x0=a(1);y0=a(2);   % Asignar variables.
z0=f(x0,y0);       % Evaluar f en a.
xi=x0-1;xf=x0+1;   % Asignar dominio de f en x.
yi=y0-1;yf=y0+1;   % Asignar dominio de f en y.
zf=2*abs(z0); zi=-zf; % Definir rango en f en z.
[x,y]=meshgrid(xi:0.01:xf,yi:0.01:yf);
                  % Asignar dominio de f en el plano xy.
z=f(x,y);         % Evaluar f en el dominio.
mesh(x,y,z);      % Graficar la malla que representa a f.
A=[u(1) u(2) 0]; % Asignar vector dirección en R^3.
B=[0 0 z0];       % Asignar vector ortogonal al dirección.
N=cross(A,B);     % Asignar vector normal al plano
                  % formado por A y B.
A=N(1);B=N(2);C=N(3);% Asignar coordenadas del vector
                      % normal al plano.
ys=[num2str(-A/B),'*(x,num2str(x0),')+',num2str(y0),...
'+0*z']            % Generar ecuación del plano
                   % y=(-B/A)*(x-x0)+y0.
f2=inline(ys,'x','z');% Definir el plano tangente.
[x,z]=meshgrid(xi:0.01:xf,zi:0.01:zf);
                   % Asignar dominio en el plano.
 y=f2(x,z);        % Evaluar el dominio del plano.
 mesh(x,y,z);      % Definir la malla que representa a f.
 t=xi:0.01:xf  % Asignar Dominio de la función vectorial.
 plot3(t,f2(t,0.*t),f(t,f2(t,0.*t)),'b','linewidth',2)
                   % Graficar la función vectorial que
                   % representa curva parametrizada C
                   % que es la intersección de la gráfica
                   % de f con el plano.
 h=0.00001;        % Aproximar que h tiende a cero.
 df2x=(f2(x0+h,x0)-f2(x0,x0))/h;
 dft=(f(x0+h,f2(x0+h,0))-f(x0,f2(x0,0)))/h;
                  % Calcular derivada direccional.
 u=[1,df2x,dft]  % Asignar vector direccional de la recta
```

```
                % tangente a la curva de intersección C.
t=-1:0.01:1;
plot3(t.*u(1)+x0,t.*u(2)+y0,t.*u(3)+z0,'g', ...
'linewidth',2);  % Graficar la tangente.
cadena=['o(',num2str(x0),',',num2str(y0),',',...
num2str(z0),')'];% Asignar etiqueta del punto.
text(x0,y0,z0,cadena);
grid on;
```

Estas acciones generan las Figura 21 y Figura **22**.

b. *Repetir las acciones* anteriores para diferentes puntos y campos escalares, para interiorizarlas en el proceso de determinar la tangente a la curva C, intersección de un campo escalar $z = f(x, y)$ con el plano en dirección del vector u, en un punto arbitrario a de C.

c. El proceso anterior se encapsula en el *objeto* matemático `tangente2d`, tal que dado el campo escalar, el punto y el vector dirección encuentran la derivada direccional y la representan geométricamente.

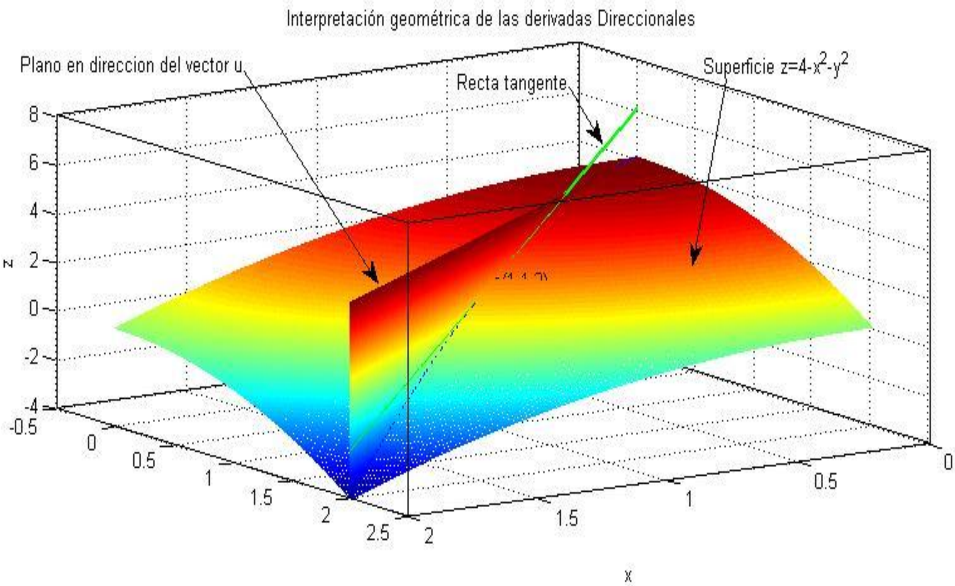


Figura 21. Interpretación geométrica de la derivada direccional, el plano de la dirección del vector u, corta la gráfica de la superficie.

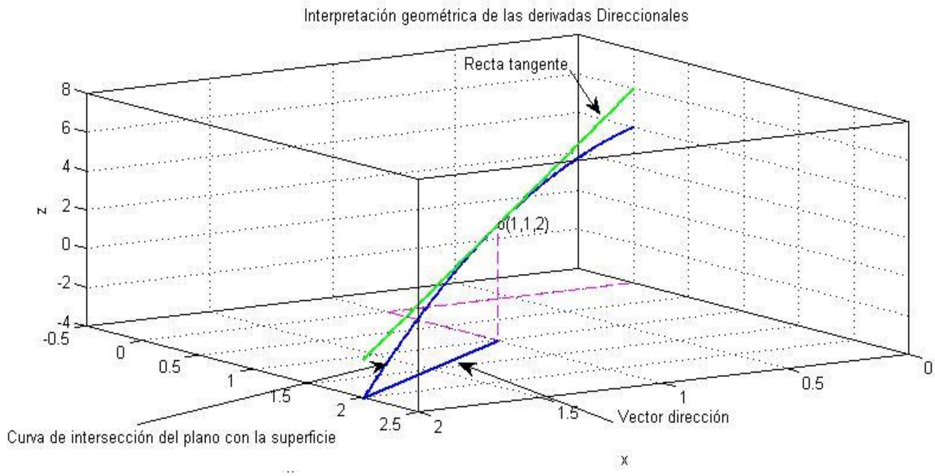


Figura 22. Interpretación geométrica de la derivada direccional, la pendiente de la recta tangente a la curva formada por la intersección del plano en la dirección $\boldsymbol{u}$ y la gráfica del campo escalar $\boldsymbol{z = f(x, y)}$

C. Construcción del objeto derivada parcial de una función real de variable vectorial o CE

La derivada parcial es un caso particular de la derivada direccional, cuando el vector direccional es uno de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Para la construcción de este objeto matemático se propone activar los siguientes mecanismos mentales.

1. Calcular la derivada parcial de un campo escalar.

a. Para el caso particular $f(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 3z$, calcular las derivadas parciales de f respecto a x, y y a z en el punto $(1, -1, 2)$ utilizando y realizando acciones sobre los objetos matemáticos previamente construidos. Se proponen las siguientes:

```
>> ddR3(@mifuncion,[1 -1 2],[1 0 0])
% Calcular la derivada parcial de f respecto a x.
>> ddR3(@mifuncion,[1 -1 2],[0 1 0])
% Calcular la derivada parcial de f respecto a y.
>> ddR3(@mifuncion,[1 -1 2],[0 0 1])
% Calcular la derivada parcial de f respecto a z.
```

2. *Repetir* las acciones anteriores para calcular la derivadas parciales en otros puntos y para diferentes campos escalares definidos sobre $\mathbb{R}^3$ e interiorizar en procesos.

3. Desencapsular el objeto matemático ddR3 para calcular derivadas parciales en campos escalares definidos en $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ y en general en $\mathbb{R}^n$, cuando $n > 1$.

4. Repetir estos procesos y coordinarlos para encapsularlos en el objeto matemático derivada parcial de un campo escalar.

5. *Interpretar* geométricamente la derivada parcial.

a. *Encapsular* el proceso de interpretar geométricamente la derivada direccional de un campo escalar en el objeto matemático `igR2`,

```
function y=igR2(fu,u,a)
x0=a(1);y0=a(2);
u1=u(1);u2=u(2);
f=inline(fu);
u1=u1/norm(u); u2=u2/norm(u);
z0=f(x0,y0);
limx=1;limy=1;
xi=x0-limx;xf=x0+limx;
yi=y0-limy;yf=y0+limy;
zi=0;zf=2*abs(z0);
axis([xi xf yi yf zi zf]);  % Definir rango para f.
h=0.00001;
[x,y]=meshgrid(xi:0.01:xf,yi:0.01:yf);
z=f(x,y);
hold on;
mesh(x,y,z);
A=[u1 u2 0];
B=[0 0 z0];
N=cross(A,B);
a=N(1);b=N(2);c=N(3);
if abs(b)<=0.0001
   xs=[num2str(x0),'+0*y+0*z']; % Ecuación del plano x=x0
   [y,z]=meshgrid(yi:0.01:yf,zi:0.01:zf);
   f1=inline(xs,'y','z');
   x=f1(y,z);
   mesh(x,y,z);
   t=yi:0.01:yf;
   plot3(f1(t,0.*t),t,f(f1(t,0.*t),t),'r','linewidth',2);
   % Graficar  la curva parametrizada C1 que
   % corresponde a la intersección del plano con la
   % superficie.
   df1y=(f1(y0+h,0)-f1(y0,0))/h;
   dft=(f(f1(y0+h,0),y0+h)-f(f1(y0,0*y0),y0))/h;
   % Calcular las derivadas parciales.
   u=[df1y,1,dft]; % Definir vector dirección de la recta
                   % tangente.
   t=-limy:0.01:limy;
   plot3(u(1).*t+x0,u(2).*t+y0,u(3).*t+z0,'g', ...
```

```
  'linewidth',2);
   %Gráfica de la recta tangente a la curva C1
else
    ys=[num2str(-a/b),'*(x-  ,num2str(x0),')+',...
    num2str(y0),'+0*z'];
    %ecuación del plano y=(-b/a)*(x-x0)+y0
    f2=inline(ys,'x','z');
    [x,z]=meshgrid(xi:0.01:xf,zi:0.01:zf);
    y=f2(x,z);
    mesh(x,y,z); % Graficar el plano con el vector u.
    t=xi:0.01:xf;
    plot3(t,f2(t,0.*t),f(t,f2(t,0.*t)),...
    'b','linewidth',2);
    df2x=(f2(x0+h,x0)-f2(x0,x0))/h;
    dft=(f(x0+h,f2(x0+h,0))-f(x0,f2(x0,0)))/h;
    u=[1,df2x,dft];
    t=-limx:0.01:limx;
    plot3(t.*u(1)+x0,t.*u(2)+y0,t.*u(3)+z0, ...
    'g','linewidth',2);
end
    xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');
cadena=['(*',num2str(x0),',',num2str(y0),',', ...
num2str(z0),')'];
plot3(x0,y0,z0,'o','LineWidth',2,...
                       'MarkerEdgeColor','k',...
                       'MarkerFaceColor','g',...
                       'MarkerSize',5)
text(x0,y0,z0,cadena);
cadena=['(*',num2str(x0),',',num2str(y0),',', ...
num2str(zi),')'];
plot3(x0,y0,zi,'o','LineWidth',2,...
                       'MarkerEdgeColor','k',...
                       'MarkerFaceColor','g',...
                       'MarkerSize',5);
text(x0,y0,zi,cadena);
title('Interpretación geométrica de las derivadas...
Direccionales')
xa=[x0 x0+u1];ya=[y0 y0+u2];za=[zi zi];
line(xa,ya,za,'MarkerFaceColor','r','linewidth',2);
% Graficar el vector dirección.
xa=[xi x0];ya=[yi yi];za=[zi zi];
line(xa,ya,za,'Linestyle','--,'color','m','linewidth',1);
xa=[x0 x0];ya=[yi y0];za=[zi zi];
line(xa,ya,za,'Linestyle','--,'color','m','linewidth',1);
xa=[x0 x0];ya=[y0 y0];za=[zi z0];
line(xa,ya,za,'Linestyle','--,'color','m','linewidth',1);
grid on;
box on
```

6. Realizar acciones sobre el objeto matemático `igR2`, por ejemplo para visualizar la interpretación geométrica de la derivadas parciales del campo,

$f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$, en el punto (1,1), digitar:

```
>> igR2('4-x.^2-y.^2',[1 0],[1 1]);
% Calcular DP de f respecto a x en el punto (1,1).
>> igR2('4-x.^2-y.^2',[0 1],[1 1]);
% Calcular la DP de f respecto a y en el punto (1,1).
```

Al procesar este código genera las Figura 23 y Figura 24.

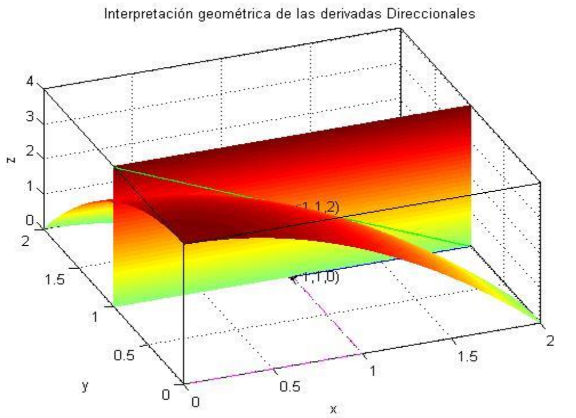


Figura 23. Interpretación geométrica de la derivada parcial de $\boldsymbol{f}$ respeto a $\boldsymbol{x}$, $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Fuente: el autor.

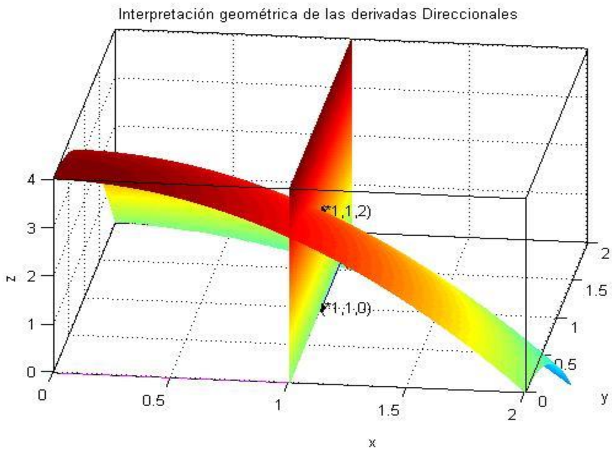


Figura 24. Interpretación geométrica de la derivada parcial de $\boldsymbol{f}$ respeto a $\boldsymbol{y}$, $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}(\mathbf{1},\mathbf{1})$. Fuente: el autor

D. Derivada de una función en varias variables

1. Para aproximar la derivada de una función definida sobre un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, se proponen las siguientes acciones:

a. Para el caso de una función real de variable real, $n = 1$ y $m = 1$, calcular $Df(a) = f'(a)$: *encapsular* la función a calcular la derivada y utilizar el objeto derivada de una función real de variable real, por ejemplo para el caso particular $f(x) = x^2$ en el punto $a = 2$.

```
function f=fR_R(x)
% Definir la unción real de variable real.
 f=x.^2;

 function y=derivada(fu,a)
 % Definir la derivada de una función en un punto real.
     h=0.00001; % Definir incremento.
     y=(fu(a+h)-fu(a))/h;

 >>y=derivada(@fR_R,2)
```

b. Para el caso de una función definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ la derivada de la función $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto $a = (1,1)$ se encuentra realizando las siguientes acciones:

```
function f=fR2_R(x,y)
%Definir el campo escalar de R^2 a R.
f=x.^2+y.^+2;


function y=ddR2_R(fu,a,u)
% Calcular la DD de un campo escalar de R^2 a R.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2))-fu(a(1),a(2)))/h;


function y=grR2_R(g,a)
% Calcular el gradiente de un campo escalar de R^2 a R.
fx=ddR2(g,a,[1 0]);
fy=ddR2(g,a,[0 1]);
y=[fx fy];

>>gradiente=grR2_R(@fR2_R,[1 1])
```

c. Para el caso de un campo escalar f, $n > 1$ y $m = 1$, por ejemplo para $n = 3$ para calcular la derivada de la función $f(x,y) = x^3 + 2y^3 + 3z$, en el punto $a = (1,2,3)$.

```
function f=fR3_R(x,y,z)
% Definir Campo escalar de R^3 a R.
f=x.^3+2*y.^3+3.*z;

function y=ddR3_R(fu,a,u)
% Calcular la DD de un campo escalar de R^3 a R.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2),b(3))-fu(a(1),a(2),a(3)))/h;

function y=grR3_R(g,a)
% Calcular el Gradiente de un campo escalar de R^3 a R.
fx=ddR3(g,a,[1 0 0]);
fy=ddR3(g,a,[0 1 0]);
fz=ddR3(g,a,[0 0 1]);
y=[fx fy fz];
>>gradiente=grR3_R(@fR3_R,[1 2 3])
```

d. Repetir acciones anteriores para campos escalares de dimensión mayor que 3 en varios puntos, y encapsular la derivada como el gradiente del campo escalar.

e. Para el caso de una función vectorial de variable real, $n = 1$ y $m > 1$, por ejemplo si $m = 2$, aproximar la derivada para la función vectorial $f(t) = (\cos t, \sin t)$ en $a = \pi$ realizar las siguientes acciones:

```
function f=fR_R2(t)
% Definir la función vectorial en R^2 de variable real.
f=[cos(t) sin(t)];

function y=derivada(fu,a)
% Aproximar la derivada de una función real en un punto.
h=0.00001;
y=(fu(a+h)-fu(a))/h;

>>y=derivada(@fR_R2,pi)
```

f. Para el caso de la función vectorial de variable real, $n = 1$ y $m > 1$, por ejemplo para $m = 3$, aproximar la derivada para la función vectorial $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ en $a = \pi$ se deben realizar las siguientes acciones:

```
function f=fR_R3(t)
% Definir la función vectorial en R^3 de variable real.
f=[cos(t) sin(t) t]
>>y=derivada(@fR_R3,pi)
```

g. *Repetir* acciones anteriores para funciones vectoriales definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, para $m > 3$ en varios puntos y *encapsular* la derivada como el vector en $\mathbb{R}^m$ cuyas m componentes son las derivadas de cada una de las $f_i(a), i = 1, \cdots, m$.

2. *Interiorizar* las acciones anteriores en procesos.

a. *Repetir* las acciones anteriores para diferentes casos.

b. Para calcular la derivada de la función,

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - 2xz, xyz).$$

En el punto $a = (1,1,1)$, se debe calcular la matriz jacobiana y utilizar los objetos matemáticos previamente construidos. Para este propósito se diseñaron las siguientes actividades:

```
function f=f1(x,y,z)
f=x+y+z;

function f=f2(x,y,z)
f=x-y-2*x*z;

function f=f3(x,y,z)
f=x*y*z;

function y=ddR3_R(fu,a,u)
% Calcular la DD de un campo escalar de R^3 a R.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2),b(3))-fu(a(1),a(2),a(3)))/h;


function y=grR3_R(g,a)
% Calcular el gradiente de un campo escalar de R^3 a R.
fx=ddR3_R(g,a,[1 0 0]);
fy=ddR3_R(g,a,[0 1 0]);
fz=ddR3_R(g,a,[0 0 1]);
y=[fx fy fz];

function y=jacR3_R3(f1,f2,f3,a)
y=[grR3_R(f1,a);grR3_R(f2,a);grR3_R(f3,a)];

>>jacobiana=jacR3_R3(@f1,@f2,@f3,[1 1 1])

jacobiana =
    1.0000    1.0000    1.0000
   -1.0000   -1.0000   -2.0000
    1.0000    1.0000    1.0000
```

c. Modificar los códigos anteriores para calcular la derivada de otros campos vectoriales definidos de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ en diferentes puntos.

3. Repetir las acciones anteriores para generalizar el concepto de derivada de una función en varias variables.

E. Construcción del objeto diferencial de una función real de variable real DIFR

1. Para calcular la diferencial de una función real de variable real f en el punto a e interpretar geométricamente, se diseñaron las siguientes acciones:

a. Calcular la diferencial, para el caso particular de la función $f(x) = x^2$, en el punto $a = 2$. Desencapsular la derivada de una función y definir el error de aproximación $E(a, h)$ e interpretar la fórmula de Taylor de primer orden, a través de los siguientes mecanismos:

```
function f=fR_R(x)
% Definir la función real de variable real.
f=x.^2;

function y=derivada(fu,a)
% Aproximar a la derivada de una función en un punto.
dx=0.000001;
y=(fu(a+dx)-fu(a))/dx;

function E=errorf(fu,a,h)
% Definir la función error de la fórmula de Taylor.
if h==0
    E=0;
else
    E=(f(a+h)-f(a))/h-derivada(fu,a);
end

>>a=2;                 % Definir punto de tangencia.
>>hold on
>>x=a-2:0.01:a+2;      % Asignar rango para graficar.
>>m=derivada(@fR_R,2);% Calcular la pendiente de la recta
                       % tangente.
>>rt=m*(x-a)+fR_R(2); % Definir la ecuación de la recta
                       % tangente.
>>plot(x,fR_R(x),'r',x,rt,'b','LineWidth',1.5);
% Graficar  la función y la tangente.
>>h=1;                 % Asignar valor del incremento.
>>deltaf=f(a+h)-f(a); % Asignar el incremento de f al
                       % variar x en [a,a+h]
>>dy=derivada(@fR_R,2)*h; % Calcular la diferencial.
```

```
>>deltaf=dy+h*errorf(@fR_R,2,h);
% Asignar la fórmula de Taylor de primer orden.

ans
deltaf = 8
dy =     4.0000
deltaf = 8
```

b. *Interpretar* geométricamente la diferencial, dy, como el cambio de altura de la recta tangente, mientras que `deltaf`, es el cambio de altura de la curva $y = f(x)$ cuando x varía una cantidad h desde a hasta $a + h$, y la diferencia entre `deltaf` y dy es la función `errorf` que representa la función $hE(a, h)$ del análisis del concepto. Esta interpretación se puede visualizar al realizar la acción anterior, que genera la Figura 25.

c. *Interpretar* analíticamente la existencia de la diferencial como la posibilidad de aproximar la función $y = f(x) = x^2$ por la recta tangente, $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, en puntos x muy próximos al punto fijo a.

d. Repetir las acciones anteriores, haciendo que $h \rightarrow 0$, analizar el comportamiento de `deltaf`, `dy` y `errorf`.

2. *Interiorizar* las *acciones* en *procesos*.

a. *Repetir* las acciones del paso anterior para diferentes valores de a.

b. *Repetir* las acciones del paso anterior para diferentes funciones f.

3. *Encapsular los* procesos anteriores en el objeto matemático *diferencial de una función real de variable real* f en un punto a, implementado en la siguiente función.

```
function y=diferencialdy(fu,a,h)
% Definir la función que calcula la diferencial.
y=derivada(fu,a)*h;
>>y=diferencialdy(@fR_R,2,0.001)

ans
y = 0.0040
```

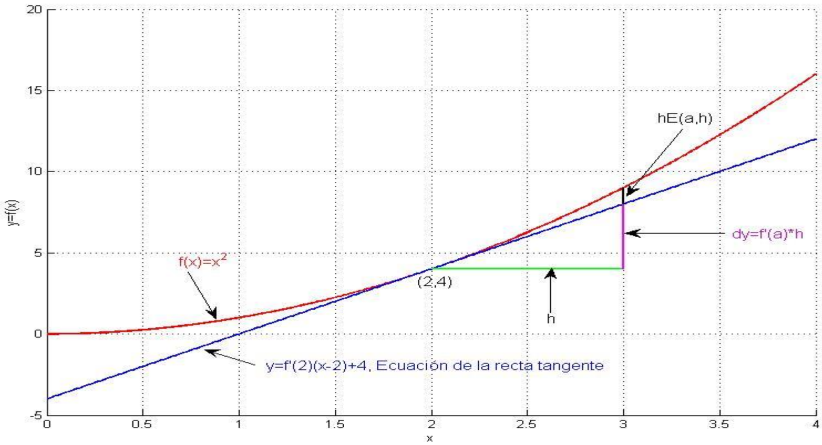


Figura 25. Interpretación geométrica de la diferencial $f(x) = x^2$ en x=2. Fuente: el autor.

F. Construcción del objeto diferencial de una función vectorial de variable real DIFVR

1. *Acción* de calcular la diferencial de una función vectorial de variable real.

a. Desencapsular los objetos matemáticos derivada de una función real.

b. Desencapsular la función vectorial de variable real.

c. Realizar las siguientes acciones sobre los anteriores objetos matemáticos, al programar y ejecutar los siguientes scripts y encapsularlos en los objetos matemáticos definidos por las funciones.

```
function diffuvectorial(varargin)
% Graficar la tangente a una curva en R^3 definida por la
% función f(t)=(2cos(t),sin(t),t).
clc;
graficatangentefR_R3(@fR_R3,3*pi);

function f=fR_R3(t)
% Definir una función de R a R^3.
f=[2*cos(t) sin(t) t];

function f=derivada(fu,a)
% Aproximar la derivada de una función en el punto a.
h=0.00001;
f=(fu(a+h)-fu(a))/h;
```

```
function graficafR_R3(fu,t)
% Graficar la función fu en R^3, en un intervalo de t.
x=[];y=[];z=[];     % Inicializar vectores.
for k=1:length(t)
    vaux=fu(t(k));  % Evaluar la función.
    x=[x,vaux(1)];  % Actualizar los vectores.
    y=[y,vaux(2)]; z=[z,vaux(3)];
end
plot3(x,y,z,'b','linewidth',2); % Graficar la función.
```

```
function graficatangentefR_R3(fu,t0)
% Graficar la función y la tangente en el punt0 f(t0).
t=0:0.01:6*pi;     % Definir rango de t.
graficafR_R3(fu,t);% Graficar la curva definida por fu.
v0=fu(t0);         % Evaluar la función en t0.
x0=v0(1);y0=v0(2);z0=v0(3); % Establecer las coordenadas.
df=derivada(fu,t0);% Calcular la derivada.
x=@(t) x0+df(1)*t; % Definir x(t) para la recta tangente.
y=@(t) y0+df(2)*t; % Definir y(t) para la recta tangente.
z=@(t) z0+df(3)*t; % Definir z(t) para la recta tangente.
t=-1:0.01:1;hold on; % Definir Rango de t de la tangente.
plot3(x(t),y(t),z(t),'r','linewidth',2)% Grafica tangente
xlabel('x(t)');ylabel('y(t)');zlabel('z(t)');
cadena=['(',num2str(x0),',',num2str(y0),num2str(z0),')'];
text(x0,y0,z0,cadena);
title('Diferencial de una función vectorial de...
variable real ')
grid on;
```

d. Interpretar geométricamente los resultados generados al ejecutar los *scripts* anteriores (ver la Figura 26).

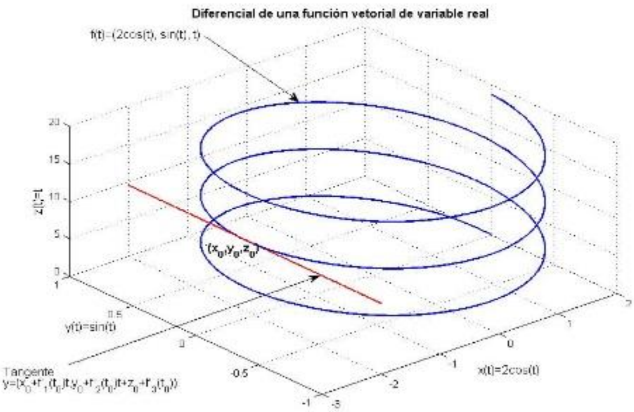


Figura 26. Interpretación geométrica de la diferencial $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = (\mathbf{2}\cos \boldsymbol{t}, \sin \boldsymbol{t}, \boldsymbol{t})$ en el punto $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{3}\boldsymbol{\pi}) = (\mathbf{2}\cos \mathbf{3}\boldsymbol{\pi}, \sin \mathbf{3}\boldsymbol{\pi}, \mathbf{3}\boldsymbol{\pi})$. Fuente: el autor.

2. Repetir las *accione*s anteriores para diferentes puntos t_0 y funciones f definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$.
3. Repetir las acciones anteriores para diferentes puntos t_0 y funciones f definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$.
4. Repetir las acciones anteriores para diferentes puntos t_0 y funciones f definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$, $m > 3$.
5. Interiorizar las acciones anteriores en procesos.
6. Encapsular el proceso anterior en el objeto matemático diferencial de una función vectorial de variable real en un punto.

G. Construcción del objeto diferencial de un campo escalar DICE

1. Calcular la diferencial de un campo escalar de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.
a. Determinar la fórmula de Taylor de primer orden para $f(a+u)$, del campo escalar $f(x,y) = x^2 + y^2$ en el punto (1,1) mediante la ejecución de las siguientes acciones en MATLAB sobre objetos matemáticos previamente construidos.

```
function f=fR2_R(x,y)
% Definir campo escalar de R^2 a R.
f=x.^2+y.^+2;

function y=ddR2_R(fu,a,u)
% Calcular la derivada direccional de un campo escalar
% fu de R^2 a R, en a en la dirección del vector u.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2))-fu(a(1),a(2)))/h;

function y=grR2_R(g,a)
% Calcular el gradiente de un campo escalar de R^2 a R.
fx=ddR2_R(g,a,[1 0]);
fy=ddR2_R(g,a,[0 1]);
y=[fx fy];

function y=difcampoescalar(fu,a,u)
% Calcular la diferencial del CE fu en el punto a.
y=dot(grR2_R(fu,a),u)

function E=errorces(fu,a,u)
% Calcular error de la fórmula de Taylor de primer grado
% para la función fu en el punto a expandida a, a+u.
if norm(u)==0
    E=0;
else
    b=a+u;
```

```
    E=((fu(b(1),b(2))-fu(a(1),a(2)))-...
    difcampoescalar(fu,a,u))/norm(u);
end


>>a=[1 1]  % Asignar punto donde se calcula la
           % diferencial de f.
>>u=[0.5 0.5] % Asignar vector para calcular f(a+u)
              % aplicando fórmula de Taylor de orden 2.
>>deltaf=difcampoescalar(@fR2_R,a,u)+norm(u)*...
errorces(@fR2_R,a,u)
% Calcular deltaf=f(a+u)-f(a), por la fórmula de Taylor
  De primer orden.
>>deltaf=fR2_R(a(1)+u(1),a(2)+u(2))-fR2_R(a(1),a(2));
% Comparar el valor anterior con  deltaf=f(a+u)-f(a).
ans
deltaf =2.5000
deltaf =2.5000
```

b. Identificar la transformación lineal en u, $T_a(u)$, como la función difcampoescalar(@fR2_R,a,u) que representa la diferencial de f en a.

c. Interpretar analíticamente la existencia de la diferencial de f en el punto a, como la posibilidad de aproximar *deltaf*= $f(a+u) - f(a)$, con la suma de la transformación lineal dada por, difcampoescalar(@fR2_R,a,u), y el error definido como, norm(u)*errorces(@fR2_R,a,u) que corresponde a la fórmula de Taylor de primer orden.

d. Interpretar geométricamente la diferencial al ejecutar las siguientes acciones sobre objetos previamente construidos.

```
function ft=ptangente(f,a,x,y)
% Calcular el plano tangente de f en el punto a.
ft=f(a(1),a(2))+ddR2_R(f,a,[1,0])*(x-a(1))+ ...
ddR2_R(f,a,[0 1]),*(y-a(1));
>>x=a-5:0.01:a+5;y=x;  % Definir rango de x e y para
                       % graficar.
>>[x,y]=meshgrid(x,y); % Establecer la malla que
                       % representa el dominio.
>>mesh(x,y,fR2_R(x,y));% Graficar la función
>>cadena=['(',num2str(a(1)),',',num2str(a(2)),',',...
  num2str(fR2_R(a(1),a(2))),')'];
>>text(a(1),a(2),fR2_R(a(1),a(2)),cadena,'color','red');
>>hold on;
>>mesh(x,y,ptangente(@fR2_R,[1,1],x,y));
%Graficar  el  plano tangente
```

Donde `difcampoescalar(@fR2_R,a,u)`, representa el cambio de altura del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$, mientras que $f(a+u) - f(a)$ representa el cambio de altura de la superficie $z = f(x, y)$ cuando (x, y) cambia del punto fijo $\boldsymbol{a} = (a, b)$ al punto, `a+u=(a(1)+ u(1),a(2)+u(2))`. (Ver las Figura 27 y Figura **28**).

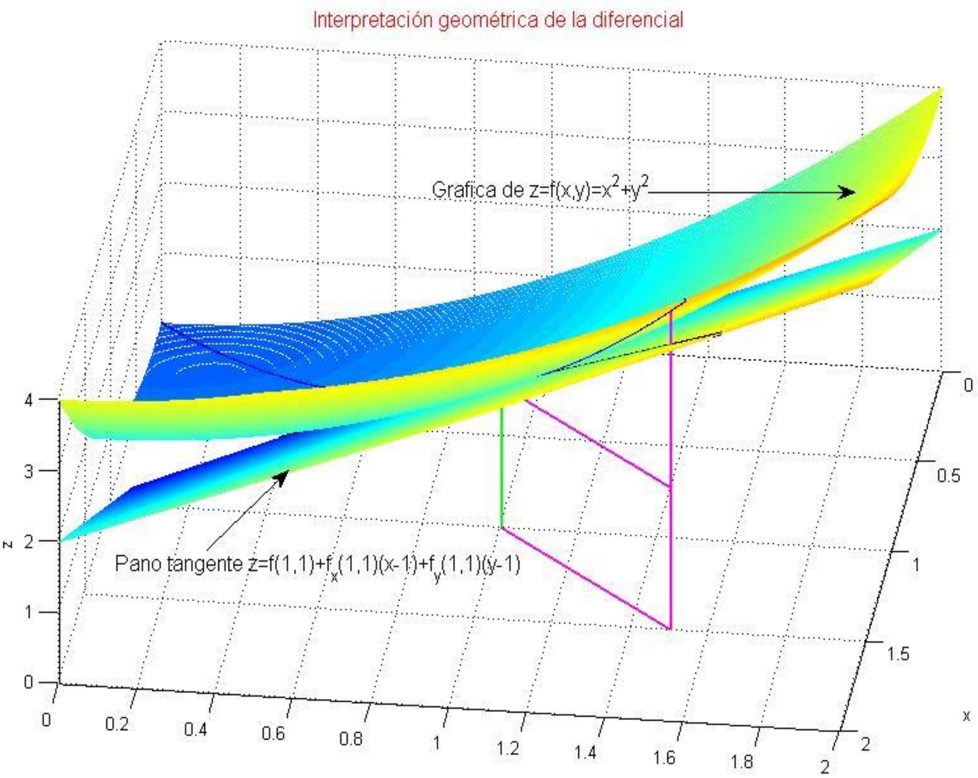


Figura 27. Plano tangente a la superficie $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ en el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$. Fuente: el autor

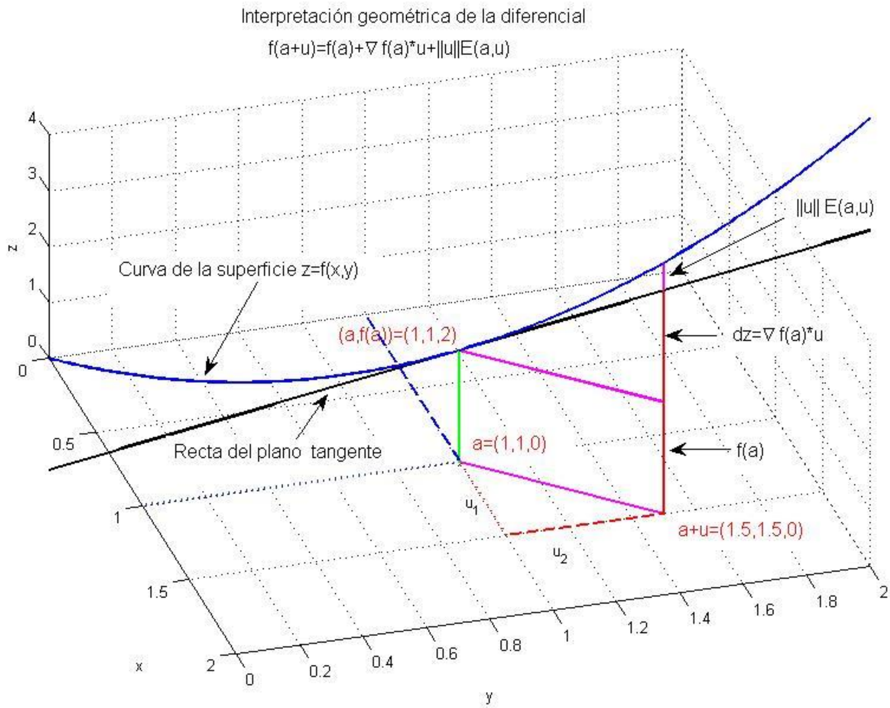


Figura 28. Interpretación geométrica de la diferencial de $\boldsymbol{f(x,y) = x^2 + y^2}$ en el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$. Fuente: el autor.

e. *Repetir* la acción anterior para otros valores de a, del vector u y otros campos escalares f.

f. *Repetir* y modificar las acciones anteriores para calcular la diferencial de otros campos escalares f definidos de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$ para varios puntos a y vectores u e interpretar geométrica y analíticamente.

2. Repetir las acciones anteriores y generalizarlas para interiorizar en un proceso que calcula la diferencial de un campo escalar en un punto.

3. Encapsular la acción anterior en el objeto matemático *diferencial de un campo escalar en un punto* a.

H. Construcción del objeto diferencial de un campo vectorial DICV

1. Dado un abierto A subconjunto de $\mathbb{R}^n$, un punto a de A y un *campo vectorial* f definido de A en $\mathbb{R}^m$, la acción de calcular la diferencial de f en el punto a. Dado el campo vectorial,

$$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \longmapsto f(x, y, z) = (x + y + z, x - y - 2xz, xyz).$$

determinar la diferencial del campo vectorial f en el punto $a = (1,1,1)$.

a. *Desencapsular* el objeto matemático función y definir el campo vectorial

```
function f=f1(x,y,z)
f=x+y+z;

function f=f2(x,y,z)
f=x-y-2*x*z;

function f=f3(x,y,z)
f=x*y*z;
```

b. *Desencapsular* el objeto matemático derivada de una función en el punto $a = (1,1,1)$.

```
function y=ddR3_R(fu,a,u)
% Calcular DD de un campo escalar de R^3 a R.
h=0.00001;
b=a+h*u;
y=(fu(b(1),b(2),b(3))-fu(a(1),a(2),a(3)))/h;
```

c. *Desencapsular* el objeto matemático campo escalar diferenciable en un punto a.

```
function y=grR3_R(g,a)
% Calcular gradiente de un campo escalar de R^3 a R.
fx=ddR3_R(g,a,[1 0 0]);
fy=ddR3_R(g,a,[0 1 0]);
fz=ddR3_R(g,a,[0 0 1]);
y=[fx fy fz];
```

d. Desencapsular el objeto matemático derivada de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, como la matriz jacobiana de orden $m \times n$, con filas formadas por los gradientes de m campos escalares, para el ejemplo $m = 3, n = 3$.

```
function y=jacR3_R3(f1,f2,f3,a)
y=[grR3_R(f1,a);grR3_R(f2,a);grR3_R(f3,a)];
```

e. Definir la función error para la fórmula de Taylor de grado 1.

$E_a: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$u \longmapsto E_a(u) = \begin{cases} \dfrac{\|f(a+u) - f(a) - T_a(u)\|_m}{\|u\|_n}, & Si\ u \neq 0 \\ 0, & Si\ u = 0 \end{cases}.$$

```
function E=errorcvec(f1,f2,f3,a,u)
% Definir función error.
if norm(u)==0
    E=0;
else
    b=a+u;
    fb=[f1(b(1),b(2),b(3)) f2(b(1),b(2),b(3))...
    f3(b(1),b(2),b(3))];
    fa=[f1(a(1),a(2),a(3)) f2(a(1),a(2),a(3))...
    f3(a(1),a(2),a(3))];
    E=(fb'-fa'-difcampovectorial(f1,f2,f3,a,u))/norm(u);
end
```

f. Definir campo vectorial diferenciable en un punto a, como la existencia de la transformación lineal aplicada en un punto, en dirección del vector u, $T_a(u)$, que se representa por el producto de la matriz jacobiana evaluada, el punto y el vector u.

```
function y=difcampovectorial(f1,f2,f3,a,u)
y=jacR3_R3(f1,f2,f3,a)*u';
```

g. Calcular $\Delta f(a) = f(a+u) - f(a) = T_a(u) + \|u\| E_a(u)$ para $a = (1,1,1)$ y $u = (0.5,0.5,0.5)$.

```
a=[1 1 1];u=[0.5 0.5 0.5];
b=a+u;
deltaf=difcampovectorial(@f1,@f2,@f3,a,u)+...
       norm(u)*errorcvec(@f1,@f2,@f3,a,u);
fb=[f1(b(1),b(2),b(3)) f2(b(1),b(2),b(3))...
f3(b(1),b(2),b(3))];
fa=[f1(a(1),a(2),a(3)) f2(a(1),a(2),a(3))...
f3(a(1),a(2),a(3))];
deltaf=fb'-fa'
deltaf =
    1.5000
   -2.5000
    2.3750
```

2. Repetir las acciones anteriores para otros puntos a y vectores u.

3. Repetir las acciones anteriores para otros valores de m, n, a y u e interiorizar en el proceso de calcular el diferencial de un campo vectorial definido de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ para evaluar la fórmula de Taylor de primer grado.

4. Encapsular el proceso anterior en el objeto matemático diferencial de un campo vectorial en un punto.

5. Interpretar geométricamente la existencia del diferencial de un campo vectorial en un punto.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y sea f un campo vectorial de A en $\mathbb{R}^3$ que representa una superficie S_f en $\mathbb{R}^3$, definida paramétricamente como,

$$S_f = \{f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t): (s,t) \in A\}.$$

Si f es diferenciable en un punto interior (s_0, t_0) de A, entonces el espacio tangente a S_f en el punto,

$$f(s_0,t_0) = \big(f_1(s_0,t_0), f_2(s_0,t_0), f_3(s_0,t_0)\big) \in \mathbb{R}^3,$$

está dado paramétricamente por la aplicación afín de A en $\mathbb{R}^3$ definida por,

$$pt(s_0,t_0)(s,t) = f(s_0,t_0) + dh(s_0,t_0)(s - s_0, t - t_0).$$

a. Definir las componentes de f, para el caso particular,

$$f = (f_1(s,t), f_2(s,t), f_3(s,t)) = (s + t, s - t, s^2 - t^2)$$

en el punto $(s_0, t_0) = (1,2)$.

```
function f=f1(s,t)
% Definir componente f1 del campo vectorial f.
f=s+t;

function f=f2(s,t)
% Definir componente f2 del campo vectorial f.
f=s-t;

function f=f3(s,t)
% Definir componente f3 del campo vectorial f.
f=s.^2-t.^2;
```

b. Realizar acciones sobre los objetos matemáticos previamente construidos para hallar el espacio tangente a una superficie, expresado en forma paramétrica.

```
s0=1;t0=2; % Asignar coordenadas del punto de tangencia.
a=[s0 t0]  % Definir el punto a.
sa=s0-1:0.1:s0+1; % Definir el rango de s en el domino A.
ta=t0-1:0.1:t0+1; % Definir el rango de t en el domino A.
[sc,tc]=meshgrid(sa,ta); % Definir la malla para A.
xc=f1(sc,tc);       % Calcular f_1(s,t), (s,t) en A.
```

```
yc=f2(sc,tc);        % Calcular f_2(s,t), (s,t) en A.
zc=f3(sc,tc);        % Calcular f_3(s,t), (s,t) en A.
surf(xc,yc,zc);      % Graficar la superficie Sf.
% Calcular el espacio tangente
J=jacR2_R3(f1,f2,f3,a); % Calcular el diferencial del
                        % campo f en a.
f0=[f1(s0,t0) f2(s0,t0) f3(s0,t0)]; % Hallar f0=f(t0,s0).
pt=@(s,t) f0'+J*[s-s0;t-t0]; % Definir espacio tangente.
% Definir la componente en x del espacio tangente en
% forma paramétrica.
ptx=@(s,t) f0(1)+J(1,1)*(s-s0)+J(1,2)*(t-t0);
% Definir la componente en y del espacio tangente en
% forma paramétrica.
pty=@(s,t) f0(2)+J(2,1)*(s-s0)+J(2,2)*(t-t0);
% Definir la componente en z del espacio tangente en
% forma paramétrica.
ptz=@(s,t) f0(3)+J(3,1)*(s-s0)+J(3,2)*(t-t0);
hold on
xt=ptx(sc,tc); yt=pty(sc,tc); zt=ptz(sc,tc);
% Asignar la componente en x, y y z del espacio tangente.
surf(xt,yt,zt); % Graficar del espacio tangente.
```

c. Analizar el resultado de las acciones anteriores, que se pueden visualizar en la Figura 29.

6. Repetir las acciones anteriores para las siguientes situaciones e interiorizar en un proceso :

$f(s,t) \mapsto (x,y,z) = (s,t,s^2 + t^2), \qquad (s_0,t_0) = (0{,}0), \ (s_0,t_0) = (1{,}1).$

$f(s,t) \mapsto (x,y,z) = (s + t, s - t, s^2 - t^2),$
$(s_0,t_0) = (0{,}0), \ \ (s_0,t_0) = (1{,}2).$

$f(s,t) \mapsto (x,y,z) = (s\cos t\,, s\sin t\,, t), (s_0,t_0) = (0{,}0), \quad (s_0,t_0)$
$= (2,\pi/2).$

$f(s,t) \mapsto (x,y,z) = (\cos s \sin t\,, \sin s \sin t\,, \cos t), \qquad (s_0,t_0) = (0{,}0).$

$(s_0,t_0) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

que debe generar la Figura 30.

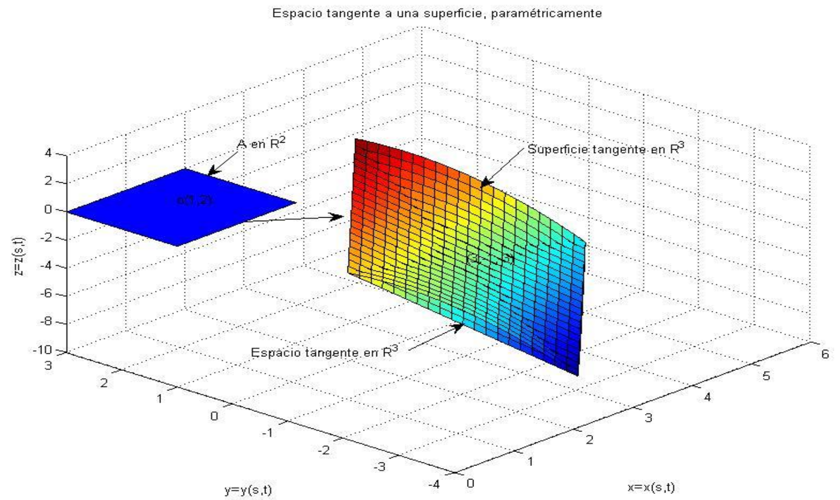


Figura 29. Interpretación geométrica del espacio tangente a una superficie en forma paramétrica. Fuente: el autor.

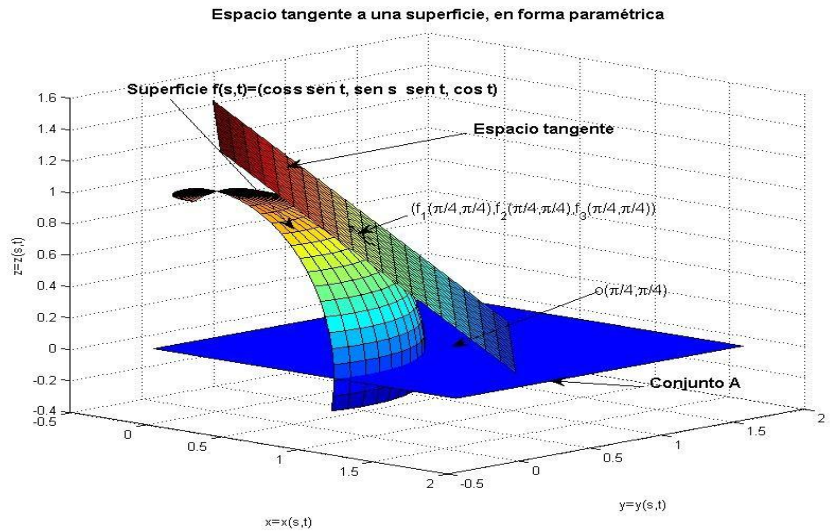


Figura 30. Interpretación geométrica del espacio tangente a una superficie en forma paramétrica. Fuente: el autor.

7. Encapsular los procesos anteriores en el objeto matemático espacio tangente expresado en forma paramétrica a una superficie en un punto.

```
function espaciotangente(f1,f2,f3,a)
s0=a(1);t0=a(2);
```

```
sa=s0-1:0.1:s0+1; % Definir el rango de s en el domino A.
ta=t0-1:0.1:t0+1; % Definir el rango de t en el domino A.
[sc,tc]=meshgrid(sa,ta);% Definir la malla para A.
xc=f1(sc,tc);       % Calcular f_1(s,t), (s,t) en A.
yc=f2(sc,tc);       % Calcular f_2(s,t), (s,t) en A.
zc=f3(sc,tc);       % Calcular f_3(s,t), (s,t) en A.
surf(xc,yc,zc);     % Graficar de la superficie Sf.
%Calcular el espacio tangente.
J=jacR2_R3(f1,f2,f3,a); % Calcular el diferencial del
                        % campo f en a.
s0=a(1);t0=a(2);    % Asignar coordenadas del punto de
                    % tangencia.
f0=[f1(s0,t0) f2(s0,t0) f3(s0,t0)] % Hallar f0=f(t0,s0).
pt=@(s,t) f0'+J*[s-s0;t-t0];  % Definir espacio tangente.
% Definir la componente en x del espacio tangente en
% forma paramétrica.
ptx=@(s,t) f0(1)+J(1,1)*(s-s0)+J(1,2)*(t-t0);
% Definir la componente en y del espacio tangente en
% forma paramétrica.
pty=@(s,t) f0(2)+J(2,1)*(s-s0)+J(2,2)*(t-t0);
% Definir la componente en z del espacio tangente en
% forma paramétrica.
ptz=@(s,t) f0(3)+J(3,1)*(s-s0)+J(3,2)*(t-t0);
hold on
xt=ptx(sc,tc); yt=pty(sc,tc); zt=ptz(sc,tc);
% Hallar la componente en x,y y z del espacio tangente.
surf(xt,yt,zt); % Graficar del espacio tangente.
sA=[s0-1 s0+1 s0+1 s0-1]; % Definir vecindad de s0.
tA=[t0-1 t0-1 t0+1 t0+1]; % Definir vecindad de t0.
hold on;
patch(sA,tA,'b')      % Definir vecindad de p0=(s0,t0).
text(s0,t0,['o(',num2str(s0),',',num2str(t0),')']);
% Definir el punto P0.
cadena=['(',num2str(f0(1)),',',num2str(f0(2)),...
',',num2str(f0(3)),')']
text(f0(1),f0(2),f0(3),cadena)
xlabel('x=x(s,t)');ylabel('y=y(s,t)');zlabel('z=z(s,t)');
title('Espacio tangente a una superficie,...
 paramétricamente')
```

I. Teoremas fundamentales

1. Verificar que si una función es diferenciable en un punto, entonces es continua en el punto, *TDICO*. Verificar que el recíproco del teorema no se cumple. Dada la función

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Definir la función

```
function f=fR2_R(x,y)
if x==0 & y==0
    f=0;
else
    f=(x.*y.^2)./(x.^2+y.^2);
end
```

b. Verificar que para esta función la fórmula de Taylor no se cumple, utilizando los objetos matemáticos derivada direccional, gradiente de un campo escalar y diferencial de un campo escalar,

```
>>taylor=difcampoescalar(@fR2_R,a,u)+norm(u)*...
errorces(@fR2_R,a,u)
% Definir fórmula de Taylor de orden dos.
ans=
    0
>>deltaf=fR2_R(a(1)+u(1),a(2)+u(2))-fR2_R(a(1),a(2))
% Calcular el valor de Delta f.
ans=0.2500
% Calcular la diferencial por la definición.
>>fprintf('Diferencial f en (x0,y0)...
 %10.5f\n',difcampoescalar(@fR2_R,a,u))
% Mostar la salida de los resultados.
Diferencial f por la definición en (x0,y0)    0.00000
>>fprintf('Si f es diferenciable en (x0,y0), por el...
 corolario 1, %10.5f\n',ddR2_R(@fR2_R,a,u))
% Genera la salida
 Si f es diferenciable en (x0,y0), por el corolario 1,
  0.25000
```

c. Interpretar geométricamente que esta función no es diferenciable. Graficar la función y el plano tangente realizando acciones sobre los objetos plano tangente y función definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

```
clc;
a=[0 0];          % Asignar punto de tangencia.
u=[0.5 0.5];      % Asignar vector dirección.
x0=a(1);y0=a(2);
x=x0-0.5:0.01:x0+0.5; % Asignar rango para x.
y=y0-0.5:0.01:y0+0.5; % Asignar rango para y.
[x,y]=meshgrid(x,y);  % Asignar malla del dominio.
```

```
hold on;
mesh(x,y,fR2_R(x,y)); % Graficar la función.
mesh(x,y,ptangente(@fR2_R,a,x,y));% Graficar el plano
                                  % tangente
grid on;
```

d. Interpretar que la gráfica de función en vecindades del punto (0,0), no se puede aproximar por un plano tangente a la función en (0,0), ver la Figura 31.

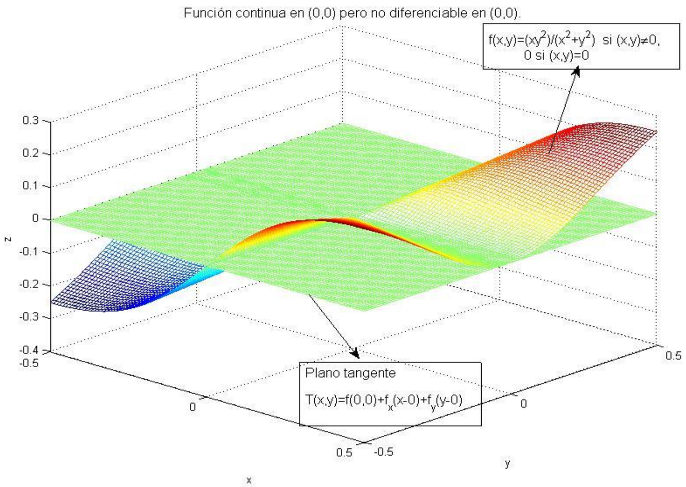


Figura 31. Interpretación geométrica de una función continua pero no diferenciable en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Fuente: el autor.

2. Repetir las acciones anteriores para otros ejemplos y contraejemplos del Teorema 1, TDICO.

3. Interiorizar el proceso anterior para inferir que ser diferenciable implica ser continuo, pero el recíproco no se cumple.

4. Verificar el Teorema 2. Para el contrarrecíproco, si una función es discontinua en un punto, entonces no es diferenciable en este punto. Verificarlo para la siguiente función, que no es diferenciable en (0,0):

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^4}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Definir la función

```
function f=fR2_R(x,y)
if x==0 & y==0
    f=0;
else
    f=(x.*y.^4)./(x.^4+y.^8);
end
```

b. Graficar la función y el plano tangente con acciones sobre los objetos previamente construidos e interpretar la gráfica.

```
function teorema2(varargin)
% Verificar si una función es diferenciable implica la
% existencia de las derivadas direccionales.
clc;
a=[0 0];          % Asignar punto de tangencia.
u=[0.5 0.5];      % Asignar vector dirección.
x0=a(1);y0=a(2);
x=x0-0.5:0.01:x0+0.5; % Asignar rango para x.
y=y0-0.5:0.01:y0+0.5; % Asignar Rango para y.
[x,y]=meshgrid(x,y);  % Definir el dominio de f.
hold on;
C = del2(fR2_R(x,y));
% Graficar la función
mesh(x,y,fR2_R(x,y),'FaceLighting','gouraud',...
'LineWidth',0.3);
mesh(x,y,ptangente(@fR2_R,a,x,y)); % Graficar el plano
                                   % tangente.
grid on;
%Fórmula de Taylor
taylor=difcampoescalar(@fR2_R,a,u)+norm(u)*...
errorces(@fR2_R,a,u)
deltaf=fR2_R(a(1)+u(1),a(2)+u(2))-fR2_R(a(1),a(2))
fprintf('Diferencial f por la definción en (x0,y0)...
 %10.5f\n', difcampoescalar(@fR2_R,a,u))
fprintf('Si f es diferenciable en (x0,y0), por el...
corolario 1,%10.5f\n',ddR2_R(@fR2_R,a,u));
```

Al realizar las anteriores acciones da como resultado,

```
taylor =
   -0.0294
deltaf =
    0.4706
Diferencial f por la defínción en (x0,y0)    0.00000
Si f es diferenciable en (x0,y0), por el corolario 1,
0.50000
```

La gráfica generada es la Figura 32.

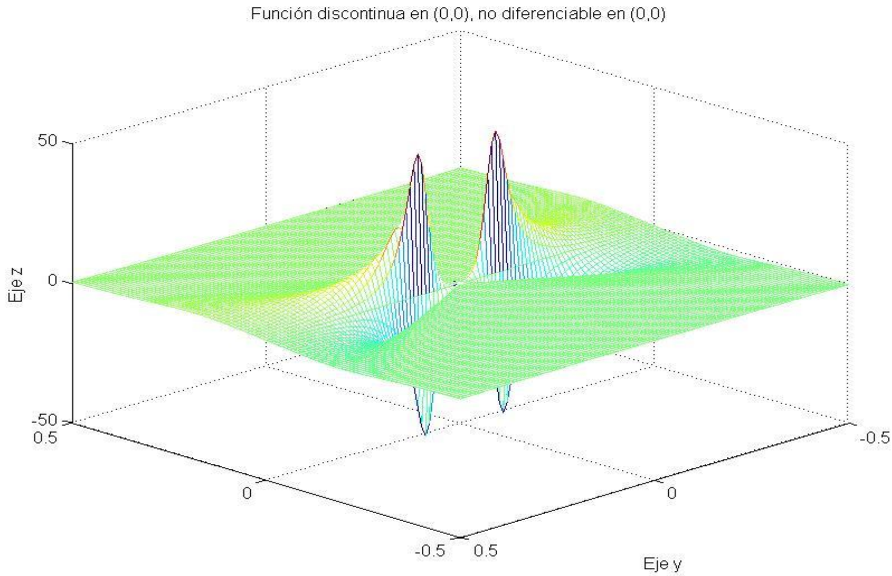


Figura 32. Interpretación geométrica de una función discontinua y no diferenciable en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$. Fuente: el autor.

5. Repetir las acciones anteriores para otros ejemplos y contraejemplos para verificar el Teorema 2.

6. Interiorizar el proceso anterior, para inferir que si una función es diferenciable en un punto, entonces implica la existencia de todas las derivadas direccionales en el punto TDIDD. Sin embargo, el recíproco no es cierto.

7. Verificar el Teorema 3. Para la función,

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

la cual es diferenciable en (0,0) pero sus derivadas parciales no son continuas en este punto.

a. Definir la función.

```
function f=fR2_R(x,y)
if x==0 & y==0
    f=0;
else
```

```
    f=(x.^2+y.^2).*sin(1./sqrt(x.^2+y.^2));
end
```

b. Graficar la función y el plano tangente con acciones sobre los objetos previamente construidos e interpretar la gráfica.

```
function teorema3(varargin)
% Ejemplificar que la existencia y la continuidad de las
% derivadas parciales en un punto implica la existencia
% de la diferencial en el punto.
clc;
a=[0 0];          % Asignar punto de tangencia.
u=[0.5 0.5];      % Asignar vector dirección.
x0=a(1);y0=a(2);
x=x0-0.5:0.01:x0+0.5; % Definir rango para x.
y=y0-0.5:0.01:y0+0.5; % Definir rango para y.
[x,y]=meshgrid(x,y);  % Definir dominio de la función.
hold on;
C = del2(fR2_R(x,y));
mesh(x,y,fR2_R(x,y),'FaceLighting','gouraud',...
'LineWidth',0.3);
% Graficar la función
mesh(x,y,ptangente(@fR2_R,a,x,y)); % Graficar el plano
 grid on;
taylor=difcampoescalar(@fR2_R,a,u)+norm(u)*...
errorces(@fR2_R,a,u);
% Asignar fórmula de Taylor de orden 2.
deltaf=fR2_R(a(1)+u(1),a(2)+u(2))-fR2_R(a(1),a(2))
fprintf('Diferencial f por la definición en (x0,y0)...
%10.5f\n',difcampoescalar(@fR2_R,a,u))
fprintf('Si f es diferenciable en (x0,y0), por el...
 corolario 1,%10.5f\n',ddR2_R(@fR2_R,a,u))
% Salida que genera
Diferencial f por la definición en (x0,y0)    0.00000
Si f es diferenciable en (x0,y0), por el corolario 1,
0.00000
```

Al ejecutar estas acciones se genera la siguiente salida y la Figura 33.

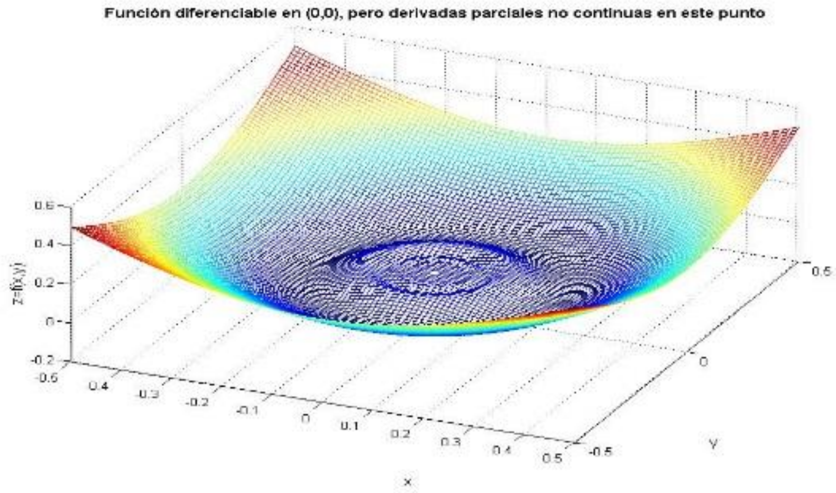


Figura 33. Interpretación geométrica de una función diferenciable en $(\mathbf{0},\mathbf{0})$.

Fuente: el autor.

c. Representar gráficamente las derivadas parciales de la función en el punto (0,0), e interpretar.

8. Repetir las acciones anteriores para otros ejemplos y contraejemplos, para verificar el Teorema 3 TCSDI.

9. Interiorizar el proceso anterior, para inferir que una función puede ser diferenciable en un punto; sin embargo, las derivadas parciales no son continuas en el punto que afirma que el recíproco del Teorema 3 no se cumple.

Diseño del cuestionario

Este apartado tiene como propósito describir cómo se diseñó y validó el cuestionario, que fue el instrumento utilizado para la recolección y el análisis cualitativo de la información con el fin de poderla triangular con otras fuentes y determinar niveles de comprensión.

En la fase de diseño del cuestionario se describe cómo se identificaron y seleccionaron los contenidos, las características de los estudiantes que participaron en la aplicación piloto, la evaluación por los expertos y, en último término, la presentación de la versión modificada, según los informes de los expertos y de las respuestas de los estudiantes a las distintas tareas.

Identificación de los contenidos del cuestionario

Para identificar los contenidos matemáticos que debían formar parte del precuestionario, en primer lugar se seleccionaron y analizaron ocho libros de texto de editoriales de amplia difusión internacional y que son la fuente principal de consulta de los estudiantes.

Los textos hacen una exposición analítica del concepto, de los cuales cuatro hacen énfasis en la parte teórica y los otros cuatro en las aplicaciones de los contenidos de la diferencial.

Una reseña de este análisis se anexó en la sección análisis de la diferencial en los libros de texto, donde se identificaron los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los sistemas de representación que constituyen la diferencial de una función en varias variables.

La comprensión del concepto por los estudiantes fue el objeto de esta investigación, y los elementos matemáticos que lo configuran se concretan en los siguientes, con sus respectivas siglas:

- Función en varias variables **FVV.**
- Derivada direccional **DD.**
- Derivada parcial **DP**.
- Función derivable en un punto **DFVV**.
- Diferencial de una función real de variable real **DIFR**.
- Diferencial de una función vectorial de variable real **DIFVR**.
- Diferencial de un campo escalar **DICE**.

- Diferencial de un campo vectorial **DICV**.
- Diferencial de una función en varias variables **DIFVV**.
- Teoremas fundamentales de diferenciación **TFDI.**

- *Teorema 1*. Diferenciabilidad implica continuidad **TDICO.**
- *Teorema 2*. Diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas direccionales **TDIDD**.
- *Corolario 1*. La diferenciabilidad de un campo escalar implica la existencia de las derivadas parciales **CDIDP**.
- *Teorema 3*. Condición suficiente de diferenciabilidad **TCSDI**.
- *Teorema 4*. Diferenciabilidad de un campo vectorial implica la diferenciabilidad de los m campos escalares que lo conforman **TDICVDICE**.
- *Corolario 2*. Función de clase C^1 implica ser diferenciable **CC1DI**.

Elaboración del precuestionario

Para la elaboración del precuestionario se tomaron como referencia los elementos matemáticos, las relaciones lógicas, los sistemas de representación y la descomposición genética del concepto de diferencial de una función en varias variables, presentados en las secciones anteriores, y a partir de ellos se seleccionó una colección de 30 problemas que comprendieron: el desarrollo curricular identificado en los libros de texto, las actividades planteadas, los problemas descritos en artículos publicados en revistas de investigación.

De la colección de los 30 problemas se escogieron los diez más representativos del concepto y que permitían analizar las relaciones lógicas que los estudiantes debían establecer entre los elementos matemáticos dados en distintos sistemas de representación. Para cada uno de estos problemas se determinó el número máximo de cuestiones que debían contener, y que pudieran ser contestados en el transcurso de una clase universitaria habitual.

El formato de presentación del precuestionario constaba de tres folios. En el primer folio se incluía el nombre del estudiante, la edad y la fecha de realización del precuestionario, luego aparecían las preguntas con los correspondientes ítems. El estudiante, en hojas anexas, respondía el cuestionario.

Sujetos

Contestaron el precuestionario 14 estudiantes (seis mujeres y ocho hombres), con un rango de edad entre 18-22 años, de segundo año (cuarto semestre curricular) del programa de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, UPTC. Todos los estudiantes estaban cursando la asignatura de Cálculo Multivariable en el momento de la realización de la prueba, habían recibido una instrucción previa con las actividades computacionales basadas en la DG, sobre el concepto de diferencial de una función en varias variables.

Validación del cuestionario por expertos

Para la evaluación del precuestionario por expertos se contactaron nueve profesores, asignándole los seudónimos EXn, siete de ellos atendieron la solicitud y reúnen las siguientes características:

Amplia experiencia en el desarrollo de cursos de cálculo multivariable y análisis real. Los expertos *EX1, EX2* con título de doctor en Matemáticas y vinculados con la Universidad Nacional de Colombia; los expertos *EX3, EX4, EX5, EX7* con título de Maestría en Matemáticas, y el experto *EX6* con título de Maestría en Educación Matemática, los cinco están vinculados con la UPTC. Los expertos *EX8* y *EX9*, no atendieron la solicitud.

A los expertos se les envió un documento, que comprendía: carta de solicitud, contexto de la investigación, formulación del problema, objetivos, diseño del cuestionario en una tabla con las columnas objetivos, tareas, ítems, descriptores, procedencia y variables. En el ámbito de esta investigación, para cada tarea los descriptores se entendieron como las palabras clave que la definen o caracterizan; las variables, como un conjunto de elementos matemáticos; y las formas de representación, como verbal, gráfica, algebraica y tabular, que configuran el concepto de DIFVV.

Al finalizar se propuso una encuesta para cada tarea (Tabla 12), a fin de evaluar las representaciones, el grado de dificultad, el grado de relevancia, los elementos matemáticos, las observaciones y sugerencias. A continuación se describen los resultados de este análisis, las observaciones y sugerencias hechas por los expertos.

Ítem	Representación	Grado de dificultad	Grado relevancia	Elementos matemáticos (conceptos), incluir las iniciales en los respectivos campos	
	V-Verbal **G-Gráfico** **A-Algebraico** **T-Tabular**	**1-Nada** **2-Poco** **3-Medio** **4-Alto**	**1-Nada** **2-Poco** **3-Medio** **4-Alto** **NA-no aplica**	Función en varias variables **FVV**. Derivada direccional **DD**. Derivada parcial **DP**. Diferencial de una función real de variable **DIFR**. Diferencial de una función vectorial de variable real **DIFVR.** Diferencial de un campo escalar **DICE**. Diferencial de un campo vectorial **DICV**. Diferencial de una función en varias variables **DIFVV**.	**Teorema 1.** Diferenciabilidad implica continuidad, **T1.** **Teorema 2**. Diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas direccionales, **T2**. **Corolario 1**. La diferenciabilidad de un campo escalar implica la existencia de las derivadas parciales, **CR1**. **Teorema 3**. Condición suficiente de diferenciabilidad, **T3.** **Otros**, enunciar.
1.a.					
1.b.					
1.c.					
Observaciones o sugerencias complementarias de la tarea 1.					

Tabla 12. Encuesta sobre la Tarea 1 del cuestionario.

Tarea 1. Respecto a las representaciones, los expertos consideran que la verbal está presente en un 35 %, la gráfica en 18 %, la algebraica en 41 % y la tabular en 6 %; sobre el grado de dificultad, el 24 % la califica de poca, el 71 % de media y el 5 % de alta; y en cuanto al grado de relevancia, la evalúa de poca el 5 %; de media, el 28 % y de alta, el 67 % (ver Figura 34). Los elementos matemáticos característicos son DIFR, DFVV, TCSDI. Se concluye que esta tarea es considerada por los expertos como de dificultad media y altamente relevante.

Figura 34. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 1.

Tarea 2. Los expertos califican las representaciones así: algebraica 48 %, verbal 31 %, gráfica 21 %. Respecto al grado de dificultad, el 36 % la considera de poca, el 50 % de media y el 14 % de alta. En lo relativo al grado de relevancia, la evalúan: poca, el 7 %; media, el 29 % y alta, el 64 % (ver Figura 35). Los elementos matemáticos característicos son DIFVR, DIFR, DFVV, TCSDI. Se concluye que la tarea se considera de dificultad media y altamente relevante.

Figura 35. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 2.

Tarea 3. Las representaciones características en esta tarea, según la evaluación de los expertos, son: verbal 27 %, gráfica 38 %, algebraica 32 %, tabular 3 %. Respecto al grado de dificultad, el 21 % la considera de media, y el 79 %, de alta. En cuanto al grado de relevancia, el 14 % opina que es de poca relevancia; el 36 %, de media y el 50 %, de alta (ver Figura 36). Los elementos matemáticos característicos son DP, DICE, DFVV. Se concluye que la tarea se considera de dificultad media y altamente relevante.

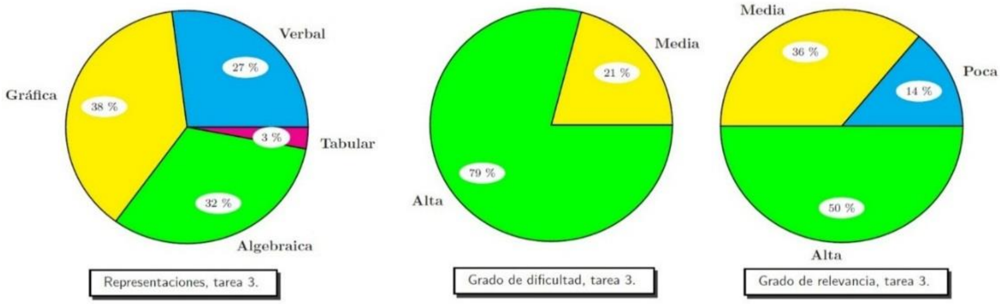


Figura 36. Representaciones, grados de dificultad y relevancia **de la t**area 3.

Tarea 4. Los porcentajes de representación en esta tarea son: verbal 35 %, algebraica 28 %, tabular 37%; en cuanto al grado de dificultad, el 10 % la considera de ninguna dificultad; el 28 %, de poca; el 48 %, de media y el 14%, de alta; y respecto al grado de relevancia, la califica de poca el 10%; de media, el 28 % y de alta, el 62 % (ver Figura 37). Los elementos matemáticos característicos son FVV, DP, DICE. Se concluye que la tarea se estima de dificultad media y altamente relevante.

Figura 37. Representaciones, grados de dificultad y relevancia **de la t**area 4.

Tarea 5. Las representaciones que sobresalen en esta tarea son: verbal 36 %, gráfica 2 % y algebraica 62 %. Respecto al grado de dificultad, el 20 % la califica de poca; el 40 %, de media y el 40 %, de alta. En cuanto al grado de relevancia, la evalúa de poca el 9 %; de media, el 31 % y de alta, el 60 % (Figura 38). Los elementos matemáticos característicos son FVV, DP, DICE, T1, T2, T3. Se concluye que la tarea es considerada de dificultad media y de relevancia alta.

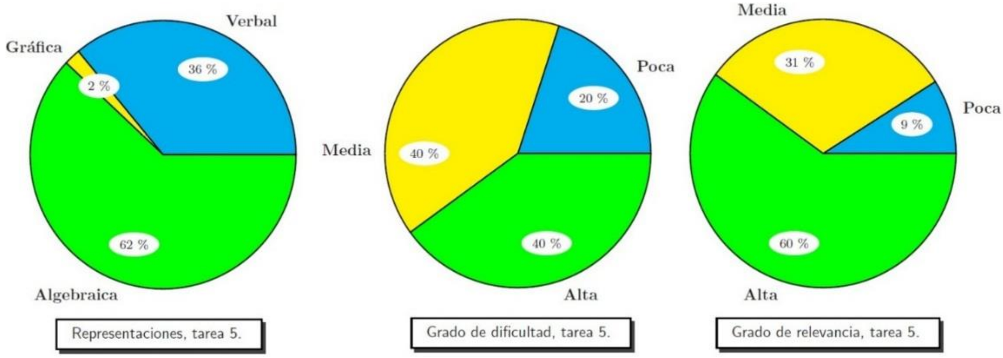


Figura 38. Representaciones, grados de dificultad y relevancia, Tarea 5.

Tarea 6. Las representaciones que predominan en esta tarea son: verbal 38 %, gráfica 2 %y algebraica 60 %. Respecto al grado de dificultad, el 12 % la considera de poca dificultad; el 40 %, de media y el 48 %, de alta. En lo relativo al grado de relevancia, la evalúa de poca el 7 %; de media, el 29 % y de alta, el 64 %, (Figura 39). Los elementos matemáticos característicos son: Teorema 2, DD, FVV, DP, DICE. Se concluye que la tarea es estimada de dificultad media y altamente relevante.

Figura 39. Representaciones, grados de dificultad y relevancia **de la t**area 6.

Tarea 7. Las representaciones que predominan en esta tarea son: verbal 33 %, gráfica 28 % y algebraica 39 %. Respecto al grado de dificultad, el 43 % la considera de poca; el 50 %, media y el 7 %, de alta. En cuanto al grado de relevancia, el 4 % la califica de poca; de media, el 39 % y de alta, el 57 % (ver Figura 40). Los elementos matemáticos característicos son: FVV, DD, DP, DICE, T2, Corolario 1. Se concluye que la tarea es considerada de dificultad media y altamente relevante.

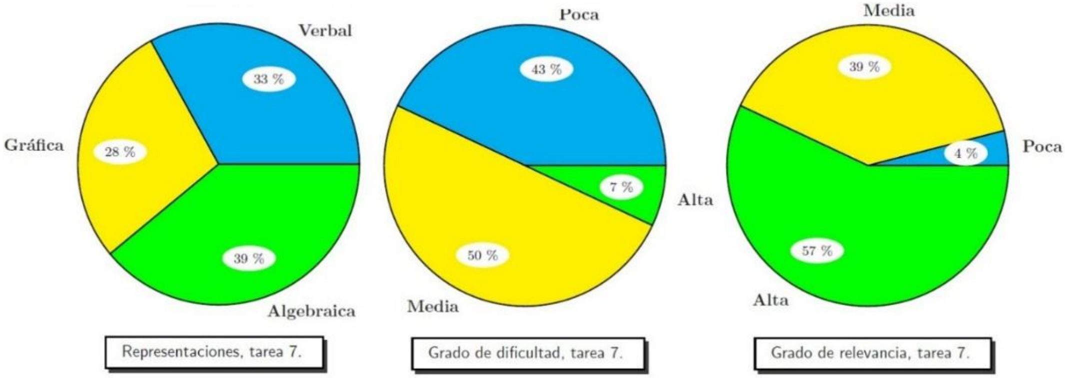


Figura 40. Representaciones, grados de dificultad y relevancia **de la t**area 7.

Tarea 8. Las representaciones que sobresalen en esta tarea son: verbal 31 %, gráfica 31 % y algebraica 38 %. Respecto al grado de dificultad, el 71 % la evalúa de media y el 29 %, de alta. En cuanto al grado de relevancia, el 14 % de los expertos opina que tiene relevancia media y el 86 %, alta (ver Figura 41). Los elementos matemáticos característicos son: DP, DICE, C1, T3, T4. Se concluye que la tarea es calificada de dificultad media y altamente relevante.

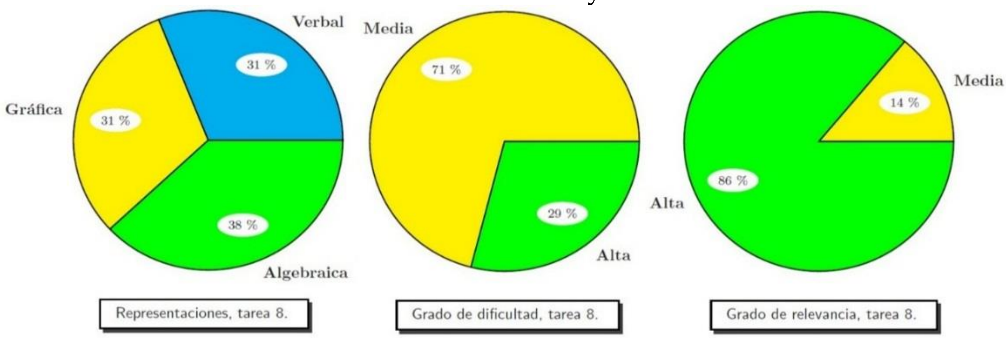


Figura 41. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la **t**area 8.

Tarea 9. Las representaciones que resaltan en esta tarea son: verbal 30 % y algebraica 70 %. Respecto al grado de dificultad, el 14 % la considera de poca dificultad; el 43 %, de media y el 43 %, de alta. En lo relativo al grado de relevancia, el 36 % la evalúa de media, y de alta, el 64 % (ver Figura 42). Los elementos matemáticos característicos son: DICV, T4. Se concluye que la tarea es considerada de dificultad media y el grado de relevancia, alto.

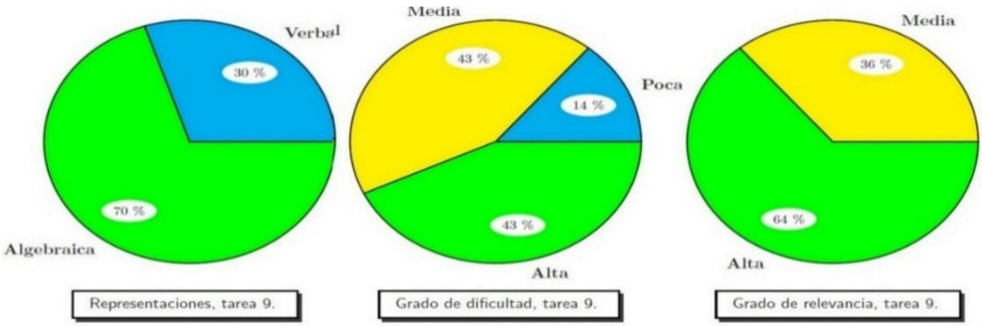


Figura 42. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 9.

Tarea 10. Las representaciones que predominan en esta tarea son: verbal 29 %, gráfica 2 % y algebraica 68 %. Respecto al grado de dificultad, los expertos la consideran: de ninguna dificultad, el 4 %; de poca, el 21 %; de media, el 32 % y de alta, el 43 %. Con relación al grado de relevancia: nada relevante, el 3 %; poco, el 4 %; media, el 32 % y alta, el 61 % (ver Figura 43). Los elementos matemáticos característicos son: DIFVV, DIFR, DIFVR, DICE, DICV, Teorema 4. Se concluye que la tarea es evaluada de dificultad media, y el grado de relevancia, alto.

Figura 43. Representaciones, grados de dificultad y relevancia de la tarea 10.

Cuestionario definitivo

Luego de la revisión de los expertos y del análisis a las respuestas o soluciones de los estudiantes en la prueba piloto, se atendieron las sugerencias y recomendaciones y se procedió a rediseñar cada tarea para consolidar el cuestionario definitivo que se presenta a continuación y que comprende: formulación de los objetivos, descripción de las tareas, los ítems que organizan la tarea, los descriptores, las fuentes bibliográficas de donde proceden los ejercicios y las variables que representan los elementos matemáticos y las relaciones lógicas.

Además, se incluye una solución plausible del cuestionario, según el análisis teórico del concepto, las fuentes de donde se tomaron algunas tareas y las propuestas del investigador. Esta solución es referencia para la recolección y el análisis de la información en secciones posteriores.

Tarea 1

Objetivos. Registrar las relaciones que establece el estudiante entre los elementos que configuran el concepto de diferencial de una función real de valor real, para caracterizar el nivel de comprensión Intra del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, mediante el análisis de las representaciones utilizadas para resolver el problema.

Tareas. 1. Dada la función $f(x) = x^2 + 1$ y $a = 1$.

a. Represente gráficamente el incremento de la función f en a, $\Delta f(a)$; el incremento h de la variable x; la diferencial de f en a evaluada en h, $df(a,h) = f'(a)h$ y el polinomio de Taylor de primer orden,
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|E(a,h).$$
b. Muestre que f es diferenciable en $a = 1$ y determine la diferencial de f en el punto a como una transformación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

c. Si α es un valor que se desea calcular aproximadamente por medio de diferenciales, esta estimación se ha de obtener de la siguiente forma: primero, se elige una función conveniente f y los valores apropiados x y h de manera que, $\alpha = f(x+h)$, luego se aplica la fórmula de aproximación para calcular α, $f(x+h) \approx f(x) +$

$f'(x)h$. Interesa elegir f y x de manera que $f(x)$ se pueda calcular fácilmente. Aproxime utilizando diferenciales $\alpha = \sqrt[3]{1.02}$.

Ítems. 1.a, 1.b, 1.c.

Descriptores. Se presenta una función real de variable real en forma algebraica y un punto.

Se representa en forma verbal y algebraica el incremento, la diferencial y el polinomio de Taylor de primer orden.

Aparece el término transformación lineal que está relacionado con la diferencial.

Se pide interpretar en forma analítica la diferencial de una función real de variable real en un punto.

Se describe un procedimiento para encontrar un valor aproximado de la raíz cúbica de un número utilizando la parte principal del polinomio de Taylor de primer orden.

Procedencia[102]. Adaptación de ejercicios propuestos del *Cálculo* de Apostol, tomo I, sección 2.20, ejercicios 1 y 2, página 167.

Ejercicios propuestos del *Cálculo* de Apóstol, tomo I, sección 2.20, ejercicios 4 y 5, página 168.

Variables. Representación algebraica, gráfica, analítica y verbal del incremento y la diferencial de una función real de variable real.

La diferencial como una transformación lineal, aproximación de la gráfica de la curva por la recta tangente en un punto.

Aplicación de la diferencial para aproximar valores de funciones a partir de unos ya conocidos.

Solución plausible

a. Los incrementos $\Delta f(a)$, h, la diferencial de f en a y la relación entre estos elementos dados por la fórmula del polinomio de Taylor de orden 1 están representados gráficamente en la Figura 44.

[102] Tom M. Apostol, *Calculus Volumen I. Introducción, con vectores y geometría analítica,* Barcelona: Editorial Reverté, 1988, 167-168.

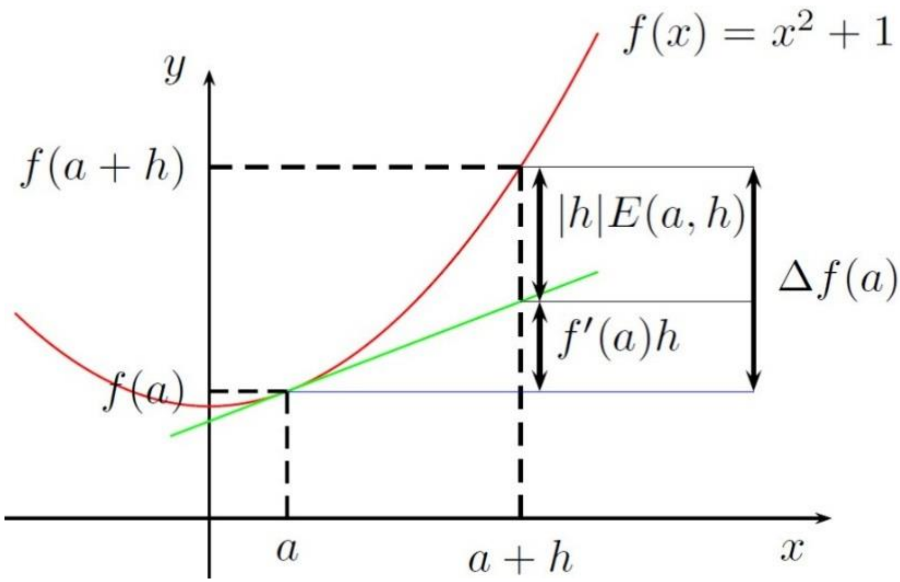


Figura 44. Gráfica de la solución de la Tarea 1.

El incremento de la función f en a, está dado por,

$$\Delta f(a) = f(a+h) - f(a) = f(1+h) - f(1)$$

$$\Delta f(a) = (1+h)^2 + 1 - (1)^2 - 1 = 2h + h^2.$$

La diferencial de f en a es, $df(a,h) = f'(a)h = 2(1)h = 2h.$
El error en la aproximación de la diferencial por el incremento es

$$|h|E(a,h) = \Delta f(a) - df(a,h) = 2h + h^2 - 2h = h^2.$$

b. Directamente se prueba que, f es diferenciable en $x = a$, porque,

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(a,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|E(a,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = 0.$$

O en forma indirecta, para una función real de variable real ser derivable en un punto es equivalente a que la función sea diferenciable en el punto.
La diferencial de f en a esta dada por la transformación

$$T_a = f'(a): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h \mapsto 2ah.$$

c. Sea $f(x) = x^{1/3}, f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, si $x = 1, h = 0.02$, entonces aplicando la parte principal del polinomio de Taylor,

$$\alpha = f(x+h) = \sqrt[3]{1+0.02} \approx f(x) + f'(x)h = \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}} * 0.02$$
$$= 1.0067.$$

Tarea 2

Objetivos. Identificar las relaciones entre los elementos que configuran el concepto de diferencial de una función real y de una función vectorial de valor real, a través del análisis de las formas de representación utilizadas para resolver el problema, a fin de caracterizar el paso del nivel de comprensión Intra al Inter del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables.

Tareas. 2. Sea J un intervalo tal que $J \subseteq \mathbb{R}$ y sea $g: J \to \mathbb{R}$, una función vectorial de variable real que representa una curva $C_g = \{(g_1(t), g_2(t), g_3(t)): t \in J\}$. Si g es diferenciable en un punto interior t_0 de J, entonces el espacio tangente a C_g en el punto, $g(t_0) = (g_1(t_0), g_2(t_0), g_3(t_0)) \in \mathbb{R}^3$ está dado paramétricamente por la aplicación afín, $A_{t_0}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida, como:

$$A_{t_0}(t) = g(t_0) + Dg(t_0)(t - t_0).$$

a. Mostrar que el espacio tangente a C_g en el punto $g(t_0)$ es

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x = g_1(t_0) + g_1'(t_0)(t - t_0), y = g_2(t_0) + g_2'(t_0)(t - t_0),$$
$$z = g_3(t_0) + g_3'(t_0)(t - t_0)\}.$$

Si $g_1'(t_0)$, $g_2'(t_0)$, $g_3'(t_0)$, no son todas cero, este espacio tangente es una recta en $\mathbb{R}^3$ y es llamada la recta tangente.

b. Encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva en $\mathbb{R}^3$, definida como:

$$g: t \to (x, y, z) = \left(t^{\frac{1}{3}}, t^2 + 1, t\right) \text{ en } t_0 = 1.$$

Ítems. 2. 2.a, 2.b.

Descriptores. Presentación de una función vectorial de variable real que describe una curva en $\mathbb{R}^3$.

Se hace una explicación de la diferencial de este tipo de función como una aplicación afín representada en forma algebraica.

Se pide calcular la diferencial de la función en el punto $g(t_0)$, $t_0 \in J$, y su aplicación, para encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto.

La función es continua en J.

Se requiere el concepto de diferencial de una función real de variable real para hallar la diferencial de la función vectorial.

Procedencia. Ejercicio adaptado del texto de Bartle, 1975, sección 39, ejercicio 39 P y 39 Q, página 359.

Variables. Función vectorial de variable real, representación paramétrica de curvas en el espacio, diferencial de una función real de variable real, diferencial de una función vectorial de una variable real.

Solución plausible

a. Como $g(t_0) = \big(g_1(t_0), g_2(t_0), g_3(t_0)\big)$, entonces,

$$Dg(t_0) = D\big(g_1(t_0), g_2(t_0), g_3(t_0)\big) = \big(g_1{}'(t_0), g_2{}'(t_0), g_3{}'(t_0)\big),$$

Luego,

$$A_{t_0} = g(t_0) + Dg(t_0)(t - t_0).$$

Así que,

$$A_{t_0} = \big(g_1(t_0) + g_1'(t_0)(t - t_0), g_2(t_0) + g_2'(t_0)(t - t_0), g_3(t_0) + g_3{}'(t_0)(t - t_0)\big).$$

Entonces, el espacio tangente a la curva C_g en $g(t_0)$, está dado por:

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon A_{t_0} = \big(x(t), y(t), z(t)\big), t \in \mathbb{R}\big\}.$$

b. Según la parte 2.a

$$x = g_1(t_0) + g_1'(t_0)(t - t_0) = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)(1)^{-\frac{2}{3}}(t - 1) = \frac{t}{3} + \frac{2}{3}.$$
$$y = g_2(t_0) + g_2'(t_0)(t - t_0) = 2 + 2(t - 1) = 2t.$$
$$z = g_3(t_0) + g_3'(t_0)(t - t_0) = 1 + 1(t - 1) = t.$$

Luego el espacio tangente a la curva C_g en el punto $g(t_0) = g(1) = (1,2,1)$, es $\left\{\left(\frac{t}{3} + \frac{2}{3}, 2t, t\right), t \in \mathbb{R}\right\}$.

Tarea 3

Objetivos. Determinar las relaciones que establece el estudiante entre los elementos matemáticos que configuran el concepto de derivada parcial de un campo escalar, para caracterizar el nivel Inter del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, a través del análisis de la representación utilizada para resolver la situación problema.

Tareas. **3**. Interpretar geométrica y analíticamente las siguientes situaciones.

a. El plano $x = 1$ corta el paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una parábola. Determine la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto (1,2,5) e ilustre gráficamente.
b. El plano $y = 2$ corta el paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una parábola. Determine la pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto (1,2,5) e ilustre gráficamente.

Ítems. 3., 3.a, 3b.

Descriptores. Las funciones de dos variables están expresadas en forma algebraica por una ecuación y lo que representan se describe en forma verbal.

Se proporciona un punto particular de la superficie.

El estudiante debe hacer una representación gráfica de las expresiones algebraicas y verbales.

El estudiante debe determinar la pendiente de la recta que pertenece al plano y que es tangente al paraboloide en el punto y hacer una representación gráfica.

No aparece el término derivada parcial, sin embargo debe utilizar este concepto para hallar la pendiente de la recta tangente.

Procedencia. Ejercicio adaptado del *Cálculo varias variables* de Thomas, Finney y Weir, 1999, ejemplo 4, página 927.

Variables. Campos escalares, funciones reales de variable vectorial con dos componentes o funciones en dos variables, planos, derivada parcial, pendiente de la recta tangente.

Solución plausible

a. La Figura 45 de la izquierda representa la superficie del paraboloide dado por, $f(x,y) = x^2 + y^2$, el plano $x = 1$.
La Figura 45 de la derecha representa la parábola, $z = 1 + y^2$, en el plano $x = 1$, la tangente a la parábola en el punto (1,2,5). La pendiente de la recta tangente a la parábola, formada por la intersección del plano $x = 1$ con el paraboloide $f(x,y) = x^2 + y^2$, en el punto (1,2,5), está dada por $m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$, que al evaluarla en el punto se obtiene $m_t = \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 4$.

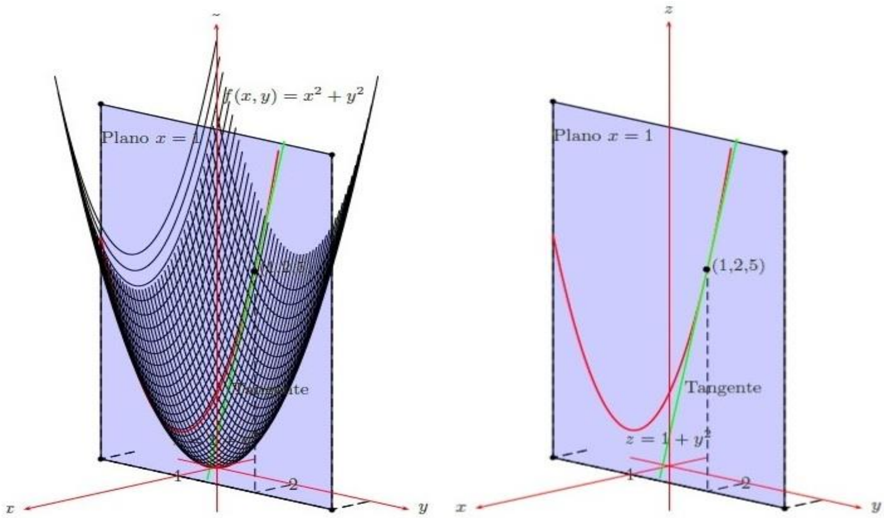


Figura 45. Tangente a la curva de intersección del plano $\boldsymbol{x = 1}$ y la superficie $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ en el punto (1,2,5). Fuente: el autor.

b. La Figura 46 de la izquierda representa la superficie del paraboloide dado por superficie, $f(x,y) = x^2 + y^2$, el plano $y = 2$.
La Figura 46 de la derecha representa la parábola $z = x^2 + 4$ en el plano $y = 2$, la tangente a esta en el punto (1,2,5).
La pendiente de la recta tangente a la parábola en el punto (1,2,5) formada por la intersección del plano $y = 2$, paralelo al plano xz, con la gráfica de $f(x,y) = x^2 + y^2$, está dada por:
$m_t = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, reemplazando el punto se obtiene,
$m_t = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2$.

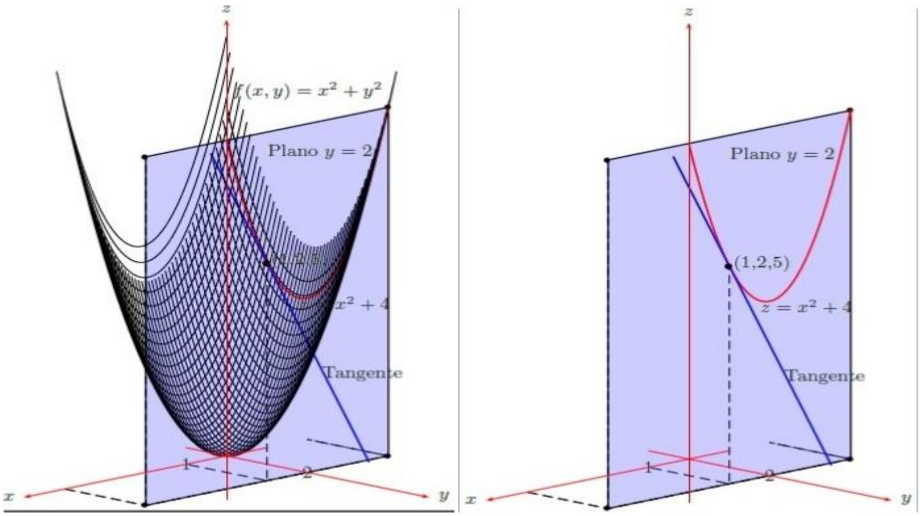


Figura 46. Tangente a la curva de intersección del plano $\boldsymbol{y = 2}$ y la superficie $\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$ en el punto (1,2,5). Fuente: el autor.

Tarea 4

Objetivos. Identificar los elementos matemáticos y las relaciones entre estos que configuran el concepto de DICE, para describir el nivel de comprensión Inter del desarrollo del esquema de la DIFVV, según las representaciones utilizadas en la solución de la situación problema.

Tareas. **4.** La altura h de las olas en mar abierto depende de la velocidad v del viento expresada en nudos y del tiempo t que el viento haya estado soplando a esa velocidad expresado en horas. En la siguiente tabla se dan valores de la función $h = f(v, t)$ en pies.

	Duración en horas							
Velocidad en nudos	v/t	**5**	**10**	**15**	**20**	**30**	**40**	**50**
	10	2	2	2	2	2	2	2
	15	4	4	5	5	5	5	5
	20	5	7	8	8	9	9	9
	30	9	13	16	17	18	19	19
	40	14	21	25	28	31	33	33
	50	19	29	36	40	45	48	50
	60	24	37	47	54	62	67	69

a. Encuentre $h(40{,}15)$, y ¿cuál es su significado?

b. Encuentre el mejor estimado posible, según los valores de la tabla, para las derivadas parciales, $\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15)$, $\frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15)$ e interprete estos valores.

c. A partir de la fórmula de Taylor de primer orden para un campo escalar obtenga una aproximación lineal a la función de altura de las olas, cuando la velocidad v es cerca de 40 nudos y el tiempo t es cerca de 15 horas. Luego estime las alturas de las olas cuando el viento ha estado soplando durante 17 horas a 43 nudos.

Ítems. 4., 4.a, 4.b, 4.c.

Descriptores. Se enuncia una situación problema de fenómenos modelados por una función representada por un registro numérico de valores.

No se tiene una expresión algebraica de la función, se da en forma tabular.

Se pide interpretar el valor de la función en un punto, según la situación.

Se pide aproximar numéricamente la derivada parcial y dar una interpretación a la situación problema.

Se pide aproximar el valor de la función en un punto no registrado en la tabla, aplicando el concepto de diferencial y de derivada parcial que están relacionados en la fórmula de Taylor de primer orden para campos escalares.

Procedencia. Ejercicios adaptados del *Cálculo multivariabe* de James Stewart, páginas 884-885.

Variables. Representación numérica de una función de dos variables, derivada parcial, diferencial.

Solución plausible

a. $h(40{,}15) = 25$, significa que en mar abierto, si la velocidad del viento es de 40 nudos y si ha durado 15 horas soplando a esta velocidad, la altura de las olas es de 25 pies.

b. Aproximamos las derivadas de la función h respecto a las variables v y a t, como el promedio de las diferencias finitas hacia adelante, hacia atrás y centradas:

$$\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15) \approx \frac{h(40+\Delta v, 15) - h(40{,}15)}{\Delta v} = \frac{h(50{,}15) - h(40{,}15)}{10} = 1.1.$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15) \approx \frac{h(40-\Delta v, 15) - h(40{,}15)}{\Delta v} = \frac{h(30{,}15) - h(40{,}15)}{-10} = 0.9.$$

$$\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15) \approx \frac{1.1 + 0.9}{2} = 1.$$

El significado de estos cálculos es que en mar abierto, si la altura de las olas es de 25 pies, generada por la velocidad del viento a 40 nudos y por estar soplando a esta velocidad durante 15 horas, entonces por cada 10 nudos que aumente la velocidad del viento y que dure soplando durante las mismas 15 horas, la altura de las olas ascenderá 1 pie.

$$\frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15) \approx \frac{h(40{,}15+\Delta t) - h(40{,}15)}{\Delta t} = \frac{h(40{,}20) - h(40{,}15)}{5} = 0.6.$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15) \approx \frac{h(40{,}15-\Delta t) - h(40{,}15)}{\Delta t} = \frac{h(40{,}10) - h(40{,}15)}{-5} = 0.8.$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15) \approx \frac{0.6 + 0.8}{2} = 0.7.$$

Los resultados anteriores significan que en mar abierto, si la altura de las olas es de 25 pies, generada por la velocidad del viento a 40 nudos y por estar soplando a esta velocidad durante 15 horas, entonces por cada 5 horas que aumente el tiempo y la velocidad del viento se haya mantenido a 40 nudos, la altura de las olas ascenderá 0.7 pies.

c. Utilizando la parte principal del polinomio de Taylor tenemos, si $a = (40{,}15)$, $a + v = (43{,}17)$, $v = (3{,}2)$, entonces,

$h(a+v) \approx h(a) + T_a(v) = h(a) + \nabla h(a) \cdot v.$

$h(40{,}37) \approx h(40{,}15) + \left(\frac{\partial h}{\partial v}(40{,}15), \frac{\partial h}{\partial t}(40{,}15)\right) \cdot (3{,}2).$

$h(40{,}37) \approx 25 + (1{,}0.7) \cdot (3{,}2) = 29.4.$

Tarea 5

Objetivos. Identificar los elementos matemáticos y las relaciones de continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad que configuran el concepto de diferencial de un campo escalar, para establecer el nivel de comprensión Inter y Trans del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del análisis de las representaciones utilizadas al resolver el problema.

Tareas. **5.** Dada la función, $f(x) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a. Si $z = (x,y) \neq (0,0)$, encuentre: $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z)$; aplicando teoremas de diferenciación.

b. Si $a = (0,0)$, encuentre $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$.

c. Dado el punto $a = (0,0)$, el vector dirección $v = (\alpha, \beta) \neq (0,0)$, el error cometido para aproximar $\Delta f(a)$ por medio de $\nabla f(a) \cdot v$ es $r(a,v) = f(a+v) - f(a) - \nabla f(a) \cdot v$.
Muestre en forma directa que f no es diferenciable en a, analizando el valor $\lim_{\|v\| \to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|}$.

d. Responda falso o verdadero y justifique, ¿f es continua en el punto $a = (0,0)$?

e. Responda falso o verdadero. La existencia de las derivadas parciales de f en un punto, implica que f es diferenciable en este.

Ítems. 5., 5.a, 5.b, 5.c, 5d, 5e.

Descriptores. La función f está definida por secciones mediante una expresión algebraica.

La derivada parcial en puntos donde f es continua puede calcularse aplicando teoremas de diferenciación.

Para calcular las derivadas parciales de f en (0,0) se deben aplicar las definiciones de estas derivadas.

Se debe verificar que: $\lim_{\|v\| \to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|}$ es distinto de 0, para mostrar que f no es diferenciable en (0,0).

Para mostrar que f no es continua en (0,0) se debe verificar que no se cumple la ecuación, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.

La tarea pretende determinar si el estudiante es capaz de establecer que para funciones en varias variables la derivabilidad no implica la continuidad.

Procedencia. Adaptación del libro *Curso análise* de Elon Lima, ejemplo 3, página 122.

Variables. Función en dos varias variables, continuidad de una función en dos variables en un punto, definición de derivada parcial de una funciones de dos variables en un punto, teoremas de diferenciación parcial, definición de diferencial.

Solución plausible

a. Si $z \neq$ (0,0), aplicamos teoremas de diferenciación

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{(x^2+y^2)\dfrac{\partial(xy)}{\partial x} - xy\dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z) = \frac{(x^2+y^2)\dfrac{\partial(xy)}{\partial y} - xy\dfrac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

b. Si $a = (0,0)$, aplicando la definición de derivadas parciales y teniendo en cuenta como está definida la función, tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h} = 0.$$

c. Reemplazando los valores del ítem 5.b, entonces,

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{r(a,v)}{\|v\|} = \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{f(\alpha,\beta) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\alpha - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$= \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}.$$

Si $(\alpha,\beta) \to (0,0)$ por la trayectoria $\alpha = \beta$ en el límite anterior se tiene que, $\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2\alpha}}$, este límite no existe, luego es distinto de 0, por lo tanto la función no es diferenciable en (0,0).

d. Falso. Porque para que la función sea continua en $a = (0,0)$, debe cumplir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0).$$

Sin embargo, como $f(0,0) = 0$, el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, porque si $(x,y) \to (0,0)$ por trayectorias distintas los límites no coinciden; por ejemplo, por la trayectoria $x = y$ este límite es $1/2$, y por la trayectoria $y = 0$ el límite es 0.

e. Falso. Porque la función f de esta tarea es un contraejemplo, en el ítem 5.b se mostró que en el punto $a = (0,0)$ existen las derivadas parciales respecto a x y respecto a y son iguales a 0; sin embargo, en el ítem 5.c se mostró que la función no es diferenciable en a.

Tarea 6

Objetivos. Determinar cuáles elementos matemáticos y relaciones lógicas que configuran los conceptos de derivada direccional, parcial y diferenciabilidad establece el estudiante, para detallar el nivel de comprensión Inter y Trans del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del análisis de las representaciones de la solución del problema.

Tareas. **6.** Dada la función, $g(x) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

a. Muestre que la derivada direccional de g en (0,0) respecto al vector dirección $u = (a,b) \neq (0,0)$ es:

$$g'\{(0,0);(a,b)\} = D_u g(0,0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}.$$

b. Muestre que $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$.

c. Responda falso o verdadero y justifique. La derivada direccional de g en $a = (0,0)$, en dirección $u = (a,b) \neq (0,0)$, es lineal respecto al vector dirección, es decir,

$$g'(a;u+v) = g'(a,u) + g'(a,v).$$

d. Muestre que g no es diferenciable en $a = (0,0)$.

e. Responda falso o verdadero y justifique: para cualquier vector u y para cada $a = (0,0)$, $g'(a;u) = D_u g(0,0) = \nabla g(0,0) \cdot u$.

f. Responda falso o verdadero y justifique. Si una función en varias variables tiene derivada direccional en un punto según cualquier vector dirección, entonces la función es diferenciable en el punto.

Ítems. 6., 6.a., 6.b., 6.c., 6.d., 6.e., 6.f.

Descriptores. La función está expresada en forma algebraica, por secciones.

Para encontrar la derivada direccional se debe utilizar la definición.

Se debe calcular la derivada parcial utilizando su definición.

Se debe utilizar el concepto de transformación lineal y aplicarlo a la derivada direccional.

La función g es continua en $(0,0)$.

Procedencia. Adaptación del libro *Curso análise* de Elon Lima, ejemplo 3, página 122.

Variables. Función en varias variables definida por secciones, derivada direccional, derivada parcial, transformación lineal, límite de una función en varias variables, gradiente de una función en un punto, vector dirección, producto interior en $\mathbb{R}^n$, función diferenciable en un punto.

Solución plausible

a. Por la definición de la función g y de derivada direccional, se tiene que,

$$D_u g(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g\big((0,0) + h(a,b)\big) - g(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^3 ab^2}{(ha)^2 + (hb)^2}}{h} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

b. Aplicando la definición de derivada parcial,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g((0,0)+h(1,0))-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h0^2}{h^2+0^2}}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g((0,0)+h(0,1))-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0h^2}{0^2+h^2}}{h} = 0.$$

c. Es falso, la derivada direccional de g en $a=(0,0)$, no es lineal en el vector dirección, por ejemplo para los vectores direccionales, $u=(1,0)$ y $v=(0,1)$, entonces, $g'(a,u+v)=\frac{1}{2}$, mientras que, $g'(a,u)+g'(a,v)=0$.

d. La función g no es diferenciable en $a=(0,0)$, porque, si $v=(\alpha,\beta)$ y como $\nabla g(0,0)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(0,0),\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)\right)=(0,0)$, $g(0,0)=0$, entonces reemplazando,

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{r(a,v)}{\|v\|} = \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{g(\alpha,\beta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \lim_{(\alpha,\beta)\to(0,0)}\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)^{3/2}}.$$

Este límite no existe, porque si $(\alpha,\beta)\to(0,0)$, por la trayectorias $\alpha=\beta$ y por $\beta=0$, estos límites son distintos, como se muestra respectivamente, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha^3}{(2\alpha^2)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha 0}{(\alpha^2+0)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}=0$.

e. Es falso que, $D_u g(0,0)=\nabla g(0,0)\cdot u$. Porque en 6.a, si $u\neq(0,0)$, $D_u g(0,0)=\frac{ab^2}{a^2+b^2}\neq 0$ y por la parte 6.b, $\nabla g(0,0)\cdot u=0$.

f. Es falsa la proposición, la función g es un contraejemplo, en los ítems 6.a. y 6.b. g tiene derivada direccional en (0,0) en cualquier dirección y en el ítem 6.d se mostró que no es diferenciable.

Tarea 7

Objetivos. Identificar las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que configuran el concepto diferencial de un campo escalar que logra establecer el estudiante, para caracterizar el nivel Inter del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del análisis de las representaciones de las soluciones de la situación problema.

Tareas. 7. La ecuación de una superficie de una montaña es $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$, donde la distancia se mide en metros, el eje x apunta hacia el este y el eje y hacia el norte. Un montañista se encuentra en el punto $(-10,5,850)$.

a. ¿Cuál es la dirección de la ladera con más pendiente a partir de la posición en que se encuentra el montañista?
b. Si el montañista se desplaza en dirección este, ¿desciende o asciende y según, a qué tasa?
c. Si el montañista se desplaza en dirección suroeste ¿desciende o asciende y según, a qué tasa?
d. ¿En qué dirección recorre una trayectoria a nivel?

Ítems. 7., 7.a., 7.b., 7.c., 7.d.

Descriptores. Se da la expresión algebraica de f cuya superficie representa una montaña.

Se da un punto particular de la superficie.

El ejercicio induce a calcular el gradiente de la función en el punto y dar una interpretación geométrica de este concepto.

Se debe calcular la derivada direccional en el punto $(-10,5)$ según los vectores $(1,0)$, $(-1,-1)$ que representan las direcciones de desplazamiento y además cuándo esta derivada es 0.

Procedencia. Adaptación del libro de Louis Leithold, 1985, del ejercicio, 38, sección 12.6, página 984.

Variables. Derivada direccional, gradiente de una función en un punto, vector dirección, producto punto, curva de nivel.

Solución plausible

a. La dirección de la ladera con más pendiente, a partir de la posición del montañista, es la que indica el vector gradiente de la superficie de la montaña evaluado en el punto.

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (-6x, -4y),$$
$$\nabla f(-10{,}5) = (60, -20).$$

Normalizando este vector,

$$u = \frac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|} = \frac{(60,-20)}{\sqrt{60^2 + (-20)^2}} = \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, \frac{-\sqrt{10}}{10}\right).$$

b. Al desplazarse el montañista en dirección este, el vector $u = (1{,}0)$, indica el desplazamiento, y la tasa a que se desplaza está dada por la derivada direccional de la función f en la dirección de u evaluada en el punto en que se encuentra, que es igual a la derivada parcial de f respecto a x, $\frac{\partial f}{\partial x}(-10{,}5) = 60$.

Significa que por cada unidad que el montañista se desplace en la dirección este, asciende 60 unidades.

c. Si el montañista se desplaza al suroeste, el vector unitario que indica esta dirección es $u = (-1,-1)$ y la tasa a que se desplaza está dada por la derivada direccional de la función f en la dirección de u evaluada en el punto en que se encuentra. Como la función es diferenciable, se puede aplicar la siguiente fórmula,

$$D_u f(-10{,}5) = \nabla f(-10{,}5) \cdot u = (60,-20) \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -20\sqrt{2}.$$

Significa que el montañista, por cada unidad que se desplace en la dirección suroeste, desciende $20\sqrt{2}$ unidades.

d. Para calcular la dirección, dada por el vector unitario u, en que el montañista recorre una trayectoria de nivel, significa que la derivada direccional evaluada en el punto es 0, es decir:

$$\begin{aligned} D_u f(-10{,}5) &= \nabla f(-10{,}5) \cdot (v_1, v_2) = (60,-20) \cdot (v_1, v_2) \\ &= 60v_1 - 20v_2 = 0. \end{aligned}$$

El vector está dado por la forma, $v = (v_1, 3v_1)$ que al normalizar este vector se obtiene, $u = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$.

Tarea 8

Objetivos. Identificar cuáles elementos matemáticos y relaciones entre estos del concepto de diferencial de un campo escalar logra establecer el estudiante, para caracterizar el nivel Inter del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del estudio de las representaciones de la solución del problema.

Tareas. **8**. Dado el campo escalar diferenciable $f(x,y) = x^2 + y^2$, el punto $a = (x_0, y_0)$ y el vector $v = (\Delta x, \Delta y)$. Demuestre que f es diferenciable en a y determine cuál es la diferencial del campo escalar f en a y dé una interpretación geométrica.

Ítems. 8.

Descriptores. La función es de dos variables y se representa en forma algebraica.

Se da un punto arbitrario y un vector arbitrario.

Se debe expresar la definición de campo escalar diferenciable en un punto y hacer una representación gráfica de esta.

Procedencia. Adaptación del investigador al ejemplo 4, sección 1.3 página 927 del texto del *Cálculo varias variables* de Thomas, Finney y Weir, 1999.

Variables. Campo escalar de dos variables, diferencial de un campo escalar en un punto arbitrario.

Solución plausible. Para demostrar que f es diferenciable, calculamos:

$r(a,v) = \Delta f(a) - \nabla f(a) \cdot v = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \nabla f(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)$.

$r(a,v) = {x_0}^2$+$2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$+${y_0}^2$+$2y_0\Delta y + (\Delta y)^2$-${x_0}^2$-${y_0}^2$-$2x_0\Delta x - 2x_0\Delta y$

$r(a,v) = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$

Evaluando, $\lim\limits_{\|v\| \to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|} = \lim\limits_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$, entonces f es diferenciable en (0,0).

La diferencial de f está dada por la transformación lineal,

$$T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$v \mapsto T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v.$$

Si $a = (x_0, y_0)$ y $v = (\Delta x, \Delta y)$, entonces,

$$T_a(v) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \cdot (\Delta x, \Delta y)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y.$$

Geométricamente significa que en vecindades de (x_0, y_0) la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ se puede aproximar por el plano tangente dado por,

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0).$$

Tarea 9

Objetivos. Identificar cuáles relaciones entre los elementos matemáticos que configuran el concepto de diferencial de un campo vectorial logra establecer el estudiante, para caracterizar el nivel de comprensión Trans del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, por medio del estudio de las representaciones de la solución del problema.

Tareas. **9.** Dado el campo vectorial,

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 - yz + z^2, xyz).$$

a. Si $a = (0,1,2)$ y $u = (0,2,3)$, encontrar la derivada direccional de f en el punto a en dirección del vector u.
b. Muestre que f es diferenciable en a.

Ítems. 9. 9.a., 9.b.

Descriptores. Representación del campo vectorial, compuesto por tres campos escalares expresados en forma algebraica.

Se pide calcular la diferencial del campo vectorial en un punto particular del dominio y según el vector dirección específico de $\mathbb{R}^3$.

Se debe establecer la relación entre la diferencial del campo vectorial en un punto y la derivada direccional.

Se pide mostrar que el campo es diferenciable utilizando la definición o teoremas que establecen relaciones entre diferenciabilidad y derivabilidad.

Procedencia. Adaptación del ejercicio 39.L, de la sección 39 página 358 del texto *The Elements of Real Analysis* de Robert Bartle, 1979.

Variables. Campo vectorial, derivada direccional de un campo vectorial, diferencial de un campo vectorial en un punto en la dirección de un vector, diferenciabilidad implica derivabilidad.

Solución plausible

a. La derivada direccional del campo vectorial f en el punto $a=(x,y,z)$ en dirección del vector $u=(u_1,u_2,u_3)$ está dada por:

$$D_u f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(a) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$D_u f(a) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & -z & -y+2z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

así,

$$D_{(0,2,3)} f(0,1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b. f es diferenciable en a porque cada uno de los campos escalares componentes de f: $f_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $f_2(x,y,z)=x^2-yz+z^2$, $f_3=(x,y,z)=xyz$, son polinomios en las variables, x,y,z; los cuales son diferenciales en cada punto de su dominio.

Otra forma equivalente para mostrar que f es diferenciable en a es, como cada una de las derivadas parciales del campo vectorial, $f_{i,j}(x)=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i=1,2,3$; $j=1,2,3$ son continuas en $x=a$, entonces f es diferenciable en a.

Tarea 10

Objetivos. Registrar procesos de generalización y síntesis que realizan los estudiantes para caracterizar el nivel de comprensión Trans del desarrollo del esquema de diferencial de una función en varias variables, por medio del análisis de las formas de representar y argumentar las soluciones a la situación problema.

Tareas. **10.** Sean f una función diferenciable definida sobre un subconjunto A abierto de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y a un punto de A,

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $x \mapsto y = f(x)$.

Determine la expresión de la diferencial $Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tal que $u \mapsto v = Df(a) \cdot u = f'(a; u)$ para los siguientes casos:

a. $n = 1, m = 1$. **b**. $n = 1, m > 1$. **c**. $n > 1, m = 1$. **d**. $n > 1, m > 1$.

Ítems. 10., 10.a., 10.b., 10.c., 10.d.

Descriptores. No se da una expresión o fórmula de la función.

Se da una representación algebraica de una función arbitraria diferenciable y de la diferencial de la función como una transformación lineal.

Se da un dominio arbitrario de la función en $\mathbb{R}^n$ y un punto arbitrario del dominio.

Se dan valores particulares de la dimensión del dominio y codominio de la función.

Se pide la expresión que representa la diferencial de una función real de variable real, función vectorial de variable real, campos escalares y campos vectoriales.

Procedencia. Adaptación del ejemplo 39.8 sección 39 del texto *The Elements of Real Analysis* de Robert Bartle, 1979.

Variables. Diferencial de una función en varias variables: función real de variable real, función vectorial de variable real, campos escalares y campos vectoriales.

Solución plausible

a. Si $n = 1, m = 1, Df(a)(u) = f'(a)u = \frac{df}{dx}(a)u$.

b. Si $n = 1, m > 1$, $Df(a)(u) = \left(f_1'(a), \cdots, f_m'(a)\right)u = (f_1'(a)u, \cdots, f_m'(a)u)$.

c. Si $n > 1, m = 1$, entonces,

$$Df(a)(u) = \nabla f(a) \cdot u = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \cdot (u_1, \cdots, u_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) u_k.$$

d. Si $n > 1, m > 1,$ entonces,

$$Df(a)(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Teniendo como referencia la descomposición genética preliminar, la solución plausible del cuestionario, las soluciones individuales de cada tarea presentada por los estudiantes al resolver el cuestionario, se llevó a cabo una primera etapa de análisis de esta información, que dio como resultado la codificación de las diferentes categorías para cada tarea y de estas categorías se estableció cuáles mostraron los estudiantes (Tabla 13).

La segunda etapa de análisis consistió en determinar las relaciones entre los elementos matemáticos en la solución plausible del cuestionario, según la **DG** preliminar y las categorías identificadas en la fase anterior. Este análisis se realizó con el *software* Atlas.ti7, según la codificación y el significado de cada categoría y la identificación de estas en la solución del cuestionario. De este análisis se generó una red semántica para cada tarea (Figura 47 a Figura 56) y una red semántica general (Figura 57).

En la tercera etapa se analizaron las entrevistas semiestructuradas que se hicieron a los estudiantes y se elaboró un resumen general de las categorías mostradas por los estudiantes en las entrevistas (Tabla. 14). Posteriormente se trianguló la información entre la DG preliminar, las categorías según la red semántica de la solución plausible de cada tarea, la solución del cuestionario por cada estudiante y el análisis de la entrevista.

La cuarta etapa del análisis consistió en agrupar las categorías y establecer niveles y subniveles de comprensión del desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables desde el punto de vista de la teoría APOE, a través de la descripción de las estructuras mentales y los mecanismos mentales utilizados para su construcción, a fin de generar los resultados de los niveles de comprensión que demostraron los estudiantes. Esta etapa permitió validar y refinar la DG preliminar.

Primera etapa: identificar categorías del cuestionario definitivo

En esta sección se exponen las categorías y subcategorías que emergieron del análisis de las soluciones presentadas por los estudiantes. El significado de las subcategorías se estableció de acuerdo con los elementos matemáticos, el objetivo, los descriptores, las variables y las respuestas dadas por los estudiantes, según el cuestionario definitivo. Esto permite describir las relaciones entre los elementos matemáticos para caracterizar los niveles de comprensión de la DIFVV.

En la Tabla 13, para cada tarea se anotan, en la primera columna, los ítems, en la segunda, la categoría, los códigos y el significado de la subcategoría. Los códigos son de la forma *Tmn*, donde *T* es tarea, m, el ítem y n el consecutivo. Por ejemplo, el código *T1ac3*, corresponde al ítem *1.a.* de la Tarea *1,* Categoría *3*.

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
1.a.	*T1ac1*. Representar la gráfica de una función f y la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$. *T1ac2*. Identificar en la gráfica el incremento de la variable independiente h, el incremento de la variable dependiente, $\Delta f(a)$ y la diferencial de f en a, $df(a, h)$. *T1ac3*. Polinomio de Taylor, relacionar en la gráfica y en forma algebraica los elementos: $\Delta f(a)$, $df(a, h)$, y $\vert h\vert E(a, h)$.
1.b.	*T1bc1*. Demostrar en forma directa que f es diferenciable en el punto a. *T1bc2*. Demostrar en forma indirecta que f es diferenciable en un punto a. *T1bc3*. Diferencial de f en el punto a como la transformación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, $T_a(h) = f'(a)h$.

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
1.c.	*T1cc1*. Aplicación. Resuelva una situación problema aplicando la *DIFR*, identificando y relacionando los elementos matemáticos que la configuran en la parte principal del polinomio de Taylor: $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$.
2.a.	*T2ac1*. Representación algebraica de la diferencial de la función g, vectorial en $\mathbb{R}^3$ de variable real, en el punto t_0 como: $Dg(t_0) = \big(g_1{}'(t_0), g_2{}'(t_0), g_3{}'(t_0)\big)$, si cada una de las derivadas de las funciones reales de variable real, $g_1{}'(t_0)$, $g_2{}'(t_0)$, $g_3{}'(t_0)$, existen y no son todas cero. *T2ac2*. Espacio tangente a C_g, $$g(t_0) = \big(g_1{}'(t_0), g_2{}'(t_0), g_3{}'(t_0)\big) \in \mathbb{R}^3.$$
2.b.	*T2bc1*. Representación algebraica del espacio tangente, C_g, a una función vectorial, (definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$, en $\mathbb{R}^3$, en el punto $g(t_0)$) calculando la diferencial de g en el punto y realizando las operaciones correspondientes.
3.a.	*T3ac1*. Representación gráfica e interpretación geométrica de la derivada parcial de un campo escalar respecto a la variable x, definido de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.
3.b.	*T3bc1*. Representación gráfica e interpretación geométrica de la derivada parcial de un campo escalar respecto a la variable y, definido de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.
4.a.	*T4ac1*. Evaluación e interpretación de un campo escalar de dos variables independientes, representado en forma tabular con datos provenientes de un fenómeno físico.
4.b.	*T4bc1*. Derivada parcial del campo escalar $h = h(v,t)$, respecto a las variables v y t, en un punto arbitrario (v_0, t_0) e

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
	interpretación como el límite de la razón media al variar solamente una variable y la otra permanecer constante. *T4bc2.* Derivada parcial de un campo escalar de dos variables representado en forma tabular como un valor aproximado de la razón media al variar solamente una variable y la otra permanecer constante.
4.c.	*T4cc1.* Aplicación de la diferencial de un campo escalar para aproximar el valor de este campo, $h = h(v,t)$, en un punto no registrado en la tabla de valores, utilizando la parte principal del polinomio de Taylor de orden 1, e interpretación de este resultado según la situación planteada.
5.a.	*T5ac1.* Teoremas de diferenciación para calcular derivadas parciales del campo escalar f en puntos donde este es continuo.
5.b.	*T5bc1.* Derivada parcial del campo escalar f respecto a cada variable en un punto como el límite del cociente incremental, $$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_i)-f(a)}{h}.$$
5.c.	*T5cc1.* Condición directa para establecer diferenciabilidad de una función f en un punto a, verificando que se cumpla, $$\lim_{\lVert v\rVert\to 0}\frac{r(a,v)}{\lVert v\rVert} = \frac{f(a+v)-f(a)-\nabla f(a)\cdot v}{\lVert v\rVert} = 0.$$
5.d.	*T5dc1.* Continuidad de un campo escalar en un punto, analizando que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.
5.e.	*T5ec1.* Justificar que un campo escalar no es diferenciable en un punto, argumentando alguna de las siguientes razones: No cumplir las hipótesis del teorema de la condición suficiente de diferenciabilidad: la existencia de las derivadas

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
	parciales en un entorno del punto y la continuidad de estas en el punto. Funciones que aunque poseen derivadas parciales en un punto, no son continuas en el punto, por lo tanto no son diferenciables. Ilustrar con el contraejemplo que se analizó en esta tarea, el cual posee derivadas parciales en el punto pero no es continua en él y, por tanto, no diferenciable. Función de varias variables que posee derivada direccional en un punto según cualquier vector dirección y sin embargo no es diferenciable en el punto.
6.a.	*T6ac1.* Derivada direccional de la función g en el punto (0,0) en dirección del vector $u=(a,b)$ como el límite del cociente incremental, $$g'\big((0,0),(a,b)\big)=\lim_{h\to 0}\frac{g\big((0,0)+h(a,b)\big)-g(0,0)}{h}$$
6.b.	*T6bc1.* Derivada parcial como un caso particular de derivada direccional de una función en un punto, cuando el vector dirección es uno de la base canónica de, $\mathbb{R}^2$ $$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)= g'\big((0,0),(1,0)\big) \text{ y } \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)= g'\big((0,0),(0,1)\big).$$
6.c.	*T6cc1.* No linealidad de la derivada direccional de g en a respecto al vector dirección mostrando que, $g'(a;u+v)\neq g'(a;u)+g'(a;v)$. Este resultado se tiene porque g no es diferenciable en (0,0).
6.d.	*T6dc1.* Condición directa para establecer la diferenciabilidad de la función en un punto, $$\lim_{\Vert v\Vert\to 0}\frac{r(a,v)}{\Vert v\Vert}=\lim_{\Vert v\Vert\to 0}\frac{\Delta f(a)-\nabla f(a)\cdot v}{\Vert v\Vert}=0.$$
6.e.	*T6ec1.* Verificar que el recíproco del siguiente teorema no se cumple: si una función f es diferenciable en un punto a,

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
	entonces la derivada direccional de f en a en dirección del vector u es igual al producto punto del vector gradiente de f evaluado en a con el vector dirección u.
6.f.	*T6ec1.* Caracterización de funciones de varias variables que la derivabilidad en un punto no implica diferenciabilidad en este. El criterio directo para que f sea diferenciable en a es que debe existir una transformación lineal T_a tal que $f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|r(a,v)$ y además que $\lim_{\|v\|\to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|} = 0$.
7.a.	*T7ac1.* Cálculo e interpretación del vector gradiente de un campo escalar en un punto.
7.b.	*T7bc1.* Interpretación de la derivada parcial de una función $z = f(x,y)$ respecto a una variable en un punto en una situación problema.
7.c.	*T7cc1.* Cálculo e interpretación de la derivada direccional de una función en un punto respecto a un vector dirección, en una situación problema.
7.d.	*T7dc1.* Significado del valor nulo de la derivada direccional y su aplicación para determinar direcciones para recorrer trayectoria de nivel, según la situación problema.
8.a.	*T8ac1.* Condición directa para establecer la diferenciabilidad de un campo escalar en un punto, calculando el residuo $r(a,v) = \Delta f(a) - \nabla f(a) \cdot v$ y verificando que $\lim_{\|v\|\to 0} \frac{r(a,v)}{\|v\|} = 0$.
8.b.	*T8bc1.* La diferencial de un campo escalar f en el punto a como la existencia de la transformación lineal definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ por la expresión $T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v$.

Ítem	*Categoría y subcategorías que emergen de las tareas*
8.c.	*T8cc1.* Existencia del plano tangente a la gráfica de un campo escalar en un punto como la interpretación geométrica de la diferencial de f en el punto a y como la posibilidad de linealizar f en puntos cercanos de a.
9.a.	*T9ac1.* Cálculo de la diferencial de un campo vectorial f en un punto a, como la derivada direccional de f en a en dirección del vector u que es igual al producto de la matriz jacobiana de f en el punto a, $Jf(a)$, con el vector u. Algebraicamente se representa como, $$D_u f(a) = f'(a;u) = Jf(a) \cdot u = \left.\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}\right]_a \cdot u.$$
9.b.	*T9bc1.* Condición directa para establecer la diferenciabilidad de un campo vectorial en un punto, $$\lim_{\|u\| \to 0} \frac{r(a,u)}{\|u\|} = \lim_{\|u\| \to 0} \frac{\Delta f(a) - D_u f(a) \cdot u}{\|u\|} = \lim_{\|u\| \to 0} \frac{\Delta f(a) - Jf(a) \cdot u}{\|u\|} = 0.$$
10.	*T10ac1.* La diferencial de una función f en varias variables, definida en un abierto como la transformación lineal entre los espacios donde se define la función, para los siguientes casos: función real de variable real, función vectorial de variable real, campo escalar y campo vectorial.

Tabla 13. Categoría y subcategorías que emergen de las tareas. Fuente: el autor.

En la Tabla. **14** se presenta el resumen de las subcategorías mostradas por el grupo de estudiantes, luego del análisis individual de cada cuestionario. En esta tabla, en la primera columna se encuentra el código de la categoría, y en las siguientes columnas, los estudiantes que se han identificado con el seudónimo *En*, donde *n* va desde *1* hasta *9* y en cada celda de la tabla aparece la letra *S*, para indicar que el estudiante mostró la categoría correspondiente, o la letra *N* para el caso contrario.

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T1ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*
T1ac2	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T1ac3	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	*S*
T1bc1	*N*	*N*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*
T1bc2	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T1bc3	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T1cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*S*	*S*
T2ac1	*S*	*N*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*
T2ac2	*S*	*N*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T2bc1	*S*	*N*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T3ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T3bc2	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T4ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*
T4bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*
T4bc2	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T4cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*
T5ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*
T5bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T5cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*
T5dc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	*S*
T5ec1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T6ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T6bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*S*	*N*	*N*
T6cc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T6dc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T6ec1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T6fc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T7ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T7bc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*
T7cc1	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*
T7dc1	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T8ac1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T8bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T8cc1	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T9ac1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*S*
T9bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*
T10ac1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*

Tabla. 14 Categorías mostradas por los estudiantes al resolver las tareas del cuestionario

Segunda etapa: relaciones entre los elementos matemáticos

A continuación se presenta el resultado del análisis de las relaciones entre los objetos matemáticos que configuran los conceptos en cada tarea de la solución plausible del cuestionario según la *DG* y las categorías identificadas en la sección anterior y se representan en forma gráfica a través de redes semánticas.

Para la Tarea 1, la red semántica se expone en la Figura 47, donde se puede apreciar que la categoría *T1ac1* establece relaciones entre el objeto matemático función real de variable real, *FR*, con la diferencial de una función real de variable real *DIFR,* a través de pendiente de la recta tangente a la función en un punto. Las demás categorías de esta tarea muestran la relación directa entre otros elementos con el objeto *DIFR*. Para cada categoría se encuentran referenciados los segmentos de texto de la solución plausible del cuestionario.

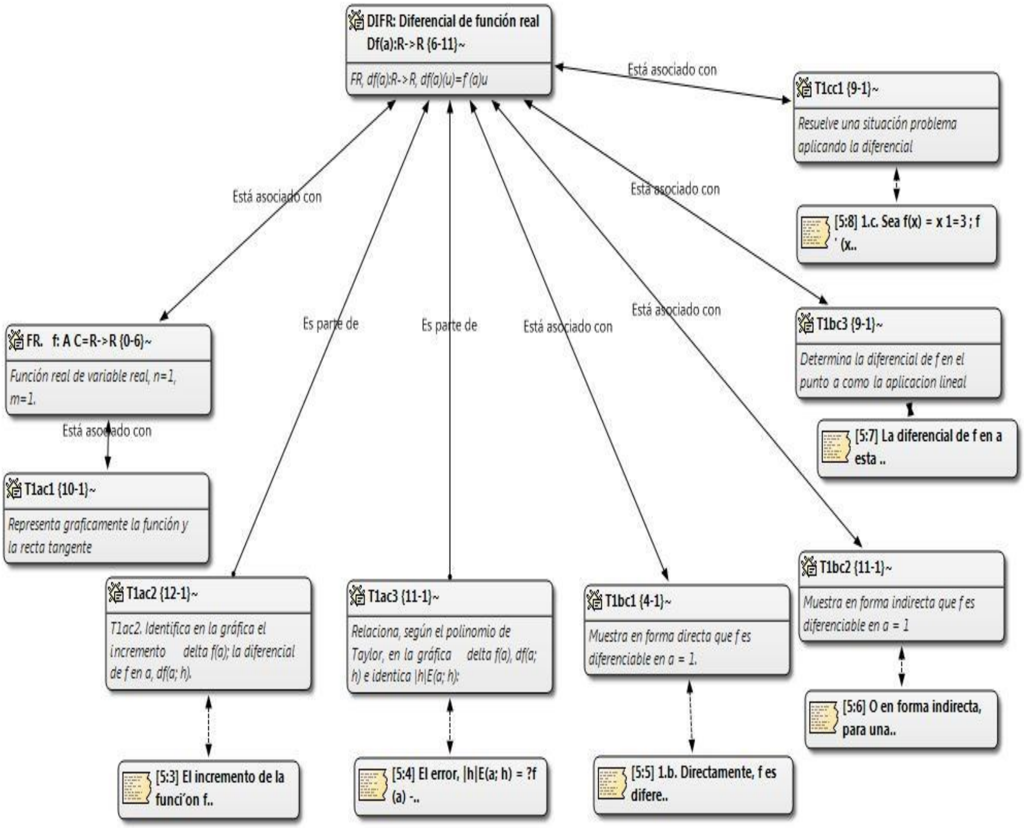


Figura 47. Red semántica de la Tarea 1. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Para la Tarea 2, la red semántica de la Figura 48 muestra las relaciones que establecen las categorías de esta tarea entre los siguientes elementos: función real *FR*, función vectorial de variable real *FVR*; cada *FVR* está compuesta por m funciones reales *FR*; la diferencial de una función vectorial de variable real *DIFVR* se relaciona con la *DIFR*, porque la transformación lineal *DIFVR* aplicada a una real está compuesta por m *DIFR*.

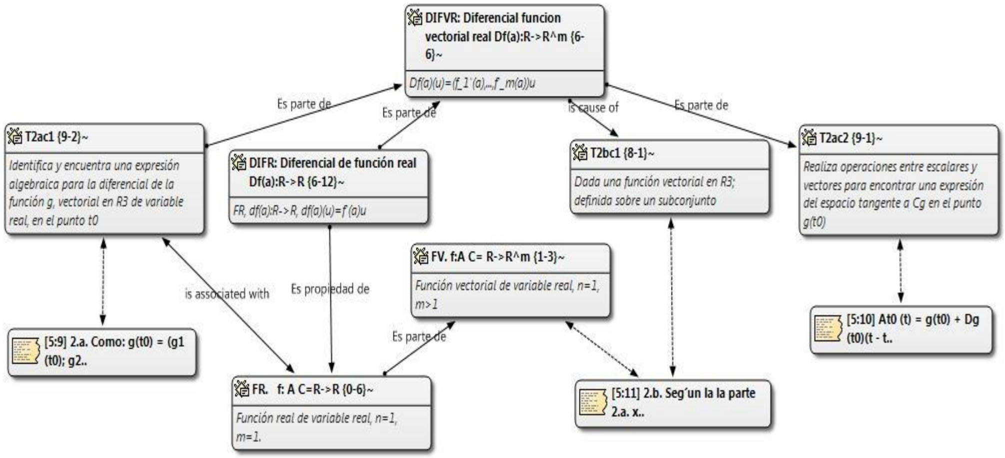


Figura 48· Red semántica de la Tarea 2. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor·

Para la Tarea 3, la red semántica de la Figura 49 muestra relaciones que establecen las categorías entre los elementos derivada parcial *DP*; cuando estos objetos existen y son continuos en un punto forman parte de la diferencial de un campo escalar *DICE*, la cual es una propiedad de algunos campos escalares *CE*.

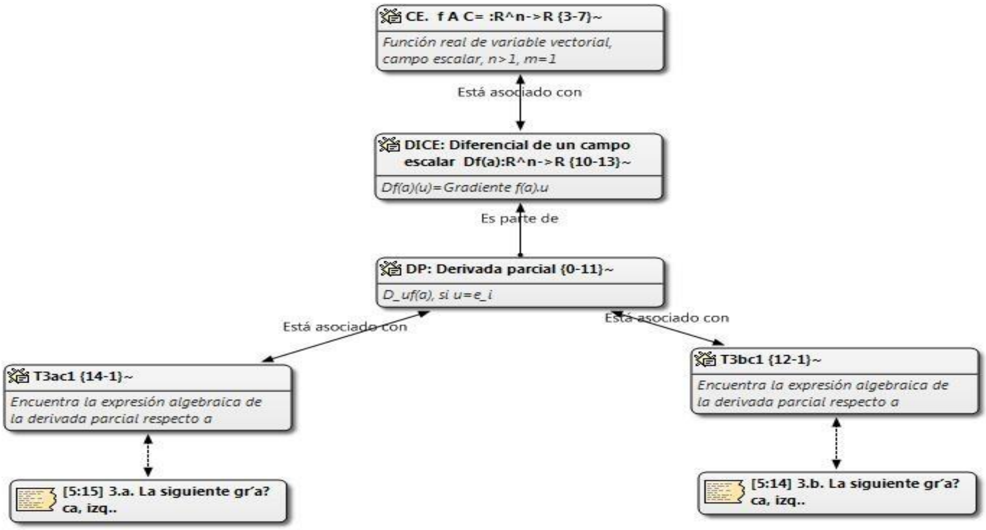


Figura 49. Red semántica de la Tarea 3. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Respecto a la Tarea 4, la red semántica de la Figura 50 muestra las relaciones que establecen las categorías emergentes del cuestionario entre los elementos campo escalar *CE*, representado en forma tabular de datos provenientes de una situación problema; se aproxima el objeto derivada parcial *DP* en puntos del *CE* por diferencias finitas y como el *CE* es diferenciable, se encuentra la diferencial *DICE*. Estos elementos se relacionan en la parte principal del polinomio de Taylor de grado 1, lo que permite encontrar mejores aproximaciones de valores del *CE* en puntos no registrados en la tabla.

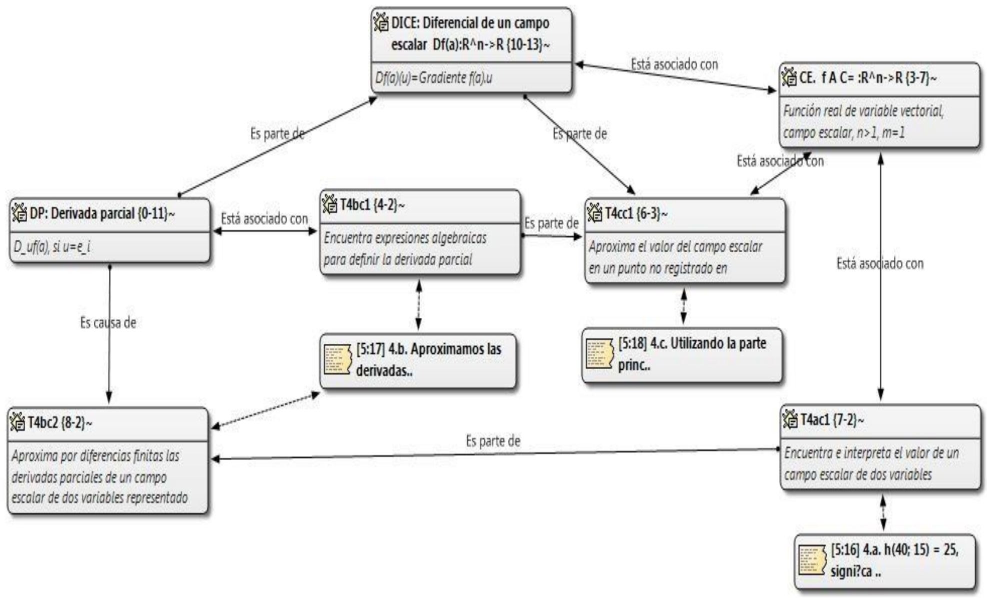


Figura 50. Red semántica de la Tarea 4. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Respecto a la Tarea 5, la red semántica representada en la Figura 51 indica relaciones entre elementos matemáticos de la siguiente forma: calcular las derivadas parciales *DP*, utilizando teoremas de diferenciación en puntos donde el campo escalar *CE* es continuo, de acuerdo con la categoría *T5ac1*, o utilizando la definición, en caso contrario, categoría *T5bc1*; determinar si el campo escalar *CE* es diferenciable *DICE*, aplicando el criterio del límite de acuerdo con *T5cc1*; verificar si un *CE* es continuo utilizando el teorema que sostiene que diferenciabilidad implica continuidad *TFDI-TDICO*, de acuerdo con *T5dc1*; justificar que un campo escalar no es diferenciable en un punto, utilizando el teorema que afirma que diferenciabilidad implica la existencia de las derivadas parciales *TFDI-TDIDP*, según *T5ec1*.

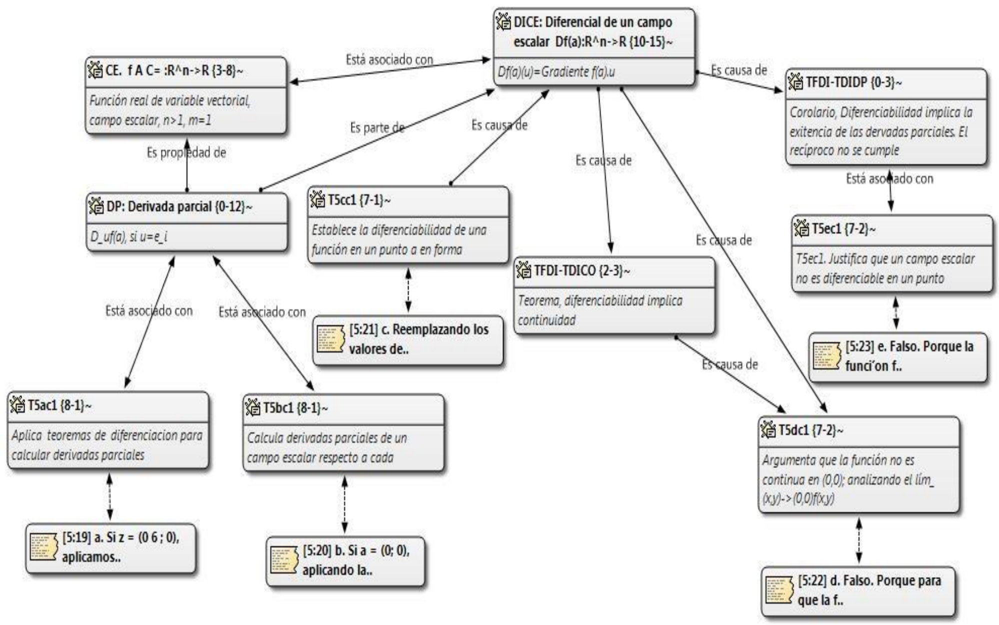


Figura 51. Red semántica de la Tarea 5. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Respecto a la Tarea 6, la red semántica de la Figura 52 describe lo siguiente: por *T6ac1*, encuentra la *DD* del CE en un punto; por *T6bc1* se halla la *DP* del CE en un punto como caso particular de la *DD* cuando los vectores dirección son los de la base canónica de $\mathbb{R}^2$; según *T6cc1* se prueba que la *DD* en el punto (0,0) no es lineal respecto al vector dirección, que es alternativa para inferir la no diferenciabilidad en (0,0) del *CE*; otra alternativa es, según *T6dc1*, establecer que el límite entre el resto sobre la norma del vector dirección no es cero; y por *T6ec1* se prueba que el recíproco del teorema no se cumple: si un *CE* es diferenciable en un punto, entonces la derivada direccional del *CE* en el punto según cualquier vector dirección es igual al producto punto entre el gradiente del *CE* evaluado en el punto con el vector dirección *TFDI-TDIDD*; y por *T6fc1* se establece que la existencia de la derivada direccional en un punto según cualquier vector dirección no es condición suficiente para que el *CE* sea diferenciable en el punto *DICE*.

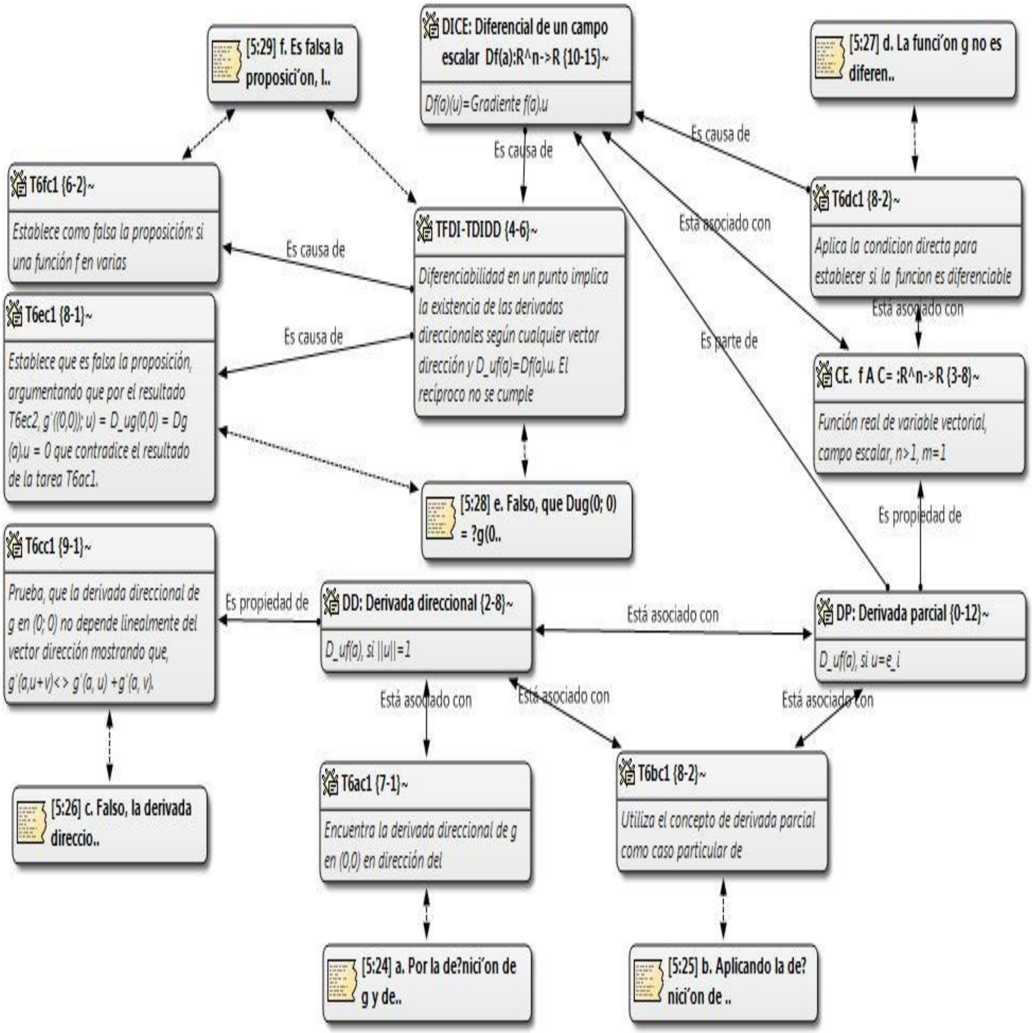


Figura 52. Red semántica de la Tarea 6. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Respecto a la Tarea 7, a partir de una situación problema se describen las relaciones entre los objetos matemáticos, representadas en la red semántica de la Figura 53, que comprenden: por *T7ac1* se encuentra e interpreta el vector gradiente de un campo escalar diferenciable *DICE*; según *T7bc1* y *T7cc1* se encuentra e interpreta respectivamente la derivada parcial *DP* y la derivada direccional *DD*; y por *T7dc1* establece que si la *DD* es 0 entonces se hallan las curvas de nivel.

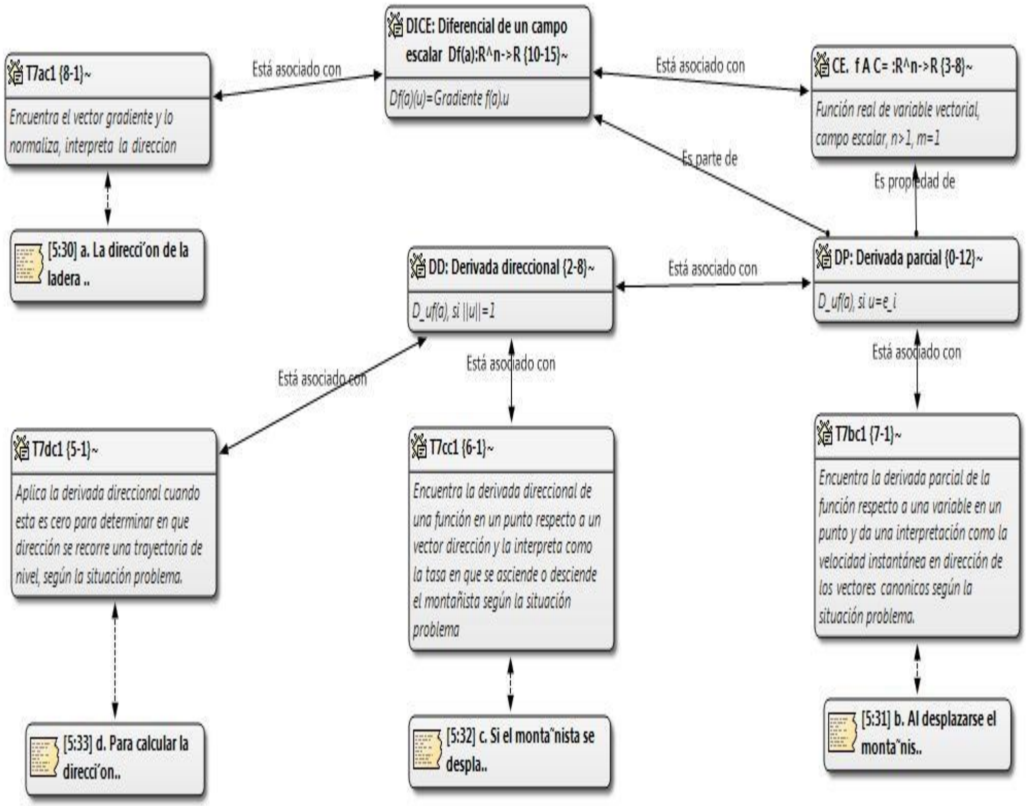


Figura 53. Red semántica de la Tarea 7. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

En lo referente a la Tarea 8 se generó la red semántica de la Figura 54, la cual describe que dado un campo escalar *CE* en forma algebraica se realizan las siguientes acciones y procesos sobre este objeto: según *T8ac1* se muestra que el *CE* es diferenciable en todo su dominio; por *T8bc1* se encuentra la diferencial del campo escalar *DICE,* y según *T8cc1* se da una interpretación geométrica de la diferencial.

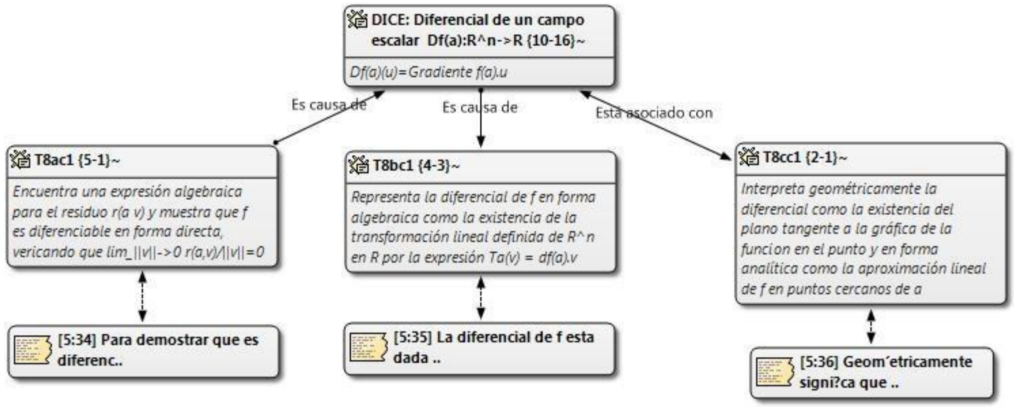


Figura 54. Red semántica de la Tarea 8. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Sobre la Tarea 9 se generó la red semántica de la Figura 55, la cual describe que dada una función en varias variables *FVV* en forma algebraica, que para este caso corresponde a un campo vectorial *CV*, se realizan las siguientes acciones y procesos sobre este objeto: según *T9ac1*, como el *CV* es diferenciable en todo su dominio, se aplica el teorema que establece que la diferenciabilidad de un campo vectorial implica la diferenciabilidad de los campos escalares que lo componen *TFDI-TDICVDICE*, la diferencial es igual a la derivada direccional en cualquier punto de su dominio según cualquier vector dirección, y esta se encuentra como el producto de la matriz jacobiana, evaluada en el punto con el vector dirección, y por *T9bc1* se muestra en forma directa que este *CV* es diferenciable.

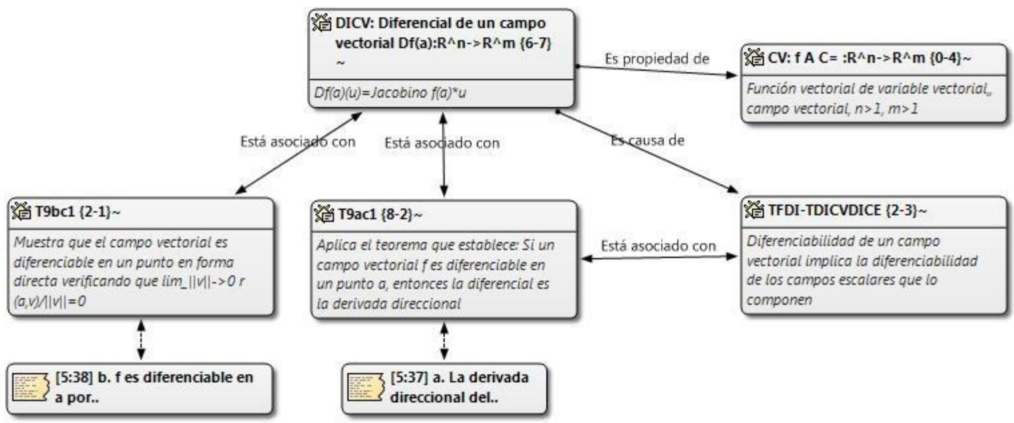


Figura 55. Red semántica de la Tarea 8. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Teniendo en cuenta la Tarea 10 se generó la red semántica de la Figura 56, donde se describe que, dada una función en varias variables *FVV* y según *T9ac1*, se encuentran expresiones algebraicas y la interpretación como transformación lineal, según los siguientes casos: la diferencial de una función real de variable real *DIFR*, la diferencial de una función vectorial de variable real *DIVR*, la diferencial de un campo escalar *DICE* y la diferencial de un campo vectorial *DICV*.

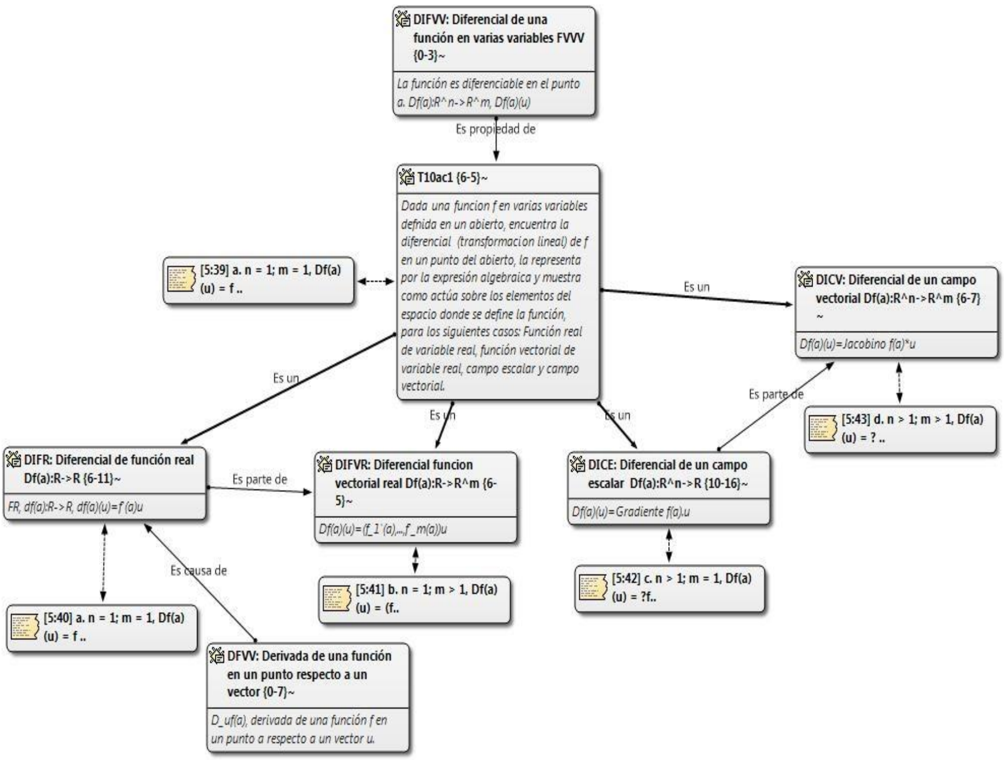


Figura 56. Red semántica de la Tarea 10. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Finalmente, en la Figura 57 se representa en forma gráfica la *DG*, donde se muestran las relaciones entre los objetos matemáticos como resultado del análisis de la *DG* preliminar, las categorías emergentes de las respuestas dadas por los estudiantes del cuestionario y la solución plausible de este.

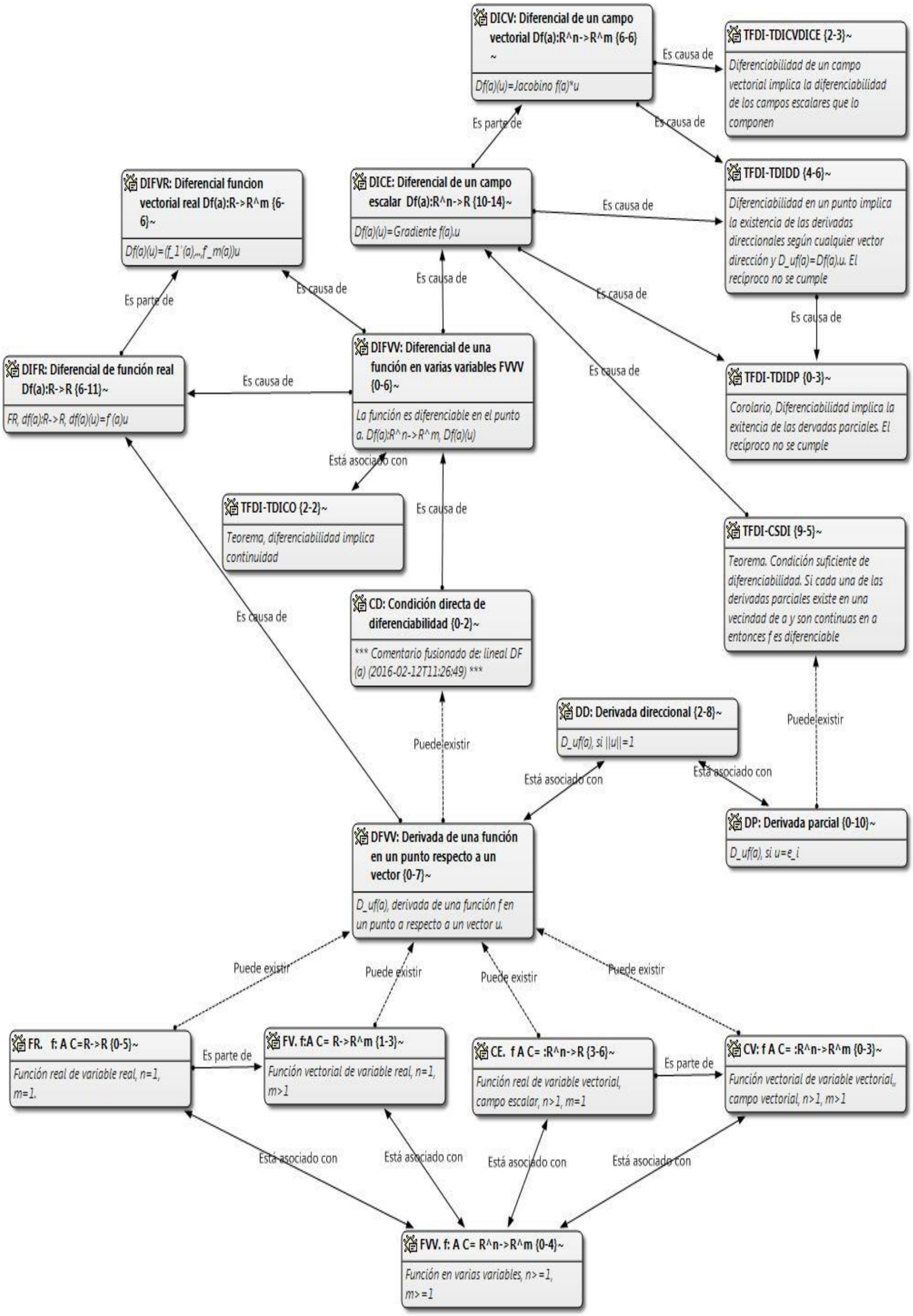


Figura 57. Red semántica de la DG. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Tercera etapa: análisis de las entrevistas

En esta etapa, a cada estudiante se le realizó una entrevista semiestructurada y el correspondiente análisis a la luz de la descomposición genética, las categorías que emergieron en la etapa uno y las relaciones entre los elementos matemáticos según el análisis plausible del cuestionario que se presentó en la sección anterior.

A continuación se expone un episodio demostrativo de la entrevista al estudiante que se identifica con el seudónimo de *E1*, para la Tarea 1, realizada por el investigador *I*.

1. *I.* Explique ¿cómo desarrolló la Tarea 1?
2. *E1.* La función es una parábola que se traslada una unidad hacia arriba; ahora, el incremento viene definido por $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$, que viene a ser este segmento [ilustra el incremento], ehh la diferencial de f en a, entonces se aplica la fórmula de Taylor, bueno, la diferencial viene dada por la fórmula $f'(a)h$, [la señala en la gráfica], en este caso como es unidimensional no es el producto punto, sino la multiplicación real normal que viene a ser la altura con respecto a la tangente, el error es lo que le falta a la altura respecto a la tangente para llegar a la altura de la curva en el punto, si se pasa por efecto o por exceso.
   En el segundo indicar si f es diferenciable en uno y mostrar que es diferenciable. Para mostrar que es diferenciable debo ver que existe una transformación lineal, que en este caso es $f'(a)h$ y que satisface el polinomio de Taylor, y que el error va para 0 cuando h tiende a 0, entonces eso fue lo que hice. Además, creo que hay un teorema.
3. *I.* En cambio de mostrar que el límite cuando h va para cero y que el error $r(a, v)$ va para cero, que es equivalente al proceso que describe. ¿Cuál teorema aplicó?
4. *E1.* Ah, en caso de que sus derivadas existan y sean continuas en el punto, entonces la función es diferenciable en el punto.
5. *I.* En otras palabras ¿qué diferencia, en forma geométrica, encuentra entre la diferencial y el incremento de la función?
6. *E1.* La diferencia es el error, son magnitudes, pero el incremento es superior, en este caso a la diferencial.
7. *I.* ¿Siempre va ocurrir así?
8. *E1*. A veces puede cambiar, puede ser al revés.
9. *I*. La diferencial es el cambio con respecto a ¿qué objeto matemático?
10. *E1*. A la tangente.
11. *I*. El incremento es con respecto a la forma en que cambia ¿quién?

12. *E1*. La curva.
13. *I*. ¿En qué consiste la parte c de la Tarea?
14. *E1.* Decía, me daba si α es un valor que se desea calcular aproximadamente por medio de diferenciales, la estimación se encuentra en una función conveniente y los valores f y h y luego se aplica la fórmula de Taylor. Lo que uno hace es hallar la aproximación de la raíz cubica de un número. Para esto, tomamos la función más apropiada, que sería la raíz cúbica de x y nos aproximaríamos por la recta tangente, y como es más fácil calcular el valor de la tangente que el de la función, entonces aplicamos la fórmula y ya.
15. *I*. En este caso se aplicó el polinomio de Taylor, pero ¿qué parte del polinomio de Taylor no se tiene en cuenta?
16. *E1*. El error.
17. *I*. Pero necesita otra información ¿podría indicar cuál?
18. *E1*. Sí, encontramos el valor de la función en un punto conocido, que en este caso es uno.
19. *I*. El incremento en x ¿cuál sería?
20. *E1*. Sería la diferencia entre el valor que tomé, que es uno, y el que nos dan, es decir 1.02, o sea 0.02.
21. *I*. La diferencial ¿cuál sería para este caso?
22. *E1*. En este caso sería $\left(\frac{1}{3}\right)(1)^{-\frac{2}{3}}$, que es la derivada de la función en uno por el h que es 0.02.
23. *I*. ¿Cuál fue el valor de la aproximación?
24. *E1*. α es aproximadamente uno.
25. *I*. Pero no es uno, porque obtendríamos que el valor de la raíz cúbica de 1.02 es lo mismo que la raíz cúbica de uno.
26. *E1*. No, es una aproximación a la raíz cúbica de 1.02.[103]

Posteriormente se hizo el análisis de este segmento, utilizando el *software* atlas.ti7, que se resume en la Tabla 15. En la primera columna de esta Tabla aparece el ítem correspondiente a la Tarea; en la segunda columna se agrupa el código de la categoría según la codificación establecida en la primera fase, el código de segmento de la entrevista relacionada con la categoría y los elementos matemáticos relacionados; en la tercera columna se hacen comentarios sobre los procesos de pensamiento que se percibieron en la entrevista. Respecto al contenido del código del segmento de la entrevista, por ejemplo

[103] Estudiante E1 (Estudiante de cálculo III), entrevista por Zagalo Suárez. 14, marzo, 2016.

ET1E1L2, 5-10, significa **E**ntrevista, **T**area **1**, Estudiante **E1**, línea **2** y líneas **5** a **10**.

Ítem	*Categoría, segmentos de la entrevista*	*Comentarios*
1.a.	*T1ac1*, ET1E1L1-2, *FR*. *T1ac2*, ET1E1L2, 5-10 $\Delta f(a), df(a)$. *T1ac3*, ET1E1L2, 9-12, Taylor, $\Delta f(a) = df(a) \cdot h + \|h\|E(a,h)$.	Grafica la función y la tangente en un punto e interpreta en forma verbal, algebraica y analítica la diferencial; establece relaciones entre los elementos: incrementos, derivada y el error de aproximación.
1.b.	*T1bc1*, ET1E1L2, DIFR. *T1bc2*, ET1E1L3-4, TFDI-CSDI. *T1bc3*, ET1E1L3, DIFR.	El estudiante argumenta en forma algebraica y analítica por qué la función es diferenciable en el punto.
1.c.	*T1cc1*, ET1E1L13-26, DIFR.	Resuelve una situación problema aplicando la diferencial en forma algebraica y analítica

Tabla 15. Análisis de la entrevista de la Tarea 1, Estudiante 1.

De este análisis se generó la red semántica, Figura 58, que representa los elementos matemáticos y las relaciones lógicas entre estos que logra establecer el estudiante en la entrevista y luego se triangula esta información con la obtenida en las fases uno y dos.

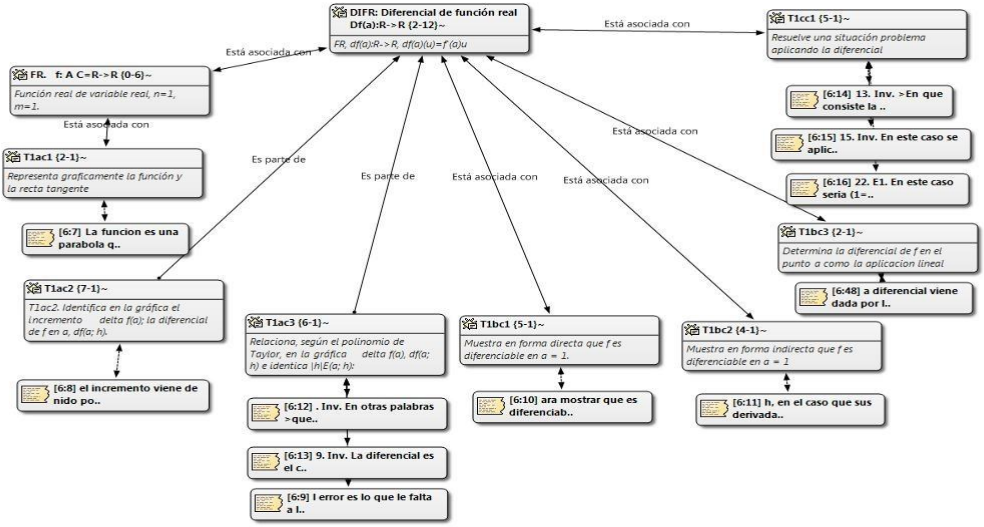


Figura 58. Red semántica de la entrevista ET1E1. Elaborada en atlas.ti7. Fuente: el autor.

Las entrevistas completas y el proceso de análisis hacen parte del desarrollo de la investigación. En la Tabla 16 se presenta el resumen de las categorías mostradas por todos los estudiantes. En la primera columna aparece el código de la categoría y en las columnas siguientes, los seudónimos de los estudiantes desde *E1* a *E9*. La letra S indica que se infiere que el estudiante sí demostró lo descrito por esta categoría, y la letra *N* indica el caso contrario.

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T1ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T1ac2	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T1ac3	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T1bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	*N*	N	*N*	*N*
T1bc2	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T1bc3	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	*N*	N	*N*	*N*
T1cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T2ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T2ac2	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T2bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T3ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	S	*N*	*S*
T3bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	S	*N*	*S*
T4ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T4bc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*S*	N	*N*	*N*
T4bc2	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T4cc1	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*N*
T5ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T5bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T5cc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T5dc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T5ec1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T6ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T6bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*N*	S	*N*	*N*
T6cc1	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*S*	N	*N*	*S*
T6dc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	N	*N*	*S*
T6ec1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	*N*	*S*
T6fc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	N	*N*	*N*
T7ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T7bc1	*S*	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T7cc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T7dc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*S*
T8ac1	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*	*S*	S	*N*	*N*
T8bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	N	*N*	*N*
T8cc1	*S*	*N*	*N*	*N*	*N*	*N*	N	*N*	*N*

Categoría	*Estudiantes*								
Código	*E1*	*E2*	*E3*	*E4*	*E5*	*E6*	*E7*	*E8*	*E9*
T9ac1	*S*	*S*	*S*	*N*	*S*	*S*	S	*N*	*N*
T9bc1	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	*N*	N	*N*	*N*
T10ac1	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	*S*	S	N	N

Tabla 16. Categorías mostradas por los estudiantes en las entrevistas.

Cuarta etapa: niveles de desarrollo del esquema de la diferencial

Teniendo como referencia el enfoque teórico *APOE*, la *DG* de la diferencial y el desarrollo metodológico de las fases anteriores, se asume que el desarrollo progresivo del esquema de la diferencial de una función en varias variables está caracterizado por los elementos matemáticos representados en forma gráfica, numérica, algebraica y analítica (G, N, A, AN), por las traducciones entre estas representaciones y por las relaciones lógicas que se establecen entre los elementos para hacer inferencias, cuando resuelven ejercicios y situaciones problema.

Por tanto, como una adaptación de la caracterización para el esquema de la derivada[104], la comprensión por los estudiantes de la diferencial de una función en varias variables se describe a continuación en términos de la conceptualización de la triada de los niveles Intra, Inter y Trans de la siguiente manera: el nivel Intra, con los subniveles Intra 1 e Intra; el nivel Inter, con los subniveles Inter 2, Inter 1 e Inter, y el nivel Trans con los subniveles Trans 1 y Trans. Para cada subnivel, *Cn* indica la característica correspondiente *n*.

Nivel Intra 1

C1. No utilizar ningún elemento matemático. Se manifiesta cuando no resuelve ninguna tarea y no recuerda ninguno de los elementos matemáticos que constituyen el esquema.

[104] Gloria Sánchez-Matamoros García, y otros, "El desarrollo del esquema de la derivada", *Enseñanza de las ciencias,* 24, 2006: 87-88.

C2. No establecer relaciones entre los elementos matemáticos. Ocurre cuando, en las cadenas de inferencias, al intentar resolver una tarea, recuerda algunos elementos matemáticos con concepciones erróneas y en una única forma de representación. Por tanto, las relaciones que establece son incorrectas.

Nivel Intra

C1. Recordar elementos matemáticos de forma aislada. Se evidencia cuando al intentar resolver la tarea recuerda algunos elementos de manera aislada sin establecer relaciones entre estos y en un único modo de representación.

C2. Establecer relaciones entre elementos matemáticos comprendidos como acciones. Cuando en el desempeño de las tareas recuerda algunos elementos matemáticos y realiza acciones sobre estos de una forma mecánica y algorítmica; las relaciones que puede llegar a establecer no son suficientes para inferir nueva información o generar nuevos elementos que le permitan resolverlas.

C3. Recordar los elementos matemáticos como componentes internos de otro elemento. Se presenta cuando recuerda uno o varios elementos matemáticos, como proceso u objeto, realizando acciones sobre este para generar un nuevo elemento. Sin embargo, considera el nuevo elemento de manera aislada.

Nivel Inter 1

C1. Reconocer elementos matemáticos contiguos. Se evidencia cuando comprende un elemento del esquema como objeto, realiza acciones sobre este y las generaliza para construir un nuevo elemento, entendido como una estructura mental de acción o proceso y cognitivamente próximo al objeto.

C2. Establecer relaciones entre los elementos contiguos. Cuando ha comprendido como proceso u objeto dos elementos contiguos del esquema y en un mismo modo de representación y los relaciona a través de la conjunción para resolver tareas o situaciones problema.

Nivel Inter 2

C1. Agrupar elementos matemáticos de naturaleza similar. Ocurre cuando ha comprendido un elemento del esquema como objeto, por mecanismos de desencapsulación coordina el proceso que lo generó con otros elementos entendidos también como procesos o acciones representados en forma G, A o N para generar nuevos elementos y agruparlos por su génesis similar.

C2. Generalizar procesos. Cuando aplica un mismo proceso a varios elementos matemáticos de naturaleza similar.

Nivel Inter

C1. Reconocer propiedades de los elementos matemáticos. Se manifiesta cuando al aplicar un mismo proceso a diferentes elementos matemáticos del esquema, los puede clasificar dependiendo de si cumplen ciertas propiedades.

C2. Establecer relaciones entre elementos matemáticos. Se presenta cuando relaciona con la conjunción e implicación lógica elementos matemáticos, no necesariamente contiguos y en diferentes formas de representación.

Nivel Trans 1

C1. Establecer relaciones entre elementos matemáticos comprendidos como procesos u objetos. Ocurre cuando ha comprendido varios elementos matemáticos como objetos y los desencapsula en los procesos que los generaron, y al coordinarlos crea nuevos procesos que, a su vez, originarán estructuras generales del esquema que son comprendidas como acciones o procesos.

C2. Presentar primeros intentos de síntesis entre los elementos matemáticos. Se manifiesta cuando generaliza procesos que transforman varios objetos del esquema y utilizando la implicación lógica los encapsula en un nuevo objeto.

Nivel Trans

C1. Inferir propiedades del esquema al establecer relaciones lógicas entre los elementos que lo configuran. Se evidencia cuando ha logrado tematizar el esquema e infiere propiedades de estos objetos a partir de la aplicación directa e indirecta de relaciones lógicas de conjunción e implicación.

C2. Establecer coherencia del esquema. Ocurre cuando generaliza y sintetiza las propiedades que satisfacen algunos elementos matemáticos y las puede identificar en diversos ámbitos como casos particulares y en diferentes modos de representación.

La Tabla 17 resume las características generales de cada uno de los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de diferencial de una función en varias variables.

Niveles	*Características*
Intra 1	C1. No utilizar ningún elemento matemático. C2. No establecer relaciones entre los elementos matemáticos.
Intra	C1. Recordar elementos matemáticos de forma aislada. C2. Establecer relaciones entre los elementos matemáticos comprendidos como acciones. C3. Recordar elementos matemáticos como componentes de otro elemento.
Inter 1	C1. Reconocer elementos matemáticos contiguos. C2. Establecer relaciones entre los elementos contiguos.
Inter 2	C1. Agrupar elementos matemáticos de naturaleza similar. C2. Generalizar procesos.
Inter	C1. Reconocer propiedades de los elementos matemáticos. C2. Establecer relaciones entre elementos matemáticos.
Trans 1	C1. Establecer relaciones entre elementos matemáticos comprendidos como procesos u objetos. C2. Presentar primeros intentos de síntesis entre los elementos matemáticos.
Trans	C1. Inferir propiedades del esquema al establecer relaciones lógicas entre los elementos que lo configuran. C2. Establecer coherencia del esquema.

Tabla 17. Caracterización de los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables

RESULTADOS

En este capítulo se expone el análisis de cada uno de los estudiantes, organizado por los niveles de desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables. Se describe teniendo como referencia el análisis teórico del concepto, la descomposición genética, las relaciones lógicas entre los elementos matemáticos que se establecen en la resolución de las tareas del cuestionario y que se evidencian en las formas de representación gráfica, numérica, algebraica y analítica, en las argumentaciones, en las entrevistas, y según la solución plausible de estas tareas.

Por tanto, se mostrará una caracterización de forma descriptiva y explicativa de los niveles de desarrollo establecidos en el marco teórico y en la recolección y análisis de la información.

Análisis de cada estudiante

El análisis se organizó en el siguiente orden de subniveles del desarrollo del esquema, de acuerdo con los objetivos de cada tarea del cuestionario y el desempeño que demostró el estudiante en estas.

Intra: tareas 1.a, 1.b y 1.c, para establecer la comprensión del concepto diferencial de una función real de variable real *DIFR*.

Inter 1: tareas 2.a, 2.b, con el propósito de analizar la comprensión del concepto diferencial de una función vectorial de variable real *DIFVR*, como elemento contiguo a la *DIFR*.

Inter 2: tareas 3.a, 3.b, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6.a, 6.b, 6.c y 7, para analizar la comprensión del concepto de derivada direccional *DD* y parcial *DP*, como elementos contiguos a la *DIFR* y agrupar las funciones en varias variables según las propiedades locales de continuidad, derivabilidad, linealidad y diferenciabilidad.

Inter: tareas 4.c, 5.c, 6.d y 8, para analizar la comprensión del concepto diferencial de un campo escalar *DICE*, cuando establece relaciones entre los objetos CE, FR, DP, DD y *DIFR*, en los modos de representación *G, A, AN, N*.

Trans 1: tareas 9.a y 9.b, con el propósito de analizar la comprensión del concepto diferencial de un campo vectorial *DICV*, cuando establece relaciones con la *DICE* comprendido como objeto o proceso.

Trans: tareas 5.d, 5.e, 6.e, 6.f, 9.b y 10, para analizar la comprensión del esquema de la diferencial de una funciones en varias variables *DIFVV*, al verificar el cumplimiento de las propiedades y las relaciones que pueda establecer entre los elementos que la configuran y que le dan coherencia y completez al esquema.

A continuación se describen los resultados de este análisis de los estudiantes que se ubican en cada subnivel.

Nivel Intra

Subnivel Intra 1

Estudiante E8

Comprende el elemento matemático, la derivada de una función real como acción en una única forma de representación, la algebraica, cuando aplica reglas de diferenciación de una manera mecánica y algorítmica, sin tener en cuenta las condiciones que debe cumplir la función.

No comprende la *DIFVR* como un elemento contiguo a la *DIFR*.

Muestra la tendencia a comprender la *DP* como acción, incluyendo algunos elementos matemáticos, que los recuerda con errores y en el único modo de representación, la algebraica. Además, no logra generalizar el proceso de derivación de una *FR*, para encontrar la derivada de un *CE*, la *DP* y la *DD* como elementos que configuran la *DICE*.

No muestra capacidad de síntesis cuando comete errores al aplicar las relaciones lógicas de implicación, conjunción y disyunción, en la comprensión como acción del concepto de *DICE*, para hacer inferencias y generar nuevos elementos matemáticos.

En la Tabla 18 se presenta una caracterización del desarrollo del esquema de la *DIFVV*, correspondiente a este subnivel *Intra 1*, demostrado por el estudiante.

Subnivel Intra

Estudiante E9

Recuerda de manera aislada y como acción el elemento *DIFR*, junto con los elementos internos que lo constituyen. No logra relacionar este elemento con los elementos *DIFVR, DICE* y *DICV*.

En la Tabla 18 se indican las características, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por el estudiante en el nivel *Intra*.

Nivel Inter

Subnivel Inter 1

Estudiante E5

Comprende el elemento *DIFR* como un proceso al activar mecanismos para interiorizar acciones de recordar y relacionar elementos que lo configuran. Coordina este proceso con la *FVR* para generalizar la *DIFR* en la comprensión del elemento contiguo *DIFVR* en un nuevo proceso.

Comprende como acciones realizadas sobre los elementos *FVV*, los conceptos de *DP* y *DD* en el modo de representación *A*, pero no logra hacer las traducciones a las representaciones *G* y *AN*, al intentar resolver las situaciones problema.

No comprende los elementos *DICE* y *DICV* como acciones sobre el *CE* y el *CV* respectivamente, porque presenta errores y dificultades para representarlos en forma *G*, *A*, *AN* y para establecer relaciones lógicas entre estos, que le permitan estructurar y sintetizar el esquema de la *DIFVV*.

Estudiante E7

Grafica la *FR* y la tangente a esta por un punto e interioriza esta acción en el proceso de identificar en forma *V* y *A* la diferencial de la función y el error de aproximar el incremento de la función por la diferencial.

Sin embargo, tiene dificultad para encapsular el proceso en el objeto *DIFR* en un punto e interpretarlo como una transformación lineal.

Intenta generalizar el concepto de *DIFR* al elemento contiguo *DIFVR* en forma *A*; sin embargo tiene dificultades al representar este elemento en forma *G* y *A*.

Comprende los conceptos de *DP* y *DD* como acciones, porque encuentra estas derivadas en forma *A*, pero no las interpreta en forma *G*, *AN* y *N*. No establece relaciones entre los elementos que configuran estos conceptos para hacer inferencias que le permitan resolver las situaciones propuestas.

No comprende los elementos *DICE* y *DICV* como acciones, procesos u objetos, lo cual no le permite establecer relaciones entre los elementos que los constituyen ni determinar coherencia y síntesis del desarrollo del esquema de la *DIFVV*.

En las Tabla 18 y 19 se exponen las relaciones lógicas, los elementos matemáticos y los sistemas de representación utilizados por los estudiantes en la construcción progresiva del esquema. Las relaciones que se establecen entre los elementos matemáticos en el nivel *Inter 1* son, además de las que figuran en dicho subnivel, las que se presentan en el subnivel *Intra*.

Subnivel Inter 2

Estudiante E6

En la construcción progresiva del esquema, comprende como acción y proceso la *DIFR*, por lo cual presenta las características del nivel *Intra* del esquema de la *DIFVV* (Tabla 18).

Comprende como acciones, procesos y objetos la *DP* y la *DD* en representación *A, G, N* y *AN,* como elementos contiguos a la *DIFR*. Por tanto, se ubica en el nivel *Inter* 2 del desarrollo del esquema (Tabla 19).

Entiende los elementos *DICE* y *DICV* como acciones, pero no logra interiorizarlas en procesos y encapsular estos en objetos. Además, presenta errores y dificultades para hacer traducciones entre las formas de representación *G, A, N* y *AN* de los elementos matemáticos y establecer relaciones necesarias entre estos para estructurar el esquema de la *DIFVV*.

Subnivel Inter

Estudiante E4

Muestra características del nivel *Intra*, porque realiza la acción de graficar la función real de variable real y la tangente a esta en un punto, tiene dificultades al interiorizar esta acción en el proceso de recordar y traducir entre las formas de representación *G, A, AN*, la diferencial de la función y relacionarla a través del polinomio de Taylor de orden uno, con el incremento de la función y el error de aproximar el incremento de la función por la diferencial. Además, identifica los elementos relacionados con la *DIFR* en forma *A* y logra sintetizarlos al resolver una situación problema.

Comprende como objeto *DIFR*, lo desencapsula y lo utiliza como proceso para comprender la diferencial de una función vectorial *DIFV* como elemento contiguo a la *DIFR* y, por lo tanto, presenta las características del nivel *Inter 1* del esquema de la *DIFVV*.

Reconoce e interpreta la *DP* y la *DD* en los modos de representación *G, A, N* y *AN*, comprende como objeto estos elementos matemáticos, que caracterizan el nivel *Inter* 2 del esquema *DIFVV*.

Reconoce e interpreta la *DICE* en representación *G, A* y *AN*, y comprende como proceso este elemento, que es una característica principal del nivel *Inter* del esquema de *DIFVV*.

La caracterización de estos subniveles del nivel Inter se representan en la Tabla 19.

El estudiante muestra errores y dificultades para establecer y demostrar propiedades que generalizan los elementos *DIFR, DIFVR, DICE* y *DICV,* que estructuran y dan coherencia al esquema de *DIFVV*.

Nivel Trans

Subnivel Trans 1

Estudiante E3

La construcción progresiva del esquema se evidencia por las características presentadas en los niveles *Intra, Inter* y *Trans*, de la siguiente forma.

Respecto al desempeño en la Tarea 1, el estudiante alcanza el nivel *Intra* (Tabla 18), porque comprende la *DIFR* como acción y proceso, cuando recuerda y relaciona los elementos matemáticos que la configuran, y como objeto, cuando sintetiza los elementos y las relaciones para resolver una situación problema.

Sobre el desempeño en la Tarea 2, demuestra las características del nivel *Inter 1*, porque comprende la diferencial de una función real *DIFR* como proceso, y lo extiende al elemento próximo cognitivo, función vectorial de variable real *FVR*, cuando calcula e interpreta la diferencial de una función vectorial de variable real *DIVR* en forma *A* y *AN,* como parte del espacio tangente a la *FVR* en un punto.

Respecto al análisis de la solución de las tareas 3, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6.a, 6.b y 7, se infiere que el estudiante alcanza el nivel *Inter 2*, por las siguientes actuaciones:

Comprende como acción los elementos derivada parcial *DP* y derivada direccional *DD*, al calcular estas derivadas aplicando la definición como el límite del cociente incremental. Interioriza estas acciones en procesos, cuando resuelve algunas situaciones problema que requieren interpretar la *DP* y *DD* en representación *G, A, N* y *AN*. Encapsula la *DP* como un objeto que hace parte del vector gradiente sobre el cual se realizan nuevas acciones, como determinar la dirección en la cual crece más rápido la función.

Agrupa los elementos *DD* y *DP* como una generalización del proceso de derivación de funciones reales y vectoriales de variable real a la derivación de un campo escalar que forma parte de la *DICE*.

Intenta sintetizar los elementos *CE*, *DD*, *DP*, para resolver problemas que requieren la representación analítica de estos elementos; sin embargo, las relaciones no son suficientes para interpretar la información que da el vector gradiente y para hallar curvas de nivel.

Sobre el desempeño en las tareas 4.c, 5.c, 6.d y 8, se concluye que el estudiante alcanza el nivel *Inter* del desarrollo del esquema de la $DIFVV$, por las siguientes razones:

Aplica la relación de implicación lógica ($p \to q$), para verificar que un campo escalar es diferenciable: si $\|v\| \to 0$, entonces $E(a, v) \to 0$, lo cual requiere desencapsular los objetos límite, norma de un vector y la derivada direccional *DD*; comprender como proceso el elemento diferencial de un campo escalar *DICE*, que, a su vez, lo relaciona con los elementos incremento de la función en un punto $\Delta f(a)$, la *DD* de f en a en dirección del vector $v = (\alpha, \beta)$ como la transformación lineal aplicada al vector dirección, $\nabla f(a) \cdot v$.

Utiliza la relación lógica de la implicación, al verificar el cumplimiento de la condición de diferenciabilidad y encapsular los elementos y relaciones inmersas en el objeto diferencial de un campo escalar *DICE* y formar la imagen conceptual de este objeto en un punto arbitrario del dominio, donde se define el *CE* como la diferencial de f en a, $Df(a) = \nabla f(a) \cdot v$.

Sin embargo, presenta dificultades para desencapsular el objeto *DICE*, cuando intenta resolver la situación que requiere calcular el valor de una función en un punto $a + h$, cuando se posee información de la función y su derivada en el punto a.

La caracterización del nivel *Inter* se presenta en la Tabla 19.

Respecto a las solución de la Tarea 9, el estudiante alcanza el nivel *Trans 1* (Tabla 20), porque establece relaciones entre los elementos matemáticos derivada parcial *DP*, diferencial de un campo escalar *DICE*, gradiente de un campo escalar $\nabla f(a)$, comprendidos como objetos; los desencapsula y realiza acciones sobre estos elementos para comprender como proceso la diferencial de un campo vectorial $DICV$, en el modo de representación *A*.

Del análisis de las tareas 5.d, 5.e, 6.e, 6.f, 9.b y 10, se concluye que el estudiante no alcanza el nivel *Trans*, ya que no tiene éxito al intentar establecer diferentes relaciones lógicas entre elementos que configuran y dan coherencia al esquema de la diferencial de funciones en varias variables, como se manifiesta en las siguiente actuaciones:

Comprende la *DIFVV* como acción, cuando verifica en forma directa que una función es diferenciable en un punto.

Enuncia la condición suficiente de diferenciabilidad, pero sin justificarla.

No relaciona los elementos matemáticos que permiten hacer síntesis para inferir resultados de la diferenciabilidad, como la continuidad, la existencia de las derivadas parciales y direccionales.

Verifica que los recíprocos de algunos resultados de la diferenciabilidad no se cumplen y están precisamente en las tareas en consideración.

No logra generalizar el concepto de diferenciabilidad de una función en varias variables y la interpreta como casos aislados según las dimensiones entre los espacios en que está definida la función.

Subnivel Trans

Estudiante E2

Al resolver la Tarea 1, presenta las características del nivel *Intra* del esquema de la *DIFVV* que se caracteriza por lo relacionado en la Tabla 18.

Respecto a la Tarea 2, muestra las características del subnivel *Inter 1*, porque comprende la *DIFVR* como el proceso de calcular un vector cuyas componentes son las diferenciales de cada una de las *FR* en el punto que conforman la *FVR* y que las ha encapsulado en el objeto *DIFR* aplicado a un real.

Además, relaciona los elementos *FR, FVR, DIFVR*, cuando calcula e interpreta en forma *A* y *AN* el espacio tangente a la *FVR* en un punto.

Con respecto a las tareas 3, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6.a, 6.b, 6.c y 7, presenta las características del subnivel *Inter 2* del desarrollo del esquema, por las siguientes actuaciones:

Comprende como acción los elementos *DP* y *DD*, cuando calcula estas derivadas al evaluar el límite del cociente incremental o aplicar reglas de diferenciación. Interioriza estas acciones en un proceso, cuando resuelve problemas que requieren representar la *DP* y la *DD* en forma *G, A, AN* y N. Encapsula la *DP* en un objeto, cuando calcula el vector gradiente y da una interpretación *AN* de este.

Agrupa los objetos *DD* y *DP* para generalizar el proceso de derivación de funciones reales y vectoriales de variable real en el proceso de derivación de un campo escalar que forma parte de la *DICE*.

Sin embargo, tiene dificultades para sintetizar, cuando intenta relacionar los elementos *CE, DD, DP* para resolver problemas que requieren la representación *A* y *AN* de estos elementos.

Con referencia a la solución de las tareas 4.c, 5.c, 6.d y 8, se concluye que presenta las características del subnivel *Inter* del desarrollo del esquema, por las siguientes actuaciones:

Comprende la *DICE* como proceso, porque relaciona los elementos matemáticos que la configuran y la aplica para aproximar el valor de un *CE* en un punto·

Relaciona los elementos de la *DICE* a través de la implicación $(p \rightarrow q)$: si $E(a, v) \rightarrow 0$ cuando $\|v\| \rightarrow 0$, entonces el *CE* es diferenciable en el punto, y establece la relación entre la *DICE* y la *DD*, lo cual requiere desencapsular los objetos límite, norma y transformación lineal en los procesos que los generaron. Además, de forma alterna, comprueba la diferenciabilidad de un *CE* en un punto, aplicando la contrarrecíproca del *TDICO*.

Respecto a las soluciones de la Tarea 9, el estudiante muestra las características del nivel *Trans 1*, porque establece relaciones entre los objetos *CE, DICE* y *CV*, para comprender la *DICV* como el proceso que dado un *CV*, un punto a y un vector u, transforma linealmente el vector u en un nuevo vector, cuyas componentes son las *DICE* que conforman el *CV* aplicadas al vector u.

Respecto al desempeño en las tareas 5.d, 5.e, 6.e, 6.f y 10, muestra las características del nivel *Trans*, porque comprende los elementos *DIFR, DIFVR, DICE* y *DICV*, como acciones, procesos y objetos, los representa en forma *G, A, N* y *AN*, establece relaciones entre estos elementos y las partes que los constituyen, para determinar propiedades de derivabilidad, continuidad y diferenciabilidad de las *FVV*, demostrando completez y coherencia del esquema de la diferencial de una función en varias variables *DIFVV*.

Estudiante E1

Por la solución de la Tarea 1, manifiesta las características del nivel *Intra*, porque ha logrado tematizar el esquema de la derivada de una función real en un punto a, *Df(a)* y construye las estructuras mentales de acción, cuando representa en forma *G* y *A* los siguientes elementos: función real *FR*, tangente a la función en un punto, incremento de la variable independiente h e incremento de la función en a, $\Delta f(a)$.

Desencapsula el objeto función derivable en un punto *Df(a)*, en el proceso para calcular la derivada de una función en un punto y lo coordina con el proceso de incrementar la variable independiente x, desde el punto a hasta $a+h$, para construir la diferencial de la función f con incremento h, $f'(a) \cdot h$.

Relaciona los elementos $f'(a) \cdot h$ y $\Delta f(a)$ en el polinomio de Taylor, que establece el error $hE(a,h)$ cometido al aproximar el incremento $\Delta f(a)$ por el diferencial, $f'(a) \cdot h$.

Verifica el cumplimiento de la condición, si $hE(a,h)$ se aproxima más rápido a cero que el incremento h, para concluir que la función f es diferenciable en a.

Los anteriores procesos los encapsula en el objeto diferencial de una función real *DIFR*, al que utiliza para resolver una situación problema.

Por la forma como el estudiante resolvió la Tarea 2, se infiere que manifiesta las características del subnivel *Inter 1*, porque comprende la *DIFR* como objeto y lo desencapsula en el proceso para calcular la *DIFVR* en un punto, que es un vector cuyas componentes son las diferenciales de cada una de las *FR* en el punto, que conforman la *FVR*. Entiende como proceso la *DIFVR*, cuando relaciona los elementos *FR, FVR, DIFVR*, para calcular e interpretar en forma A y AN el espacio tangente a la *FVR* en un punto.

Respecto al desempeño en las tareas 3, 4.a, 4.b, 5.a, 5.b, 6.a, 6.b y 7, presenta las características del nivel *Inter 2* del esquema de la $DIFVV$, por las siguientes razones:

Comprende como acción los elementos *DP* y *DD,* cuando calcula estas derivadas aplicando la definición como el límite del cociente incremental o aplicando reglas de diferenciación. Interioriza estas acciones en procesos, cuando resuelve situaciones problema que requieren interpretar la *DP* y *DD* en representación *G, A, AN* y numérica. Encapsula la *DP* como un objeto que hace parte del vector gradiente sobre el cual se realizan nuevas acciones, como determinar la dirección en la cual crece más rápido la función a partir de un punto de referencia.

Agrupa los elementos *DD* y *DP* para generalizar el proceso de derivación de funciones reales y vectoriales de variable real al proceso de derivación de un campo escalar que forma parte de la *DICE*. Demuestra capacidad de síntesis cuando relaciona los elementos *CE, DD, DP*, para resolver problemas que requieren la representación A y AN de estos elementos.

Respecto a la solución de las tareas 4.c, 5.c, 6.d y 8, muestra las características del subnivel *Inter* del desarrollo del esquema de la $DIFVV$, según los siguientes desempeños:

Establece relaciones entre elementos matemáticos que configuran la *DICE*, a través de la implicación lógica $p \rightarrow q$, para verificar la diferenciabilidad de un *CE* en un punto: si $\|v\| \rightarrow 0$, entonces $E(a, v) \rightarrow 0$, al desencapsular los objetos límite, norma y transformación lineal, en los procesos que los generaron, para calcular la norma del vector v, verificar la linealidad de la transformación T_a definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y coordinarlos con el proceso que, dado un *CE* f, un punto a y un vector v, aproxima el incremento de la función en un punto, $\Delta f(a)$, con la transformación lineal aplicada al vector, $T_a(v)$, y el error de aproximación es $\|v\|E(a, v)$.

Coordina los procesos anteriores para verificar que si $\|v\| \rightarrow 0$, entonces $\|v\|E(a, v) \rightarrow 0$ y concluye que la función es diferenciable en

a. La transformación lineal aplicada al vector es igual a la *DD* del *CE* en a según el vector dirección v y se calcula como el producto punto del vector gradiente del campo escalar evaluado en el punto a con el vector dirección v, $\nabla f(a) \cdot v$.

Si el *CE* es diferenciable, encapsula los elementos y las relaciones anteriores en el elemento diferencial de un campo escalar *DICE* y forma la imagen conceptual de este objeto en un punto del dominio donde se define el *CE* como la transformación lineal, (la diferencial de f en a, $Df(a)$), tal que para cada vector v, lo transforma linealmente en el escalar, $Df(a)(v) = \nabla f(a) \cdot v$

Respecto a las soluciones de la Tarea 9, demuestra las características del nivel *Trans 1*, porque comprende la *DICV* como el proceso que, dados un *CV* diferenciable f definido en una abierto A de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, un punto a de A y un vector u en $\mathbb{R}^n$, desencapsula los objetos *DP* y gradiente de un *CE*, para formar la matriz jacobiana cuyos vectores fila son los gradientes de los *CE*, f_i, $i = 1 \ldots m$, que componen el *CV*, evaluados en a, $\nabla f_i(a)$ y que representan la *DICV* como la aplicación que, a cada vector u de $\mathbb{R}^n$, lo transforma linealmente en un vector en $\mathbb{R}^m$, que es igual a la *DD* del *CV* en el punto a en dirección del vector u y se calcula como el producto entre la matriz jacobiana con el vector u.

Del análisis de las tareas 5.d, 5.e, 6.e, 6.f, 9.b y 10, demuestra las características del nivel *Trans*, porque comprende los elementos *DIFR, DIFVR, DICE* y *DICV*, como acciones, procesos u objetos, los representa en forma *G, A, N* y *AN*, establece relaciones entre los elementos internos que los configuran para caracterizar propiedades, demostrando completez y coherencia del esquema de la diferencial de una función en varias variables *DIFVV* cuando resuelve situaciones problemas.

Las características de los niveles de los estudiantes *E1*, y *E2* se exponen en forma sintética en las Tabla 18, Tabla 19 y Tabla 20.

Análisis global de los estudiantes

Después del análisis individual de los estudiantes, se analizó el grupo de manera general de acuerdo con la solución plausible del cuestionario, los desempeños en las tareas, las argumentaciones en las entrevistas, y se clasificó según la triada de los niveles de desarrollo *Intra, Inter* y *Trans.*

Al respecto, se constató que todos los estudiantes recuerdan por lo menos un elemento matemático que configura el esquema de la DIFVV y lo representan de algún modo.

En el nivel *Intra,* los estudiantes establecen relaciones entre los elementos internos del objeto *DIFR* del esquema. Se determinan los siguientes dos subniveles con las respectivas características:

Intra 1. El estudiante recuerda elementos matemáticos de la *DIFR* de manera aislada y en una única forma de representación, la algebraica. Cuando intenta representarlo en otra forma, no logra elaborar relaciones lógicas entre las partes que lo constituyen y además comete errores en las operaciones. El estudiante E8 demuestra estas características.

Intra. El estudiante recuerda, como acción o proceso, elementos matemáticos representados en forma *A* o *G* que constituyen el objeto *DIFR* del esquema de la *DIFVV*. Sin embargo, no logra relacionar la *DIFR* con otros elementos que configuran el esquema. El estudiante *E9* presentó estas características diferenciadoras.

El siguiente nivel de esquema, denominado *Inter*, se caracteriza porque los estudiantes empiezan a establecer relaciones entre el objeto *DIFR* con elementos contiguos. Se determinan los siguientes subniveles:

Inter 1. Los desempeños del estudiante en este nivel demuestran que encuentra la relación de conjunción o implicación lógica entre el objeto *DIFR* con la *DIFVR,* que es comprendida como acción o proceso y es representada en forma *G* o *A*. En este nivel se ubicaron los estudiantes *E5* y *E7.*

Inter 2. Lo característico de este subnivel es que determina la relación de conjunción o implicación lógica entre el objeto *DIFR* con la *DP* o *DD,* comprendidas como acción o proceso y representadas en forma *G, A, N* o *AN*. Además indica esbozos de síntesis al utilizar estas relaciones y objetos para resolver situaciones problema. El estudiante *E6*, por los desempeños demostrados, alcanzó este nivel.

Inter. En este subnivel, los estudiantes relacionan el objeto *DIFR* con el objeto *DICE*, representándolo en forma *G, A* o *N* y lo utilizan para resolver ejercicios y situaciones problema. En este subnivel se ubicó el estudiante *E4*.

Finalmente, en el nivel *Trans*, los estudiantes pueden determinar relaciones (conjunción lógica, condicional, contrarrecíproco, bicondicional) sin muchas restricciones entre los elementos del esquema y producir síntesis entre las representaciones *G, A* y *AN*. En este nivel se caracterizan dos subniveles.

Trans 1. En este subnivel, el estudiante logra originar relaciones entre la *DIFR*, la *DICE*, la *DP* y la *DD* para generar un nuevo elemento del esquema, la *DICV*. Aquí se ubica el estudiante *E3*.

Trans. Se caracteriza porque el estudiante aplica diferentes relaciones lógicas entre los elementos matemáticos, descubre propiedades de estos e infiere información para resolver situaciones problema, demostrando coherencia y completez del esquema de la *DIFVV*. Además expresa capacidad para sintetizar y generalizar procesos. En este nivel se ubican los estudiantes *E1* y *E2*.

Desarrollo del esquema del concepto de diferencial de una función en varias variables

En esta sección se exponen los niveles y subniveles de desarrollo del esquema de la DIFVV; se describe la comprensión de los elementos matemáticos en términos de acción, proceso, objeto y esquema, las relaciones lógicas que establecen entre estos y las formas de representación.

Nivel Intra.

Los estudiantes que se ubican en este nivel centran sus actuaciones en acciones repetitivas u operaciones entre elementos internos de la diferencial de una función real *DIFR*. Además, no relacionan la *DIFR* con otros objetos del esquema. En este nivel se consideran los subniveles *Intra 1* e *Intra*, caracterizados por los siguientes desempeños de los estudiantes.

Subnivel Intra 1

C1. No recuerda ninguno de los siguientes elementos matemáticos, ni de las partes que lo constituyen: *DIFR, DIFVR, DICE y DICV*.

C2. Recuerda elementos internos que constituyen la *DIFR*, o, la *DIFVR*, o la *DICE,* o la *DICV*, algunos con errores y en un único modo de representación *G, A,* pero sin determinar ninguna relación entre estos.

Subnivel Intra

C1. Recuerda algunos de los siguientes elementos internos de la *DIFR*: función real *FR*; tangente a una función en un punto; incremento de la variable independiente, h; incremento de la función f en el punto a, $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$. Sin embargo, lo hace de forma aislada sin establecer relaciones entre estos y en un único modo de representación.

C2. Realiza acciones con los elementos internos de la *DIFR,* como representar la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$, calcular la pendiente de esta secante, representar la tangente a la función en el punto $(a, f(a))$, hallar la derivada de la función aplicando reglas de diferenciación, encontrar la parte principal del polinomio de Taylor. Sin embargo, no pueden inferir a partir de estas acciones la *DIFR* como proceso u objeto y aplicarlo con éxito en la solución de problemas.

C3. Representa en forma A y G la construcción de la derivada de una *FR,* al relacionar con la conjunción lógica en la expresión (44), los siguientes elementos internos que la constituyen: la función f real de variable real *FR;* incremento de la variable independiente, h; incremento de la función f en el punto a, $\Delta f(a)$. Luego ejecuta la acción de evaluar el límite cuando $h \to 0$ del cociente según (44) y obtiene la siguiente implicación lógica: si el límite existe, entonces la derivada de f en a existe y se nota como $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(a)}{h} \qquad (44)$$

Posteriormente, mediante la ecuación (45) relacionan la derivada $f'(a)$ y el cociente de incrementos.

$$E_a : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$h \mapsto E_a(h) = \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a), & si\ h \neq 0 \\ 0, & si\ h = 0. \end{cases} \qquad (45)$$

Finalmente, según la ecuación (46) aproxima $f(a+h) - f(a)$, con la aplicación lineal $f'(a)h$ más un error $hE(a,h)$ dado por (45). Verifica la implicación, si $h \to 0$ entonces $hE(a,h) \to 0$ (el error $hE(a,h)$ es de orden menor que h para valores pequeños de h). Si la anterior relación condicional se cumple, entonces concluye que la FR es diferenciable en a y por tanto la DIFR existe y es la transformación lineal, $f'(a)$ la cual aplica el número real h en el real $f'(a)h$

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + hE(a,h). \qquad (46)$$

Además, puede aplicar el concepto *DIFR*, para determinar la diferenciabilidad de una función particular en un punto específico y resolver una situación problema.

El estudiante E9 demostró algunas de estas características, lo que hizo que se ubicara en este subnivel del desarrollo del esquema.

Nivel Inter.

Los estudiantes en este nivel pueden relacionar la *DIFR* con los elementos contiguos, función vectorial de variable real y función real de variable vectorial. Estas relaciones surgen cuando reconocen que la diferenciación se generaliza de *FR* a funciones vectoriales de variable real, como la *DIFR* de cada una de sus componentes.

Además, se dan cuenta que para funciones reales de variable vectorial o campos escalares, los objetos derivada direccional *DD* y derivada parcial *DP* no son una generalización satisfactoria del objeto *DIFR*, porque en este tipo de funciones derivabilidad no implica continuidad. Por tanto, comprenden la *DICE* como una generalización reconstructiva de la derivada de una *FR*, que permite extender la noción de *DIFR* a los campos escalares y así tener una propiedad para garantizar la continuidad de estos objetos en un punto.

Para describir estas generalizaciones y estructurar el análisis de acuerdo con el desempeño de los estudiantes al intentar resolver las tareas, se precisaron los siguientes subniveles del nivel Inter: Inter 1, Inter 2 e Inter, con las siguientes características.

Subnivel Inter 1

C1. Reconocer la *DIFVR* como elemento matemático contiguo a la *DIFR*. Se evidencia cuando el estudiante ha comprendido la función vectorial de variable real *FVR*, definida de un abierto $J \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^m$, como objeto, y la descompone en m *FR* y a cada una de estas le calcula la *DIFR* para construir el elemento contiguo, la diferencial de una función vectorial de variable real *DIFVR* compuesto por las m *DIFR* aplicado a un mismo real.

C2. Establecer relaciones entre los elementos contiguos *DIFR* y *DIFVR*. Se presentan cuando el estudiante ha comprendido los elementos *FR*, *FVR*, *DIFR* y *DIFVR* como procesos u objetos. Los relaciona por la condición lógica, si las *DIFR* que componen la *DIFVR* no son todas cero, entonces realiza acciones que transforman estos elementos para representar en forma *A* el espacio tangente a la *FVR* definido por las ecuaciones paramétricas.

Los estudiantes E5 y E7 demostraron en los desempeños de las tareas y entrevistas la mayoría de estas características, por lo cual se ubicaron en este subnivel.

Subnivel Inter 2

C1. Identificar los elementos matemáticos *DD* y *DP* de naturaleza similar a la derivada de una función real *DEFR*. Ocurre cuando el estudiante extiende el concepto derivada de una *FR* a campos escalares y vectoriales para calcular la derivada direccional (*DD*) o parcial (*DP*) en diferentes formas de representación.

C2. Generalizar los procesos de derivación de una *FR* a un *CE* o un *CV*. Se manifiesta cuando relaciona los elementos *DIFR, DD, DP* y logra generalizarlos en el proceso que calcula la derivada de una función en varias variables en un punto respecto a un vector dirección, y comprende esta derivada como una transformación, que cuando tiene la propiedad de ser lineal, se puede calcular como el producto interior del vector gradiente evaluado en el punto con un vector dirección de $\mathbb{R}^n$, y además, utiliza este concepto para resolver situaciones problema.

El estudiante *E6*, según las actuaciones en las tareas del cuestionario y en las entrevistas, demostró las características de este nivel.

Subnivel Inter

C1. Reconocer propiedades de continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad de los elementos matemáticos *FR* y *CE*. Se manifiesta cuando reflexiona sobre la relación, derivabilidad implica continuidad, que se cumple para *FR*; esta no se verifica para campos escalares y vectoriales. Por tanto, debe extender el concepto de *DIFR* a la *DIC*E, para garantizar la continuidad del *CE*.

C2. Establecer relaciones entre elementos matemáticos internos que configuran la *DICE*. Cuando reconoce los siguientes elementos: *CE*, transformación lineal $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y los relaciona mediante la función definida en (47).

$$E_a: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,,$$
$$v \;\to E_a(v) = \begin{cases} \dfrac{f(a+v) - f(a) - T_a(v)}{\|v\|_n}, si\ v \neq 0 \\ 0, \qquad Si\ v = 0 \end{cases} \qquad (47)$$

Con las anteriores relaciones se genera otra, descrita por la expresión (48), la cual permite concluir que si existe la transformación lineal T_a y la función $E(a, v)$ de tal manera que para $\|v\| < r,\ r > 0$, $E(a, v) \to 0$ cuando $v \to 0$, entonces el campo escalar f es diferenciable en un punto a.

$$f(a+v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|E(a, v). \qquad (48)$$

Además, se puede sintetizar el proceso anterior como equivalente de verificar que si se cumplen las relaciones descritas por (49), entonces el campo escalar f es diferenciable en a.

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{f(a+v)-f(a)-T_a(v)}{\|v\|} = 0. \qquad (49)$$

Por otra parte, genera nuevas relaciones entre la diferencial T_a con las derivadas parciales al determinar que si el campo escalar f es diferenciable en a, entonces $T_a(v) = \nabla f(a) \cdot v$ y puede aplicar este concepto para resolver situaciones problema. En este subnivel se ubicó el estudiante *E4*.

Nivel Trans

En este nivel se caracterizan los estudiantes que logran generalizar el proceso de diferenciación a funciones en varias variables y fijar síntesis en el esquema cuando relacionan elementos matemáticos para hacer inferencias en la solución de situaciones problema. Se determinaron los subniveles *Trans 1* y *Trans* de este nivel, según los siguientes desempeños demostrados.

Subnivel Trans 1

C1. Establecer relaciones entre el elemento matemático *DICE*, comprendido como proceso u objeto, con la *DICV*. Se manifiesta cuando ha entendido el elemento *DICE* como objeto, lo desencapsula en el proceso que verifica si un *CV* es diferenciable en un punto, así: si todos los *CE* que conforman el *CV* son diferenciables en el punto, entonces el *CV* es diferenciable en este. Además, calcula la *DD* del *CV* como el producto de la matriz jacobiana (matriz que representa transformación lineal $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ formada por los m gradientes de los campos escalares que conforman el *CV* evaluados en el punto) por el vector dirección.

C2. Presentar primeros intentos de síntesis entre los elementos matemáticos *DIFR*, *DIFVR*, *DICE*. Ocurre al intentar generalizar los procesos de diferenciación de una *FR, FVR* y *CE* para calcular la *DICV* en un punto, verificando que se cumple la ecuación (50) cuando f es un CV.

$$\lim_{\|v\|_n \to 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - T_a(v)\|_m}{\|v\|_n} = 0. \tag{50}$$

En este subnivel se ubica el estudiante *E3*.

Subnivel Trans

C1. Establecer relaciones lógicas entre los elementos que configuran el esquema de la DIFVV, para inferir propiedades que se describen a continuación:

- En una *FR*, al determinar la siguiente relación lógica bicondicional: la diferencial de una *FR* en un punto es equivalente a la derivada de la función en el punto, (en notación de álgebra proposicional, $p \leftrightarrow q$).
- En una *FR* se cumple la relación condicional lógica, si existe la derivada de la función en un punto, entonces la función es continua en este. Sin embargo, esta relación no se cumple para una FVV y se expresa en forma equivalente como la negación de esta condicional así: existen FVV que poseen derivadas parciales en un punto y no son continuas en este (en notación de álgebra proposicional, $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$).
- Para una FVV no se cumple la propiedad, la derivabilidad implica la diferenciabilidad, expresando este hecho como la negación del condicional así: existen funciones que son derivables en un punto y no son diferenciables en este (en notación de álgebra proposicional, $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$).
- Las FVV satisfacen la relación que diferenciabilidad implica la continuidad TDICO. Se evidencia cuando aplican el contrarrecíproco de esta relación de la siguiente manera: si una función no es continua en un punto, entonces no es diferenciable en este (en notación de álgebra proposicional, $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$).
- La condición suficiente pero no necesaria para que una función sea diferenciable en un punto CSDI, se puede evidenciar si una función es diferenciable en un punto al analizar la existencia de las

derivadas parciales en una vecindad del punto y la continuidad de estas en el punto, en álgebra proposicional $p \rightarrow q$.

- La diferenciabilidad en un punto de una FVV implica la existencia de la derivada direccional en este, cualquiera que sea el vector dirección (TDIDD), y esta derivada es igual al producto del gradiente evaluado en el punto con el vector dirección. Para el caso particular de un CE, la diferenciabilidad en un punto de su dominio implica la existencia de todas las derivadas parciales TDIDP.
- Los recíprocos de los teoremas DIDD y DIDP no se cumplen, cuando justifica que hay puntos del dominio de definición de una FVV donde existen las derivadas cualquiera sea la dirección y, sin embargo, la función no es diferenciable en estos puntos (en notación de álgebra proposicional, $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$). Además, cuando se verifica que la función no es diferenciable en un punto, la derivada direccional en este, cualquiera que sea su dirección, no es igual al producto punto del gradiente calculado en el punto con el vector dirección y, por tanto, esta derivada debe ser evaluada utilizando la definición como el límite del cociente de incrementos.
- Establecer coherencia del esquema de la DIFVV. Se presenta cuando generaliza y sintetiza las propiedades que satisfacen los elementos matemáticos para determinar cuándo una FVV es diferenciable en un punto y precisar su diferencial según de las dimensiones de los espacios entre los cuales esté definida la función como DIFR, DIFVR, DICE y DICE.
- En este nivel se ubican los estudiantes E1 y E2. En la Tabla 20 se caracteriza el desarrollo del esquema de la DIFVV.

Subniveles	*Características*	*Elementos matemáticos y sistemas de representación*
Intra 1	**C1**. No utilizar elementos matemáticos. **C2.** No establecer relaciones entre los elementos matemáticos.	

Subniveles	*Características*	*Elementos matemáticos y sistemas de representación*
Intra	**C1**. Recordar elementos matemáticos internos de la *DIFR*, de forma aislada. **C2.** Establecer relaciones entre los elementos matemáticos internos de la *DIFR*, comprendidos como acciones. **C3.** Recordar y relacionar los elementos matemáticos internos de la *DIFR*.	*Función real (G, A).* *Diferencial de una función real (G):* Derivada de una función como transformación. Incremento de la función. Aproximación del incremento de la función por el diferencial. Error al aproximar el incremento de la función por el diferencial. *Diferencial de una función real (A, AN):* Derivada de una función como una transformación. Incremento de la función. Aproximar el incremento de la función en un punto por la diferencial. Error al aproximar el incremento de la función por el diferencial. Demostración directa de diferenciabilidad. La diferencial como un operador lineal. Condición suficiente de diferenciabilidad.

Tabla 18. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación del nivel Intra 1 e Intra del esquema de diferencial

Subniveles	*Características*	*Elementos matemáticos y sistemas de representación*
Inter 1	**C1**. Reconocer la *DIFVR* como elemento matemático contiguo a la *DIFR*.	*Función real (A).* *Función vectorial de variable real (A).*

Subniveles	*Características*	*Elementos matemáticos y sistemas de representación*
Inter 1 (continuación)	**C2.** Establecer relaciones entre los elementos matemáticos contiguos *DIFR* y *DIFVR***.**	*Diferencial de una función real (A):* Diferencial de una función real como operador lineal. *Diferencial de una función vectorial de variable real (A):* Diferencial de una función vectorial como un operador lineal. Espacio tangente a una función vectorial de variable real en un punto.
Inter 2	**C1**. Identificar los elementos matemáticos *DD* y *DP* de naturaleza similar a la *DEFR*. **C2**. Generalizar los procesos de derivación de una *FR* a un *CE* o un *CV*.	*Campo escalar (G, A, T).* *Derivada parcial (G, A, T, AN):* Derivada parcial como la pendiente de la recta tangente a una curva. Reglas de diferenciación para calcular la derivada. Aproximación de la derivada parcial por diferencias finitas. *Derivada direccional (A, AN):* Derivada direccional como el límite de un cociente de incrementos. Derivada parcial como caso particular de la derivada direccional. Linealidad de la derivada direccional.
Inter	**C1.** Reconocer propiedades de continuidad, derivabilidad y	*Campo escalar (N, A)* *Diferenciabilidad de un campo escalar (A, AN, N):* Derivada de un campo

Subniveles	*Características*	*Elementos matemáticos y sistemas de representación*
Inter (Continuación)	diferenciabilidad de los elementos matemáticos *FR* y *CE*. **C2.** Establecer relaciones entre elementos matemáticos internos de la *DICE*.	escalar como una transformación. Incremento de un campo escalar. Operador derivada de un campo escalar aplicado a un vector. Aproximación del incremento de un *CE* por el operador derivada. Resto de aproximar el incremento del *CE* por el operador derivada. Diferencial de un *CE* como una transformación lineal.

Tabla 19. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación del nivel Inter 1, Inter 2 e Inter del esquema de diferencial de una función en varias variables

Subniveles	*Características*	*Elementos matemáticos y sistemas de representación*
Trans 1	**C1.** Establecer relaciones entre el *DICE*, comprendido como proceso u objeto, con *DICV*. **C2.** Presentar primeros intentos de síntesis entre los elementos matemáticos *DIFR, DIFVR, DICE*.	*Campo vectorial (A).* *Diferencial de un campo vectorial (A):* Derivada de un campo vectorial como una transformación. Incremento de un *CV* en un punto. Resto de aproximar el incremento de un *CV* en un punto por la derivada de un *CV* evaluada en un punto aplicada a un vector. Condición directa para demostrar la diferenciabilidad de un *CV* en un punto. La *DICV*, como una transformación lineal.

Subniveles	*Características*	*Elementos matemáticos y sistemas de representación*
Trans	**C1**. Establecer relaciones lógicas entre los elementos que configurar la *DIFVV* para inferir propiedades. **C2**. Establecer coherencia del esquema de la *DIFVV*	*Diferencial de una función en varias variables (A, AN).* Condición directa para mostrar que una función es diferenciable. Condición suficiente de diferenciabilidad. Diferenciabilidad implica continuidad. Diferenciabilidad implica la existencia de la derivada parcial. Diferencial de una función real de variable real. Diferencial de una función vectorial de variable real. Diferencial de un campo escalar. Diferencial de un campo vectorial.

Tabla 20. Características, elementos matemáticos y sistemas de representación que caracterizan el nivel Trans 1 y Trans del esquema de diferencial de una función en varias variables

El paso del nivel *Intra* al *Inter* se da cuando el estudiante desencapsula el objeto *DIFR* en procesos para realizar síntesis, generar nueva información para calcular derivadas de funciones vectoriales de variable real y de funciones reales de variable vectorial.

El paso del *Inter* al *Trans* se percibe cuando el estudiante desencapsula la *DICE* y aplica procesos para calcular la derivada de un campo vectorial y la derivada de una función en varias variables.

En la Tabla 21 se expone el resumen de las características, marcadas con *X*, que mostraron los estudiantes y que permitió ubicarlos en los niveles de desarrollo del esquema, donde se puede apreciar lo siguiente:

- Los estudiantes se clasificaron en los diferentes niveles de desarrollo, dependiendo del número de elementos matemáticos que recordaron, las relaciones que determinaron entre estos y las formas de representación, cuando intentaron resolver las tareas diseñadas para requerir cierta información para la solución (en términos de las estructuras mentales como acción, proceso u objeto de los conceptos de DIFR, DIFRV, DICE o DICV), y que caracterizaban cada nivel.
- Los estudiantes E5, E6, E7 y E8 recuerdan elementos matemáticos de manera aislada, porque presentan características en forma discontinua en los diferentes niveles de desarrollo.
- La diferencia en los niveles de desarrollo del esquema de los estudiantes se presenta porque algunos solo recuerdan los elementos matemáticos, mientras que otros, además de recordarlos, los pueden relacionar y utilizar.
- Existen diferencias dentro de un mismo nivel (Inter, Intra o Trans) por la cantidad de elementos matemáticos que utilizan de forma correcta y por las relaciones lógicas que establecen entre estos para resolver las tareas.
- A los estudiantes que tienen facilidad para comprender los elementos matemáticos en diferentes formas de representación, también se les facilita determinar relaciones lógicas y resolver situaciones problema. Sin embargo, se nota una tendencia a utilizar la representación algebraica, así como a emplear fórmulas y expresiones, pero cuando las funciones están representadas en forma numérica o tabular, tienen dificultad para interpretar los conceptos y resolver problemas.

Niveles	*Intra*					*Inter*						*Trans*			
Subnivel	*Intra 1*		*Intra*			*Inter 1*		*Inter 2*		*Inter*		*Trans 1*		*Trans*	
Estudiante	*C1*	*C2*	*C1*	*C2*	*C3*	*C1*	*C2*	*C1*	*C2*	*C1*	*C2*	*C1*	*C2*	*C1*	*C2*
E1			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
E2			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
E3			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X		
E4			X	X	X	X	X	X	X	X	X	X			
E5			X		X	X	X	X				X			
E6			X					X	X						
E7			X	X	X	X		X							
E8			X	X	X										
E9		X													

Tabla 21. Estudiantes y características según niveles de desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables.

CONCLUSIONES

Sobre el fenómeno de la comprensión

El estudio de la comprensión de la diferencial de una función en varias variables es complejo, debido, entre otros aspectos, a su carácter formal, a la cantidad de elementos y relaciones que lo configuran, a los diferentes sistemas de representación utilizados y a los esquemas previos requeridos (espacios vectoriales, producto interior, normas, función, límite, continuidad, derivabilidad). Sin embargo, para controlar esta complejidad se adoptó el marco teórico y metodológico APOE, de corte constructivista, que permite describir y explicar el desarrollo del esquema de este concepto.

Al respecto, el desarrollo del esquema en este enfoque teórico se expresó por niveles de comprensión, que se fijaron teniendo como referencia la triada *Intra*, *Inter* y *Trans*[105], de acuerdo con las características que manifestaron los estudiantes que participaron en la investigación, en los desempeños de las tareas y en las entrevistas, al construir y representar en forma gráfica, algebraica, numérica y analítica, los elementos matemáticos y sus relaciones. La comprensión de los elementos matemáticos se reflejó en términos de las estructuras mentales de acción, proceso, objeto y esquema. Las relaciones entre los elementos son el resultado de activar mecanismos para interiorizar acciones, coordinar o invertir procesos, encapsular procesos en objetos, desencapsular objetos en procesos, organizar las estructuras en el esquema y tematizar el esquema en un nuevo objeto, la diferencial de una función en varias variables.

En relación con investigaciones sobre conceptos previos a la diferencial, como la comprensión de funciones en dos variables[106],

[105] Ilana Arnon y otros, *op. Cit.* p 114-118.

[106] Rafael Martínez-Planell, María Trigueros, "Students' understanding of the general notion of a function of two variables", *Springer Science+Business Media* B.1. 2012,3

estas reportan que este concepto tiene muchas sutilezas, por tanto se deben utilizar varias formas de representación que favorezcan su aprendizaje. Estas dificultades se presentaron en esta investigación para graficar e interpretar planos, rectas secante y tangente, curvas parametrizadas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, campos escalares definidos en dominios de $\mathbb{R}^2$ e intersección de planos con superficies.

En relación con investigaciones sobre la comprensión de la diferencial de una función real de variable real, que es equivalente a la derivada, se observaron dificultades en los estudiantes para interpretar el concepto en forma algebraica, gráfica y analítica. Estas dificultades también se evidenciaron en esta investigación en las características del nivel *Intra* del esquema y en el paso de este a los niveles *Inter* y *Trans*, para comprender la diferencial de funciones vectoriales de variable real, de campos escalares y de campos vectoriales.

Además, se constató la presencia de obstáculos epistemológicos que se caracterizan porque propiedades que se cumplen en contextos restringidos para funciones en una variable, no se cumplen para funciones en varias variables, como la derivabilidad, que implica continuidad y criterios para la existencia de límite de una función en un punto.

Por otra parte, desde el punto de vista histórico, para la comprensión, formalización y definición del concepto de diferencial de una función en varias variables, la humanidad tardó varios siglos para desentrañar sus particularidades. Al respecto, se destacan los siguientes aportes, algunos de los cuales causaron pasión y controversia tanto para la comunidad matemática, como para su enseñanza y aprendizaje.

NEWTON define las variables denominadas fluyentes, como las generadas por el movimiento de puntos, rectas y planos, diferente a la concepción de elementos estáticos; las considera como infinitesimales y las nota como x e y. Al cambio relativo de la fluyente con respecto al tiempo lo denomina fluxión por su carácter físico, y lo representa por $\dot{x}$ e $\dot{y}$.

LEIBNIZ define los diferenciales como cantidades arbitrariamente pequeñas, con una visión dinámica; cantidades que tienden a cero, que se pueden hacer tan pequeñas como se quiera. La notación dy/dx, combina una percepción primitiva y una cierta referencia del paso a límite abstracto, implícito en el concepto de diferencial.

EULER enuncia la forma de calcular la diferencial de una función de dos variables, considerando las derivadas parciales como un paso intermedio para este fin.

CAUCHY define la diferencial como el producto de la derivada por un incremento arbitrario de la variable independiente.

FRÉCHET introduce el concepto de diferencial en su interpretación moderna, en términos de transformaciones lineales. La diferencial df, consiste en exigir que $\Delta f(a) - df(a)\Delta x$ sea infinitamente pequeño respecto a Δx. Por tanto, lo que es infinitamente pequeño respecto a Δx no es la diferencial, sino su diferencia con el incremento $\Delta f - df$.

Sobre el análisis del concepto

La génesis del concepto de diferencial contribuyó a la solución de los problemas clásicos del siglo XVII (calcular el ritmo de cambio, encontrar la tangente a una curva dada, calcular valores máximos y mínimos de una función, calcular sumas infinitas) y motivó a la comunidad matemática a su invención, a dotarlo de rigor, formalizarlo y socializarlo. Lo anterior incidió en el desarrollo del análisis funcional, la física matemática y sus importantes aplicaciones en áreas afines.

Al respecto, el concepto de diferencial está estrechamente relacionado con la derivada. En funciones reales de variable real, los dos conceptos son equivalentes, por tanto, la complejidad en la investigación sobre la comprensión de la diferencial y la derivada de este tipo de funciones es similar.

Sin embargo, al extender el concepto derivada a funciones en varias variables, carece de sentido hallar los cocientes incrementales de estas aplicaciones y, por lo tanto, no es posible generalizar el concepto de derivada en esos términos, lo que sí es posible es generalizar el concepto de derivada a subespacios de dimensión uno.

Aparece así el concepto de derivada direccional y, como caso particular, el concepto de derivada parcial.

Así que, para generalizar el proceso de derivación a funciones en varias variables, surgió el concepto de diferencial, que estudia la variación de una función en relación con incrementos de las variables independientes cuando estos son pequeños o, aún mejor, cuando ellos tienden a cero.

En relación con este concepto, intuitivamente una función es diferenciable en un punto particular de esta, si en cercanías del punto en consideración se comporta de manera similar a una función lineal, es decir, en una vecindad del punto se puede aproximar muy bien por una función lineal. Si la similitud con lo lineal se produce cuando se incrementa una sola de sus variables, se dice que la función es derivable respecto de ella; si la casi linealidad lo es respecto a la variación conjunta de todas las variables, se dice que la función es diferenciable.

Por tanto, para formalizar las nociones intuitivas de la diferencial, se establecieron los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los registros de representación, que caracterizan el esquema del concepto diferencial y son referentes para estudiar su comprensión.

Elementos matemáticos

Los siguientes son los elementos matemáticos que configuran la $DIFVV$:

Derivada direccional (DD), derivada parcial (DP), función derivable en un punto (FDE), diferencial de una función de variable real ($DIFR$), diferencial de una función vectorial de variable real ($DIFV$), diferencial de un campo escalar ($DICE$), diferencial de un campo vectorial ($DICV$), diferencial de una función en varias variables ($DIFVV$).

Relaciones lógicas

Para establecer relaciones entre los elementos matemáticos que configuran la diferencial, se fija un abierto A, subconjunto de $\mathbb{R}^n$, un punto a de A y una función f, definida de A en $\mathbb{R}^m$, con m y n

naturales. Sobre estos elementos, a continuación se presentan las relaciones lógicas que permiten hacer inferencias acerca de la diferenciabilidad.

Conjunción lógica $(p \wedge q)$

Afirmar que la función f es diferenciable en a, es equivalente a las siguientes declaraciones, las cuales, a su vez, son equivalentes entre sí:

Existe una aplicación lineal, de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, que se denota por $Df(a)$ y se denomina diferencial de f en a, tal que,

$$\lim_{\|v\|_n \to 0} \frac{\|f(a+v) - f(a) - T_a(v)\|_m}{\|v\|_n} = 0.$$

Existe una aplicación lineal, $Df(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y una función $E(a,h)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, tales que cuando $\|h\| \to 0$,

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \|h\|E(a,h), \text{ y, } \lim_{h \to 0} E(a,h) = 0.$$

Condicional (p →q)

Condición de derivabilidad (CD). Si existen todas las derivadas parciales de f en a, entonces f es derivable en a.

Condición suficiente de diferenciabilidad (TCSDI). Si las derivadas parciales existen en una vecindad del punto a y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.

Diferenciabilidad implica continuidad (TDICO). Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es continua en a.

Frecuentemente se utiliza el contrarrecíproco de esta relación en el siguiente sentido: si una función f no es continua en un punto a, entonces f no es diferenciable en a.

La diferencial implica existencia de las derivadas direccionales (TDIDD). Si f es diferenciable en a, entonces existe la derivada direccional para cualquier vector dirección u en $\mathbb{R}^n$, en particular f es derivable en a.

La diferenciabilidad de un campo escalar implica la existencia de las derivadas parciales (TDIDP).

Función de clase C^1 implica ser diferenciable (*CC1DI*).

Registros de representación.

Los registros para representar los elementos matemáticos y evidenciar su comprensión son los siguientes.

Analítico. Relacionado con las definiciones verbales de los conceptos, los axiomas o postulados considerados como verdades, las relaciones y propiedades que se establecen entre los elementos matemáticos expresados a través de los teoremas, las consecuencias de los teoremas o corolarios con las demostraciones correspondientes utilizando el razonamiento lógico.

Algebraico. Relacionado con expresiones algebraicas, las fórmulas, operaciones y algoritmos.

Gráfico. Relacionado con los dibujos, gráficas de funciones y figuras.

Verbal. Relacionado con descripciones en lenguaje natural de los conceptos.

Numérico. Relacionado con tablas, métodos y algoritmos numéricos.

Computacional. Conjunto de instrucciones (declaraciones) según la sintaxis de un lenguaje de programación, para que el computador pueda entender y ejecutar. A través de estas instrucciones se representan acciones, procesos, objetos y esquemas.

Implicaciones en la enseñanza

El enfoque APOE que se siguió para esta investigación, es un modelo que satisface los criterios para considerarse como una teoría: poder descriptivo, poder explicativo, alcance, rigor y especificidad, susceptible de falsación, capacidad de replicación y triangulación[107]. Por tanto, este marco teórico y metodológico permitió establecer de

[107] David E. Meel, "Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 6, 2003: 243-244.

manera científica los niveles de comprensión de la diferencial de una función en varias variables.

En este sentido, a partir del análisis del desarrollo histórico de la diferencial, de la presentación de esta en los textos, de la experiencia como docente y estudiante, se propuso una *DG* preliminar del concepto, la cual se puso a prueba en la investigación y, según los resultados obtenidos, se presentó una versión refinada que describe una trayectoria mental que un estudiante debe seguir para comprender el concepto en términos de los mecanismos mentales activados por la abstracción reflexiva para construir los objetos mentales (los elementos matemáticos) y establecer relaciones lógicas entre estos a través de la utilización y coordinación de las representaciones.

Por otra parte, las actividades computacionales diseñadas según la *DG*, al implementarlas y depurarlas en el *software* MATLAB demostraron motivar e inducir al estudiante a utilizar y coordinar representaciones analíticas, algebraicas, numéricas y gráficas, cuando realizaba acciones (instrucciones línea a línea en la ventana de comandos o en programas) sobre objetos previamente construidos, que al repetirlas en diferentes situaciones inducían la interiorización de estas en procesos (elaboración de procedimientos, archivos m-file o *script* de MATLAB). Posteriormente, estos procesos se encapsulaban en nuevos objetos matemáticos (elaboración de funciones) que, al relacionarlos con otros (llamado a funciones previamente construidas), propiciaban inferencias lógicas para construir el esquema y, de esta manera, lograr una mejor comprensión del concepto.

Estas actividades son un complemento de la presentación del concepto en los textos, de las técnicas tradicionales de enseñanza y aprendizaje, caracterizadas por las exposiciones magistrales, ejercicios y evaluación. Además, se aprovechan los recursos humanos, informáticos y tecnológicos disponibles.

Sobre el desarrollo del esquema

En el capítulo anterior se caracterizó el desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, a través de los distintos subniveles, en estudiantes que habían participado de un ciclo de instrucción *ACE* de cálculo multivariable. De manera similar que en el trabajo sobre el desarrollo del esquema de la derivada[108] y la comprensión de la integral definida[109] en el análisis de los instrumentos de recogida de la información y de los instrumentos teóricos, se comprobó que la construcción del conocimiento es progresiva y continua, y que el paso de un subnivel al siguiente se evidencia por las relaciones lógicas que el sujeto es capaz de establecer entre los elementos matemáticos que conoce y lo que sabe hacer con estos elementos en la resolución de las distintas tareas.

El primer intento de relacionar los elementos matemáticos es a través de la "conjunción lógica", siendo esta el primer tipo de relación que, con frecuencia y de manera correcta, establecen los estudiantes; como se evidencia con el estudiante *E1*, cuando justifica en la entrevista la diferenciabilidad de una función real correspondiente a la Tarea 1.b.

La "implicación lógica" es otra relación que frecuentemente utilizan los estudiantes en sus inferencias, como se demostró cuando los estudiantes *E1* y *E2* resolvieron las tareas 5 y 6, para determinar si la función f, definida por secciones, es diferenciable en (0,0), y cuando el estudiante *E1* justificó la diferenciabilidad de un campo vectorial en un punto, en la Tarea 9.

La relación de "contrarrecíproca" solo se manifiesta por pocos estudiantes, como se puede evidenciar en el desempeño del estudiante *E2* en la solución de la Tarea 5.c, para determinar si la función del ejemplo es continua en un punto.

Los elementos matemáticos que utilizan los estudiantes, en general, son los mismos, aunque varían de un estudiante a otro en el

[108] Gloria Sánchez-Matamoros, Mercedes García Blanco y Salvador LLinares, "El desarrollo… 7.
[109] Eliécer Aldana, *Comprensión de la integral…* 392.

desempeño de las tareas del cuestionario; los elementos matemáticos que comúnmente recuerdan son "derivada o diferencial de una función real de variable real", "derivada parcial", "derivada direccional"; con los que tienen más dificultad son "diferencial de una función vectorial de variable real", "diferencial de un campo escalar" y "diferencial de un campo vectorial"; algunos de estos elementos se recuerdan de forma incorrecta o con errores en los elementos que los configuran, como se describe a continuación.

Respecto a la diferencial de una función real de variable real, los estudiantes calculan la derivada de la función definida por la expresión algebraica y la evalúan en un punto aplicando teoremas de diferenciación; sin embargo, tienen dificultades para representar gráficamente los elementos que constituyen la diferencial, como la tangente a la curva en un punto, el incremento de f en a, $\Delta f(a) = f(a+h) - f(a)$; la diferencial de f en a aplicada a h, $(f'(a)h)$ y el error, $hE(a,h) = \Delta f(a) - f'(a)h$.

Algunos estudiantes presentan dificultades para distinguir las propiedades de derivabilidad, diferenciabilidad y transformación lineal de una función diferenciable real de variable real en un punto. Por ejemplo, el estudiante *E9* tiene la concepción que para esta clase de funciones diferenciabilidad es equivalente a derivabilidad y que la derivabilidad implica continuidad. Sin embargo, no tiene una imagen clara de la derivada como el límite del cociente incremental en un punto y la diferencial como una transformación lineal.

En relación con la derivada direccional, mostraron dificultad para determinar en qué casos es conveniente aplicar la definición como el límite de incrementos o como el producto interior de la diferencial evaluada en el punto por el vector dirección, que es válida únicamente cuando la función es diferenciable en el punto. Esta dificultad surgió porque no lograron establecer la relación que para funciones en varias variables la derivabilidad no implica la diferenciabilidad; como en el caso del estudiante *E5*, quien describió de manera equivocada el cálculo de la derivada direccional de una función que no es diferenciable en el origen, según la Tarea 6 del cuestionario.

Respecto a las derivadas parciales, ellos demuestran facilidad para calcularlas y evaluarlas en un punto, aplicando reglas de diferenciación o evaluando el límite de incrementos. Sin embargo, cometen errores y tienen dificultades para interpretarlas como las pendientes de rectas tangentes o como razón de cambio de la función en el punto respecto a la variable que se está derivando. Lo anterior se pudo observar en el estudiante *E5* cuando describió cómo resolvió la Tarea 3 del cuestionario, pues cometió errores para ubicar los puntos en la gráfica de la función, identificar las secantes con sus respectivas pendientes y el límite de estas cuando tienden a la tangente, con pendientes expresadas por las derivadas parciales.

Además, cuando una función en varias variables está representada en forma tabular y no se muestra la expresión algebraica que la define para estimar aproximaciones de sus derivadas parciales en un punto, varios estudiantes tienen dificultades para identificar las cantidades que permanecen constantes y las que cambian, los incrementos de dichas variables, para formar cocientes que representan las tasas medias de variación de la función respecto a una variable y su interpretación al contexto que define la función. Por tanto, no pueden hacer traducciones entre los registros que representa la función (tabular, algebraico y analítico). Una situación es la del estudiante *E7* sobre la Tarea 4.b, cuando, a pesar de calcular las tasas medias de variación de la función, definida en forma tabular, no puede describir el significado de la aproximación de la derivada parcial, según el contexto del problema.

Lo anterior incide en la dificultad para aproximar el valor de un campo escalar en un punto no registrado en la tabla de valores, aplicando el concepto de diferencial de un campo escalar utilizando la parte principal del polinomio de Taylor de primer grado. Esto se evidencia en el desempeño del estudiante *E3*, al resolver la Tarea 4.c, cuando intenta comprender la *DICE* como acción al aproximar $h(43,17)$ por el promedio de los valores $h(40,15)$ y $h(50,20)$, como cotas superior e inferior de la función en el punto en consideración. Para esto aproxima las *DD* como tasas de variación media en estos puntos, pero no logra identificar los elementos ni las relaciones establecidas en la parte principal del polinomio de Taylor para encontrar la mejor aproximación, además comete errores en las operaciones.

Respecto a la diferencial de un campo escalar, los estudiantes demostraron habilidad para aplicar acciones, reglas de diferenciación para calcular las derivadas parciales o evaluar límites de cocientes incrementales. Sin embargo, tuvieron dificultades para determinar la conveniencia de su aplicación en situaciones cuando las funciones estaban definidas por secciones en forma algebraica y no lograron establecer relaciones entre límite, continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad.

Los estudiantes *E7* y *E9*, en la solución de la Tarea 5.d, no comprendieron la noción de continuidad como un proceso que resulta de la coordinación de los procesos de evaluar el límite de la función en un punto y de verificar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Además, utilizaron la condición que diferenciabilidad implica la continuidad, pero no explicaron cómo se deduce la diferenciabilidad.

Además, el estudiante *E6*, en la Tarea 5.c, para determinar la diferenciabilidad de la función en un punto de forma directa, realizó la acción de evaluar el límite del cociente del resto (la diferencia del incremento de la función en el punto con la diferencial aplicada al incremento de la variable independiente) entre la norma del incremento de la variable independiente, pero no interiorizó que si este límite es cero, entonces la función es diferenciable.

Los errores y las dificultades descritas anteriormente demuestran que algunos estudiantes aplican de manera mecánica y algorítmica reglas para hallar derivadas totales y parciales de funciones, calcular gradientes, jacobianos, aplicar teoremas fundamentales sobre la diferencial de una función en varias variables. Sin embargo, no establecen para qué clase de funciones y en cuáles puntos se pueden aplicar, no tienen en cuenta la representación de la función, no interpretan y utilizan estos conceptos para resolver situaciones problema. Esto concuerda con los resultados encontrados en el estudio acerca de concepciones y dificultades sobre los diferenciales[110].

Por lo tanto, se sugiere para la enseñanza de estos conceptos, presentar y analizar, en diferentes formas de representación, variedad de ejemplos y contraejemplos de funciones, en los cuales se pueda evidenciar que no se preservan ciertas propiedades de funciones reales de variable real a funciones en varias variables, situaciones que motivaron la generalización del proceso de derivación al de diferenciación.

Respecto al desarrollo del esquema de la diferencial de una función en varias variables, los siguientes niveles y subniveles están caracterizados por la comprensión como objeto de los respectivos elementos matemáticos que se enuncian a continuación: *Intra*, la función real de variable; *Inter 1*, la diferencial de una función vectorial de variable real; *Inter 2*, la derivada parcial y derivada direccional; *Inter*, la diferencial de un campo escalar; *Trans 1*, la diferencial de un campo vectorial; y *Trans,* la diferencial de una función en varias variables, estableciendo relaciones lógicas entre los objetos previamente construidos, que configuran y dan completez al esquema.

Limitaciones y perspectivas futuras

Una limitación en el desarrollo de las actividades computacionales basadas en la DG es la dificultad de los estudiantes para familiarizarse con el *software*, en particular con la sintaxis y el razonamiento lógico para dar las instrucciones o elaborar los programas. Sin embargo, estas dificultades se compensan con la posibilidad de construir y manipular con cierta facilidad y autonomía objetos y gráficas bidimensionales y tridimensionales, realizar cálculos numéricos para representar e inducir la noción de infinitesimales, el orden de los infinitesimales y la aproximación del límite de funciones, lo cual permite que el estudiante descubra y construya su propio conocimiento e interactúe con sus compañeros como una posibilidad para fomentar el aprendizaje colaborativo.

[110] Michele Artigue, "Analysis"... 183-184.

Como el computador es una máquina discreta, los procesos de límite, que son dinámicos, son simulados por cantidades pequeñas pero estáticas, a través de los límites de cocientes incrementales, y las derivadas, por diferencias finitas. Por tanto, las actividades están orientadas a realizar representaciones aproximadas de la diferencial y la derivada. Se sugiere complementarlas con actividades sin utilizar el computador.

Para continuar con la investigación se proponen las siguientes fases:

Desarrollar esta propuesta con otros grupos de estudiantes, para proseguir con el refinamiento de la descomposición genética del concepto.

Utilizar este proceso investigativo en otros temas del pensamiento matemático avanzado que presentan dificultades en su comprensión, a fin de procurar mejores desempeños de nuestros estudiantes y contribuir a la investigación en educación matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Libros

Aldana Bermúdez, Eliécer. *Comprensión de la integral definida en el marco de la teoría "APOE"*. Tesis de Doctorado, Universidad de Salamanca, 2011.

Apostol, Tom M. *Calculus. Introducción, con vectores y geometría analítica.* Barcelona: Reverté, 1961.

Apostol, Tom M. *Calculus. Cálculo con funciones de varias variables y álgebra lineal, con aplicaciones a las ecuaciones diferencial y a las probabilidades.* Barcelona: Reverté, 1988.

Arnon, Ilana y otros. *APOS Theory, A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York: Springer Science, 2014.

Artigue, Michèle. "Analysis". En *Advanced Mathematical Thinking*, editado por David Tall. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002, 188-196.

Artigue, Michèle. "The Notion of Differential for Undergrate Students in Science", en *Proccedings of the Xth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Matematic Education*, 229-234. London: University of London, Institute of Education, 1986.

Bartle, Robert. *The Elements of Real Analysis.* New York: Jhon Wiley & Sons, 1975.

Bernal, César Augusto. *Metodología de la investigación*. México: Prentice Hall, 2006.

Bisguerra Alzina, Rafael, Inma Dorio Alcaráz, Inés Massot Lafot y Marta Sabariego Puig. "Características generales de la metodología cualitativa". En *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla. S.A., 2009.

Dubinsky, Ed. “Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking”. En *Advanced Mathematical Thinking*, editado por D. Tall. New York: Kluwer Academic Publishers, 2000, 95-123.

Galindo, Félix, Javier Sanz y Luis A. Tristán. *Cálculo infinitesimal en varias variables. Guía practica.* Madrid: Paraninfo, 2005.

Harel, Guershon y David Tall. "The General Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics". En *For the Learning of Mathematics.* Alberta: H.M. Publishing Association, 1991, 38-42.

Poincaré, Henri. *The Foundations of Science,* trad. Halsted G.B. New York: The Science Press, 1982.

Kline, Morris. *El pensamiento matemático de la antiguedad hasta nuestros dias, I y II.* Madrid: Alianza Editorial, 1972.

López-Gay, Lucio y Rafael Villegas. "La introducción y utilización del concepto de diferencial en la enseñanza de la física. Análisis de la situación actual y propuesta para su mejora". Tesis de Doctorado, Universidad Autónoma de Madrid, 2001.

Piaget, Jean. *Psicología y pedagogía.* Buenos Aires: Ariel, 1980.

Piaget, Jean. *The Principles of Genetic Epistemology,* trad. W. Mays. London: Neubauer, P. B., 1972.

Piaget, Jean y Rolando García. *Psicogénesis e historia de la ciencia.* Madrid: Siglo Veintiuno Editores, 1983.

Piaget, Jean. *The Equilibration of Cognitive Structures,* trad. T. T. Brown. Cambridge: Harvard University Press, 1985.

Stewart, James. *Cálculo multivariable.* Mexico: Thompson. Learning, 2002.

Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Tall, David. “The psychology of advanced mathematical thinking”. En *Advanced mathematical thinking*, editado por D. Tall. Dordrecht: Kluwer, 1991, 3-21.

Thomas, George, Ross L. Finney y Maurice D. Weir. *Cálculo varias variables.* México: Addison Wesley, 1999.

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas y Estadística, *Proyecto Académico Educativo-PAE Matemáticas.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2010.

Artículos de Revistas

Asiala, Mark, Anne Brown, David DeVries y Ed Dubinsky. "A Framework for Research and Development in Ungraduate Mathematics education". *Research in Collegiate Mathematics Education. CBMS Issues in Mathematics,* 6, 1996: 1–32.

Ayers, Thomas, George Davis, Ed Dubinsky y Philip Lewin. "Computer Experiences in Learning Composition of Functions". *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 1988: 246-259.

Baker, Bernadette , Laurel Cooley y María Trigueros. "A Calculus Graphing Schema". *The Journal for Research in Mathematics Educations*, 31, 2000: 557–578.

Fréchet, Maurice, "Sur la notion de différentielle", *Journal de Mathématiques*, XVI, 1937: 233-250. [Mi traducción].

Gómez Fuentes, Pablo Ignacio y Juan Raúl Delgado Rubí. "La diferenciabilidad de funciones en varias variables, una propuesta de tratamiento metodológico". *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 25, 2012: 603-6013.

Martínez-Planell, Rafael y María Trigueros Gaisman. "Students' Understanding of the General Notion of a Function". *Springer Science+Business Media B.V. Educ Stud Math,* 5, 2012: 76-80.

Meel, David E. "Modelos y teoría de la comprensión matemática, comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE". *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 6, 2003: 221-271.

Sánchez-Matamoros García, Gloria, Mercedes García Blanco y Salvador Llinares Ciscar. "El desarrollo del esquema de derivada". *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 24, 2006: 85-98.

Suárez Aguilar, Zagalo. "Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto diferencial de una función en varias variables". *Investigación Desarrollo e Innovación*, 6, 2015: 45-60.

Trigueros Gaisman, María. "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior". *Educación Matemática*, 17, 2005: 5-31.

Weller, Kirk, Julie Clark, Ed Dubinsky y S. Loch. "Student Performance and Attitudes in Courses Based on APOS Theory and the ACE Teaching Cycle". *Research in Collegiate Mathematics Education V. CBMS Issues in Mathematics Education*, 12, 2003: 97–131.

Consultas de Internet

Programa de Matemáticas. Comité Curricular. "Página Institucional Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. UPTC". Programa Académico Matemáticas. http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/facultades/f_ciencias/pregrado/matematicas/inf_general/document/IV/calculo_multivariable.pdf (consultado el 12 de agosto de 2017).

Documento legal

Resolución 6339/2013, del 23 de mayo, del Ministerio de Educación Nacional, Por medio de la cual se resuelve la solicitud de renovación de registro calificado del programa de Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia ofrecido bajo la metodología precencial en la ciudad de Tunja-Boyacá.

Se terminó de imprimir esta obra, en los
Talleres Gráficos de SB Digital, en la histórica
y culta ciudad de Tunja, en el año 2019, con
una edición de 200 ejemplares.