

2

CONOCIMIENTO PROBABILÍSTICO USUAL EN SIMULACIÓN

Diversos procesos de simulación con modelos aleatorios se desarrollan tomando como base los conceptos de variable aleatoria, de función de distribución y de sus principales momentos, entre los que se destacan el valor esperado, la varianza, la asimetría y la curtosis; conceptos que se exponen en este capítulo, como segunda parte del marco conceptual para la simulación; también se presentan los fundamentos teóricos de cinco de los métodos de simulación más utilizados y del método de Monte Carlo. Para formalizar los citados conceptos, se requiere definir elementos como: experimento aleatorio, sigma álgebra (σ – álgebra), medida de probabilidad y espacios de probabilidad, entre otros; estos elementos se han adaptado a este contexto a partir de la literatura existente y se explicitan en las secciones iniciales del presente capítulo.

2.1 Elementos de probabilidad

En esta sección se abordan los conceptos de experimento aleatorio, sigma álgebra y medida de probabilidad; así mismo, se mencionan algunas propiedades de las operaciones con eventos, las cuales posibilitan el cálculo de probabilidades.

2.1.1 Experimento aleatorio

Un experimento aleatorio es aquel cuyos resultados no pueden ser determinados de antemano (Blanco, 2004). Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le conoce con el nombre de espacio muestral, que suele denotarse con Ω . El espacio muestral Ω se llama *discreto* si Ω es un conjunto finito o numerable, y *continuo* si Ω corresponde a un conjunto infinito no numerable. Un subconjunto T de Ω para el cual sea posible asignar una *medida* numérica de su posibilidad de ocurrencia se denomina *evento* o *suceso*.

2.1.2 Sigma álgebra

Dado un espacio muestral $\Omega \neq \emptyset$. Una familia \mathfrak{T} de subconjuntos de Ω se llama un σ -álgebra sobre Ω , si se cumplen los siguientes axiomas:

1. $\Omega \in \mathfrak{T}$
2. Si $T \in \mathfrak{T}$ entonces $T^c \in \mathfrak{T}$
3. Si $T_1, T_2, \dots \in \mathfrak{T}$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i \in \mathfrak{T}$

Si $\Omega \neq \emptyset$ es un espacio muestral y \mathfrak{T} es un σ -álgebra sobre Ω , a la pareja (Ω, \mathfrak{T}) se suele llamar espacio medible. Los subconjunto del espacio medible se denominan eventos.

Un σ -álgebra que se requiere para definir variables aleatorias reales es el σ -álgebra de Borel. Siguiendo a Blanco (2004), el σ -álgebra de Borel es la menor σ -álgebra definida sobre el espacio muestral $\Omega = R$, donde R representa el conjunto de los números reales, la cual contiene a todos los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in R$; ésta se denota con β .

2.1.3 Medida de probabilidad

En concordancia con Lindgren (1993), dado un espacio medible (Ω, \mathfrak{T}) , una función de conjunto definida desde el σ -álgebra \mathfrak{T} hacia el intervalo $[0,1] \subset R$,

$$P : \mathfrak{T} \rightarrow [0,1]$$

es una medida de probabilidad si satisface los siguientes axiomas:

1. $P(T) \geq 0$ para todo $T \in \mathfrak{T}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Si T_1, T_2, \dots es una sucesión de eventos en \mathfrak{T} tales que $T_i \cap T_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ entonces,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(T_n)$$

A la función P se le denomina una medida de probabilidad definida sobre el espacio muestral Ω . A la tripleta ordenada $(\Omega, \mathfrak{T}, P)$ se le llama un espacio de probabilidad sobre Ω .

También de Lindgren (1993) se han extractado las siguientes propiedades, que se mencionan en esta sección debido a que en ellas reposa el cálculo de probabilidades.

Sea $(\Omega, \mathfrak{T}, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω , entonces:

1. Para todo $T \in \mathfrak{F}$ se cumple que $P(T^c) = 1 - P(T)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Para todo $T, S \in \mathfrak{F}$, $P(T \cup S) = P(T) + P(S) - P(T \cap S)$
4. Si $T, S \in \mathfrak{F}$ y $T \subset S$ entonces $P(T) \leq P(S)$
5. Si $P(T) = 0$ entonces $P(T \cap S) = 0$
6. $P(T) = P(T \cap S) + P(T \cap S^c)$
7. Para $T, S \in \mathfrak{F}$ se cumple que,

$$P(T \cap S) \leq P(T \cup S) \leq P(T) + P(S)$$
8. Si $T, S \in \mathfrak{F}$ y $T \subset S$ entonces $P(S - T) = P(S) - P(T)$
9. Si $T_1, \dots, T_n \in \mathfrak{F}$ y $T_i \cap T_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n T_i\right) = \sum_{i=1}^n P(T_i)$$

2.2 Variable aleatoria real

Una variable aleatoria real es una aplicación definida desde el espacio muestral hacia el conjunto de los números reales de la siguiente forma:

$$X: \Omega \rightarrow R$$

de modo que para todo evento T en el σ - álgebra de Borel se tiene que

$$X^{-1}(T) \in \mathfrak{F}$$

En general, una variable aleatoria X es una aplicación que tiene la propiedad de ser una función medible. En sí, el espíritu de las variables aleatorias es el de transformar los elementos de un espacio de probabilidad en números reales; esto debido a que en la mayoría de los casos son de interés los valores numéricos que se puedan deducir de un experimento aleatorio enmarcado en un determinado contexto.

En los términos de Valdivieso (2010), dada X , una variable aleatoria definida sobre un espacio muestral Ω , y R_X su rango en R . Si R_X es un conjunto contable (discreto), un conjunto finito o infinito contable, entonces X se denomina variable aleatoria discreta. Si R_X es un subconjunto no contable (infinito no contable) de R , entonces X es una variable aleatoria continua. De manera intuitiva, el rango de una variable aleatoria continua corresponde a un intervalo.

Es pertinente aclarar que los procesos de simulación que incluyen variables aleatorias continuas utilizando números aleatorios provenientes de una distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ implican el uso de procedimientos que trabajan con muestras de las señales continuas; en general, mediante un número grande de iteraciones, estos terminan ejecutándose como procesos computacionales con valores de una variable aleatoria discreta, los cuales simulan los valores de las variables continuas.

Ahora, si $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es el espacio de probabilidad sobre el cual se define la variable aleatoria X , y (R, β, P_x) es el espacio de probabilidad inducido por la variable aleatoria X , donde β es el σ -álgebra de Borel, y P_x es la medida de probabilidad inducida, para $x \in R$, entonces se tiene que

$$P_x(\{x\}) = P(X^{-1}\{x\})$$

Ahora, si X es una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, con valores en el espacio medible (R, β, P_x) , y si se define el evento

$$\{X \in S\} = \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in S\} \text{ con } S \in \beta$$

entonces

$$P_x(S) = P(\{X \in S\}) \text{ para todo } S \in \beta$$

En el contexto anterior, se puede verificar que P_x cumple con las condiciones que definen una medida de probabilidad.

2.3 Función de probabilidad para una variable aleatoria discreta

Para una variable aleatoria discreta X , definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, con rango R_x (recorrido), una función tal que para cada $x \in R$,

$$f(x) = P_x(\{x\})$$

se denomina la función de probabilidad (*f. p.*) de la variable aleatoria X .

Al conjunto $(\{x, f(x)\}: x \in R)$ se le suele llamar la gráfica de la función de probabilidad de la variable aleatoria X ; esta se puede representar en un plano cartesiano o mediante una tabla de valores, tal como se indica en la Tabla 2.1.

Tabla 2.1. Forma tabular de la función de probabilidad

X	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x) = P(X = x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	\dots	$f(x_n)$

La función de probabilidad cumple las dos condiciones siguientes:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_{x_i \in R_X} f(x_i) = 1$

2.4 Función de densidad de probabilidad

Cada función real f que satisface las dos condiciones siguientes:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

se denomina función de densidad de probabilidad (*f.d.p.*) para la variable aleatoria continua X . También a f se le llama el modelo de probabilidad que se requiere para desarrollar procesos de simulación de variables aleatorias (Ross, 1998).

Si X es una variable aleatoria tal que para todo evento $S \in \beta$ se cumple que

$$P_X(S) = \int_S f(x) dx$$

para alguna función de densidad f , entonces la variable aleatoria X se llama una variable aleatoria de tipo continua o una variable aleatoria continua. Es de notar que como $S \in \beta$, entonces S es un conjunto Boreliano, y la integral sobre es una integral de Lebesgue.

2.5 Función de distribución

Se le denomina función de distribución a una función real definida sobre el conjunto de los números reales con valores en el intervalo $[0,1]$, y que satisface los siguientes axiomas:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$ para todo $x \in R$
2. Si $x_1 \leq x_2$ entonces $F(x_1) \leq F(x_2)$
3. $F(x^+) = \lim_{a \rightarrow 0^+} F(x+a) = F(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$

Esta función se caracteriza por ser no decreciente.

Para una variable aleatoria real X definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, la función real F_X tal que para todo $x \in R$ satisface

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

se le llama función de distribución de la variable aleatoria o función de distribución acumulativa de probabilidad (*f.d.c.*)

Ahora, si X es una variable aleatoria discreta, entonces su función de distribución de probabilidad se define por medio de

$$F_X(x) = F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

Si X es una variable aleatoria continua, entonces su función de distribución de probabilidad es

$$F_X(x) = F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Se dice que una variable aleatoria real X definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ es absolutamente continua si y sólo si existe una función real no negativa e integrable f_X , tal que para todo $x \in R$ se tiene que

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

En este caso, la función f_X corresponde a la función de densidad de probabilidad (*f.d.p.*) de la variable aleatoria X , y la función F_X es su función de distribución.

2.6 Esperanza matemática y varianza de una variable aleatoria

Los siguientes conceptos referidos a la esperanza matemática, la varianza y los momentos de una variable aleatoria son adoptados en lo expuesto por Lindgren (1993) y Shao (1999).

Si X es una variable aleatoria discreta definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$, entonces el valor esperado de X o esperanza matemática de X está dado por

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in R_X} xP(X = x)$$

Si X es una variable aleatoria real continua definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$, entonces el valor esperado de X es

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$$

Siempre y cuando la anterior integral exista.

La varianza de la variable aleatoria X se denota y se define así:

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Siempre que el valor esperado de X exista.

Para una variable aleatoria discreta X se tiene que

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in R_X} xf_X(x)$$

Para una variable aleatoria continua X resulta que

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$$

Al número,

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

se le denomina la desviación estándar de la variable aleatoria X .

Expresiones de forma explícita para la varianza de X correspondientes al caso discreto o continuo son, respectivamente,

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 P(X = x)$$

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X - E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x)dx$$

El r -ésimo momento central de X alrededor de cero se denota y define así:

$$\mu_r = E(X^r)$$

Siempre y cuando el valor esperado exista.

El r -ésimo momento central de X alrededor de cero para el caso discreto o continuo está dado respectivamente por las expresiones:

$$\mu_r' = E(X^r) = \sum_{x \in R_X} x^r P(X = x)$$

$$\mu_r' = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_X(x) dx$$

El r -ésimo momento central de X alrededor de $E(X)$ se denota y define así:

$$\mu_r = E((X - E(X))^r)$$

Siempre y cuando el valor esperado exista.

Para el caso discreto y continuo se tienen:

$$\mu_r = E((X - E(X))^r) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^r P(X = x)$$

$$\mu_r = E((X - E(X))^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f_X(x) dx$$

De acuerdo con Abramowitz y Stegun (1972), el coeficiente de asimetría y el coeficiente de curtosis se definen mediante las siguientes expresiones, respectivamente:

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}} = E(X - \mu)^3 / \sigma^3$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{(\mu_2)^2} = E(X - \mu)^4 / \sigma^4$$

2.7 Métodos de simulación de variables aleatorias

Enseguida se presentan de manera teórica y con algún nivel de detalle los principales métodos utilizados para simular valores de variables aleatorias, tales como: el método de la transformada inversa, el de rechazo, el de Box Muller, composición y convolución.

2.7.1 Método de la transformada inversa

Si U es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0,1)$, entonces para cualquier función de distribución F invertible, la variable aleatoria X definida por medio de la expresión:

$$X = F^{-1}(U)$$

tiene la misma distribución F (Ross, 1999).

En este contexto, para un valor u de la variable aleatoria U , $F^{-1}(u)$ se define como el valor x tal que $u = F(x)$; esto quiere decir que es posible establecer una correspondencia de la siguiente forma:

$$u = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Debido a que $F(x)$ es una función monótona creciente, entonces resulta que

$$F^{-1}(u) = F^{-1}(F(x)) = x \quad (2.1)$$

La expresión (2.1) indica que x es un valor de la variable aleatoria X con función de distribución $F(x)$.

En efecto, sea F_x la función de distribución de $X = F^{-1}(U)$, entonces,

$$F_x(x) = P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x)$$

Como F es una función de distribución, se tiene que $F(x)$ es una función monótona creciente de x , y , por lo tanto, la desigualdad $a \leq b$ es equivalente a la desigualdad $F(a) \leq F(b)$, luego se puede escribir:

$$F_x(x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(F(F^{-1}(U)) \leq F(x)) = P(U \leq F(x)) = F(x)$$

2.7.2 Método del rechazo

En concordancia con Ross (1999), se supone que ya se tiene un método para generar los valores de una variable aleatoria con una función de densidad de probabilidad $g(x)$; con base en ella se pueden generar los valores x de una variable aleatoria X con función de densidad continua $f(x)$ aceptando el valor con una probabilidad proporcional a $\frac{f(Y)}{g(Y)}$.

Para posibilitar la generación de un algoritmo, se procede de la siguiente manera: sea k una constante que satisface la desigualdad que se indica a continuación:

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq k \text{ para toda } y$$

El algoritmo se conforma de los siguientes pasos:

1. Se genera un valor y de la variable aleatoria Y con densidad g .
2. Se genera un valor u de una variable aleatoria U con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$.
3. Si se cumple la desigualdad:

$$U \leq \frac{f(Y)}{kg(Y)} \text{ entonces hacer } X = Y.$$

De lo contrario, regresar al paso 1.

A continuación se prueba que la variable aleatoria X generada por el método del rechazo tiene función de densidad f .

Sea N el número de iteraciones para obtener el valor x de una variable aleatoria X , entonces,

$$P(X \leq x) = P(Y_N \leq x) = P\left(Y \leq x / U \leq \frac{f(Y)}{kg(Y)}\right)$$

De la definición de probabilidad condicional resulta:

$$P(X \leq x) = \frac{P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{kg(Y)}\right)}{P\left(U \leq \frac{f(Y)}{kg(Y)}\right)}$$

La anterior expresión se puede escribir de la siguiente forma:

$$P(X \leq x) = \frac{P\left(Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{kg(Y)}\right)}{h}$$

Donde,

$$h = P\left(U \leq \frac{f(Y)}{kg(Y)}\right)$$

Como las variables aleatorias Y con U son independientes, entonces su función de densidad conjunta cumple que

$$f(y, u) = g(y) \text{ con } 0 < u < 1$$

Con esto se tiene que

$$P(X \leq x) = \frac{1}{h} \iint_{\substack{y \leq x \\ 0 \leq u \leq \frac{f(y)}{kg(y)}}} g(y) du dy$$

La anterior expresión se puede expresar de la siguiente manera:

$$P(X \leq x) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^x \left(\int_0^{\frac{f(y)}{kg(y)}} du \right) g(y) dy$$

Evaluando la integral del paréntesis, resulta

$$P(X \leq x) = \frac{1}{hk} \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

Usando el hecho de que f es una función de densidad, haciendo que x tienda al infinito, se obtiene que

$$1 = \frac{1}{hk} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = \frac{1}{hk} \Rightarrow hk = 1$$

Al reemplazar en la anterior, finalmente se tiene que

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

La anterior, indica X que tiene función de densidad f .

2.7.3 Método de Box Muller

Recogiendo las ideas de Papoulis (1991), este método resulta de utilizar un método basado en coordenadas polares para generar variables aleatorias con distribución normal estándar $N(0,1)$. A continuación se describe la obtención de un algoritmo para este caso.

Sean X y Y variables aleatorias independientes, cada una con distribución normal estándar, como se indican enseguida:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \quad \text{y} \quad f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)$$

Con las anteriores variables se forma un vector aleatorio (X, Y) sobre el plano cartesiano; este mismo vector se puede expresar en las coordenadas polares (R, θ) ; estas coordenadas satisfacen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} X &= R \cos \theta \\ Y &= R \sin \theta \end{aligned}$$

De las anteriores igualdades se tiene que

$$R^2 = X^2 + Y^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Sean X y Y variables aleatorias independientes; la función de densidad conjunta es el producto de sus correspondientes funciones de densidad, es decir,

$$f(x, y) = f(x)f(y)$$

Es decir,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right)$$

La anterior expresión se puede escribir como

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

Con el propósito de obtener la función de densidad conjunta de las variables aleatoria R^2 y θ , la cual se denotará con $f(r, \theta)$, se hace el siguiente cambio de variables:

$$r = x^2 + y^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Al calcular el jacobiano de la anterior transformación se tiene:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{y}{x^2} \cos^2 \theta & \frac{\cos^2 \theta}{x} \end{vmatrix} = \frac{2x \cos^2 \theta}{x} + \frac{2y^2}{x^2} \cos^2 \theta$$

$$J = 2 \cos^2 \theta + 2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta + 2 \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 2$$

Luego la función de densidad conjunta de las variables aleatorias R^2 y θ es

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}r\right) \quad \text{con } 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

La función anterior se puede escribir como el producto de sus densidades marginales por la independencia de las variables R^2 y θ :

$$f(r, \theta) = f(r)f(\theta) = \left(\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}r\right)\right)\left(\frac{1}{2\pi - 0}\right)$$

$$\text{con } 0 < r < \infty, 0 < \theta < 2\pi$$

De aquí se tiene que

$$f(r) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{1}{2}r\right) = \lambda \exp(-\lambda r) \quad \text{con } 0 < r < \infty,$$

Así, la variable R^2 sigue una distribución exponencial con parámetro igual a 2.

Su función de distribución es:

$$F(r) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2}r\right) \quad \text{con } 0 < r < \infty,$$

Además,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi - 0} \quad \text{con } 0 < \theta < 2\pi$$

indica que la variable θ sigue una distribución uniforme en el intervalo $(0, 2\pi)$ de media igual a π . Su función de distribución es:

$$F(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta < a \\ \frac{\theta - a}{b - a} & \text{si } a \leq \theta < b \\ 1 & \text{si } \theta \geq b \end{cases}$$

Ahora, si U_1 y U_2 son dos variables aleatorias independientes, cada una con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, entonces se pueden generar las variables aleatorias R^2 y θ mediante las expresiones

$$\begin{aligned} R^2 &= -2\text{Ln}U_1 \\ \theta &= 2\pi U_2 \end{aligned}$$

Luego para generar las variables aleatorias independientes X y Y con distribución normal estándar se puede optar por aplicar el siguiente algoritmo:

1. Generar U_1 y U_2
2. Hacer:

$$\begin{aligned} R^2 &= -2\text{Ln}U_1 \\ \theta &= 2\pi U_2 \end{aligned}$$

3. Transformar las anteriores variables nuevamente a coordenadas cartesianas (rectangulares), así:

$$X = R \cos \theta = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = R \sin \theta = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$

Las anteriores expresiones conforman el denominado método de Box-Muller.

Algunas veces el método de Box-Muller presenta poca eficiencia computacional; en este caso es recomendable utilizar una forma alternativa propuesta por Marsaglia, que consiste en lo siguiente:

Si U es una variable aleatoria con distribución uniforme en $(0,1)$, entonces la variable $2U$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 2)$, y la variable $2U-1$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(-1,1)$; al generar valores de dos variables aleatorias U_1 y U_2 con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$ se pueden conformar las siguientes variables aleatorias:

$$V_1 = 2U_1 - 1$$

$$V_2 = 2U_2 - 1$$

El par (V_1, V_2) tiene distribución uniforme en el cuadrado de lado igual a 2 con sus vértices en los puntos $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ y $(1,-1)$. Se generan continuamente pares (V_1, V_2) hasta que se cumpla la condición de que $T = V_1^2 + V_2^2 \leq 1$, es decir, hasta que T resulte menor o igual que 1. Luego, se calcula

$$W = \sqrt{\frac{-2 \ln T}{T}}$$

Finalmente, las variables X, Y con distribución normal estándar se obtienen mediante las expresiones siguientes:

$$X = WV_1$$

$$Y = WV_2$$

Lo anterior permite construir el siguiente algoritmo:

1. Se generan U_1 y U_2 con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$
2. Calcular $V_1 = 2U_1 - 1$, $V_2 = 2U_2 - 1$, $T = V_1^2 + V_2^2$
3. Si $T > 1$, regresar al paso 1; en caso contrario,
4. Calcular $W = \sqrt{\frac{-2 \ln T}{T}}$
5. Calcular $X = WV_1$, $Y = WV_2$

2.7.4 Método de la composición

Al *método de composición*, también se le denomina *método de mezclas*; para aplicarlo se tiene en cuenta lo siguiente:

Si $F_1(x), F_2(x), F_3(x), \dots, F_n(x)$ son funciones de distribución, y la variable aleatoria de interés X tiene función de distribución $F(x)$, la cual puede expresarse de la siguiente forma:

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x) + \dots + c_n F_n(x)$$

Donde $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = 1$, $c_i > 0$, entonces $F(x)$ es una composición o mixtura (mezcla) de las funciones de distribución $F_i(x)$. Si $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad correspondiente a $F(x)$, entonces también es posible tener la siguiente igualdad:

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + p_3 f_3(x) + \dots + p_n f_n(x)$$

Con $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$, $p_i > 0$, a los valores anteriores no negativos cuya suma es uno se les denomina pesos para las funciones de densidad, las $f_i(x)$ son las densidades correspondientes a las funciones de distribución $F_i(x)$. Lo anterior indica que el área bajo la curva $f(x)$ se puede dividir en una cantidad finita de áreas cuya suma debe ser igual a 1.

Un algoritmo para realizar el proceso de simulación es el siguiente:

1. Identificar las subáreas correspondientes a la función de densidad $f(x)$ original.
2. Determinar la función de densidad $f_i(x)$ para cada subárea.
3. Conformar

$$f(x) = p_1 f_1(x) + p_2 f_2(x) + p_3 f_3(x) + \dots + p_n f_n(x)$$

4. Obtener la función de distribución para las subáreas,

$$F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x) + c_3 F_3(x) + \dots + c_n F_n(x)$$

5. Generar dos números aleatorios U_1, U_2 con distribución uniforme en $(0,1)$.
6. Usar el número aleatorio U_1 para escoger la función de densidad $f_i(x)$ a partir de la cual se simulará un valor para la variable aleatoria X siguiendo el criterio

$$\begin{aligned}
0 < U_1 \leq p_1 &\Rightarrow \text{Generar } x \text{ a partir de } F_1(x) \\
p_1 < U_1 \leq p_1 + p_2 &\Rightarrow \text{Generar } x \text{ a partir de } F_2(x) \\
p_1 + p_2 < U_1 \leq p_1 + p_2 + p_3 &\Rightarrow \text{Generar } x \text{ a partir de } F_3(x) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{n-1} < U_1 \leq p_1 + p_2 + \dots + p_n &\Rightarrow \text{Generar } x \text{ a partir de } F_n(x)
\end{aligned}$$

7. Utilizar el número aleatorio U_2 para simular un valor de X por medio de la distribución $F_i(x)$ correspondiente a $f_i(x)$; para ello se puede utilizar el método de la transformada inversa u otro que se considere adecuado.

Por otro lado, en concordancia con Ross (1999), una manera de simular los valores de una variable aleatoria X a partir de $F(x)$ consiste en simular una variable aleatoria I , igual a i con probabilidad c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, y luego simular a partir de $F_i(x)$ (es decir, si el valor simulado de I es $I = j$, entonces la segunda simulación es a partir de $F_j(x)$).

2.7.5 Método de convolución

Este método se aplica cuando una variable aleatoria X se puede expresar como una suma lineal de variables aleatorias, es decir, X se expresa como una combinación lineal de la siguiente manera:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_n X_n$$

Para simular un valor de la variable aleatoria X se requiere generar n valores, que se denotan con $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$, de una variable aleatoria U con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$, para con ellos generar los valores correspondientes a las variables $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ y, finalmente, obtener el valor de X . En el capítulo tres se ilustran por medio de ejemplos numéricos los métodos descritos anteriormente.

2.8 Método de simulación Monte Carlo

Siguiendo las ideas expresadas por Gentle (1998) y por Ross (1999), una de las primeras aplicaciones de los números aleatorios fue el cálculo de integrales definidas en el intervalo $(0,1)$. Se utiliza el concepto de muestra aleatoria y la ley de los grandes números para construir un algoritmo que proporciona una solución aproximada al valor de una integral definida. El algoritmo resulta interesante especialmente en el cálculo de aquellas integrales que por métodos de cuadratura (analíticos) no se pueden resolver; sin embargo, también el algoritmo ayuda a obtener soluciones con un buen nivel de aproximación para integrales definidas en el intervalo $(0, 1)$, así como en el intervalo (a, b) , usando números aleatorios.

2.8.1 Concepto de muestra aleatoria

En concordancia con Mayorga (2003), una muestra aleatoria proveniente de una población con distribución $F(x)$ es una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n independientes e idénticamente distribuidas $F(x)$. Esto quiere decir que cada variable aleatoria tiene la misma distribución de probabilidad y son independientes como funciones medibles.

2.8.2 Ley fuerte de los grandes números

Diversos autores mencionan que la *ley fuerte de los grandes números* es la ley más conocida de la teoría de la probabilidad. Según Blanco (2004), esta ley establece que el promedio de una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n ...independientes e idénticamente distribuidas $F(x)$ con media finita μ y varianza finita σ^2 , converge con probabilidad 1 a la media de la distribución. Lo anterior se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \rightarrow \mu \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty$$

2.8.3 Un algoritmo para la simulación Monte Carlo

Dada una función $f(x)$ continua en $(0,1)$, se requiere calcular la integral I que se indica a continuación:

$$I = \int_0^1 f(x) dx$$

Para calcular el valor de I se considera una variable aleatoria U con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Luego I se puede expresar como el siguiente valor esperado (Ross, 1999):

$$I = E(f(U))$$

Si U_1, U_2, \dots, U_n es una sucesión de variables aleatorias que conforman una muestra aleatoria proveniente de la distribución uniforme en $(0,1)$, entonces $f(U_1), f(U_2), \dots, f(U_n)$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media igual a I . En consecuencia, por la ley fuerte de los grandes números se tiene con probabilidad 1 que

$$\sum_{i=1}^n \frac{f(U_i)}{n} \rightarrow E(f(U)) = I \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \quad (22)$$

La expresión (2.2) posibilita obtener aproximaciones de la integral I al generar gran cantidad de números aleatorios u_i y tomar como una aproximación de I al promedio

de las $f(u_i)$. Este método para aproximar integrales definidas en el intervalo $(0,1)$ se conoce como *de Monte Carlo* (Gentle, 1998; Ross, 1999).

El anterior contexto permite construir el siguiente algoritmo para calcular integrales en $(0,1)$ de manera aproximada, utilizando números aleatorios:

1. Especificar $f(x)$
2. Indicar n
3. Inicializar Suma = 0
4. Para $i = 1$ hasta n hacer
 - Generar u_i
 - Suma = Suma + $f(u_i)$
 - Imprimir $I = \text{Suma}/n$
5. Terminar

2.8.4 Aproximación de una integral en el intervalo $(0,1)$

Se requiere calcular la integral

$$I = \int_0^1 10e^{-x^2} dx$$

El integrando de I es la función continua en $(0,1)$ siguiente:

$$f(x) = 10e^{-x^2}$$

Con los números aleatorios generados y presentados en la Tabla 4.5, el algoritmo para aproximar la integral I es:

1. Hacer $n=50$
Suma=0
2. Para $i=1$ hasta 50 hacer:
 - Generar u_i
 - Suma=Suma + $f(u_i)$
 - Imprimir $I = \text{Suma}/50 = 381.7179/50 = 7.634358$
3. Terminar

Los números aleatorios u_i y los valores $f(u_i)$ se presentan en la Tabla 2.2.

En el algoritmo anterior

$$f(u_i) = 10e^{-u_i^2}$$

se tiene como resultado la aproximación

$$I = \int_0^1 10e^{-x^2} dx \cong 7.634358$$

El cálculo de la integral I , definida en el intervalo $(0,1)$ también se efectuó usando el mismo algoritmo, pero con 100 números aleatorios de una distribución uniforme en $(0,1)$ cuyo intervalo de confianza del 95% fue $(0.423, 0.543)$, y se obtuvo un valor aproximado de 7.533. Se observa que a medida que se aumenta la cantidad de números aleatorios se mejora en la aproximación del cálculo de la integral a su verdadero valor. De manera automática, usando 500 números aleatorios provenientes de una distribución uniforme en $(0,1)$ para los cuales el intervalo de confianza del 95% fue $(0.465, 0.517)$, se obtuvo un valor de 7.50384.

Tabla 2.2. Números aleatorios y su valor en la función $f(u) = 10e^{-u^2}$

N.º	u_i	$f(u_i)$	N.º	u_i	$f(u_i)$
1	0,559355	7,313388	26	0,761206	5,602153
2	0,982616	3,8078	27	0,803134	5,246496
3	0,325262	8,99609	28	0,702858	6,101751
4	0,535503	7,506895	29	0,047913	9,97707
5	0,507678	7,727988	30	0,394261	8,560371
6	0,281995	9,235583	31	0,22862	9,490752
7	0,347206	8,864311	32	0,726215	5,90144
8	0,921085	4,281006	33	0,882465	4,589818
9	0,408148	8,46551	34	0,182222	9,673404
10	0,095739	9,90876	35	0,27969	9,247551
11	0,333891	8,945064	36	0,695545	6,164468
12	0,620771	6,80208	37	0,902572	4,428007
13	0,641131	6,629543	38	0,122813	9,8503
14	0,752135	5,67958	39	0,507697	7,727838
15	0,204952	9,588646	40	0,117283	9,863388
16	0,143259	9,796859	41	0,924725	4,252337
17	0,445881	8,197059	42	0,517283	7,652278
18	0,369064	8,726611	43	0,271406	9,289865
19	0,48528	7,901785	44	0,644636	6,599733
20	0,099268	9,901943	45	0,643786	6,60697
21	0,725651	5,906279	46	0,852829	4,832039
22	0,037251	9,986133	47	0,06515	9,957644
23	0,174697	9,699419	48	0,406798	8,474829
24	0,288352	9,202162	49	0,566701	7,253145
25	0,66887	6,39296	50	0,84329	4,910849

(Los valores de esta tabla fueron generados por los autores con el software libre R).

2.8.5 Método de Monte Carlo para integrales definidas (a,b)

El método de Monte Carlo se puede extender al cálculo aproximado de integrales definidas en el intervalo (a,b), es decir,

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

En este caso, se puede realizar la sustitución: $t = \frac{x-a}{b-a}$, de donde resulta que $(b-a)dt = dx$ con $t \in (0,1)$

$$\text{Luego} \quad I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 (b-a)f((b-a)t+a)dt \quad (2.3)$$

2.8.6 Aproximación de una integral el intervalo (-2,2)

Se necesita calcular de manera aproximada la integral definida por

$$I = \int_{-2}^2 0.4e^{-0.5x^2} dx$$

La función que se debe integrar es

$$f(x) = 0.4e^{-0.5x^2}$$

La sustitución por realizar está dada por

$$t = \frac{x-(-2)}{2-(-2)} = \frac{x+2}{4}$$

Desarrollando la expresión (2.3) resulta:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^2 f(x)dx = \int_0^1 (2-(-2))f((2-(-2))t+(-2))dt \\ I &= \int_{-3}^2 f(x)dx = \int_0^1 4(0.4)f(4t-2)dt = \int_0^1 1.6e^{-0.5(4t-2)^2} dt \end{aligned}$$

Usando los números aleatorios de la Tabla 4.5, el algoritmo para aproximar la integral I es

1. Hacer $n=50$
Suma=0
2. Para $i=1$ hasta 50 hacer:
Generar u_i
Suma=Suma + $1.6e^{-0.5(4u_i-2)^2}$
Imprimir $I = \text{Suma}/50 = 50.24/50 = 1.0048$
3. Terminar

Los números aleatorios u_i y los valores $f(u_i)$ se indican en la Tabla 2.3. Así,

$$I = \int_{-2}^2 0.4e^{-0.5x^2} dx \cong 1.0048$$

En la lectura de la Tabla 2.3 se debe tener en cuenta que

$$f(u_i) = 1.6e^{-0.5(4u_i-2)^2}$$

El cálculo de la integral I definida en el intervalo $(-2,2)$ también se realizó utilizando el mismo algoritmo, pero con 100 números aleatorios de una distribución uniforme en $(0,1)$ cuyo intervalo de confianza del 95% fue $(0.453, 0.565)$, obteniéndose un valor aproximado de 0.9854.

Tabla 2.3. Números aleatorios y su valor en la función $f(x)$ en $(-2,2)$

N°.	u_i	$f(u_i)$	N°.	u_i	$f(u_i)$
1	0,559355	1,555534	26	0,761206	0,92698
2	0,982616	0,248245	27	0,803134	0,767114
3	0,325262	1,253244	28	0,702858	1,151186
4	0,535503	1,583947	29	0,047913	0,311904
5	0,507678	1,599246	30	0,394261	1,4631
6	0,281995	1,09395	31	0,22862	0,887655
7	0,347206	1,327417	32	0,726215	1,062491
8	0,921085	0,387324	33	0,882465	0,49647
9	0,408148	1,495573	34	0,182222	0,713295
10	0,095739	0,432828	35	0,27969	1,085142
11	0,333891	1,283084	36	0,695545	1,178332
12	0,620771	1,423784	37	0,902572	0,437575
13	0,641131	1,364325	38	0,122813	0,512654
14	0,752135	0,96216	39	0,507697	1,599242
15	0,204952	0,797382	40	0,117283	0,495705
16	0,143259	0,578043	41	0,924725	0,3779
17	0,445881	1,562946	42	0,517283	1,596181
18	0,369064	1,394937	43	0,271406	1,053335
19	0,48528	1,597229	44	0,644636	1,353436
20	0,099268	0,442777	45	0,643786	1,356095
21	0,725651	1,064662	46	0,852829	0,591023
22	0,037251	0,288492	47	0,06515	0,352484
23	0,174697	0,68621	48	0,406798	1,492587
24	0,288352	1,118114	49	0,566701	1,544054
25	0,66887	1,273623	50	0,84329	0,623266

(Los valores de esta tabla fueron generados por los autores con el software libre R).

Ejercicios capítulo 2

- 2.1 Proporcione dos ejemplos de experimento aleatorio, espacio muestral, sigma álgebra, medida de probabilidad y espacio de probabilidad.
- 2.2 Sea $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω , probar que:
- Para todo $T \in \mathfrak{F}$ se cumple que $T(T^c) = 1 - P(T)$
 - $P(\emptyset) = 0$
 - Para todo $T, S \in \mathfrak{F}$, $P(T \cup S) = P(S) - P(T \cap S)$
- 2.3 Proporcione un ejemplo de variable aleatoria discreta. Construya la función de probabilidad y la distribución de probabilidad, obtenga su valor esperado, la varianza, el coeficiente de asimetría y el de curtosis.
- 2.4 Proporcione un ejemplo de variable aleatoria continua. Construya la función de probabilidad y la distribución de probabilidad; obtenga su valor esperado, la varianza, el coeficiente de asimetría y el de curtosis.
- 2.5 Para una variable aleatoria X con función de probabilidad dada por

Tabla 2.4. Función de probabilidad

x	0	1	2	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{2}{8}$

- Calcular $E(X)$, $Var(X)$ y su desviación estándar
 - Determinar la función de distribución $F_X(x)$
 - Obtener en coeficiente de asimetría y curtosis
- 2.6. Sea X una variable aleatoria, una función definida por
- $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$
- Verificar si corresponde a una función de densidad.
 - De ser así, obtener la función de distribución de la variable aleatoria X .
 - Obtener el valor esperado, la varianza, el coeficiente de asimetría y el de curtosis.
- 2.7 Usando el método de Monte Carlo, calcular la integral de la función que se presenta en el ejercicio 2.6 en el intervalo $(-1,5)$.