5

Situaciones problema no paramétricas relacionadas con más de dos muestras

En este capítulo se analizan distintas situaciones problema relativas al uso frecuente de pruebas no paramétricas relacionadas con más de dos muestras aleatorias. Esta clase de pruebas estadísticas se emplean cuando el interés del investigador recae en determinar si existen diferencias significativas entre tres o más tratamientos o si un tratamiento trae mejores ventajas que otros desde una mirada estadística. En la primera sección se aborda la prueba de Kruskal-Wallis, que corresponde a una generalización de la prueba basada en el estadístico U para dos muestras. En la segunda se hace referencia a la prueba de Friedman, la cual pertenece a una prueba basada en rangos para más de dos muestras relacionadas que incluye el análisis de varianza de dos clasificaciones por medio del uso de la teoría de rangos. En la tercera se indica el manejo del coeficiente de correlación por rangos de Spearman. En la cuarta se trabaja la prueba de independencia para tablas de contingencia. En el contexto de tres o más muestras también es factible aplicar un conjunto ordenado de pasos para elaborar un proceso de inferencia estadística vinculado a la prueba de hipótesis.

5.1 La prueba de Kruskal-Wallis

La prueba de Kruskal-Wallis también se conoce con el nombre de prueba no paramétrica *H*. Esta prueba se puede considerar como una generalización de la prueba *U* de Mann Whitney, ya que puede incluir tres o más muestras aleatorias independientes provenientes de poblaciones en las cuales resulta de interés el estudio de una determinada variable continua. La prueba *H* puede utilizarse cuando en el análisis de varianza en una sola vía no se cumpla el supuesto de normalidad para los datos de las k muestras.

Ahora, si se tienen *k* muestras donde n_1 es el tamaño de la primera muestra cuyos datos son $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_1}$, n_2 es el tamaño de la segunda muestra cuyos datos son $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_2}$, así sucesivamente n_k corresponde al tamaño de la *k*-ésima muestra cuyos datos son $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_k}$. En primer lugar, se conforma una muestra combinada, la cual estará constituida por $n_1 + n_2 +\ldots+ n_k$ datos; se prosigue a ordenar de menor a mayor los $n_1 + n_2 +\ldots+ n_k$ datos y se determina el rango (posición que ocupa cada dato en la secuencia ordenada) para cada dato de la muestra combinada, se calcula R_i como la suma de los rangos de los datos correspondientes a la *i*-ésima muestra, luego se determina la estadística *H*, de la siguiente manera:

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(n+1)$$

En este contexto, $n = n_1 + n_2 +\ldots+ n_k$. Para cuando los tamaños de las *k* muestras son relativamente grandes, la distribución de probabilidad de la estadística *H* se puede aproximar por medio de una distribución chi-cuadrado con *k-1* grados de libertad. Aunque en la práctica el valor del estadístico *H* se compara con el valor crítico de una distribución chi-cuadrado.

Un procedimiento para la prueba de hipótesis puede incluir los siguientes pasos:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$
H_1: las μ_i no son todas iguales

O de forma equivalente:

H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$
H_1: algunas de las μ_i son diferentes

En algunas ocasiones también las hipótesis se suelen plantear como sigue:

H_o: $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_k(x)$
H_1: las $f_i(x)$ no son todas idénticas

En este contexto, las $f_i(x)$ son las funciones de densidad de probabilidad de las poblaciones de donde provienen las *k* muestras.

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba corresponde a la estadística *H* que se ha de comparar con una chi-cuadrado con *k-1* grados de libertad $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1}$

5) Para tomar una decisión sobre la hipótesis nula se aplica el siguiente criterio: si *H* resulta mayor o igual que el valor teórico $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1}$ entonces se rechaza la hipótesis nula; en caso contrario, se aceptará.

6) Conclusión

La siguiente situación problema puede considerarse como un problema hipotético de investigación, el cual puede asemejarse al expuesto por Canavos (1988). Un investigador ha tomado 4 muestras aleatorias independientes de casas, las cuales han sido vendidas en los dos últimos meses y están ubicadas en 4 zonas de la ciudad de Medellín en Colombia. El investigador quiere establecer si existen diferencias sobre el valor de estas casas en las 4 zonas. Tal valor tiene en cuenta la relación entre el precio de venta de cada casa y el precio registrado por el inmueble en el recibo de impuesto predial. La información procesada para el valor de las casas en cada muestra es la siguiente:

Zona 1: 2.19, 2.05, 2.14, 2.25, 2.29

Zona 2: 2.08, 2.23, 2.26, 2.1, 2.18, 2.14

Zona 3: 1.98, 2.19, 2.08, 1.93, 2.23, 2.18

Zona 4: 2.12, 2.14, 2.31, 2,12, 2.19

En este contexto, n_1 = 5 casas en la zona 1, n_2 = 6 casas ubicadas en la zona 2, n_3 = 6 para la zona 4 y n_4 = 5 de la zona 4.

El investigador afirma que el promedio del valor de las casas es el mismo, ya que no existen diferencias al relacionar su precio de venta y el precio que aparece en el recibo del impuesto predial. Usar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis formulada por el investigador.

Para solucionar esta situación problema se puede utilizar la prueba H de Kruskal-Wallis. Por consiguiente, primero se obtiene la muestra combinada y después se asignan los rangos desde 1 hasta 22; luego se establece que los rangos correspondientes a los datos de la primera muestra son: 15, 3, 10, 19, 21; los rangos para los datos de la segunda muestra son: 4.5, 17.5, 20, 6, 12.5, 10; los rangos para los datos de la tercera muestra son: 2, 15, 4.5, 1, 17.5, 12.5 y los rangos para los datos de la cuarta muestra son: 7.5, 10, 22, 7.5, 15. Se observa que en la muestra combinada se presentaron varios empates, para los cuales se tomó el promedio de sus respectivos rangos. Con estos valores de los rangos se determina que:

R_1 = 15 + 3 + 10 + 19 + 21 = 68

R_2 = 4.5 + 17.5 + 20 + 6 + 12.5 + 10 = 70.5

R_3 = 2 + 15 + 4.5 + 1 + 17.5 + 12.5 = 52.5

R_4 = 7.5 + 10 + 22 + 7.5 + 15 = 62

El tamaño de la muestra combinada es $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, entonces n=5+6+6+5 =22.

Ahora se procede a efectuar el cálculo de la estadística H, así:

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{k=4}\frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(n+1)$$

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\left(\frac{R_1^2}{n_1}+\frac{R_2^2}{n_2}+\frac{R_3^2}{n_3}+\frac{R_4^2}{n_4}\right) - 3(n+1)$$

$$H = \frac{12}{22(22+1)}\left(\frac{68^2}{5}+\frac{70.5^2}{6}+\frac{52.5^2}{6}+\frac{62^2}{5}\right) - 3(22+1)$$

$$H = \frac{12}{506}\left(\frac{4624}{5}+\frac{4970.25}{6}+\frac{2756.25}{6}+\frac{3844}{5}\right) - 69 = 1.7$$

El procedimiento para la prueba de hipótesis es:
1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
H_1: algunas de las μ_i son diferentes para i = 1,2,3,4

O de forma equivalente:

H_o: $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = f_4(x)$
H_1: las $f_i(x)$ no son todas idénticas

En este contexto, las $f_i(x)$ son las funciones de densidad de probabilidad de las 4 zonas de donde provienen las 4 muestras.

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba es $H = 1.7$

Ahora, el valor teórico de la distribución chi-cuadrado $\chi^2_{1-\alpha,\ k-1}$ con $k\text{-}1 = 4\text{-}1 = 3$ grados de libertad para $\alpha = 0.05$ es

$$\chi^2_{1-\alpha,\ k-1} = \chi^2_{1-0.05,\ 4-1} = \chi^2_{0.95,\ 3} = 7.8147$$

5) Como $H = 1.7$ no es mayor o igual que $\chi^2_{1-\alpha,\ k-1} = 7.8147$ entonces no se rechaza la hipótesis nula; por consiguiente, se acepta la hipótesis nula H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

6) Con un nivel de significancia del 5 % se concluye que el promedio del valor de las casas es el mismo, ya que no existen diferencias al relacionar su precio de venta y el precio que aparece en el recibo del impuesto predial; por consiguiente, la afirmación hecha por el investigador es cierta. Es decir, no hay evidencias suficientes para demostrar que existan diferencias significativas en el valor de las casas vendidas en las 4 zonas.
La siguiente situación problema puede considerarse como una situación hipotética de investigación, susceptible de replicarse en el salón de clases universitario. Un investigador en ciencias de la educación ha decidido tomar 3 muestras aleatorias independientes referidas a las calificaciones

obtenidas por los estudiantes de la asignatura de probabilidad y estadística ofrecida en 3 cursos diferentes de ingeniería (civil, electrónica e industrial) en una universidad de la ciudad de Bogotá en Colombia. El investigador quiere establecer si existen diferencias sobre las calificaciones obtenidas por los estudiantes de esta asignatura en esos cursos de ingeniería. La información recolectada varía en el rango desde 0.0 hasta 5.0 y fue la siguiente:

Muestra en ingeniería civil: 4.7, 4.4, 4.6, 3.7, 4.3, 4.9

Muestra en ingeniería electrónica: 4.2, 4.1, 3.8, 4.0, 3.1, 3.5, 3.9

Muestra en ingeniería industrial: 4.5, 3.4, 3.5, 3.6, 3.4

El investigador afirma que en promedio no hay diferencias significativas en las calificaciones de la asignatura de probabilidad y estadística en los 3 cursos. Utilizar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis formulada por el investigador en ciencias de la educación.

Para solucionar la situación problema objeto de investigación se puede utilizar la prueba H de Kruskal-Wallis, por lo tanto, en primera instancia se obtiene la muestra combinada y después se asignan los rangos desde 1 hasta 18. En esta situación, n_1 = 6 estudiantes, n_2 = 7, n_3 = 5. El tamaño de la muestra combinada es n = 6+7+5 = 18; en la muestra combinada se ha colocado el rango entre paréntesis a la derecha de cada uno de los datos, así:

4.7 (17), 4.4 (14), 4.6 (16), 3.7 (7), 4.3 (13), 4.9 (18), 4.2 (12), 4.1 (11), 3.8 (8), 4.0 (10), 3.1 (1), 3.5 (4.5), 3.9 (9), 4.5 (15), 3.4 (3), 3.5 (4.5), 3.6 (6), 3.3 (2)

Así, los rangos correspondientes a los datos de la muestra en ingeniería civil son: 17, 14, 16, 7, 13, 18. Los rangos correspondientes a los datos de la muestra en ingeniería electrónica son: 12, 11, 8, 10, 1, 4.5, 9. Los rangos correspondientes a los datos de la muestra en ingeniería industrial son: 15, 3, 4.5, 6, 2.

Se puede observar que en la muestra combinada se presentaron dos empates, para los cuales se tomó el promedio de sus respectivos rangos y se obtuvo 4.5; con estos rangos se deduce que:

$R_1 = 17 + 14 + 16 + 7 + 13 + 18 = 85$

$R_2 = 12 + 11 + 8 + 10 + 1 + 4.5 + 9 = 55.5$

$R_3 = 15 + 3 + 4.5 + 6 + 2 = 30.5$

Ahora, se procede a efectuar el cálculo de la estadística *H*, del siguiente modo:

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{k=3}\frac{R_i^2}{n_i}\right) - 3(n+1)$$

$$H = \frac{12}{n(n+1)}\left(\frac{R_1^2}{n_1} + \frac{R_2^2}{n_2} + \frac{R_3^2}{n_3}\right) - 3(n+1)$$

$$H = \frac{12}{18(18+1)}\left(\frac{85^2}{6} + \frac{55.5^2}{7} + \frac{30.5^2}{5}\right) - 3(18+1)$$

$$H = \frac{12}{18(19)}\left(\frac{7225}{6} + \frac{3080.25}{7} + \frac{930.25}{5}\right) - 3(19)$$

$$H = \frac{12}{342}\left(1204.1666 + 440.0357 + 186.05\right) - 57 = 0.0351(1830.2523) - 57$$

$$H = 64.2418 - 57 = 7.2418$$

El procedimiento para la prueba de hipótesis es:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
H_1: algunas de μ_i son diferentes para i = 1,2,3

O de forma equivalente:

H_o: $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$
H_1: las $f_i(x)$ no son todas idénticas

En este contexto, las $f_i(x)$ son las funciones de densidad de probabilidad de los 3 cursos de ingeniería de donde provienen las 3 muestras.

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba es $H = 7.2418$
Ahora, el valor teórico de la distribución chi-cuadrado $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1}$ con $k-1 = 3-1 = 2$ grados de libertad para $\alpha = 0.05$ es,

$$\chi^2_{1-\alpha,\, k-1} = \chi^2_{0.95,\, 2} = 5.9915$$

5) Como $H = 7.2418$ es mayor que $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1} = 5.9915$ entonces se rechaza la hipótesis nula; por consiguiente, se acepta la hipótesis alternativa así,

H_1: algunas de μ_i son diferentes para i = 1,2,3

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que en promedio sí hay diferencias significativas en las calificaciones de la asignatura de

probabilidad y estadística en los 3 cursos en la universidad ubicada en la ciudad de Bogotá, Colombia; por lo tanto, la afirmación hecha por el investigador en ciencias de la educación no es cierta. Es decir, hay evidencias suficientes de que estadísticamente existen diferencias significativas en las calificaciones promedio en los 3 cursos. También se puede afirmar que las poblaciones de donde provienen los datos de las muestras no son todas idénticas, algunas son diferentes.

5.2 Prueba de Friedman con *k* muestras

Esta prueba puede considerarse como una extensión de la prueba de Wilcoxon para muestras por parejas (dos tratamientos). Ahora se tienen tres o más tratamientos en un diseño de bloques completamente al azar y los tamaños de muestras igualados con n datos en cada tratamiento. La prueba de Friedman resulta pertinente para estudiar *k* mayor que dos tratamientos con un solo factor donde puede estar presente un factor externo y se tienen mediciones de una variable de interés en, por lo menos, una escala ordinal. Esta prueba resulta útil para establecer si los efectos atribuibles a los tratamientos son los mismos (Lehmann y D'Abrera, 1975; Siegel, 1970).

Para aplicar esta prueba se conforma un bloque para cada una de las n condiciones referidas a los factores externos, de tal forma que cada bloque contiene un dato (observación) perteneciente a cada uno de los k tratamientos (Canavos, 1988). Adicionalmente, se trabaja en el supuesto de que los tratamientos se asignan de manera aleatoria y que no hay interacción entre los bloques y los tratamientos. En total hay nk observaciones, las cuales permiten conformar un arreglo matricial donde las columnas son los tratamientos (1, 2, …, j,…*k*) y las filas son los bloques (1, 2, ..., n), como se puede observar en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1 Arreglo matricial para aplicar la prueba de Friedman

		Tratamientos			
		1	2 …	j …	k
Bloques	1	x_{11}	x_{12}	x_{1j}	x_{1k}
	2	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	x_{2k}
	:	:	:	:	:
	n	x_{n1}	x_{n2}	x_{nj}	x_{nk}

Fuente: los autores

Para aplicar la prueba de Friedman se comienza conformando la matriz con los tratamientos y los bloques. Luego, para cada bloque (fila) se asigna un rango desde 1 hasta *k* (posición que ocupa cada dato en ese bloque); en este caso, para cualquier bloque los rangos deben corresponder a una permutación aleatoria de los números enteros desde 1 hasta *k*. Después, se calcula R_j como la suma de los rangos del tratamiento j con j =1,2,…,*k*. Se prosigue a determinar la estadística *Q* de Friedman, de la siguiente manera (Lehmann y D'Abrera, 1975):

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)}\left(\sum_{j=1}^{k} R_j^2\right) - 3n(k+1)$$

Para cuando los tamaños de las k muestras son relativamente grandes, la distribución de probabilidad de la estadística *Q* se puede aproximar por medio de una distribución chi-cuadrado con *k-1* grados de libertad. Aunque en la práctica el valor del estadístico *Q* se compara con el valor crítico de una distribución chi-cuadrado (Friedman, 1937).

En la prueba de Friedman, la hipótesis nula indica que los efectos atribuibles a los tratamientos son los mismos; es decir, las poblaciones de interés tienen distribuciones idénticas. Además, las medias de los rangos de las columnas (tratamientos) son casi iguales.

Un procedimiento para la prueba de hipótesis puede incluir los siguientes pasos:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_k(x)$
H_1: las $f_i(x)$ no son todas idénticas

En este contexto, las $f_i(x)$ son las funciones de densidad de probabilidad de las poblaciones de donde provienen las *k* muestras o tratamientos.

O de forma equivalente:

H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$
H_1: algunas de las μ_i son diferentes

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba corresponde a la estadística *Q* que se ha de comparar con una chi-cuadrado con *k-1* grados de libertad $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1}$

5) Para tomar una decisión sobre la hipótesis nula se aplica el siguiente criterio: si *Q* resulta mayor o igual que el valor teórico $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1}$ entonces se rechaza la hipótesis nula; en caso contrario, se aceptará.

6) Conclusión

La siguiente situación problema se formuló a partir de Canavos (1988): 4 jueces expertos han sido encargados de calificar el desempeño de 5 finalistas en una competencia de aptitud verbal, las calificaciones van de 2.0 hasta 10.0 como se indican en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2. Arreglo matricial para aplicar la prueba de Friedman con $k=4$ y $n=5$

		Tratamientos			
		1	2	3	4
Bloques	1	8.6	8.7	8.3	8.5
	2	9.9	9.8	9.5	9.7
	3	8.0	8.2	7.6	8.3
	4	9.8	9.9	9.7	9.7
	5	9.0	9.3	8.2	8.8

Fuente: los autores, con base en Canavos (1988)

El investigador quiere establecer si existen diferencias discernibles en las calificaciones que otorgan los jueces expertos. Usar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis del investigador.

Para solucionar esta situación problema se puede recurrir al uso de la prueba Q de Friedman; por consiguiente, en primer lugar, se asignan los rangos desde 1 hasta $k=4$ para cada uno de los 5 bloques (filas) $n=5$; el rango se ha colocado entre paréntesis en el lado derecho en cada una de las observaciones, como se indica en la Tabla 5.3.

Así, la suma de los rangos del tratamiento 1 consiste en sumar los rangos de los datos en la columna 1, de la siguiente forma:

$R_1 = 3+4+2+3+3 = 15$

La suma de los rangos del tratamiento 2 consiste en sumar los rangos de los datos en la columna 2, así:

$R_2 = 4+3+3+4+4 = 18$

Al proceder de similar forma, resulta que:

$R_3 = 5.5$

$R_4 = 11.5$

Tabla 5.3. Arreglo matricial para aplicar la prueba de Friedman con rangos *k=4* y *n=5*

		Tratamientos			
		1	2	3	4
Bloques	1	8.6(3)	8.7(4)	8.3(1)	8.5(2)
	2	9.9(4)	9.8(3)	9.5(1)	9.7(2)
	3	8.0(2)	8.2(3)	7.6(1)	8.3(4)
	4	9.8(3)	9.9(4)	9.7(1.5)	9.7(1.5)
	5	9.0(3)	9.3(4)	8.2(1)	8.8(2)

Fuente: los autores, con base en Canavos (1988)

Ahora, se procede a efectuar el cálculo de la estadística Q, del siguiente modo:

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)}\left(\sum_{j=1}^{k=4} R_j^2\right) - 3n(k+1)$$

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)}\left(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2\right) - 3n(k+1)$$

$$Q = \frac{12}{(5)(4)(4+1)}\left(15^2 + 18^2 + 5.5^2 + 11.5^2\right) - 3(5)(4+1)$$

$$Q = \frac{12}{(5)(4)(5)}\left(225 + 324 + 30.25 + 132.25\right) - 3(5)(5)$$

$$Q = \frac{12}{100}\left(711.5\right) - 75 = 85.38 - 75 = 10.38$$

El procedimiento para la prueba de hipótesis es:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = f_4(x)$
H_1: las $f_i(x)$ no son todas idénticas

En este contexto, las $f_i(x)$ son las funciones de densidad de probabilidad de las poblaciones de donde provienen las 4 muestras o tratamientos.

O de forma equivalente:

H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$
H_1: algunas de μ_i son diferentes para i = 1,2,3,4

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.
3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba es $Q = 10.38$

Ahora, el valor teórico de la distribución chi-cuadrado $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1}$ con $k-1$ = 4-1 = 3 grados de libertad para $\alpha = 0.05$ es,

$$\chi^2_{1-\alpha,\, k-1} = \chi^2_{0.95,\, 3} = 7.8147$$

5) Como $Q = 10.38$ es mayor que $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1} = 7.8147$ entonces se rechaza la hipótesis nula; por consiguiente, se acepta la hipótesis alternativa así,

H_1: algunas de μ_i son diferentes para $i = 1,2,3,4$; lo cual indica que los efectos de los tratamientos no son los mismos.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que existen diferencias significativas entre las calificaciones que otorgan los jueces expertos en correspondencia con el desempeño de los finalistas en la competencia de aptitud verbal. Por lo tanto, sí existen diferencias discernibles en las calificaciones que otorgan los jueces expertos.

La siguiente situación problema hipotética se soporta en Grosslight y Radlow (1956) y en la teoría del reforzamiento, para realizar actividades de entrenamiento con los operarios de la empresa TT. Se requiere indagar sobre el efecto de 3 patrones distintos de reforzamiento en el aprendizaje discriminatorio de un conjunto específico de rutinas que van a implementar los operarios; 30 operarios fueron asignados completamente al azar a cada uno de los 3 tratamientos (patrones de reforzamiento) conformando 3 muestras aleatorias de tamaño 10 (bloques de igual tamaño); en el primer tratamiento se trabaja con total reforzamiento (100 % de los ensayos tenían reforzamiento), el segundo con reforzamiento parcial (la mitad de los ensayos incluyeron reforzamiento) y el tercero con un solo ensayo de reforzamiento.

Tabla 5.3. Arreglo matricial para aplicar la prueba de Friedman con *k=3* y *n=10*

		Tratamientos		
		1	2	3
Bloques	1	4.0	4.5	4.3
	2	3.9	4.4	3.5
	3	4.5	4.2	4.0
	4	4.1	4.5	4.2
	5	4.3	4.4	4.5
	6	4.0	3.5	4.4
	7	4.8	4.5	4.6
	8	4.1	4.6	4.2
	9	4.7	4.5	4.2
	10	3.8	3.5	4.0

Fuente: los autores, con base en Grosslight y Radlow (1956)

Una vez terminado el adiestramiento, el grado de aprendizaje se midió a través de la rapidez con la cual los distintos operarios lograron aprender las rutinas; para ello se asignó una valoración desde 1.0 hasta 5.0. Los datos se pueden observar en la Tabla 5.3.

El investigador afirma que la utilización de los diversos patrones de reforzamiento genera un aprendizaje diferencial, el cual se exhibe por la capacidad de transferencia que muestra el operario. Utilizar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis del investigador.

Para solucionar la situación problema se recurre al empleo de la prueba Q de Friedman; por lo tanto, al principio se asignan los rangos desde 1 hasta $k=3$ para cada uno de los 10 bloques (filas) n = 10; el rango se ha colocado entre paréntesis en el lado derecho en cada una de las observaciones, como se indica en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4. Arreglo matricial para aplicar la prueba de Friedman con rangos $k=3$ y $n=10$

		Tratamientos		
		1	2	3
Bloques	1	4.0 (1)	4.5 (3)	4.3 (2)
	2	3.9 (2)	4.4 (3)	3.5 (1)
	3	4.5 (3)	4.2 (2)	4.0 (1)
	4	4.1 (1)	4.5 (3)	4.2 (2)
	5	4.3 (1)	4.4 (2)	4.5 (3)
	6	4.0 (2)	3.5 (1)	4.4 (3)
	7	4.8 (3)	4.5 (1)	4.6 (2)
	8	4.1 (1)	4.6 (3)	4.2 (2)
	9	4.7 (3)	4.5 (2)	4.2 (1)
	10	3.8 (2)	3.5 (1)	4.0 (3)

Fuente: los autores, con base en Grosslight y Radlow (1956)

Tomando en cuenta los rangos de la Tabla 5.4, se establece que la suma de los rangos del tratamiento 1 consiste en sumar los rangos de los datos en la columna 1. Se obtiene:

$R_1 = 1+2+3+1+1+2+3+1+3+2 = 19$

Al proceder de manera similar y sumar los rangos de la columna 2, resulta que:

$R_2 = 21$

$R_3 = 20$

Ahora, se procede a efectuar el cálculo de la estadística Q, de la siguiente manera:

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)}\left(\sum_{j=1}^{k=3} R_j^2\right) - 3n(k+1)$$

$$Q = \frac{12}{nk(k+1)}\left(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2\right) - 3n(k+1)$$

$$Q = \frac{12}{(10)(3)(3+1)}\left(19^2 + 21^2 + 20^2\right) - 3(10)(3+1)$$

$$Q = \frac{12}{(10)(3)(4)}\left(361 + 441 + 400\right) - 3(10)(4)$$

$$Q = \frac{12}{120}\left(1202\right) - 120 = 0.1(1202) - 120 = 120.2 - 120 = 0.2$$

El procedimiento para la prueba de hipótesis es:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: los distintos patrones de reforzamiento no tienen efecto diferencial
H_1: los distintos patrones de reforzamiento sí tienen efecto diferencial

H_o: $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$
H_1: las $f_i(x)$ no son todas idénticas

En estas circunstancias, las $f_i(x)$ son las funciones de densidad de probabilidad de las poblaciones de donde provienen los 3 tratamientos.

También de manera equivalente, se puede escribir:

H_o: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
H_1: algunas de μ_i son diferentes para i = 1,2,3

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba es $Q = 0.2$

Por lo tanto, el valor teórico de la distribución chi-cuadrado $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1}$ con $k-1 = 3-1 = 2$ grados de libertad para $\alpha = 0.05$ es,

$$\chi^2_{1-\alpha,\, k-1} = \chi^2_{0.95,\, 2} = 5.9915$$

5) Como $Q = 0.2$ no es mayor que $\chi^2_{1-\alpha,\, k-1} = 5.9915$ entonces no se rechaza la hipótesis nula; por consiguiente, se acepta la hipótesis nula, así,

H_o: los distintos patrones de reforzamiento no tienen efecto diferencial

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que los distintos patrones de reforzamiento no tienen efecto diferencial; esto es, no existen diferencias significativas en el efecto generado por los patrones de reforzamiento; las valoraciones obtenidas por los operarios sobre la transferencia del aprendizaje no dependen de los patrones de reforzamiento. Luego, la afirmación hecha por el investigador no es cierta estadísticamente.

5.3 Coeficiente de correlación de Spearman

Este coeficiente corresponde a una medida de asociación para los datos de dos variables cuantitativas en escala ordinal, en las cuales sus respectivos datos pueden ordenarse y a estos se les puede asignar un determinado rango. Por lo tanto, el coeficiente de correlación de Spearman es una medida de asociación perteneciente a los métodos estadísticos no paramétricos. Para calcular este coeficiente, en primer lugar se asignan los rangos desde 1 hasta n para los datos x_i de la variable X, luego se asignan los rangos desde 1 hasta n para los datos y_i de la variable cuantitativa Y, los cuales han conformado parejas de la firma (x_i , y_i) para $i = 1,2,\ldots,n$. Se prosigue a calcular las diferencias d_i entre el rango de cada x_i y su correspondiente rango para y_i. Finalmente, se aplica la siguiente expresión, la cual permite obtener el mencionado coeficiente, el cual se denota y se define de la siguiente manera:

$$r_s = 1 - \frac{6\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)}{n(n^2-1)}$$

Si se presentan empates en los rangos para algunas observaciones (datos), se asigna el promedio como rango para las observaciones empatadas.

Cuando la cantidad n de parejas (x_i, y_i) para $i = 1,2,\ldots, n$ es lo suficientemente grande, la variable aleatoria R_s cuyos valores son los r_s. Según la hipótesis nula de que no hay correlación entre X e Y, se puede aproximar por medio de una distribución normal estándar, así (Gibbons, 1997):

$$Z = \frac{R_s - E(R_s)}{\sqrt{Var(R_s)}}$$

Donde:

$$E(R_s) = 0\,,$$

$$Var(R_s) = \frac{1}{n-1}$$

En el proceso de inferencia estadística, para un nivel de significancia α, se plantean las siguientes hipótesis:

H_o: no hay correlación entre *X* e *Y*
H_1: sí hay correlación entre *X* e *Y*

En esta situación se procede como una prueba bilateral.

Cuando las hipótesis se plantean de la forma:

H_o: la correlación entre *X* e *Y* en la población es cero
H_1: hay una asociación positiva entre los rangos

Se trata de una prueba unilateral derecha; de acuerdo con Lind *et al*. (2015), cuando la muestra es de tamaño n mayor o igual que 10 para analizar la significancia de la prueba, se utiliza una distribución teórica t-student con *n-2* grados de libertad para determinar la región crítica y se obtiene el valor t siguiente a partir de la distribución de los rangos:

$$t = r_s \sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^{\,2}}}$$

Se aplica la siguiente regla de decisión: si t es mayor que $t_{1-\alpha,\, n-2}$ entonces se rechaza la hipótesis nula.

En contraste, cuando las hipótesis se plantean así:
H_o: la correlación entre *X* e *Y* en la población es cero
H_1: hay una asociación negativa entre los rangos

Se aplica la siguiente regla de decisión: si t es menor que $t_{\alpha,\, n-2}$ entonces se rechaza la hipótesis nula.

La siguiente situación problema es un caso hipotético de investigación. Se requiere indagar sobre la asociación entre el número de horas que usa un trabajador y la cantidad de artículos a los que les ha hecho un proceso de terminado (pintura y empacado) en la empresa TK. Para esto se ha tomado una muestra aleatoria de 11 trabajadores a quienes se les han medido las variables X: número de horas laboradas por el trabajador, Y: número de artículos a los que el trabajador le ha hecho el proceso de terminado. Los datos se pueden observar en la Tabla 5.5.

Un investigador del área de procesos en la empresa TK afirma que sí existe una asociación significativa entre las variables *X* e *Y*. Utilizar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis del investigador.

Tabla 5.5. Información de horas laboradas y cantidad de artículos terminados en la empresa TK

Trabajador	*X*	*Y*
1	21	100
2	9	57
3	6	45
4	12	80
5	14	73
6	11	71
7	6	55
8	19	95
9	16	86
10	3	34
11	9	66

Fuente: los autores

Para solucionar esta situación problema se utiliza el coeficiente de correlación de Spearman, ya que los datos están en una escala ordinal (los datos son factibles de ser ordenados). Inicialmente, se asignan los rangos desde 1 hasta n=11 para los datos tanto de la variable X como de la variable Y, poniendo atención si se presentan empates. El rango se ha colocado entre paréntesis en el lado derecho en cada una de las observaciones, como se indica en la Tabla 5.6. Además, se ha determinado la diferencia de rangos y el cuadrado de tal diferencia.

Tabla 5.6. Rangos para los datos de las variables X e Y

Trabaj.	X	Y	d_i	d_i^2
1	21 (11)	100 (11)	0	0
2	9 (4.5)	57 (4)	0.5	0.25
3	6 (2.5)	45 (2)	0.5	0.25
4	12 (7)	80 (8)	-1	1
5	14 (8)	73 (7)	1	1
6	11 (6)	71 (6)	0	0
7	6 (2.5)	55 (3)	-0.5	0.25
8	19 (10)	95 (10)	0	0
9	16 (9)	86 (9)	0	0
10	3 (1)	34 (1)	0	0
11	9 (4.5)	66 (5)	-0.5	0.25

Fuente: los autores

Con base en los rangos y las diferencias al cuadrado de esos rangos presentados en la Tabla 5.6, se determina que la suma de las diferencias al cuadrado es igual a 3.

Ahora, se procede a efectuar el cálculo del coeficiente de correlación de Spearman, así:

$$r_s = 1 - \frac{6\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(3)}{11(11^2-1)} = 1 - \frac{18}{1320} = 1 - 0.0136 = 0.9864$$

Este valor indica que existe una asociación fuerte y positiva entre el número de horas laboradas por cada trabajador y el número de artículos a los que el trabajador les ha hecho el proceso de terminado en la empresa TK.

El procedimiento para la prueba de hipótesis es:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: no hay correlación entre *X* e *Y* en la población
H_1: sí hay correlación entre *X* e *Y*

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es bilateral.

4) La estadística de prueba es una normal estándar donde para el valor específico r_s =0.9864 de la variable aleatoria R_s resulta:

$$E(R_s) = 0,$$
$$Var(R_s) = \frac{1}{n-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$Z = \frac{R_s - E(R_s)}{\sqrt{Var(R_s)}} = \frac{0.9864 - 0}{\sqrt{0.1}} = 0.9864\sqrt{10} = 3.1192$$

Ahora, el valor teórico de la distribución normal estándar con $\alpha = 0.05$, $\alpha/2 = 0.025$ es el siguiente,

$Z_{\alpha/2} = Z_{0.025} = -1.96$; $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.96$;

5) Como Z = 3.1192 es mayor que $Z_{1-\alpha/2} = Z_{0.975} = 1.96$, entonces se rechaza la hipótesis nula; por consiguiente, se acepta la hipótesis alterna, así,

H_1: sí hay correlación entre *X* e *Y* en la población

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que existe una asociación significativa entre el número de horas laboradas por cada trabajador y el número de artículos a los que el trabajador les ha hecho el proceso de terminado en la empresa TK. Además, se ha evidenciado que dicha relación es fuerte y positiva.

La siguiente situación problema se basa en lo expuesto por Lind *et al*. (2015). La empresa de ingeniería Ingenius admite que estudiantes de ingeniería de distintas universidades hagan su pasantía (práctica de grado) en esa empresa, siempre y cuando los candidatos a pasantes superen dos tipos de pruebas con la tutela de un instructor. El instructor otorga una calificación a cada candidato durante una entrevista en el campus universitario, la cual está puntuada desde 1 hasta 16. La segunda prueba se refiere a la habilidad que debe demostrar el candidato en el manejo de herramientas computacionales; en esta, el instructor otorga una puntuación desde 0 hasta 12. Para esto se ha tomado una muestra aleatoria de 13 candidatos. Los datos se pueden observar en la Tabla 5.7.

X: puntuaciones obtenidas en la prueba 1, *Y*: puntuaciones obtenidas en la prueba 2.

El gerente de la empresa Ingenius afirma que sí existe una asociación positiva entre las variables *X* e *Y*. Usar un nivel de significancia del 5 %

para probar la hipótesis del investigador.

Tabla 5.7. Información de las puntuaciones obtenidas en las dos pruebas

Candidato	*X*	*Y*
1	9	5
2	11	5
3	10	5
4	5	4
5	13	7
6	12	10
7	12	10
8	8	7
9	9	7
10	14	10
11	11	6
12	13	10
13	15	12

Fuente: los autores

Para hallar una solución a esta situación problema, nuevamente se emplea el coeficiente de correlación de Spearman, ya que los datos están en una escala ordinal. Al comienzo se asignan los rangos desde 1 hasta n=13 para los datos tanto de la variable X como de la variable Y, poniendo atención si se presentan empates. El rango se ha colocado entre paréntesis en el lado derecho de cada uno de los datos de cada variable, como se indica en la Tabla 5.8. Además, se ha determinado la diferencia de rangos y el cuadrado de esa diferencia.

Con base en los rangos y las diferencias al cuadrado de esos rangos presentados en la Tabla 5.8, se deduce que la suma de las diferencias al cuadrado es igual a 78.5.

Tabla 5.8. Rangos para los datos de las variables *X* e *Y*

Candidato	*X*	*Y*	d_i	d_i^2
1	15 (13)	12 (13)	0	0
2	11 (6.5)	5 (3)	3.5	12.5
3	10 (5)	5 (3)	2	4
4	5 (1)	4 (1)	0	0
5	13 (10.5)	7 (7)	3.5	12.5
6	12 (8.5)	10 (10.5)	-2	4
7	12 (8.5)	10 (10.5)	-2	4
8	8 (2)	7 (7)	-5	25
9	9 (3.5)	7 (7)	-3.5	12.5
10	14 (12)	10 (10.5)	1.5	2.25
11	11 (6.5)	6 (5)	1.5	2.25
12	13 (10.5)	10 (10.5)	0	0
13	9 (3.5)	5 (3)	0.5	0.25

Fuente: los autores

Ahora, se procede a efectuar el cálculo del coeficiente de correlación de Spearman, así:

$$r_s = 1 - \frac{6\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6(78.5)}{13(13^2-1)} = 1 - \frac{471}{2184} = 1 - 0.2156 = 0.7844$$

Este valor del coeficiente de correlación de Spearman indica que existe una asociación fuerte y positiva entre las variables *X*: puntuaciones obtenidas en la prueba 1 e *Y*: puntuaciones obtenidas en la prueba 2.

El procedimiento para la prueba de hipótesis es:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: la correlación entre *X* e *Y* en la población es cero
H_1: hay una asociación positiva entre los rangos

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba es una t-student donde para el valor específico $r_s = 0.7844$ de la variable aleatoria R_s resulta:

$$t = r_s\sqrt{\frac{n-2}{1-r_s^{\,2}}} = 0.7844\sqrt{\frac{13-2}{1-0.7844^2}} = 0.7844\sqrt{\frac{11}{1-0.6153}}$$

$$t = 0.7844\sqrt{\frac{11}{0.3847}} = 0.7844(5.3473) = 4.1944$$

Ahora, el valor teórico de la distribución t-student con $\alpha = 0.05$, y $n\text{-}2 = 13 - 2 = 11$ grados de libertad es,

$t_{1-\alpha\,,\,n-2} = t_{0.95,\,11} = 1.796$;

5) Como $t = 4.1944$ es mayor que $t_{1-\alpha,\,n-2} = Z_{0.95\,,\,11} = 1.796$ entonces se rechaza la hipótesis nula; por consiguiente, se acepta la hipótesis alterna, así,

H_1: hay una asociación positiva entre los rangos.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que existe una asociación fuerte y positiva entre las puntuaciones obtenidas en la prueba 1 y las puntuaciones obtenidas en la prueba 2 por los candidatos a realizar la pasantía en la empresa Ingenius.

5.4 Prueba de independencia para tablas de contingencia

Una tabla de contingencia es un arreglo matricial para clasificar a los individuos de acuerdo con dos variables cualitativas (nominales), cada una de las cuales presenta dos o más categorías (modalidades). En este tipo de tabla, cada fila corresponde a una categoría de la primera variable y cada columna a una modalidad de la segunda variable. Cuando se tiene una tabla con m filas y n columnas, generalmente interesa indagar si las filas y las columnas son independientes (Peña y Romo, 1997), lo cual también es un indicativo de que las variables son independientes. En este contexto, la hipótesis nula se formula en esos términos; en cambio, la hipótesis alternativa indicará que no hay independencia, lo cual significará que las variables están asociadas o relacionadas.

La estadística de prueba corresponde a la expresión chi-cuadrado siguiente, la cual permite determinar si no existen discrepancias entre las frecuencias observadas y las frecuencias esperadas, en cuyo caso ha de aceptarse la hipótesis nula; de lo contrario, si tales discrepancias son muy grandes, se rechaza esta hipótesis.

La estadística de prueba puede expresarse de la siguiente manera:

$$Chi-cudrado=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\left(O_{ij}-e_{ij}\right)^2}{e_{ij}}$$

Donde O_{ij} corresponde al número observado de individuos clasificados en la categoría *i* de la primera variable y en la modalidad *j* de la segunda variable, e_{ij} hace referencia al número esperado de individuos en la categoría *i* en correspondencia con la modalidad *j*. En este contexto, e_{ij} se obtiene al multiplicar la marginal *i* por la marginal *j* y dividir entre el total de individuos. Si se produce un número alto de concordancias entre las frecuencias observadas y esperadas, es posible que dicha suma de cuadrados sea pequeña, en cuyo caso el valor de chi-cuadrado resultará pequeño y por lo tanto se ha de aceptar la hipótesis nula; en caso contrario, se ha de rechazar esta hipótesis. Como la estadística (estimador) chi-cuadrado con la hipótesis nula sigue una distribución teórica chi-cuadrado con (m-1)(n-1) grados de libertad, si P-valor es menor que el nivel de significancia α, entonces se rechaza la hipótesis nula; de lo contrario, será aceptada.

La siguiente situación problema se soporta en lo expuesto en Peña y Romo (1997): un investigador quiere indagar si el número de reclamaciones recibidas en la oficina de atención al cliente de la empresa NPN clasificadas de acuerdo con el tipo de producto en las categorías E, F y G y la edad del cliente quien hace el reclamo son independientes. Por edad, los clientes son susceptibles de ser clasificados en el grupo de 25 a 35 años o en el de clientes mayores que 35 años. Usar un nivel de significancia del 5 % para la prueba de hipótesis. En la Tabla 5.9 se presentan los datos referidos a una muestra de tamaño 150 clientes

Tabla 5.9. Tabla de contingencia para tipo de producto y edad del cliente

Producto	25-35 años	Más de 35	Marginal
E	10	30	40
F	15	45	60
G	18	32	50
Marginal	43	107	150

Fuente: los autores

En la Tabla 5.10 se presentan las frecuencias esperadas correspondientes a cada una de las celdas de la Tabla 5.9. Por ejemplo, la frecuencia esperada e_{11} = 40(43)/150 = 11.47, e_{12} = 40(107)/150 = 28.53; e_{32} = 50(107)/150 = 35.67; de manera similar se obtienen las demás frecuencias esperadas.

El proceso de prueba de hipótesis para esta situación puede seguir los siguientes pasos:

Tabla 5.10. Tabla de contingencia con frecuencias esperadas edad del cliente

Producto	25-35 años	Más de 35	Marginal
E	11.47	28.53	40
F	17.2	42.8	60
G	14.33	35.67	50
Marginal	43	107	n = 150

Fuente: los autores

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: las variables son independientes
H_1: las variables no son independientes

De forma equivalente, las hipótesis anteriores se pueden plantear de la siguiente forma:

H_o: no existe asociación entre las variables
H_1: sí existe asociación entre las variables

2) Se fija el nivel de significancia en el valor α = 0.05. 1 – α = 0.95

3) Se trata de una prueba unilateral derecha sobre una distribución teórica chi-cuadrado con (*m*-1)(*n*-1) = (3-1)(2-1) =3 * 1 = 3 grados de libertad

$$\chi^2_{0.95,3} = 7.8147$$

4) La estadística de prueba se soporta en los datos de la muestra y las respectivas tablas de contingencia, así:

$$Chi - cudrado = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(O_{ij} - e_{ij}\right)^2}{e_{ij}}$$

$$Chi - cudrado = \frac{(10-11.47)^2}{11.47} + \frac{(30-28.53)^2}{28.53} + \frac{(15-17.2)^2}{17.2} + \frac{(45-42.8)^2}{42.8} + \frac{(18-14.33)^2}{14.33} + \frac{(32-35.67)^2}{35.67}$$

$$Chi - cudrado = 0.1884 + 0.0757 + 0.2814 + 0.113 + 0.9399 + 0.3775 = 1.9759$$

5) Decisión: si el P-valor es menor que α = 0.05 entonces se rechaza la hipótesis nula; en caso contrario, dicha hipótesis será aceptada. De forma equivalente, si chi-cuadrado es mayor que $\chi^2_{0.95,3}$ entonces se rechaza la hipótesis nula.

Como chi-cuadrado = 1.9759 resultó menor que $\chi^2_{0.95,3} = 7.8147$ entonces se decide aceptar la hipótesis nula.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que el número de reclamaciones recibidas en la oficina de atención al cliente de la empresa NPN, clasificadas de acuerdo con el tipo de producto en las categorías E, F y G y la edad del cliente quien hace el reclamo, son independientes. Estos resultados indican que entre el número de reclamaciones y la edad del cliente no existe una asociación estadísticamente significativa.