4

Situaciones problema con dos muestras para la prueba de hipótesis en investigación formativa

En este capítulo se exponen diversas situaciones problema relacionadas con la utilización de algunos tópicos de estadística no paramétrica centrados en la prueba de hipótesis con base en dos muestras aleatorias. Este tipo de pruebas se utilizan cuando el interés del investigador recae en determinar si existen diferencias significativas entre dos tratamientos o si un tratamiento puede ser considerado mejor que otros desde un punto de vista estadístico.

La primera sección se ocupa del manejo de la prueba de McNemar para la significación de los cambios. En la segunda se examina la prueba del signo. En la tercera se expone la prueba de la medina. En la cuarta se presenta la prueba del rango signado de Wilcoxon o prueba de rangos con signo de Wilcoxon. En la quinta se estudia la prueba U de Mann-Whitney. En el contexto de dos muestras también se aplica un conjunto de pasos para elaborar un proceso de inferencia estadística ligado a la prueba de hipótesis.

4.1 Situaciones referidas a la prueba de McNemar

En un diseño de dos muestras relacionadas, pareadas o por parejas (antes-después) es usual utilizar una prueba paramétrica denominada t-student, la cual se basa en el supuesto de que las diferencias de la variable cuantitativa de interés se han de distribuir normalmente, con independencia de la población de donde provienen los datos de esa muestra; además, los datos deben estar en una escala de intervalo o de razón. La prueba de McNemar es una prueba no paramétrica destinada a establecer la significancia de los cambios con base en dos muestras relacionadas (antes-después), cuyos datos se pueden colocar en una escala ordinal o en una nominal. Aquí cada individuo puede utilizarse como su propio control.

Para determinar la significancia de cualquier cambio observado con esta prueba se elabora una tabla de contingencia de tamaño 2x2, que presenta cuatro entradas a, b, c, d, las cuales corresponden a frecuencias absolutas que representan los dos conjuntos de respuestas referentes al antes y al después de los individuos que conforman la muestra; se utilizan los signos – y + para representar respuestas diferentes. En la Tabla 4.1 las celdas A y D recogen los casos para los cuales existen cambios entre la primera y la segunda respuesta; un individuo se clasifica en la celda A cuando ha cambiado de + hacia -; en cambio, se ubica en la celda D si ha pasado de – hacia +. Si no se ha observado ningún cambio antes = +, después = + entonces el individuo se clasifica en la celda B; si se observa el resultado antes = -, después = - se ubica en C.

Tabla 4.1. Tabla de contingencia para probar la significación de los cambios

	Después	Después
Antes	Menos (-)	Más (+)
Más (+)	A	B
Menos (-)	C	D

Fuente: los autores

En este contexto, la suma A+D representa el número de individuos que generaron cambios en las parejas (antes, después) de la variable de estudio X. Se espera que la mitad de (A+D) cambie en una dirección y la otra mitad en la otra dirección, en concordancia con la hipótesis nula. La situación problema entonces se reduce a utilizar la estadística de prueba chi-cuadrado con un solo grado de libertad para probar la hipótesis nula de igualdad de frecuencias esperadas. Así, para las frecuencias observadas A y D resulta que:

$$Chi-cudrado=\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(O_i-e_i\right)^2}{e_i}=\frac{\left(A-0.5(A+D)\right)^2}{0.5(A+D)}+\frac{\left(D-0.5(A+D)\right)^2}{0.5(A+D)}$$

Después de efectuar las operaciones correspondientes, la anterior expresión de la chi-cuadrado con un grado de libertad, se reduce a:

$$Chi-cudrado=\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(O_i-e_i\right)^2}{e_i}=\frac{\left(A-D\right)^2}{(A+D)}$$

Según Yates (1934), la corrección se efectúa por continuidad, ya que la distribución chi-cuadrado es continua y se está aproximando una distribución discreta por una continua, por lo tanto, se utiliza la estadística de prueba dada por:

$$Chi-cudrado=\frac{\left(\left|A-D\right|-1\right)^2}{(A+D)}$$

La siguiente situación problema ha sido adaptada de Siegel (1970): un psicólogo se ha interesado en el estudio de la iniciación de los estudiantes del nivel de preescolar en los contactos sociales. Este psicólogo ha observado que estos estudiantes que llegan a la institución educativa T suelen iniciar sus contactos sociales con las personas adultas más que con otros compañeros de su edad; además, afirma que a medida que aumente su familiaridad, experiencia e interacción con los individuos de la institución educativa T, los estudiantes de este nivel comenzarán a tener más contactos sociales con sus homólogos. Para probar esta hipótesis decide observar a 25 estudiantes de dicho nivel en cuanto a su iniciación en los contactos sociales en su primer día en la institución. Hace la clasificación correspondiente y luego los observa después de 20 días laborables y los clasifica nuevamente. Los resultados se presentan en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2. Tabla de contingencia para probar la significación de los cambios en la iniciación de los estudiantes

	Después	Después
Antes	Homólogo	Adulto
Adulto	15	3
Homólogo	3	4

Fuente: los autores

El proceso de prueba de hipótesis para esta situación puede incluir los siguientes pasos:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $f_i = 0.5$ para i=1, 2
H_1: f_1 es mayor que f_2

De forma equivalente, las hipótesis anteriores se pueden plantear de la siguiente forma:

H_o: $P_A = P_D = 0.5$
H_1: $P_A > P_D$

Donde P_A representa la probabilidad de que los estudiantes cambien su objeto de iniciación de adulto a homólogo, P_D representa la probabilidad de que los estudiantes cambien su objeto de iniciación de homólogo a adulto.

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$. $1 - \alpha = 0.95$

3) Se trata de una prueba unilateral derecha sobre una distribución teórica chi-cuadrado con *k-1* = 2-1 = 1 grado de libertad

$$\chi^2_{0.95,1} = 3.8415$$

4) La estadística de prueba se soporta en los datos de la muestra, con n = 25, *k* =*2*.

A = 15 es el número de infantes que cambiaron su objeto de iniciación pasando de adulto a infante (homólogo); D = 4 corresponde al número de infantes cuyo objeto de iniciación fue infante y luego pasaron a adulto; B = 3 y C = 3 representan a los infantes que se mantuvieron sin cambios en sus objetos de iniciación.

$$Chi - cudrado = \frac{\left(|A-D|-1\right)^2}{(A+D)} = \frac{\left(|15-4|-1\right)^2}{(15+4)} = \frac{(10)^2}{19} = \frac{100}{19} = 5.2631$$

5) Decisión: si el *p*-valor es menor que α = 0.05 entonces se rechaza la hipótesis nula; en caso contrario, dicha hipótesis será aceptada.

El *p*-valor = P(Chi >5.2631) =1-0.9782=0.025 aprox.
Al usar un paquete estadístico se establece que este *p*-valor es de 0.0218

Como el *p*-valor resultó menor que 0.05 entonces se rechaza la hipótesis nula H_o: $P_A = P_D = 0.5$ y se acepta la hipótesis alternativa H_1: $P_A > P_D$.

Aquí también resulta que $1- \alpha = 0.95$; $\chi^2_{0.95,1} = 3.8415$

Como chi-cuadrado = 5.2631 resulta mayor que 3.8415, entonces se decide rechazar la hipótesis nula. En esta situación problema, por cualesquiera de las dos formas se rechaza la hipótesis nula. En consecuencia, se acepta la hipótesis alternativa planteada por el psicólogo.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que los infantes del nivel de preescolar adoptan una tendencia significativa a cambiar su objeto de iniciación al pasar de su interacción social con adultos hacia los infantes (homólogos) transcurridos 20 días laborables en la institución educativa T. Es decir, hay evidencias suficientes para aceptar la afirmación hecha por el psicólogo.

4.2 Prueba del signo

Con frecuencia esta prueba se utiliza como una alternativa a la prueba t-student de una muestra, donde la hipótesis nula se plantea en términos de que la media poblacional μ es igual a un valor μ_o y la hipótesis alternativa consiste en uno de tres casos: a) $\mu > \mu_o$, b) $\mu < \mu_o$, c) μ difiere de μ_o. Para aplicar la prueba del signo solamente se supone que la variable de interés X en la población muestreada es continua y simétrica. Si en vez de la media poblacional se trabaja con la mediana poblacional, la cual en este documento será denotada por μ_e entonces solamente se requiere que la variable *X* en tal población sea continua; en estas circunstancias, la prueba del signo que incluye a la mediana resulta adecuada para cuando datos de la muestra aleatoria resulten heterogéneos y el promedio no los represente adecuadamente.

Para operacionalizar la variable *X*, en esta prueba se sustituye cada valor de la muestra que supere al valor de μ_o con un signo + y cada dato inferior a μ_o se reemplaza por un signo menos (-); cuando un dato de la muestra resulta igual a μ_o solo se descarta. En este contexto, para la cantidad *n* constituida por signos positivos y negativos se asocia una prueba binomial donde la hipótesis nula se plantea en términos de que parámetro es $p = 0.5$ la cual significa que la proporción de signos positivos es igual a la de signos negativos; la hipótesis alternativa podría plantearse así: a) $p > 0.5$, b) $p < 0.5$, c) *p* difiere de 0.5. En el caso de que n resulte lo suficientemente grande, se utiliza la aproximación de una binomial por una normal con $p = q = 0.5$, así:

$$Z = \frac{x - 0.5n}{\sqrt{n(0.5)(0.5)}}$$

Donde *x* corresponde a la cantidad de signos positivos.

Es conveniente mencionar que la prueba del signo también se puede aplicar para muestras por parejas, cuando el investigador tiene interés en determinar que entre ambas condiciones (antes, después) se generan diferencias significativas. Aquí, cada individuo puede constituirse en su propio control. En este contexto, la hipótesis nula debe incluir la condición de que la probabilidad del evento $P(X_D > X_A) = P(X_D < X_A) = 0.5$. Aquí se maneja el siguiente criterio, si la diferencia entre X_D y X_A

resulta positiva, entonces se coloca un signo +, si la diferencia resulta negativa, se pone un signo menos y si la diferencia es cero, la pareja se descarta. En este caso, para la cantidad n constituida por signos positivos y negativos, si x representa la cantidad de signos positivos, entonces se puede usar una prueba binomial de parámetros n y p donde la hipótesis nula se plantea en términos de que parámetro es $p = 0.5$ lo cual significa que la proporción de signos positivos es igual a la de signos negativos; la hipótesis alternativa podría plantearse así: a) $p > 0.5$, b) $p < 0.5$, c) p difiere de 0.5. En el caso de que n resulte lo suficientemente grande, nuevamente se utiliza la aproximación de una binomial por una normal con $p = q = 0.5$.

La siguiente situación problema se ha adaptado de Freund y Miller (2000): un ingeniero industrial hizo 20 mediciones en cuanto a la resistencia de la rotura medida en libras, referidas a la clase de cinta de algodón TW de dos pulgadas, y obtuvo los siguientes datos:

164, 166, 161, 190, 162, 172, 159, 152, 170, 163, 164, 140, 173, 166, 149, 167, 173, 164, 188, 174

El ingeniero afirma que la media de esta clase de cintas es superior a 161. Usar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis planteada por el ingeniero.

Para solucionar la situación problema objeto de estudio a partir de la muestra aleatoria:

164, 166, 161, 190, 162, 172, 159, 152, 170, 163, 164, 140, 173, 166, 149, 167, 173, 164, 188, 174 se procedería de la siguiente forma:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu = 161$
H_1: $\mu > 161$

De forma equivalente se pueden plantear las siguientes hipótesis:

H_o: p=0.5
H_1: $p > 0.5$

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba se soporta ahora en una distribución binomial.

Para cada dato de la muestra que exceda a 161 se le asigna un signo más, para cada valor de la muestra que resulte inferior a 161 se le coloca un signo menos y se descarta el único valor de 161 en la muestra que es igual a la media (en la hipótesis nula); en esta situación, se obtiene la siguiente secuencia de signos:

+, +, descarte, +, +, +, -, -, +, +, +, -, +, +, -, +, +, +, +, +

Así, n= 19

Se define la variable X: número de signos positivos en la muestra de tamaño 19; x=0,1,2,…,15

P-valor =
$$P(X \geq 15) = P(X = 15) + P(X = 16) + P(X = 17) + P(X = 18) + P(X = 19)$$

$$P(X = 15) = \binom{19}{15}(0.5)^{15}(0.5)^{19-15} = 3876(0.5)^{19} = 0.00739$$

$$P(X=16)=\binom{19}{16}(0.5)^{16}(0.5)^{19-16}=969(0.5)^{19}=0.00184$$

$$P(X=17)=\binom{19}{17}(0.5)^{17}(0.5)^{19-17}=171(0.5)^{19}=0.00033$$

$$P(X=18)=\binom{19}{18}(0.5)^{18}(0.5)^{19-18}=19(0.5)^{19}=0.00004$$

$$P(X=19)=\binom{19}{19}(0.5)^{19}(0.5)^{19-19}=1(0.5)^{19}=0.000002$$

Por lo tanto,

P-valor = $P(X \geq 15)=0.0096$ para cuando p = 0.5

5) Como el p-valor resultó inferior al nivel de significancia α = 0.05, entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que el promedio de la resistencia a la rotura de la clase de cinta de algodón TW de 2 pulgadas excede las 161 libras; en este caso, se acepta como cierta la afirmación hecha por el ingeniero industrial.
La situación problema que se aborda a continuación se formula de manera similar a la expuesta por Freund y Miller (2000): un ingeniero químico ha tomado 40 mediciones referidas a la cantidad de toneladas de óxido de azufre, las cuales han sido emitidas por una planta industrial perteneciente a la empresa NW, y ha obtenido los siguientes datos:

16, 14, 19, 28, 18, 17, 21, 24, 26, 8, 23, 19, 16, 5, 23, 13, 14, 22, 23, 25, 18, 22, 27, 18, 15, 21, 23, 16, 19, 12, 18, 9, 22, 17, 30, 12, 19, 16, 23, 13.

El ingeniero afirma que la emisión promedio de óxido de azufre en la empresa NW es inferior a 20.3 toneladas; utilizar un nivel de significancia del 2 % para probar la hipótesis planteada por el ingeniero.

Para solucionar esta situación problema mediante la prueba del signo, primero se obtiene el conjunto conformado por los signos más y los signos menos; al comparar cada dato con la media de 20.3, si el dato está por arriba se pondrá un signo más, si está por debajo se colocará un signo menos y se descartarán los empates (cuya diferencia resulte cero).

-, -, -, +, -, -, +, +, +, -, +, -, -, -, +, -, -, +, +, +, -, +, +, -, -, +, +, -, -, -, -, -, +, -, +, -, -, -, +, -.

Se procedería de la siguiente forma:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu = 20.3$
H_1: $\mu < 20.3$

De forma equivalente se pueden plantear las siguientes hipótesis:

H_o: $p=0.5$
H_1: $p < 0.5$

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.02$.

3) La prueba es unilateral izquierda.

4) La estadística de prueba se soporta ahora en una distribución normal.

Al observar el conjunto conformado por los signos más y menos, resulta que,

$n= 40$

Se define la variable *X*: número de signos positivos en la muestra de tamaño 40; *x*=0,1, 2,…,40 con p = 0.5 = q se hace la aproximación de una distribución binomial por una normal, para *x* =16 signos positivos, así:

$$Z = \frac{x - 0.5n}{\sqrt{n(0.5)(0.5)}} = \frac{16 - 0.5(40)}{\sqrt{40(0.5)(0.5)}} = \frac{16 - 20}{\sqrt{10}} = -1.26$$

P-valor =

$$P(X \leq 16) = P(\frac{X - 0.5n}{\sqrt{n(0.5)(0.5)}} \leq \frac{16 - 0.5n}{\sqrt{n(0.5)(0.5)}}) = P(Z \leq -1.26) = 0.1038$$

Por lo tanto,

P-valor = $P(X \leq 16) = 0.1038$ para cuando p = 0.5

5) Como el *p*-valor resultó superior al nivel de significancia α = 0.02, entonces se acepta la hipótesis nula H_o: μ = 20.3.

De otra forma, como el valor de la estadística de prueba Z = -1.26 es mayor que el valor de la distribución teórica normal estándar $Z_\alpha = Z_{0.02}$ = -2.33, entonces se acepta la hipótesis nula.

6) Con un nivel de significancia del 2 %, se concluye que el promedio de emisión de óxido de azufre en la empresa NWW es de 20.3 toneladas; en este contexto, no hay evidencia suficiente para aceptar la afirmación hecha por el ingeniero químico, en esta situación el ingeniero no tiene la razón.

La siguiente situación problema se ha formulado de manera semejante a la expuesta en Lind *et al*. (2015): el director de sistemas de la empresa

MW recomendó la implementación de un curso de capacitación para los subgerentes; el objetivo era incrementar las competencias en el manejo de bases de datos; algunos subgerentes opinaron que valdría la pena tomar el curso, otros lo consideraron sin ningún valor; en esta situación se determinó que las sesiones del curso empezarían el primer día del siguiente mes. Se seleccionó una muestra aleatoria de 15 subgerentes; un grupo de expertos estableció el nivel de competencia de cada subgerente en referencia al manejo de tales bases, codificado así: Excelente =5, Sobresaliente = 4, Bueno = 3, Aceptable = 2 y Deficiente =1. Una vez los subgerentes de la muestra terminaron el curso, el mismo grupo de expertos calificó nuevamente a los subgerentes. Se obtuvieron las siguientes parejas de resultados (antes, después):

(4,5); (2,5); (5,4); (1,4); (5,5); (3,4); (1,2); (4,5); (3,1); (1,3); (3,4); (2,5); (3,2); (3,4); (1,3).

El director afirma que las competencias sobre el manejo de bases de datos se ha de incrementar una vez termine el curso; usar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis planteada por el director.

Para solucionar la situación problema objeto de estudio mediante la prueba del signo, primero se obtiene el conjunto conformado por los signos más y los signos menos; al comparar cada diferencia (Después – Antes), si tal diferencia está por arriba de cero se asignará un signo más, si está por debajo se colocará un signo menos y se descartarán los empates (cuya diferencia resulte cero).

+, +, -, +, descarte, +, +, +, -, +, +, +, -, +, +

Se procedería de la siguiente forma:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu_D = \mu_A$
H_1: $\mu_D > \mu_A$

Donde μ_D es la media poblacional de las puntuaciones después del curso y μ_A es la media antes de tomar el curso. La hipótesis alternativa refleja la afirmación hecha por el director.

De forma equivalente se pueden plantear las siguientes hipótesis:

H_o: p=0.5
H_1: $p > 0.5$

En términos de la mediana poblacional (μ_e) de las diferencias, las hipótesis equivalentes serían:

H_o: $\mu_e = 0$
H_1: $\mu_e > 0$

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral derecha.

4) La estadística de prueba se soporta ahora en una distribución binomial.

Como de la muestra se obtuvo:

+, +, -, +, descarte, +, +, +, -, +, +, +, -, +, +

Así n= 14

Se define la variable X: número de signos positivos en la muestra de tamaño 14; x=0,1,2,…,14; como la cantidad de signos positivos es x=11,

P-valor = $P(X \geq 11) = P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) + P(X = 14)$

$$P(X=11)=\binom{14}{11}(0.5)^{11}(0.5)^{14-11}=364(0.5)^{14}=0.0222$$

$$P(X=12)=\binom{14}{12}(0.5)^{12}(0.5)^{14-12}=91(0.5)^{14}=0.0055$$

$$P(X=13)=\binom{14}{13}(0.5)^{13}(0.5)^{14-13}=14(0.5)^{14}=0.00085$$

$$P(X=14)=\binom{14}{14}(0.5)^{14}(0.5)^{14-14}=1(0.5)^{14}=0.00006$$

Por lo tanto,

P-valor = $P(X \geq 11)=0.02861$ para cuando p = 0.5

5) Como el *p*-valor resultó inferior al nivel de significancia α = 0.05, entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que las competencias de los subgerentes sobre el manejo de bases de datos en la empresa MW se incrementaron una vez ellos terminaron el curso. En esta situación, se acepta como cierta la afirmación hecha por el director.

4. 3 Prueba de la mediana

La prueba de la mediana es una técnica no paramétrica que se aplica cuando los datos de la variable de interés no cumplan el supuesto de normalidad o cuando los datos sean bastante heterogéneos (allí el promedio muestral puede no ser un buen estimador de la media poblacional, ya que no resulta robusto y se deja afectar por los datos extremos). El procedimiento para la prueba de hipótesis de la mediana es similar a la prueba del signo; primero se obtiene el conjunto conformado por los signos más relacionados con los datos cuyo valor sea superior a la mediana, se coloca un signo menos para cada dato que resulte inferior a la mediana y se descartan aquellos que coincidan con la mediana poblacional.

La situación problema que se desarrolla concuerda con lo expuesto por Lind *et al.* (2015): el departamento de investigaciones de la empresa "Psicología del consumidor" afirma que el gasto semanal mediano para satisfacer las necesidades básicas de los matrimonios jóvenes en la ciudad de Bogotá a marzo de 2022 es de 210.000 pesos. Un sociólogo investigador afirma que es menor, y para comprobarlo ha encuestado a 35 matrimonios sobre el mencionado gasto semanal. Obtuvo los siguientes datos:

580, 181, 172, 211, 240, 267, 95, 234, 190, 165, 50, 230, 139, 140, 223, 237, 256, 180, 221, 379, 180, 150, 212, 234, 160, 190, 121, 181, 90, 229, 175, 450, 121, 190, 162.

Utilizar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis planteada por el sociólogo investigador.

+, -, -, +, +, +, -, +, -, -, -, +, -, -, +, +, +, -, +, +, -, -, +, +, -, -, -, -, -, +, -, +, -, -, -.

Para resolver la situación problema se procedería de la siguiente forma:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu_e = 210$
H_1: $\mu_e < 210$

De forma equivalente se pueden plantear las siguientes hipótesis:

H_o: p=0.5
H_1: $p < 0.5$

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral izquierda.

4) La estadística de prueba se soporta ahora en una distribución normal.

Al observar el conjunto conformado por los signos más y menos, resulta que,

n= 35

Se define la variable X: número de signos positivos en la muestra de tamaño 35; x=0,1,2,…,35 con $p = 0.5 = q$ se hace la aproximación de una distribución binomial por una normal, para x =15 signos positivos, así:

$$Z = \frac{x-0.5n}{\sqrt{n(0.5)(0.5)}} = \frac{15-0.5(35)}{\sqrt{35(0.5)(0.5)}} = \frac{15-17.5}{\sqrt{8.75}} = \frac{-2.5}{2.958} - 0.8452$$

P-valor =

$$P(X \leq 15) = P\left(\frac{X-0.5n}{\sqrt{n(0.5)(0.5)}} \leq \frac{15-0.5n}{\sqrt{n(0.5)(0.5)}}\right) = P(Z \leq -0.8452) = 0.1977$$

Por lo tanto,

P-valor = $P(X \leq 15) = 0.1977$ para cuando $p = 0.5$

5) Como el P-valor resultó superior al nivel de significancia $\alpha = 0.05$, entonces se acepta la hipótesis nula H_o: $\mu_e = 210$.

De otra forma, como el valor de la estadística de prueba Z=-0.8452 es mayor que el valor de la distribución teórica normal estándar $Z_\alpha = Z_{0.05} = -1.645$ entonces se acepta la hipótesis nula.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que el gasto semanal mediano destinado a satisfacer las necesidades básicas de los matrimonios jóvenes en la ciudad de Bogotá a marzo de 2022 es de 210.000 pesos, en esta situación el sociólogo investigador no tiene la razón.

4.4 Prueba del rango signado de Wilcoxon

Esta prueba tiene en cuenta la magnitud de las diferencias cuando se trata de muestras por parejas. En esta situación ya no se pierde tanta información como en la prueba del signo. En la prueba del rango signado de Wilcoxon se ordenan las diferencias sin considerar su signo, se procede a asignar el rango 1 a la menor diferencia en valor absoluto, el rango 2 a la diferencia en valor absoluto que ocupa la segunda posición, y así sucesivamente se asigna el rango n a la diferencia que en valor absoluto resulte más grande. Si se presentan diferencias iguales a cero se descartan. Además, si dos o más diferencias absolutas resultan iguales, a cada una se le asigna la media de los rangos comprendidos. En esta prueba se halla el valor de la estadística T^+ al sumar los rangos correspondientes a las diferencias positivas, el valor de la estadística T^- al sumar los rangos correspondientes a las diferencias negativas y el valor de la estadística T se obtiene como el mínimo entre T^+ y T^-; así entonces $T = \min(T^+, T^-)$.

Como $T^+ + T^- = n(n+1)/2$ entonces todas las pruebas basada en estas estadísticas resultan equivalentes. Además, de acuerdo con Lehmann y D'Abrera (1975), las estadísticas T^+ y T^- asumen valores de una variable aleatoria, cuyos valores están en el intervalo desde cero hasta $n(n+1)/2$, cada una con distribución simétrica respecto a su valor esperado que equivale $n(n+1)/4$.

En la prueba de hipótesis de la forma

H_o: $\mu = \mu_o$
H_1: μ diferente de μ_o

La hipótesis nula se rechaza cuanto T sea menor o igual que T_α

En la prueba de hipótesis de la forma para muestras
H_o: $\mu = \mu_o$
H_1: $\mu > \mu_o$

La hipótesis nula se rechaza cuanto T^- sea menor o igual que $T_{2\alpha}$

En la prueba de hipótesis de la forma
H_o: $\mu = \mu_o$
H_1: $\mu < \mu_o$

La hipótesis nula se rechaza cuanto T^+ sea menor o igual que $T_{2\alpha}$

Ahora, para la prueba de hipótesis basada en muestras por parejas, el planteamiento y el criterio de rechazo de la hipótesis nula es el siguiente:

H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: μ_1 difiere de μ_2

La hipótesis nula se rechaza cuanto T sea menor o igual que T_α

H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: $\mu_1 > \mu_2$

La hipótesis nula se rechaza cuanto T^- sea menor o igual que $T_{2\alpha}$

En la prueba de hipótesis de la forma
H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: $\mu_1 < \mu_2$

La hipótesis nula se rechaza cuanto T^+ sea menor o igual que $T_{2\alpha}$

Es conveniente mencionar que para n mayor o igual que 15, la distribución de probabilidad de la estadística T^+ se puede aproximar por una normal estándar, así:

$$Z = \frac{T^+ - E(T^+)}{\sqrt{Var(T^+)}}$$

Donde:

$$E(T^+) = \frac{n(n+1)}{4}, \quad Var(T^+) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}$$

La siguiente situación problema ha sido planteada siguiendo lo expresado por Freund y Miller (2000): un ingeniero de petróleos ha tomado 15 mediciones en relación con el octanaje de cierta clase de combustible producido en la refinería WX, y ha registrado los siguientes datos: 97.4, 95.1, 97.2, 95.9, 96.7, 100.2, 97.3, 95.2, 93.1, 99, 96, 97.5, 98.1, 98.4, 94.8.

El ingeniero afirma que el promedio del octanaje de esa clase de combustible es de 98.4 en la refinería WX; un usuario difiere de esa afirmación y espera probarlo con la misma muestra obtenida por el ingeniero; utilizar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis planteada por el ingeniero.

Para solucionar la situación problema mediante la prueba del rango signado de Wilcoxon, en primera instancia se obtienen las diferencias con respecto a la media poblacional de μ = 98.4, luego se asignan los rangos a sus correspondientes valores absolutos, se determinan los valores de los rangos referidos a T^+ y de T^-, a partir de los cuales se establece el valor del estadístico T. Los resultados se pueden observar en la Tabla 4.3. Se descartará cuando se presenten empates (cuya diferencia resulte cero).

De los resultados obtenidos en la Tabla 4.3, se determina que:

Tabla 4.3. Valores de las estadísticas T^+, T^-

Mediciones	Diferencias	Rango absoluto	Rangos para T^+	Rangos para T^-
97.4	-1	4		4
95.1	-3.3	12		12
97.2	-1.2	6		6
95.9	-2.5	10		10
96.7	-1.7	7		7
100.2	1.8	8	8	
97.3	-1.1	5		5
95.2	-3.2	11		11
93.1	-5.3	14		14
99	0.6	2	2	
96	-2.4	9		9
97.5	-0.9	3		3
98.1	-0.3	1		1
98.4	0.0	Descarte		
94.8	-3.6	13		13

Fuente: los autores

n =14 al considerar el descarte

$T^+ = 2 + 8 = 10$
$T^- = 1+3+4+5+6+7+9+10+11+12+13+14+15 = 95$

$T = \min (T^+, T^-) = \min (10, 95) = 10$

El conjunto de pasos para probar las hipótesis son los siguientes:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu = 98.4$
H_1: μ difiere de 98.4

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es bilateral.

4) La estadística de prueba corresponde a la estadística T

n= 14

T = 10

Para $\alpha = 0.05$ con n = 14 resulta que $T_\alpha = T_{0.05} = 21$ (Freund y Miller, 2000, p. 590)

5) Como el valor de la estadística T =10 es menor que $T_{0.05} = 21$, entonces se rechaza la hipótesis nula H_o: $\mu = 98.4$ y se acepta la hipótesis alternativa.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que el promedio del octanaje de esa clase de combustible difiere de 98.4 en la refinería WX; por consiguiente, la afirmación hecha por el ingeniero de petróleos no es cierta, en esta situación el usuario tiene la razón.

La siguiente situación problema sigue los lineamientos sugeridos por Lind *et al*. (2015): en un estudio de mercado el investigador ha seleccionado una muestra aleatoria de 15 clientes. A cada cliente se le entrega una pieza del producto A comestible que se acompaña con la salsa tradicional y se le solicita que califique su sabor con una escala desde 1 hasta 10 puntos; un valor cercano a 10 será indicativo de que al cliente le ha gustado el sabor del producto A con la salsa tradicional, y un valor próximo a cero será indicativo de que no le gustó. Después de un tiempo, a los mismos 15 clientes se les entrega una pieza del producto A pero acompañada con una salsa de ciruelas, y nuevamente se les solicita que califiquen su sabor en una escala desde 1 hasta 10 puntos. Los resultados se pueden observar en la Tabla 4.4.

El investigador afirma que en general el promedio de los puntajes referidos al sabor de la pieza del producto A acompañado con la salsa de ciruelas es mayor que cuando se acompaña el producto A con la salsa tradicional; usar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis planteada por el investigador.

Para solucionar la situación problema objeto de estudio mediante la prueba del rango signado de Wilcoxon, primero se obtienen las diferencias entre las puntuaciones obtenidas de saborear el producto A acompañado de la salsa de ciruelas y las reportadas al saborear este producto acompañado de la salsa tradicional; luego se asignan los rangos a sus correspondientes valores absolutos, se determinan los valores de los rangos referidos a T^+ y de T^- , a partir de estos se establece el valor del estadístico T de ser necesario; de lo contrario, se puede recurrir al uso de la aproximación del estadístico T^+ por medio de una distribución normal.

Los resultados se pueden observar en la Tabla 4.4. Se descartará cuando se presenten empates (cuya diferencia resulte cero).

De los resultados presentados en la Tabla 4.3, se deduce que:

n =14

$T^{+} = 1+3+13+6+9+9+6+2+14+12 = 75$

$T^{-} = 6+11+9+4 = 30$

$T = \min(T^{+}, T^{-}) = \min(75, 30) = 30$

El conjunto de pasos para probar las hipótesis son los siguientes:

Tabla 4.4. Valores de las estadísticas T^{+}, T^{-}

Puntajes Salsa tradicional	Puntajes Salsa de ciruelas	Diferencias	Rango absoluto	Rangos para T^{+}	Rangos para T^{-}
6	7	1	1	1	
8	4	-4	6		6
1	3	2	3	3	
2	9	7	13	13	
6	10	4	6	6	
8	8	0	Descarte		
2.5	7	4.5	9	9	
8	3	-5	11		11
5	9.5	4.5	9	9	
5	9	4	6	6	
6.5	8	1.5	2	2	
1	9	8	14	14	
6.5	2	-4.5	9		9
7	3.5	-3.5	4		4
2	8	6	12	12	

Fuente: los autores

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: $\mu_1 < \mu_2$

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral izquierda.

4) La estadística de prueba corresponde a la estadística T^+

$n = 14$

Usando la aproximación normal para T^+, se obtiene:

$$E(T^+) = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{14(14+1)}{4} = 52.5,$$

$$Var(T^+) = \frac{14(14+1)(2(14)+1)}{24} = \frac{14(15)(29)}{24} = 253.75$$

$$Z = \frac{T^+ - E(T^+)}{\sqrt{Var(T^+)}} = \frac{75-52.5}{\sqrt{253.75}} = \frac{22.5}{15.9295} = 1.4124$$

Para $\alpha = 0.05$ resulta que $Z_\alpha = Z_{0.05} = -1.645$

5) Como $Z = 1.4124$ es mayor que $Z_{0.05} = -1.645$ entonces se acepta la hipótesis nula; por consiguiente, se acepta que H_o: $\mu_1 = \mu_2$

De otra forma, para $\alpha = 0.05$ con $n = 14$ resulta que $T_{2\alpha} = T_{0.10} = 26$ (Freund y Miller, 2000, p. 590), como $T^+ = 75$ no es menor o igual que $T_{2\alpha} = T_{0.10} = 26$ entonces no se rechaza la hipótesis nula; luego no existen diferencias significativas en las calificaciones otorgadas por los sabores del producto A cuando se acompañan de las salsas de ciruelas o de la salsa tradicional.

Por otra parte, el valor de la estadística T^- = 30 tampoco es menor o igual que $T_{2\alpha} = T_{0.10} = 26$; lo cual también respalda la decisión tomada.

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que, en general, el promedio de los puntajes referidos al sabor de la pieza del producto A acompañado con la salsa de ciruelas no es mayor que cuando se acompaña el producto A con la salsa tradicional; por consiguiente, la afirmación hecha por el investigador no es estadísticamente cierta.

4.5 Prueba U de Mann-Whitney

La prueba U es no paramétrica y se constituye en una alternativa para la prueba t-student para dos muestras independientes, cuando no se cumple el supuesto de normalidad para las dos poblaciones de las cuales se muestrea, pero los datos han de corresponder a una variable continua. La hipótesis nula se plantea en términos de que se muestrea de poblaciones idénticas (sus medias poblacionales son iguales) y la hipótesis alterna indica que tales poblaciones son distintas (sus medias son desiguales).

Ahora, si n_1 es el tamaño de la primera muestra cuyos datos son $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_1}$ y n_2 es el tamaño de la segunda muestra cuyos datos son $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_2}$ en primera instancia se conforma una muestra combinada, la cual estará constituida por $n_1 + n_2$ datos escrito de la siguiente forma: $x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_1}, x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, x_{n_1+3}, ..., x_{n_1+n_2}$, se prosigue a ordenar de menor a mayor los $n_1 + n_2$ datos y se determina el rango (posición que ocupa cada dato en la secuencia ordenada) para cada dato de la muestra combinada; se calcula la estadística W_1 como la suma de los rangos de los datos correspondientes a la primera muestra y W_2 como la suma de los rangos para los datos de la segunda muestra; en este caso, no interesa si se trabaja con W_1 o con W_2, puesto que $W_1 + W_2$ será siempre igual a la suma de los primeros $n_1 + n_2$ números enteros positivos, es decir:

$$W_1 + W_2 = \frac{(n_1 + n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{2}$$

Posteriormente, se obtienen las siguientes estadísticas relacionadas con W_1 y W_2, así:

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1 + 1)}{2}$$

$$U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2 + 1)}{2}$$

$$U = \min(W_1, W_2)$$

En esta situación, las pruebas que se basan en U, U_1 o U_2 son equivalentes a las pruebas que se basan en W_1 o W_2 (Lehmann y D'Abrera, 1975). Ahora, $U_1 + U_2 = n_1 * n_2$; además, cada una de las variables U_1, U_2 tienen distribuciones idénticas, también cada una es simétrica con respecto al valor $(n_1 * n_2)/2$.

Para la prueba de hipótesis de la forma:

H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: μ_1 difiere de μ_2

La hipótesis nula se rechaza cuanto U sea menor o igual que U_α

H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: $\mu_1 > \mu_2$

La hipótesis nula se rechaza cuanto U_2 sea menor o igual que $U_{2\alpha}$

En la prueba de hipótesis de la forma

H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: $\mu_1 < \mu_2$

La hipótesis nula se rechaza cuanto U_1 sea menor o igual que $U_{2\alpha}$

Es pertinente señalar que, para cuando n_1 y n_2 corresponden a tamaños mayores que 8, la distribución de probabilidad de las variables U_1 y U_2 pueden aproximarse por una normal estándar, así:

$$Z = \frac{U_1 - E(U_1)}{\sqrt{Var(U_1)}}$$

Donde:

$$E(U_1) = \frac{n_1 n_2}{2}, \quad Var(U_1) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

De similar modo:

$$Z = \frac{U_2 - E(U_2)}{\sqrt{Var(U_2)}}$$

Donde:

$$E(U_2) = \frac{n_1 n_2}{2}, \quad Var(U_2) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

Además,

$$Z = \frac{U - E(U)}{\sqrt{Var(U)}}$$

Con:

$$E(U) = \frac{n_1 n_2}{2}, \quad Var(U) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12}$$

La siguiente situación problema ha sido adaptada de Freund y Miller (2000): un ingeniero eléctrico desea comparar dos clases de señales luminosas, para eso ha seleccionado una muestra aleatoria de tamaño n_1 = 9 de la marca A y ha medido sus tiempos de iluminación en minutos; además ha seleccionado otra muestra aleatoria de tamaño n_2 = 10 de la marca B y ha medido sus correspondientes tiempos de iluminación en minutos, así:

Marca A: 15.9, 12.3, 14.2, 17.6, 18.0, 15.1, 16.4, 14.0, 17.9
Marca B: 16.2, 20.8, 15.7, 19.3, 17.2, 22.2, 19.9, 13.2, 16.3, 20.4

El ingeniero afirma que el promedio de los tiempos de iluminación de las señales luminosas de la marca A es inferior al promedio para la marca B; utilizar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis formulada por el ingeniero.

Para solucionar la situación problema mediante la prueba *U* de Mann-Whitney, en primera instancia se obtiene la muestra combinada y después se asignan los rangos desde 1 hasta 19; luego se establece que los rangos correspondientes a los datos de la primera muestra son: 1, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 14; en consecuencia, los rangos para los datos de la segunda muestra son: 2, 6, 8, 9, 11, 15, 16, 17, 18, 19. Con estos resultados se deduce que,

$W_1 = 1 + 3 + 4 + 5 + 7 + 10 + 12 + 13 + 14 = 69$

$W_2 = 2 + 6 + 8 + 9 + 11 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 121$

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 69 - \frac{9(9+1)}{2} = 69 - 45 = 24$$

$$U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2} = 121 - \frac{10(10+1)}{2} = 121 - 55 = 66$$

$$U = \min(W_1, W_2) = \min(24, 66) = 24$$

El conjunto de pasos para probar las hipótesis respectivas son los siguientes:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: $\mu_1 < \mu_2$

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral izquierda.

4) La estadística de prueba corresponde a la estadística U_1 que se ha de comparar con $U_{2\alpha}$ para tomar una decisión sobre la hipótesis nula.

Para $\alpha = 0.05$ el valor $U_{2\alpha} = U_{2(0.05)} = U_{0.10} = 24$ al considerar $n_1 = 9$ y $n_2 = 10$ (Freund y Miller, 2000, p. 591)

5) Como $U_1 = 24$ es igual a $U_{0.10} = 24$, se cumple que $U_1 \leq U_{2\alpha}$ en consecuencia se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa H_1: $\mu_1 < \mu_2$

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que el promedio de los tiempos de iluminación de las señales luminosas de la marca A es inferior al promedio para la marca B; por consiguiente, la afirmación hecha por el ingeniero eléctrico es cierta.

En la siguiente situación problema hipotética de investigación se consideran dos muestras aleatorias, cuyos datos reflejan el aumento de peso de dos muestras aleatorias de pavos, los cuales han sido alimentados mediante dos dietas distintas, pero manteniendo un ambiente de vida diaria similar. La primera muestra aleatoria resultó de tamaño $n_1 = 16$; además, la segunda muestra aleatoria también tiene tamaño $n_2 = 16$, sus correspondientes valores de su ganancia de peso son los siguientes:

Dieta A: 15.3, 9.1, 9.7, 12.5, 13, 12.2, 17.4, 13.5, 14.1, 22.6, 13.7, 11, 13.9, 10.8, 13.3, 9.2

Dieta B: 22.8, 20.3, 14.4, 18.6, 18.2, 17.8, 12.9, 11, 15.2, 14.8, 14.3, 19.1, 20.1, 19.7, 13.8, 17.9

El dueño de la granja donde se crían los pavos afirma que la dieta B, en promedio, genera una mayor ganancia de peso que la dieta A. Usar un nivel de significancia del 5 % para probar la hipótesis formulada por el dueño de la granja.

Para resolver esta situación problema se propone utilizar la prueba U de Mann-Whitney; para esto, en primer lugar se obtiene la muestra combinada y después se asignan los rangos desde 1 hasta 32; luego se establece que los rangos correspondientes a los datos de los pavos alimentados con la dieta A son: 1, 2, 3, 4, 5.5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 21, 22, 31; ahora los rangos de los datos para los pavos alimentados con la dieta B son: 5.5, 9, 14, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32. Con estos resultados se deduce que,

$W_1 = 1+2+3+5.5+7+8+10+11+12+13+15+16+21+22+31 = 181.5$

W_2= 5.5+9+14+17+18+19+20+23+24+25+26+27+28+29+30+32= 346.5

$$U_1 = W_1 - \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 181.5 - \frac{16(16+1)}{2} = 181.5 - 136 = 45.5$$

$$U_2 = W_2 - \frac{n_2(n_2+1)}{2} = 346.5 - \frac{16(16+1)}{2} = 346.5 - 136 = 210.5$$

$$U = \min(W_1, W_2) = \min(45.5, 210.5) = 45.5$$

El conjunto de pasos para probar las hipótesis respectivas son los siguientes:

1) Planteamiento del sistema de hipótesis

H_o: $\mu_1 = \mu_2$
H_1: $\mu_1 < \mu_2$

2) Se fija el nivel de significancia en el valor $\alpha = 0.05$.

3) La prueba es unilateral izquierda.

4) La estadística de prueba corresponde a la estadística U_1 que se debe comparar con $U_{2\alpha}$ para tomar una decisión sobre la hipótesis nula; aunque, para n_1 = 16 y n_2 = 16 no suele encontrarse el valor de U en los libros de texto universitarios. Por consiguiente, se recurre a su aproximación por medio de la distribución normal estándar. En este contexto

$$E(U_1) = \frac{n_1 n_2}{2} = \frac{(16)(16)}{2} = \frac{256}{2} = 128$$

$$Var(U_1) = \frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)}{12} = \frac{(16)(16)(16+16+1)}{12} = \frac{256(33)}{12} = 704$$

$$Z = \frac{45.5 - 128}{\sqrt{704}} = \frac{-82.5}{26.533} = -3.1093$$

Por otra parte, para $\alpha = 0.05$ en una prueba unilateral izquierda, el valor teórico en la distribución normal estándar es $Z_{\alpha} = Z_{0.05} = -1.645$

5) Como el valor Z = -3.1093 es menor que $Z_{\alpha} = Z_{0.05} = -1.645$ entonces se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa $H_1: \mu_1 < \mu_2$

6) Con un nivel de significancia del 5 %, se concluye que la dieta B destinada a alimentar los pavos en promedio genera una mayor ganancia de peso en los pavos que la dieta A; por consiguiente, la afirmación hecha por el dueño de la granja es estadísticamente cierta.