

# Diseño de lámparas como recurso didáctico para el desarrollo del pensamiento geométrico en grado séptimo<sup>9</sup>

*Nayibe Gómez Condía<sup>10</sup>*

*José Eriberto Cifuentes Medina<sup>11</sup>*

### Introducción

En la búsqueda de la comprensión y adquisición de conocimiento, se generan cada día expectativas sobre la forma correcta en la cual se logre proporcionar el conocimiento, la manera más adecuada en la que, el estudiante explore sus capacidades como: organizar, analizar y estructurar los conocimientos geométricos, sobre los intereses y expectativas de los estudiantes con respecto a las matemáticas del espacio.

.....  
9 Se deriva del proyecto de investigación para optar por el título de Maestría en Didáctica de la Matemática.

10 Magíster en Didáctica de la Matemática y Licenciada en Educación Básica con énfasis en matemáticas humanidades y lengua castellana; Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Docente en la Institución Educativa Abrahán Lincoln. Correo electrónico [nayibe.gomez@gmail.com](mailto:nayibe.gomez@gmail.com)

11 Investigador Asociado (I) SNCTeI, convocatoria de Minciencias 894/2021. Doctorando en Educación Cohorte XII. Magíster en Educación, Especialista en Evaluación Educativa, Especialista en Pedagogía y Docencia, Licenciado en Teología, Licenciado en Filosofía y Educación Religiosa, Universidad Santo Tomás. Docente Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Orcid ID: <https://orcid.org/0000-0001-5702-620X>. Correo electrónico: [joseeriberto.cifuentes@uptc.edu.co](mailto:joseeriberto.cifuentes@uptc.edu.co)

Estas expectativas se vuelven relevantes para investigadores y comenzar a revisar e innovar en recursos didácticos, en formas adecuadas para propiciar más oportunidades en el aula, por tanto, implementar la geometría desde la experimentación con diferentes recursos del entorno, de ese entorno que rodea la vida cotidiana, se torna en una oportunidad que logre que el estudiante gradualmente llegue a tener un conocimiento más amplio en relación al análisis, clasificación y propiedades de las formas tridimensionales, estableciendo relaciones espaciales que permitan el entendimiento de ese mundo.

Para Gamboa-Araya y Ballestero-Alfaro (2010) “el aprendizaje de la geometría implica el desarrollo de habilidades visuales y de argumentación. Más aún, para lograr un aprendizaje significativo es necesario construir una interacción fuerte entre estos dos componentes” (p. 130).

Se tiende a enseñar la geometría informando a los estudiantes sobre las propiedades de las formas bidimensionales o tridimensionales, que aprendan fórmulas que luego son aplicadas completando ejercicios donde deben demostrar lo que han aprendido, esto hace que el estudiante no aplique el razonamiento. Jones (2002) refiere que, si se desea desarrollar el pensamiento espacial y geométrico se debe tener en cuenta variedad de enfoques; unos de manera formal y otros desarrollados deductivamente o encontrados a través de la exploración y la experimentación, es importante Asegúrese de que los estudiantes entiendan los conceptos que están aprendiendo y los pasos que están involucrados en procesos particulares en lugar de que los estudiantes sólo aprendan reglas, una enseñanza eficaz alienta a los estudiantes a reconocer las conexiones entre diferentes formas de representar ideas geométricas y entre geometría y otras áreas de las matemáticas.

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) trabaja arduamente para generar mecanismos que permitan conocer si las políticas que se tienen para la enseñanza están dando los resultados esperados. Por tanto, el MEN realiza pruebas Saber y Avancemos que se aplican en todos los niveles de educación desde educación primaria hasta la educación media en grados específicos. Estas son las herramientas que tiene el Estado

Colombiano para evaluar cuantitativamente el nivel de competencia en el que se encuentra el estudiante y las instituciones en el proceso educativo.

Es por ello que hoy día los establecimientos educativos colombianos aspiran a mejorar el bienestar de sus estudiantes, dando prioridad al desarrollo de las capacidades necesarias para afrontar cada uno de los retos que la vida moderna requiere, de modo que la educación se ha constituido en un instrumento indispensable para que las personas y las sociedades puedan avanzar hacia los ideales de paz, libertad y cambio, aportando herramientas para que así mismo ellos puedan aprovechar y desarrollar sus propios talentos, capacidades y realizar su proyecto de vida; para que pueda integrarse y cooperar con los demás. Uno de los objetivos primordiales es formar mejores personas para la vida desarrollando virtudes e intentando ser mejores, se viven profundas transformaciones motivadas por el desarrollo de tecnologías y el avance e investigación de la ciencia, el cual, aunque no obedece a una fórmula específica si demanda un conjunto de factores, condiciones, capacidades y aspectos que el sistema educativo debe acoplar en cada una de las dimensiones base sobre la cual trabaja el sistema educativo acordando los parámetros idearios del futuro que desean alcanzar una educación para el mañana.

Por esta razón, resulta imprescindible el papel que juegan las herramientas de aprendizaje y la posibilidad de obtener medios para estimular procesos de razonamiento y argumentación del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes, escapando de las interpretaciones deductivas, tratando de pasar una geometría experimental de interpretación inductiva, alcanza gran importancia pues esta hace indispensable incluir fuentes dinámicas, accesibles, lúdicas y pedagógicas que posibiliten al estudiante adquirir el conocimiento.

## **Fundamentación teórica**

Con los referentes teóricos que orientan la investigación, se hace énfasis en tres categorías concernientes a la enseñanza y aprendizaje de la geometría; en primer lugar, se proporciona una visión general sobre el pensamiento geométrico desde la concepción de Piaget, el modelo de enseñanza de Van Hiele, el razonamiento geométrico de Duval (2016)

desde lo cognitivo y los modelos figurativos de Fischbein (1993). Cada una de estas teorías aporta recursos para el desarrollo del trabajo con los estudiantes en cuanto a la construcción de pensamiento geométrico. También se tienen en cuenta los lineamientos curriculares y los estándares básicos de competencias en Matemáticas sugeridas por el MEN.

Se tiene en cuenta la importancia de los recursos didácticos, como un facilitador para la comprensión de conceptos geométricos por parte de los estudiantes por intermedio de la experimentación, visualización, manipulación y construcción de objetos en dos y tres dimensiones. Finalmente se abordan algunas situaciones que pretenden afrontar desde otras perspectivas la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

### **Pensamiento geométrico**

La geometría es el campo de las matemáticas que se encarga del estudio de los cuerpos, sus propiedades y las relaciones entre ellos, de las transformaciones que puedan experimentar de los objetos que se encuentran en movimiento como también de aquellos que permanecen inamovibles. Se relaciona con las formas de medir líneas, ángulos, lados, espacio que ocupan o qué tan lejos o cerca los elementos que nos rodean, desde el punto de vista de (Godino y Ruíz, 2002):

La geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palabras como, punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro, etc. Tales términos y expresiones designan “figuras geométricas”, las cuales son consideradas como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. (p. 456)

La geometría es un área increíble, con infinitud de recursos que se pueden utilizar como herramientas para enseñarla y aprenderla, tiene una facilidad extraordinaria para abordarla desde distintas direcciones como pintura, escultura, música, artesanía entre otros, además, tiene la habilidad de conquistar los sentidos admirando sus maravillosas manifestaciones que conlleva a estimular la creatividad, y en virtud de ello, lograr utilizarlo como recurso que capture la atención de los estudiantes para superar las dificultades a las cuales se enfrentan a la hora de comprender las matemáticas.

¿Es importante estudiar geometría? En la actualidad, la geometría está recobrando la importancia que tuvo en sus inicios, las instituciones educativas cada vez más, retoman nuevamente lo que en algún momento dejaron de lado, esa matemática que ofrece verdad, pero con infinita belleza. El objetivo principal es desarrollar el pensamiento geométrico, entendido hoy como algo básico para lograr comprender el espacio que lo rodea. Araya y Alfaro (2009) sostienen que, “El desarrollo de la geometría ha estado relacionado con las necesidades del ser humano por comprender su mundo. La aplicación de ella en la vida cotidiana muchas veces pasa inadvertida durante la enseñanza de esta disciplina” (p. 116), en virtud de ello, el estudio de la geometría debe ser algo profundo y significativo para el alumno, logrando que dichos conocimientos adquiridos puedan ser aplicados en su entorno.

Además, contribuye a desarrollar la capacidad de explorar y resolver racionalmente situaciones problema del espacio en el que viven los estudiantes, cabe resaltar a Jones (2002), autor que resume algunos de los objetivos de la enseñanza de la geometría:

Proporcionar experiencias para lograr el desarrollo del pensamiento espacial, intuición y visualización. Vivenciar y describir en forma ordenada una amplia gama de experiencias con objetos en dos y tres dimensiones. Dominar el conocimiento, la comprensión y la capacidad para utilizar la geometría para resolver problemas, hacer conjeturas y razonamientos deductivos. El modelado como un recurso que permite desarrollar habilidades aplicables al mundo real. Descubrir la existencia de objetos que se pueden ver, tocar, mover, transformar tomando conciencia del patrimonio que es la geometría de la sociedad y las aplicaciones en el día a día. (p. 125)

Es necesario justificar el por qué es importante estudiar geometría y desarrollar el pensamiento geométrico, solo se requiere observar el ambiente en el cual el ser humano se desenvuelve de manera natural, y así lo resume Bursill-Hall (2002):

Al menos en un nivel, la respuesta es sorprendentemente simple. Durante la mayor parte de los últimos dos mil quinientos años en la

tradición europea u occidental, se ha estudiado la geometría porque se ha considerado la verdad más exquisita, perfecta y paradigmática disponible para nosotros fuera de la revelación divina. Es la forma más segura y clara de pensar disponible para nosotros. Estudiar geometría revela, de alguna manera, la verdadera esencia más profunda del mundo físico. Y enseñar geometría entrena la mente en un pensamiento claro y riguroso. (p. 1)

**Teóricos para el aprendizaje del razonamiento geométrico.** Para hablar del pensamiento geométrico es necesario, retomar algunas teorías que permitan dar cuenta de los procesos mentales o cognoscitivos realizados por los sujetos, para ello se hará una breve referencia a la teoría Psicogenética de Jean Piaget, el modelo de pensamiento de Van Hiele en la geometría, el modelo cognitivo de razonamiento geométrico de Duval (2016) y la teoría de los conceptos figurativos de (Fischbein, 1993). A continuación, se presenta una sinopsis general de las posturas de los autores mencionados anteriormente.

Pero ¿cómo el pensamiento geométrico se desarrolla en las personas? ¿Cómo se expresan las habilidades y comportamientos de los individuos en su proceso de conocimiento geométrico? Uno de los más importantes estudios los realizó el biólogo y epistemólogo, reconocido por sus estudios realizados en el desarrollo de la inteligencia de los niños desde su teoría constructivista, de origen suizo Piaget apoyado con Inhelder realizó diversos experimentos respecto al desarrollo del pensamiento geométrico en los niños, a través de experimentos centrados en la concepción de espacio, en el cual a los niños se le entregaban distintas actividades geométricas

Piaget et al. (2013) plantean que, “como en todos los otros ámbitos del conocimiento humano, la inteligencia comienza a partir de una perspectiva inconscientemente egocéntrica como el primer paso hacia la combinación lógica de las relaciones espaciales” (p. 25) Así pues, la concepción del espacio se desarrolla a muy temprana edad, desde que se realiza interacción con el espacio que lo circunda, pero aún sin tener conceptualización o conciencia de ello, en consecuencia plantea dos hipótesis de lo observado:

Hipótesis constructivista: la representación del espacio depende de una organización progresiva de las acciones motoras y mentales que permiten el desarrollo de sistemas operacionales. Hipótesis de la primacía topológica: la organización progresiva de ideas geométricas sigue un orden definido que es más lógico que histórico; inicialmente se desarrollan ideas topológicas, luego se construyen relaciones proyectivas y después, surgen las relaciones euclídeas. (Uribe, 2011, p. 43)

Estas hipótesis anteriormente mencionadas fueron comprobadas en los experimentos que realizó Piaget acerca de los aprendizajes de la geometría, desde la concepción del espacio del niño y la relación con los conceptos. Siendo estos tan acertados que aún siguen vigentes y se consideran el punto de partida en los aprendizajes de la geometría. Algunos de esos estudios realizados se detallan a continuación en la Tabla 1:

**Tabla 1.** *Diferenciación de figuras geométricas*

<b>Diferenciación de figuras geométricas</b>		
Descripción de la actividad		Percepción Háptica: palpar con los ojos cerrados algunos sólidos geométricos, posteriormente escoger entre otros sólidos aquel que tuviera características similares al palpado.
Observaron Propiedades	Topológicas	Cerradura, continuidad o conectividad.
	Proyectivas	Rectilineidad o curvatura.
	Euclidianas	Paralelismo y perpendicularidad de los lados, congruencia de lados y ángulos.
Estadio del desarrollo	Sensorio-motor	Eran tímidos en sus exploraciones. Al tocar la figura lograban establecer relaciones entre ambas percepciones generando la representación del sólido por primera vez.

*Nota.* Experimento realizado por Piaget en torno a la observación del desarrollo del pensamiento geométrico.

**Fuente:** Elaboración propia teniendo en cuenta los aportes de Uribe (2011, p. 44).

En la actividad anterior aplicada por Piaget e Inhelder (2013) concluyen que, se podría catalogar como una hipótesis constructivista, dado a que, el orden lógico se daba luego del incremento en la coordinación de acciones que realizaba el niño, y que por tanto descartaron la hipótesis topológica. Pero posteriormente en otros estudios realizados por investigadores contradecían lo afirmado por Piaget (1967), aplicando la misma actividad a niños de las mismas edades, concluyendo que los alumnos eran capaces de diferenciar formas y junto con sus propiedades topológicas que las euclidianas. Con base en este debate y tratando de confirmar o descartar el estudio realizado y dar claridad sobre las figuras utilizadas en el experimento, crearon diversos tipos formas bidimensionales y tridimensionales que nutrieron de materiales a las clases de geometría (Uribe, 2011).

**Tabla 2.** *Representación de figuras geométricas*

<b>Representación de figuras geométricas</b>	
Descripción de la actividad	Pedían a los niños que dibujaran figuras geométricas planas, las cuales debían copiar de un modelo dado por los investigadores.
Evidencia de la observación	Los resultados mostraron inexactitud, lo cual era muestra de ausencia de conocimiento de pensamiento geométrico adecuado para lograr representar el Espacio.

*Nota.* Experimento realizado por Piaget en torno a la observación del desarrollo del pensamiento geométrico.

**Fuente:** Elaboración propia teniendo en cuenta los aportes de Uribe (2011, p. 47).

De acuerdo con este experimento realizado Piaget e Inhelder (2013) con su hipótesis constructivista y topológica, indican que, cuando se trata de representar una realidad mostrada y obtener un dibujo lo más parecido posible a observado, los niños privilegian las características topológicas y de igual manera actividades de discriminación, por ello, cuando se les pedía dibujar una figura geométrica, no estaban en la capacidad para determinar las características de determinada figura. Pero que a medida que la edad de los niños avanza, estos son capaces de diferenciar

y relacionar conceptos y discriminar características específicas de la geometría (Uribe, 2011, p. 47).

**Tabla 3.** *Construcción de sistemas de referencia para comparar figuras*

<b>Construcción de sistemas de referencia para comparar figuras</b>	
Descripción de la actividad	Solicitaban a los niños organizar en un trayecto recto una secuencia de objetos, estos se presentaban en forma desordenada sobre un escritorio, los objetos debían ser ordenados de tal forma que no fueran paralelos a los lados de la mesa.
Evidencia de la observación	Entre los 6 y los 7 años los niños fracasaban en la realización de la tarea, algunos de ellos alineaban las figuras siguiendo la dirección paralela de la mesa o realizaban una línea curva que se inclinaba hacia un camino paralelo de uno de los lados de la mesa. Influenciados por el distractor “lado de la mesa” debido a lo cual les impedía realizar la tarea en forma correcta.

*Nota.* Experimento realizado por Piaget en torno a la observación del desarrollo del pensamiento geométrico.

**Fuente:** Elaboración propia teniendo en cuenta los aportes de Uribe (2011, p. 49).

Del experimento anterior Piaget e Inhelder (1967, citado en Uribe, 2011) pudieron concluir que “el éxito en el establecimiento de relaciones proyectivas y euclídeas dependía de la construcción de un complejo sistema de puntos de vista lo suficientemente fuerte como para inhibir los distractores” (p. 49); por tanto, para que los niños lograran identificar características como la semejanza entre figuras bidimensionales y tridimensionales se da sólo cuando se logra establecer relaciones desde diferentes perspectivas de las figuras en una combinación de orientaciones e inclinaciones. Piaget e Inhelder (1967, citado en Uribe, 2011) dedujeron que, para realizar la ubicación de algunos objetos tridimensionales, se tenía un mayor éxito si se les permitía una visualización de la figura, esto permitía una capacidad superior de entendimiento en el niño. A continuación, se presentan los niveles de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico en el individuo, luego de las indagaciones realizadas por Piaget a partir de sus trabajos investigativos.

**Tabla 4.** Niveles en el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico

Niveles	El desarrollo de la habilidad de justificar
7-8 años	Realizan las actividades propuestas sin un orden lógico o plan definido, en estas edades los niños no son conscientes de sus pensamientos, en consecuencia, no cuentan con los mecanismos para sistematizarlos y organizarlos, por ello, las conclusiones de las observaciones realizadas pueden ser contradictorias.
7-8 a los 11-12 años	En este nivel, sus conclusiones están basados en creencias, sus exploraciones son hechas con base en un carácter anticipatorio y propositivo, por lo general la información que poseen la utilizan para suponer lo que posiblemente puede suceder como resultado de la exploración hecha, pero no logran aún establecer una formulación general, por lo general intenta justificar sus predicciones, sin lograr hacer deducciones.
11-12 en adelante	Los estudiantes en este nivel alcanzan a realizar deducciones lógicas, por tanto, su razonamiento se ajusta a un sistema matemático. Parten de inducciones empíricas, pero llegando a justificarlos por medio de hechos geométricos a través de la deducción.

**Fuente:** Elaboración propia teniendo en cuenta los aportes de Uribe (2011, p. 51).

Para Piaget (citado en Uribe, 2011) cada nivel de pensamiento evoluciona a medida que la edad del niño avanza, también lo hace la capacidad de argumentación y desarrollo de habilidades en el contexto de la geometría, yendo desde una serie de intuiciones básicas y espontáneas hasta llegar a un razonamiento matemático propio, como resultado de la interacción con la escuela y su contexto.

Desde esta perspectiva, el desarrollo del pensamiento geométrico comienza desde edades muy tempranas con nociones empíricas presentes en todos seres humanos, que, sin ser conscientes hacen uso de conceptos geométricos básicos, cuando aún no ha habido contacto con algún grado de escolaridad, como sostiene Uribe et al. (2014):

[...] que los niños, cuando ingresan en la escuela, poseen muchas nociones intuitivas sobre el espacio, las cuales los ayudan a solucionar problemas a los que se enfrentan diariamente. Esto hace necesario que, en su inicio, la escuela se preocupe por aprovechar, enriquecer y ampliar esas ideas. (p. 139)

**Conceptos figurativos (Fischbein).** En el concepto figurativo Fischbein sugiere que la geometría parte de entidades mentales como las geométricas, las cuales contiene características específicas: las figurales y las conceptuales, para Fischbein (1993) una imagen “posee una propiedad que los conceptos habituales no poseen, es decir, incluye la representación mental de la propiedad espacial” (p. 141). Según esta postura de conceptos figurativos, el razonamiento geométrico se caracteriza por la interacción entre estos dos aspectos. Afirma Fischbein (1993) que los conceptos figurales refieren a propiedades espaciales y su relación.

La principal idea del trabajo investigativo de Fischbein (1993) describe la geometría una fusión entre la figura y el concepto:

Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales - como idealidad, abstracción, generalidad, perfección. (p. 143)

Además, agrega que la figura geométrica (mental) posee una determinada estructura donde Fischbein (1993) describe algunas especificaciones.

Una figura es una imagen mental cuyas propiedades están completamente controladas por una definición. Un dibujo no es una figura geométrica en sí misma, sino una representación material, gráfica o concreta del mismo. La imagen mental de una figura geométrica es, por lo general, la representación del modelo materializado de la misma. Así que una figura geométrica en sí misma es una idea correspondiente que es la entidad figurativa abstracta idealizada y purificada. (p. 149)

Siguiendo esta argumentación, una imagen mental es así una representación donde se consideran tres categorías como se observa en la siguiente tabla.

**Tabla 5. Síntesis del desarrollo del pensamiento geométrico**

<b>Categorías de entidades mentales de las figuras geométricas</b>	
Definición	Significado de una entidad abstracta.
Imagen	Basada en la experiencia sensorial-perceptiva, como la imagen de un dibujo.
Figural	Es la realidad mental. Es la construcción manejada por el razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Pero carece de propiedades sensoriales concretas (color, peso, densidad etc.) Se necesita un esfuerzo intelectual para comprender que las operaciones lógico-matemáticas manipulan solo una versión purificada de la imagen es decir el contenido espacial figurativo de la imagen.

**Fuente:** Elaboración propia basada en información de *The Theory of Figural Concepts* (Fischbein, 1993).

Fischbein (1993) considera que, “el componente figurativo está generalmente influenciado por las fuerzas figurales-gestálticas” (p. 145) es decir que las imágenes que percibe de su alrededor y que es relevante lo lleva a construir imágenes mentales e induciendo al razonamiento geométrico. Siendo esta la base del desarrollo del pensamiento geométrico, e incluyendo un vínculo entre las imágenes y los atributos teóricos como base para el aprendizaje de la geometría. Finalmente, la geometría es un campo donde se hace necesario interactuar entre conceptos e imágenes para llegar a comprender la geometría.

**Razonamiento geométrico de Duval (2016).** Para comprender la geometría se requiere interpretar diferentes representaciones de los objetos tanto bidimensionales como tridimensionales, el modelo cognitivo de razonamiento geométrico propuesto por el francés Duval, propone un modelo para abordar la geometría desde lo cognitivo y lo perceptivo para lograr el desarrollo del sentido geométrico.

Abordar la geometría a través de la utilización de recursos para su enseñanza, donde los estudiantes no logren conectar la representación de un objeto con desarrollo del sentido geométrico, también puede ser una de las frustrantes ya sea en la primaria o la secundaria dado a que según Duval (2016) “la geometría exige una actividad cognitiva más

completa” (p. 13) no es suficiente con el análisis clásico pues “apela al gesto, al lenguaje y la mirada, para este, es necesario construir, razonar y ver indisociablemente” (p. 13), con el fin de comunicar correctamente la información en el individuo y no generar “un conflicto potencial entre percepción perceptiva de una figura y percepción matemática” (Jones, 1998, p. 31).

Para Duval (2016) observar una figura permite conocer sus “propiedades cualitativas” y es allí donde ocurre “el primer umbral crítico para el aprendizaje de la geometría. En la enseñanza, es quizá el umbral que tiene mayor dificultad” (p. 14) se requiere proporcionar al estudiante situaciones que favorezcan la intuición para que realmente comprendan el funcionamiento de la geometría. Es importante que en el reconocimiento de dichas propiedades cualitativas “se encuentre con gran variedad de actividades: observación, reproducción, construcción, descripción, definición etc.” (Duval, 2016, p. 14).

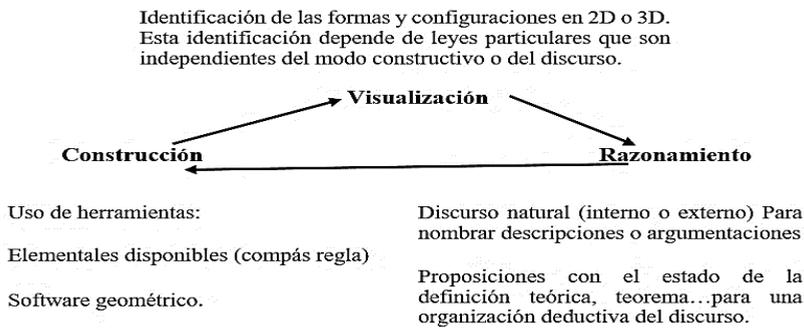
Cuando se aborda la tridimensionalidad es muy importante la visualización. Para Duval (2016) “el espacio ya no se aborda desde el aspecto de magnitud.... Sino desde el aspecto de sus dimensiones y del cambio de números de estas” (p. 15), la visualización permite una descripción detallada lo cual facilita el desarrollo de la intuición y un mayor desarrollo del entendimiento por parte del estudiante.

Ninguna de las actividades que se utilizan clásicamente para iniciar a los estudiantes en el estudio de la geometría permite verdaderamente desarrollar esta manera de ver. Sin embargo, es la única requerida para comprender las diferentes maneras de utilizar el lenguaje natural en geometría: enunciación de propiedades, definiciones, deducción de otras propiedades, teoremas (Duval, 2016, p. 15).

Así mismo, resaltar que la comprensión del pensamiento geométrico de Duval (2016) involucra tres tipos procesos cognitivos en el proceso de construir un razonamiento geométrico como lo explica Jones (1998):

Procesos de visualización, por ejemplo, la representación visual de una declaración geométrica, la exploración heurística de un complejo de Situación geométrica. Procesos de construcción (usando herramientas) procesos de razonamiento - particularmente procesos discursivos para la extensión de conocimiento, para explicación, para prueba Duval señala que estos diferentes procesos se pueden realizar por separado. (pp. 31-32)

**Figura 1.** Interacciones cognitivas involucradas en el desarrollo del sentido geométrico de Duval



**Fuente:** Elaboración propia basada en información de *Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning* (Jones, 1998).

**Importancia de la visualización en la geometría.** Para la geometría la vista toma gran notabilidad, pues, es la manera en que el individuo toma conciencia de todo lo que lo rodea, logrando interpretar los fenómenos más notorios e importantes de su vida cotidiana, para Spence (2001, citado en Torres, 2009) apunta que la “visualización es una actividad cognitiva humana relacionada con la formación de un modelo o imagen mental de algo” (p. 163). Desde la perspectiva de Duval (2016) el acto de ver implica dos niveles de operaciones, aclarando que cada uno es independiente, dichos niveles los clasifica en el “nivel el reconocimiento distintivo de formas y la identificación de los objetos que corresponden a las formas reconocidas” (p. 20).

Por otra parte, realiza una articulación entre la visualización y la geometría, a lo cual se refiere como un hiato dimensional para lograr observar

cada una de sus “propiedades relativas a las diferentes configuraciones posibles que se pueden formar a partir de las relaciones entre rectas y de propiedades relativas a la comparación de dos segmentos deben formar las piezas elementales” (Duval, 2016, p. 54). Este hiato dimensional desde la enseñanza de la geometría se deduce a desmontar una imagen o una estructura desde el análisis cognitivo. En la siguiente figura se observa la relación entre la imagen y el lenguaje. Entre la visualización y verbalización.

**El modelo de pensamiento de Van Hiele en geometría.** En el ámbito de las investigaciones en cuanto al desarrollo del pensamiento geométrico, y en la búsqueda continua de cambios para mejorar las formas de enseñar y aprender matemáticas, el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele ha resultado ser con mucha certeza un modelo que conlleva a la construcción de conocimiento en la geometría, Al respecto, Gutiérrez y Jaime (2012, citado Iglesias y Ortiz, 2015), al reflexionar sobre la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, expresan que “el modelo de razonamiento de Van Hiele es, en la actualidad, el marco más provechoso para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes” (p. 209).

Araya y Alfaro (2009) señalan que el modelo de Van Hiele surgió como una investigación de “profesores de secundaria, que reflexionaron sobre la problemática relacionada con la incomprensión, por parte de los estudiantes, de la materia que ellos les explicaban” (p. 127). La admiración y continuidad de este modelo se centra en la forma en que está estructurado, resultando ser claro sobre la naturaleza y los fundamentos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría “partiendo de la consideración de las matemáticas como actividad y el proceso de aprendizaje como proceso de reinención” (Corberán et al., 1989, p. 13).

Estudiar geometría teniendo como esencia este modelo contiene dos aspectos muy interesantes, el descriptivo y el instructivo: “primero intentan explicar cómo razonan los estudiantes a través de una secuencia de niveles de razonamiento. La segunda parte del modelo da algunas pautas a seguir, llamadas fases de aprendizaje” (Araya y Alfaro, 2009, p.

127). Es un modelo de progresión como lo expresan Corberán et al. (1989): “los alumnos deben transitar ordenadamente por todos los niveles. Para poder actuar con éxito en un determinado nivel deben haber adquirido las estrategias de los niveles precedentes” (p. 18). Para Jones (1998), “el alumno progresa a través de una serie de niveles caracterizados por una abstracción creciente” (p. 30). A continuación, se hace una descripción de los diferentes niveles basados en la investigación realizada por el holandés Van Hiele como se observa en la siguiente tabla.

**Tabla 6.** Descripción de los niveles del modelo de razonamiento geométrico

<b>Niveles de razonamiento geométrico</b>	
<b>Nivel</b>	<b>Descripción</b>
Reconocimiento o visualización	El estudiante reconoce las figuras geométricas por su forma como un todo, pero aún no diferencia partes ni tampoco sus componentes, pero si, algunas características básicas. No es capaz de reconocer o explicar las propiedades determinantes de las figuras, las descripciones son principalmente visuales y las compara con elementos familiares de su entorno. No hay un lenguaje geométrico básico para referirse a figuras geométricas por su nombre.
Análisis	El estudiante puede ya reconocer y analizar las partes y propiedades de una figura geométrica, aquellas como lados ángulos internos, sabe cambiarlas de posición, pero no le es posible establecer relaciones o clasificaciones entre propiedades de distintas familias de figuras. Establece las propiedades de las figuras de forma empírica, a través de la experimentación y manipulación. Como muchas de las definiciones de la geometría se establecen a partir de propiedades, no puede elaborar definiciones.
Deducción informal	El estudiante interrelaciona lógicamente propiedades y reglas, reconoce como algunas propiedades se derivan de otras descubiertas previamente dando o siguiendo argumentos informales, hace algunos razonamientos deductivos sencillos a partir del nivel anterior. Sin embargo, su razonamiento lógico sigue basado en la manipulación. Sigue demostraciones, pero no es capaz de entenderlas en su globalidad, por lo que no le es posible organizar una secuencia de razonamientos lógicos que justifique sus observaciones.
Deducción	El alumno prueba los teoremas deductivamente y establece interrelaciones, comprende el significado de los axiomas o postulados, siendo capaz de realizar demostraciones de teoremas.

Niveles de razonamiento geométrico	
Nivel	Descripción
Rigor	El alumno establece teoremas en diferentes postulaciones y analiza y compara estos sistemas. Puede apreciar la consistencia, complejidad de los postulados de la geometría. Este nivel es el más complejo de alcanzar.

**Fuente:** Elaboración propia basada en los autores Araya y Alfaro (2009); Corberán (coord.) (1989); Iglesias y Ortiz B. (2015); y Vargas y Araya (2013).

Desde lo expuesto anteriormente, el modelo se caracteriza por brindar al docente herramientas convirtiéndolas en guía dentro del aula a la hora de enfrentarse a los diferentes problemas que surgen en la orientación de los contenidos geométricos. Este debe ser un observador de los progresos de los estudiantes, además, ser autocrítico de los métodos que se están utilizando, pues “de la adecuada o desafortunada elaboración del método se deriva la intensificación del progreso o su retraso” (Corberán, 1989, p. 18).

Conjuntamente, el modelo de Van Hiele propone unas fases para orientar al docente en las propuestas didácticas llevadas al aula, enfocadas en el estudiante, logrando el progreso de cada nivel al que este llegue, se proponen las siguientes fases:

Fase 1: Encuesta/información. En esta fase el docente presenta el tema al estudiante, realiza una exploración de los saberes que este posee de experiencias anteriores, si las hay. Desde luego verificando su nivel de razonamiento: “se expone la dirección que tomará el estudio con posterioridad y toda la observación que sea pertinente” (Corberán, 1989, p. 16).

Fase 2: Orientación dirigida. Posterior a la indagación anterior, el docente realiza un análisis del conocimiento que posee el alumno y procede a entregar las herramientas adecuadas “si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada del pensamiento de nivel superior” (Vargas y Araya, 2013, p. 85).

Fase 3: Orientación libre. En esta fase los estudiantes logran expresar con palabras los procedimientos realizados, a partir de los resultados obtenidos realizan discusiones con sus compañeros para reforzar la labor efectuada. El docente debe ser orientador en la correcta utilización del vocabulario matemático.

Fase 4: Explicitación. En esta fase el docente propone problemas muchos más complejos al alumno debe consolidar los conocimientos alcanzados enfrentándose a la resolución de la situación expuesta, “el objetivo es la correcta consolidación de los conocimientos adquiridos” (Corberán, 1989, p. 17).

Fase 5: El estudiante es capaz de expresar lo aprendido del tema desde una visión general, integrando los conocimientos adquiridos durante el proceso, superada esta fase los estudiantes han alcanzado un nuevo nivel de conocimiento y están dispuestos a repetir la fase de aprendizaje en el nivel inmediatamente superior” (Corberán, 1989, p. 17).

### **Pensamiento geométrico y los programas implementados en Colombia.**

La enseñanza de la geometría ha pasado por diversos cambios, y unos de los referentes más conocidos en la época reciente y quien ha estado presente en gran parte de la historia de las modificaciones y adaptaciones de la educación en Colombia es Carlos Eduardo Vasco, cuando en 1976 hizo parte de la creación de la primera gran reforma y nació un nuevo programa de matemáticas, convirtiéndose un punto de referencia para los docentes de época que enseñaban en secundaria, así lo recuerda Molano (2011):

Esos programas del 74 eran muy claros y fáciles de recordar: aritmética en 6° y 7°, que en ese momento todavía no se llamaban así; álgebra en 8° y 9°, y geometría analítica, trigonometría y cálculo en 10° y 11°, ahí fue cuando el cálculo se volvió obligatorio, lo que a mí me pareció un error; pero bueno, de todas maneras, nadie protestaba. (Molano, 2011, p. 172)

Tuvieron que pasar casi dos décadas para darse cuenta que habían grandes falencias en la enseñanza y aprendizaje: “uno de cada diez de las

escuelas entraban a la secundaria” (Molano, 2011, p. 175), uno debido a la poca capacitación de los docentes en primaria pero además, la forma en que se enseñaba matemáticas “en ese momento no había una didáctica para las matemáticas; simplemente la discusión era si uno debía seguir la psicología de Piaget o la de Skinner, era más predominante el conductismo” (p. 177).

En atención a lo cual, se formuló un nuevo enfoque, tratando de plantear una línea clara acerca competencias que los estudiantes deben alcanzar, desde el MEN (1998) a las distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la misma lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprendiera como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones. Con la puesta en marcha de los Lineamientos curriculares de matemáticas ahora se daba cumplimiento a la Ley General de Educación de 1994 en su Artículo 22, numeral C, indica MEN (1998) que, los objetivos específicos de la enseñanza y el aprendizaje en secundaria se deben encauzar en:

El desarrollo de las capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, lógicos analíticos, de conjuntos, de operaciones y relaciones, así como para su utilización en la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, de la tecnología y los de la vida cotidiana. (p. 9)

Desde allí en adelante, el desarrollo de los conocimientos geométricos tomó relevancia en la enseñanza y aprendizaje. Posteriormente, el MEN (2006) conforma el documento de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, un documento orientador que se deriva de los Lineamientos Curriculares, fue organizado por grupos de grados lo cual permite indicar los estándares que los estudiantes deben manejar.

Constituyen uno de los parámetros de lo que todo niño, niña y joven debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad esperado a su paso por el sistema educativo y la evaluación externa e interna es el instrumento por excelencia para saber qué tan lejos o tan cerca se está de alcanzar la calidad establecida con los estándares. Con base en esta información, los planes

de mejoramiento establecen nuevas o más fortalecidas metas y hacen explícitos los procesos que conducen a acercarse más a los estándares e inclusive a superarlos en un contexto de construcción y ejercicio de autonomía escolar. (p. 9)

La propuesta de los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas surgen como un referente que contiene criterios claros en la educación de los estudiantes, el MEN (2006) resalta que estos, “permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar” (p. 12) considerando importante el conocimiento que se va adquiriendo en cada nivel, buscando potenciar el pensamiento matemático de los estudiantes, al establecer las competencias, también se establecen los fines y principios fundamentales de la educación en matemáticas.

También el (MEN, 2006) hace referencia a dos tipos básicos del conocimiento matemático: el conceptual lo describe como “conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el saber qué y el saber por qué” (p. 50). El procedimental como “las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente” (p. 50). Acorde a esta nueva perspectiva, estructural los tipos de pensamiento matemático, distribuidos en cinco grupos: numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio.

Con respecto al pensamiento geométrico los subdivide dos categorías: el pensamiento espacial y los sistemas geométricos y el segundo El pensamiento y los sistemas métricos o de medidas. El primero lo define como: “el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales” (p. 61).

En cuanto al pensamiento métrico el MEN (2006) se refiere como: “la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes y las cantidades, su medición y el uso flexible de los sistemas métricos o de medidas en diferentes situaciones” (p. 63). Por otra parte, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) nacen como un complemento que entrega el MEN en sus pautas para que las instituciones logren los objetivos de calidad educativa, tal como lo enuncia el MEN (2006) es “un conjunto de aprendizajes estructurantes que han de aprender los estudiantes en cada uno de los grados de educación escolar, desde transición hasta once” (p. 5), estas sugerencias son libres de tomar por cada Institución Educativa.

La Matriz de Referencia Matemática (MRM) se constituye en un instrumento basado en los Estándares Básicos de Competencias, el cual permite orientar los procesos de planeación de las clases, identificando cada uno de los aprendizajes que los estudiantes deben alcanzar. En la siguiente tabla se resumen las definiciones más relevantes de la Matriz de Referencia Matemática.

**Tabla 7.** *Definiciones de los componentes de la Matriz de Referencia Matemática*

<b>Componentes de la Matriz de Referencia Definición</b>	
Competencia	Es la capacidad que integra nuestros conocimientos, potencialidades, habilidades, destrezas, prácticas y acciones, manifestadas a través de los desempeños o acciones de aprendizaje propuestas en cada área. Podemos reconocerla como un saber hacer en situaciones concretas y contextos específicos. Las competencias se construyen, se desarrollan y evolucionan permanentemente de acuerdo con nuestras vivencias y aprendizajes.
Componente	Son las categorías conceptuales sobre las cuales se realizan los desempeños de cada área a través de situaciones problematizadoras y acciones que se relacionan con el contexto de los estudiantes.
Aprendizaje	Corresponde a los conocimientos, capacidades y habilidades de los estudiantes, atendiendo a la pregunta ¿qué procesos esperamos que adquiera el estudiante frente a las acciones pedagógicas propuestas en una evaluación, situación o contexto determinados?

---

### Componentes de la Matriz de Referencia Definición

Evidencia	Son los productos que pueden observarse y comprobarse para verificar los desempeños o acciones a los que se refieren los aprendizajes. Se relaciona con la siguiente pregunta: ¿qué deben responder los estudiantes en las pruebas de Lenguaje y Matemáticas, de tal manera que nos permita confirmar las competencias, conocimientos o habilidades con los que cuentan?
-----------	--

---

**Fuente:** Elaboración propia basada en la información de la Matriz de Referencia de Referencia Matemáticas (MEN, 2016).

Por tal razón, el pensamiento geométrico resulta fundamental para el desarrollo de procesos de visualización, exploración y la comprensión del entorno, forjando la capacidad de entendimiento del individuo. El pensamiento geométrico se crea a partir de la exploración, reconocimiento de las formas, descripción de las propiedades de cada una de sus partes.

**Pensamiento espacial y geométrico.** Para De Miguel González (2015) “el pensamiento espacial describe no sólo la comprensión de los procesos espaciales sino también incluye elementos de conceptos espaciales, herramientas y métodos para la representación espacial, así como el proceso de razonamiento espacial” (p. 9).

A juicio de Guillén (2010), “concebimos la geometría como ciencia del espacio físico, del espacio en el que el niño vive y se desarrolla y que sirve como vehículo para desarrollar el pensamiento lógico” (p. 24). Los seres humanos construyen las relaciones espaciales en sus mentes y al contacto con los demás desarrolla ese conocimiento profundizando conceptos y relaciones geométricas.

Según el MEN (2006) se “contempla[n] las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y, a través de la coordinación entre ellas” (p. 61). Al respecto, Alsina et al. (1989) estructuran la definición de espacio desde tres perspectivas:

**Tabla 8.** *Nociones de espacio*

Filosófico	Físico	Psicológico
<p><b>Espacio absoluto.</b> Los objetos y las relaciones son independientes de la existencia del espacio.</p> <p><b>Espacio relativo.</b> Determinado por la posición de los objetos.</p>	<p>Cualquier espacio atribuido al mundo exterior.</p>	<p>Cualquier espacio representado en la mente.</p>

**Fuente:** Elaboración propia basada en información del libro *Invitación a la didáctica de la geometría*, Alsina et al. (1989, p. 84).

La noción de espacio en el aprendizaje de la geometría se puede concebir como la interacción de diversas habilidades como manejar el espacio, percibir, elaborar imágenes mentales entre otras,

[...] es un proceso cognitivo de interacciones. Desde un espacio intuitivo o sensorio-motor, que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales (Alsina et al., 1989, p. 87).

**Importancia de los sólidos geométricos en la práctica escolar.** Es indiscutible que mucha de la geometría ligada a los sólidos se encuentra en el contexto cotidiano del niño, por tanto, no se puede desconocer la familiarización que se tiene con la naturaleza y sus formas en las cuales se encuentra inmerso. Para Alsina et al. (1989) “el entorno natural siempre ha sido fuente de estudio e inspiración de la actividad humana” (p. 28). Al iniciar la actividad matemática en la escuela, esta debe ser precisa, en aplicar una geometría desde una concepción que abarque la realidad del niño, Bishop (1992, citado en Guillén, 2010) indica como “necesario extender las ideas espaciales que tienen los niños cuando llegan a la escuela, que provienen de su propio mundo espacial, y lograr introducir las habilidades básicas de matematización, clasificación, descripción y relación” (p. 29).

## **Estrategias didácticas para el aprendizaje en la enseñanza de la geometría en secundaria.**

Concebir el pensamiento geométrico requiere conocer una serie de conceptos, axiomas y razonamientos, así como, capacidades de representación e imaginación espacial que resultan tediosos para el estudiante cuando se entregan contenidos magistrales. En una reflexión sobre la función de las estrategias didácticas en el aprendizaje y la enseñanza de la geometría y el papel fundamental del docente, De Camilloni et al. (2007) señalan lo que sigue: “La enseñanza es, finalmente, la acción de un docente” (p. 141) basada en la creación de situaciones para que la enseñanza sea exitosa, por esto, resulta importante utilizar técnicas que ayuden a elevar el interés por parte de los alumnos. Diversos autores como Brousseau (1986; 2007); D’Amore (2005; 2008), entre otros, han definido la finalidad de proporcionar diversas estrategias de aprendizaje para facilitar el conocimiento.

### **Didáctica**

Para esta investigación se harán algunas conceptualizaciones relevantes sobre el papel indudable de la didáctica respecto al aprendizaje de la geometría. Juan Amós Comenio es primer referente y a quien se le atribuye el inicio del proceso de la transformación de la enseñanza y del aprendizaje de los nuevos conocimientos. Comenius (citado por Zuluaga, 1992) “soñaba con un conocimiento integral quien al escribir una *Gran Didáctica* y sus tratados especiales contribuyó a crear una ciencia de la educación y una teoría didáctica” (p.102). Según Comenius (citado en D’Amore, 2008) “un método único basta para enseñar todas las materias... las artes, las ciencias y las lenguas” (p. 89).

También, Zuluaga et al. (2003) afirman que “La didáctica es el conjunto de conocimientos referentes a enseñar y aprender que conforman un saber. En la didáctica se localizan conceptos teóricos y conceptos operativos que impiden una asimilación de la didáctica a meras fórmulas” (p. 38). De acuerdo con Gutiérrez y Jaime (1998), “podemos decir que la Didáctica de las Matemáticas se interesa por todo aquello que influya en el aprendizaje

y comprensión de las matemáticas, no sólo en el contexto educativo, sino también fuera de él” (p. 1). Por su parte, De Camilloni et al. (2007) señalan que

La didáctica es una disciplina que habla de la enseñanza y, por ello, que se ocupa del estudio y el diseño del currículo, de las estrategias de enseñanza, de los problemas de su puesta en práctica y de la evaluación de los aprendizajes y de la enseñanza. (p. 18)

Retomando las anteriores definiciones, se puede expresar que, la didáctica, son todos aquellos elementos y recursos necesarios a los cuales se puede recurrir para que el proceso de formación de competencias sea el adecuado, llegando a cumplir con los objetivos que el docente planea en su práctica educativa, pero también, el conocimiento que el alumno desea obtener de su interacción con el medio educativo.

**Situación didáctica y situación didáctica.** De acuerdo con Brousseau (2007), una situación “es un entorno del alumno diseñado y manipulado por el docente” (p. 17), dicha situación se convierte en una ruta para docente quien inicialmente tiene la intención de enseñar un conocimiento matemático y elige el qué y cómo quiere transmitir dicho conocimiento a sus alumnos, para Brousseau (2007, p. 31). La situación didáctica se presenta cuando se da la interacción con el alumno y un medio para dar solución a dicha situación generada por el docente, “el aprendizaje se da de manera natural, sin intención didáctica” (Brousseau, 2007, p. 31). Para Parraguez et al. (2015) “como el medio es impersonal, no tiene ninguna intención didáctica: no desea enseñarle nada al alumno. Por eso este tipo de situación recibe el nombre de “didáctica” (p. 411).

**La enseñanza y aprendizaje de la matemática desde la didáctica.** Para D’Amore (2005) la didáctica “de una parte es “artesano” (el docente que prepara y elige las lecciones los ejemplos...) y de otra parte es el arte (elección de variables comunicativas, modalidades para captar la atención para motivar) (p. 11). Por lo anterior, el docente tiene la responsabilidad de reestructurar la información que intenta transmitir para convertirla en herramientas útiles y prácticas para los jóvenes. “El docente debe

fortalecer sus convicciones pues el objetivo principal es crear situaciones (bajo la forma de clases, actividades, objetos, ambientes, juegos) para una mejor enseñanza de la matemática” (D’Amore, 2005, p. 11).

De la misma manera, D’Amore (2008) considera que la didáctica de la matemática “es el arte de concebir y de crear condiciones que pueden determinar el aprendizaje de un conocimiento matemático por parte del individuo” (p. 90), esto en la práctica docente, implica aprender y comprender las necesidades de acuerdo a las cualidades de los alumnos para adecuar la enseñanza favoreciendo la motivación hacia el aprendizaje, el compromiso del profesor como un artista, ofreciendo sus mejores pinceladas en la creación de procesos significativos y coherentes con el medio social en el cual interactúa. “El arte del docente está entonces en la organización de una relación entre alumno y el *milieu*” (D’Amore, 2008, p. 90) y, en consecuencia, “si se mejora la enseñanza también se mejora el aprendizaje” (D’Amore, 2005, p. 11).

Jiménez (2011) refiere que “la didáctica de la matemática está relacionada con la actividad matemática misma y el estudio de las transformaciones de la Matemática, ya sea desde la investigación o desde la enseñanza” (p. 7). El docente en su rol de investigador debe crear acciones didácticas y convertirlas en oportunidades para que los alumnos construyan los saberes matemáticos.

**La didáctica como mediadora en las dificultades del aprendizaje de las matemáticas.** El rendimiento académico en matemáticas muchas veces se ve frustrado por la predisposición que el alumno trae desde sus experiencias previas, ya sea desde el seno de sus familias donde cuentan sus malas experiencias con esta materia o también por sus experiencias vivenciadas en el aula en ciclos anteriores. Estas malas experiencias generan ansiedad la cual se ha definido como “un sentimiento de tensión y ansiedad que interfiere con la manipulación de números y la resolución de problemas matemáticos en... la vida cotidiana y situaciones académicas” (Richardson y Suinn, 1972, citado en Dowker et al., 2016, p. 1).

Resulta significativo crear relaciones que apoyen el proceso de aprendizaje matemático “los padres y maestros podrían intentar modelar actitudes positivas hacia las matemáticas y evitar expresar negativas a los niños” (Dowker et al., 2016, p. 10), teniendo en cuenta el componente afectivo y la didáctica como fundamentales en la creación situaciones encaminadas a fomentar confianza en los alumnos que conlleven a la resolución de problemas matemáticos.

**Transposición didáctica (Chevellar).** La transposición didáctica se puede establecer como un proceso para adaptar los saberes, el arte de lograr las alternativas didácticas para enseñar un contenido. Desde el punto de vista de Chevallard (1998) es el “conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza es denominado transposición didáctica” (p. 16) significa entonces que, se debe recorrer por diferentes fases para lograr generar una experiencia a partir de contenidos transformados por el docente dando un significado único a la comunicación de los saberes, como se observa en la siguiente figura.

**Figura 2.** *Transposición didáctica*



**Fuente:** Elaboración propia basada en el libro *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (Chevallard, 1998).

En síntesis, por una parte, toma lo implícito (saber sabio) como todas las definiciones y propiedades que están contenidos en los textos, en la siguiente fase se toman los objetos del saber escolar de acuerdo con

los planes y programas, y partiendo de estos el docente clasifica los que crea conveniente para el contexto, los adecúa (didáctica), los organiza (conocimiento implícito) con relación a su conjetura de aprendizaje de los alumnos. Sin embargo, hace énfasis en la vigilancia epistémica para evitar los riesgos, que, en efecto, de las diferentes transformaciones se desvirtúe el contenido, por tanto, el docente debe ser autocrítico realizando un análisis a las adaptaciones cuando se hace el proceso constructivo de la formulación didáctica (Chevallard, 1998).

### **Geometría y el arte**

La geometría es una de las áreas más versátiles, donde se pueden utilizar diferentes herramientas para una mejor comprensión de sus conceptos, hoy día existen distintas alternativas desde los materiales manipulables hasta softwares geométricos especializados en desarrollo de figuras bidimensionales y tridimensionales, permitiendo al alumno una exploración, experimentación e interacción con los objetos logrando más claramente observar sus características demostrables. Guillen (2010) agrega:

Ver la geometría como un inventario de formas, esto es, el punto de vista de las artes plásticas supone que la secuencia de actividades se organice al centrarse en la observación y análisis de formas que se presentan en la naturaleza (cristales...), en la arquitectura (simetría de las iglesias góticas...), en el arte (ornamentos), etc. (p. 29)

El arte es una forma de concretizar la geometría, logra ser un recurso que el docente pocas veces lo utiliza a su favor en el proceso de enseñanza, sin embargo, por sus características puede llegar a ser muy innovador para trabajar la geometría mediante proyectos acordes al medio. De este modo, permite que la geometría entre al aula a través de diversos recursos artísticos. Flores (2018) sugiere en su artículo que trabajar los poliedros a través de materiales sencillos permite desarrollar el sentido espacial en los estudiantes. Resalta también que, la construcción de lámparas puede contener una gran riqueza para desarrollar y profundizar sobre la construcción de sólidos para analizar sus cualidades.

La relación entre la geometría y el arte ha estado presente a lo largo de la historia a través de figuras elaboradas en papel (papiroflexia) y madera, grabados, esculturas, pinturas. Para Padrón (s.f.) “a conexión entre arte y poliedros ha sido realmente fructífera en el Renacimiento. Muchos de los grandes artistas de la época utilizaron los poliedros como un instrumento para desarrollar ciertas técnicas relacionadas con la perspectiva” (p. 9).

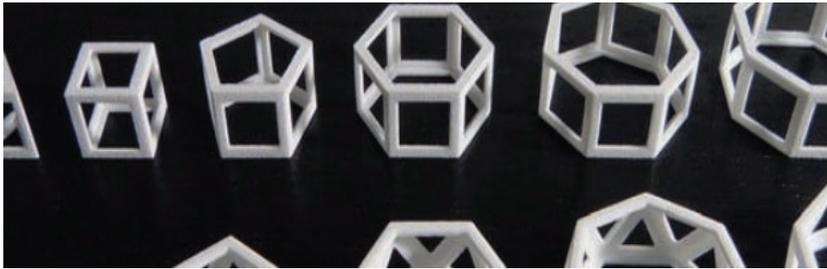
Buckminster (1982) es llamado el poeta de la geometría, un arquitecto que se hizo famoso por sus hermosas construcciones donde predominaban las formas geométricas. Sus construcciones con formas poliédricas truncadas, cuboctaedros, poliedros, icosaedros (Figura 3), entre otros, demostrando así, las ventajas que ofrece la geometría, no se puede quedar en los libros en una explicación sin fundamento alguno, sino que, se pueden desarrollar ideas, inventar y soñar, además, integrar en otras áreas.

Buckminster (1982) en su libro *Exploraciones en la geometría del pensamiento*, escrito con un enfoque matemático relata la importancia de los sistemas sensoriales a la hora de aprender geometría “el niño aprende sensorialmente (tacto, olfato, oído, vista) cada experiencia” (p. 4). Además, agrega que “los niños tienen un impulso innato primero de escuchar subjetivamente, encontrar orden y comprender integrativamente y sinérgicamente” (p. 4).

De igual manera, Senechal (2013) resalta que “la geometría sólida prácticamente ha desaparecido de la escuela, la construcción de modelos se ha relegado al jardín de la infancia. Las razones de esta desafortunada tendencia incluyen falta de capacitación docente y presiones para enseñar habilidades comprobables” (p. 5). Hace referencia a explorar con la infinidad de posibilidades que ofrecen las formas geométricas para hacer que la geometría sea accesible a los estudiantes mediante construcciones artísticas, así mismo “explorando los poliedros en la naturaleza” (p. 16), por lo general, después de un poco de experimentación, los estudiantes descubrirán tetraedros, octaedros, las bipyramides triangulares, pentagonales y el icosaedro” (p. 16).

La utilización de recursos manipulables favorece los aprendizajes en el aula permitiendo reflexionar y comunicar la información observada desde la experimentación, a su vez interpretarla a través de representaciones artísticas como dibujos, cuadros, maquetas entre otros, a partir de materiales que rodean el entorno del estudiante.

**Figura 3.** Modelos de poliedros impresos en 3D



**Fuente:** Tomada de *Visualizing mathematics with 3D printing* (Segerman, 2016).

Por otra parte, Segerman (2016) es un investigador matemático, que por medio de la bidimensionalidad y tridimensionalidad ha convertido la complejidad de la geometría en arte, usando impresiones en 3D logra realizar esculturas de poliedros (Figura 3). Para Segerman (2016), cuando se construyen figuras se deben relajar algunas reglas para realizar poliedros regulares, las caras tienen que ser polígonos regulares no tienen que ser iguales siempre, de esta manera se consiguen los prismas y los antiprismas (pp. 29-30).

Segerman(2016) describe que, para comprender mejor la bidimensionalidad es necesaria la tridimensionalidad “cuando un amigo vive en un plano bidimensional y se le quiere mostrar ese plano en el que vive, así que, se le tiene que mostrar algo dentro de su plano” (p. 36). Para ello, proyecta una sombra generada por una luz sobre un objeto geométrico (Figura 3) significa, entonces, que la sombra generada permite observar en este caso el poliedro en dos dimensiones a la vez, pero además observar cómo se ve la figura geométrica tridimensional en la mente. Basado en el diseño de objetos geométricos, crea lámparas que al estar encendidas proyectan sus formas permitiendo apreciar con detalles sus formas y proyecciones 2D, 3D y 4D (como se observa en la Figura 3).

Segerman (2016) muestra la gran riqueza de la geometría en su trabajo, las grandes obras que se pueden desarrollar junto con los estudiantes profundizando un tema que se vuelve complicado cuando se limita a dar conceptos y axiomas, pero con un poco de imaginación y creatividad se abren puertas para estudiar los poliedros a profundidad, apreciando sus dimensiones en todo su esplendor. En tal sentido, Segerman, (2016) afirma que “realizar un modelo tridimensional de un objeto matemático es una excelente manera para aprender sobre este” (p. 158).

## **Metodología**

Los aspectos fundamentales de la metodología asumida en la investigación, destacando: enfoque de la investigación, tipo de investigación, línea de la investigación, la contextualización y población, etapas de la investigación y los instrumentos empleados para la recolección de la información.

De acuerdo con Ugalde y Balbastre (2013) la metodología de investigación:

Hace referencia a todas las decisiones que el investigador toma para alcanzar sus objetivos, las cuales se enfocan en aspectos tales como el diseño de la investigación, la estrategia a utilizar, la muestra a estudiar, los métodos empleados para recoger los datos, las técnicas seleccionadas para el análisis de los resultados y los criterios para incrementar la calidad del trabajo, entre otras. (p. 180)

En consecuencia, de lo expuesto la metodología realiza una descripción de los métodos que se utilizarán y desarrollarán en la investigación, con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación, nadie tiene un parámetro establecido para llevar a cabo una investigación, puede nacer en forma accidental, una experiencia significativa, un sueño, de una discusión, en fin todo aquello que requiera de una deducción, para Baena (2017): “La metodología ejerce el papel de ordenar, se apoya en los métodos, como sus caminos y éstos en las técnicas como los pasos para transitar por esos caminos del pensamiento a la realidad y viceversa” (p. 31).

A continuación, en la Tabla 9, se presentan aspectos fundamentales de la metodología cualitativa, la cual orientará la implementación de la propuesta, se tienen en cuenta a autores como Arraiz (2014), Galeano (2004) y Hernández-Sampieri, et al. (2014), en sus concepciones del enfoque cualitativo, también Lewin (1946) y Zalazar (2006) con sus aportes en el tipo de investigación-acción y finalmente la Línea de investigación de la Maestría en Didáctica de la Matemática de la UPTC, que, en esencia, plantea una reflexión a construir conocimiento mediante estrategias a los diferentes problemas que se presentan dentro del aula en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

**Tabla 9.** Aspectos fundamentales de la metodología

Aspecto	Descripción	Autores que fundamentan la metodología
Enfoque de la investigación	Cualitativo	<p><i>Teoría fundamentada en los datos: un ejemplo de investigación cualitativa aplicada a una experiencia educativa virtualizada en el área de matemática</i> (Arraiz, 2014).</p> <p><i>Diseño de proyectos en la investigación cualitativa</i> (Galeano, 2004).</p> <p><i>Metodología de la investigación.</i> (Hernández-Sampieri et al., 2014).</p>
Tipo de la investigación	Investigación acción	<p><i>Metodología de la investigación: propuesta, anteproyecto y proyecto</i> (Lerma González, 2016).</p> <p><i>La Investigación Acción Participativa (IAP) en los estudios de psicología política y de género</i> (Obando -Salazar, 2006).</p> <p><i>Action Research and Minority Problems</i> (Lewin, 1946).</p>
Línea de investigación	<p>Conocimiento y aplicación de la didáctica de la matemática.</p> <p>Eje: Estrategias para la enseñanza de la matemática</p>	<p><i>Acuerdo 068</i> (UPTC, 2016).</p> <p>Didáctica de la matemática e investigación. (Rico y Sierra, 2000).</p> <p><i>The flipped classroom: Cómo convertir la escuela en un espacio de aprendizaje</i> (Tourón, Santiago y Díez, 2014).</p> <p><i>Estrategias de enseñanza y aprendizaje</i> (González Ornelas, 2008).</p> <p><i>Matemática: estrategias de enseñanza y aprendizaje</i> (Ortiz Rodríguez, 2001).</p>

**Fuente:** Elaboración propia.

La investigación cualitativa será integrada para este estudio como rumbo para analizar la forma en que los estudiantes de grado séptimo construyen e interpretan figuras tridimensionales a partir de elementos de su entorno, tratando de llevar la realidad a la práctica en el aula, utilizando estrategias que permitan generar un lugar de aprendizaje construido por todos los actores del proceso educativo.

### **Población y muestra**

Para desarrollar la propuesta investigativa de enfoque cualitativo se tendrán en cuenta a estudiantes que cursan grado séptimo en el año 2020, con el objetivo de mejorar las prácticas educativas en el aula, y contribuir a la reflexión sobre las formas de enseñar y aprender geometría. A continuación (Tabla 10) se hace una descripción de la población objeto de estudio.

**Tabla 10.** *Población y muestra*

<b>Aspecto</b>	<b>Descripción</b>
Población universo	1,156 estudiantes de grado transición a grado 11.
Población objeto de estudio	86 estudiantes de grado séptimo de la institución educativa Abraham Lincoln.
Muestra	32 estudiantes del grado séptimo jornada tarde con edades de 12-15 años equivalente al 27,52 % de la población objeto de estudio.
Contexto	Zona urbana de Villavicencio, Meta, barrio El retiro.

**Fuente:** Elaboración propia.

### **Fases de investigación**

Esta investigación se centra en fortalecer el pensamiento geométrico en los estudiantes de grado séptimo, a través del desarrollo de actividades mediadas por el diseño de lámparas con formas geométricas, que permitan mejorar las habilidades espaciales, dando prioridad a la

creatividad con representación de formas que encuentran en su entorno. Para la recolección de información se utilizarán distintos instrumentos relacionados en la siguiente tabla:

**Tabla 11.** *Fases de la investigación*

Fase de investigación	Objetivo específico	Instrumento
Diagnóstica	Diagnosticar las competencias del pensamiento geométrico en los estudiantes del séptimo grado de la institución educativa Abraham Lincoln.	<b>Cuestionario diagnóstico:</b> Para conocer el nivel de terminología con respecto a la geometría a estudiantes de séptimo grado.
Diseño y trabajo de campo	Construir recursos didácticos para la enseñanza de la geometría en estudiantes del séptimo grado de la institución educativa Abraham Lincoln.	<p><b>Diario de campo:</b> Obtener información relevante del proceso guiado.</p> <p>Se realizarán 5 sesiones por plataforma Zoom donde se orientarán la construcción de las lámparas con los materiales como papel, cartón o cartulina. Además, se trabajarán los temas objeto de fortalecimiento.</p> <p><b>Talleres:</b> Con el fin de evidenciar el proceso de aplicación de los recursos didácticos.</p> <p><b>Cuestionario</b> de salida: Para conocer si la aplicación de la estrategia obtuvo resultados positivos con respecto a la terminología en geometría en estudiantes de séptimo grado.</p>
Análisis y sistematización	Catalogar la propuesta encaminada a mejorar habilidades en el pensamiento geométrico en los estudiantes del grado séptimo de la institución educativa Abraham Lincoln.	Organización y análisis de la información obtenida antes, durante y después de la aplicación de la propuesta.

**Fuente:** Elaboración propia.

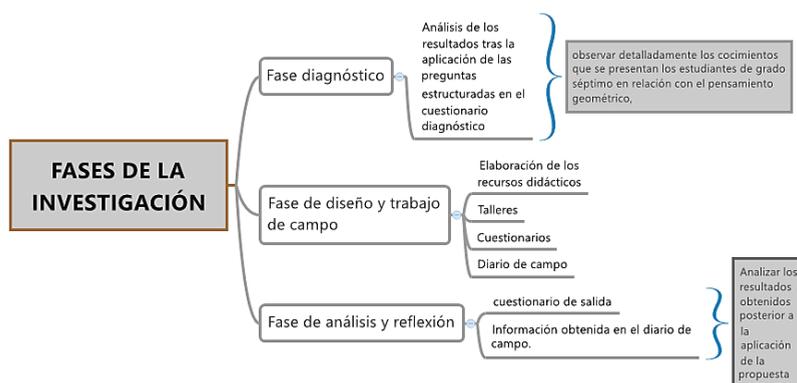
Se realiza un esbozo general de las fases de la presente investigación, centrada en fortalecer el pensamiento geométrico en los estudiantes

del grado séptimo, a través del desarrollo de actividades de aprendizaje enfocadas en la construcción de lámparas con formas geométricas. Así mismo, se señalan los diversos instrumentos, métodos y técnicas para la recopilación de la información en cada una de las etapas de ejecución de la propuesta.

## Análisis e interpretación de resultados

La investigación realiza un análisis detallado de cada uno de los instrumentos seleccionados para la recopilación de información relevante en cada una de las tres fases que se plantearon en el trabajo investigativo. Se realiza la sistematización de los datos organizándose en cifras estadísticas de cada una de las actividades propuestas, posteriormente lograr una interpretación al fenómeno de estudio.

**Figura 4.** *Fases de la investigación*



**Fuente:** Elaboración propia.

A continuación, se realiza el análisis de cada una de las fases establecidas por el investigador, iniciando con la descripción del trabajo realizado en la fase de diagnóstico, los instrumentos aplicados y la información obtenida, posteriormente la fase de diseño y trabajo de campo, donde se presenta la intervención en el aula y finalmente la fase de análisis y

reflexión sobre todo el proceso realizado detallando la viabilidad de la propuesta presentada.

### Fase de diagnóstico

A continuación, se exponen los resultados obtenidos en la fase de diagnóstico en la cual se identifican las características de la problemática.

**Tabla 12.** *Fase de diagnóstico*

Fase de investigación	Instrumento
Fase de diagnóstico	Cuestionario: El cuestionario diagnóstico tiene como objetivo averiguar el nivel de conocimiento en cuanto al pensamiento geométrico, para ello se plantearon preguntas relacionadas con poliedros, clasificación, elementos de los poliedros, pirámides y prismas y fórmula de Euler.

**Fuente:** Elaboración propia.

En este apartado se realiza un análisis de los resultados tras la aplicación de las preguntas estructuradas en el cuestionario diagnóstico observando detalladamente los conocimientos que se presentan los estudiantes de grado séptimo en relación con el pensamiento geométrico, tanto en forma general como a manera individual. Esta verificación ayuda al investigador a orientar el estudio, crear estrategias y plantear acciones que permitan mejorar conocimientos y habilidades del pensamiento geométrico.

1. Adriana tiene un papel de forma rectangular y lo recorta en tres partes, como lo muestra la imagen:

**Figura 5.** *Figura original*



**Fuente:** Elaboración propia.

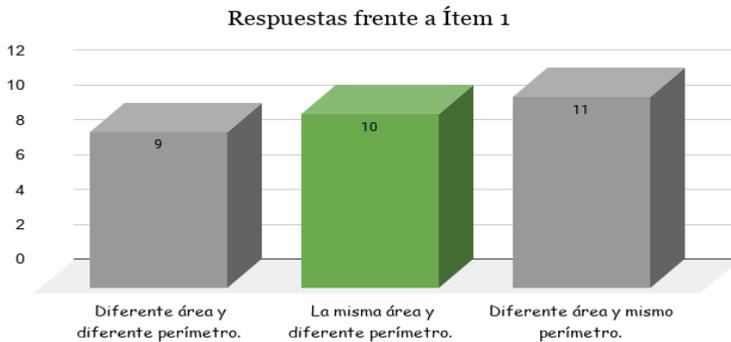
Con las partes recortadas, ella arma la siguiente figura:

**Figura 6.** *Figura armada*



**Fuente:** Elaboración propia.

**Figura 7.** *Resultados del cuestionario diagnóstico*



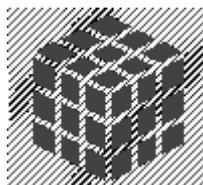
**Fuente:** Elaboración propia.

En esta pregunta se buscó conocer el sí estudiante identifica la diferencia entre área y perímetro en figuras bidimensionales, se observa en la gráfica que 10 estudiantes contestaron correctamente lo cual representa en la figura un 33.3%, 20 estudiantes que corresponde a 66.7 % no identifican la diferencia entre perímetro y área, se concluye que en general el grupo presenta dificultades en el tema.

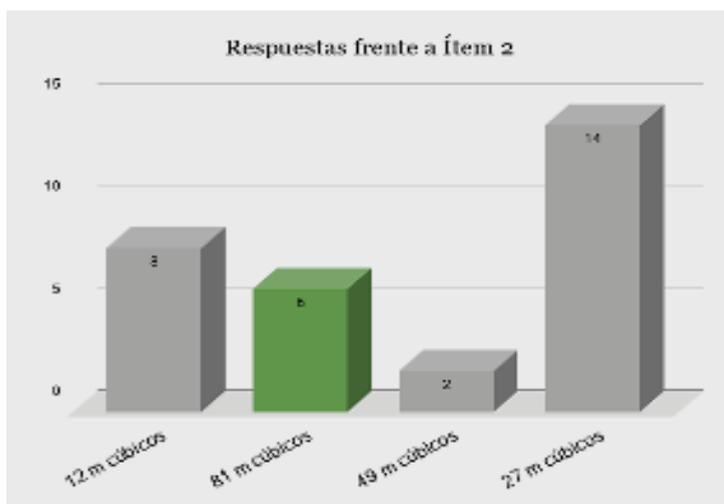
2. El siguiente cubo tiene un volumen de  $3\text{ m}^3$



Si el siguiente sólido está compuesto por cubos de mismo tamaño: ¿Cuál es el volumen del sólido?



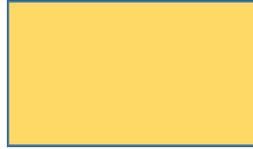
**Figura 8.** Resultados del cuestionario diagnóstico. Respuesta frente al ítem 2



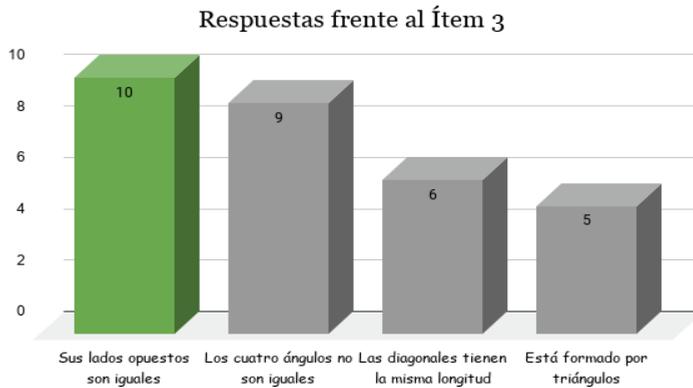
**Fuente:** Elaboración propia.

En este punto se buscó obtener el nivel de análisis que tienen los estudiantes en la solución de situaciones relacionadas con el volumen de sólidos geométricos, en la figura se observa que el porcentaje de aciertos sólo llegó a un 20 % mientras que un 80 % lo hizo incorrectamente, además que un 46.7 % de los estudiantes contestaron erróneamente 27 m<sup>3</sup> se puede inferir que no tomaron en cuenta el dato del volumen del cubo dado en el enunciado de la pregunta. Y que hallaron el volumen del sólido contando las unidades que este contiene.

3. Explicar cuál de las siguientes frases es más relevante para caracterizar.



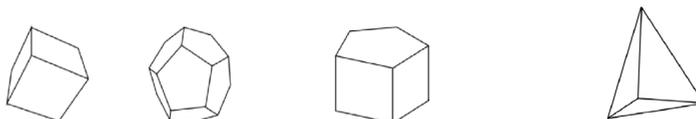
**Figura 9.** Resultados del cuestionario diagnóstico. Respuesta frente al ítem 3



**Fuente:** Elaboración propia.

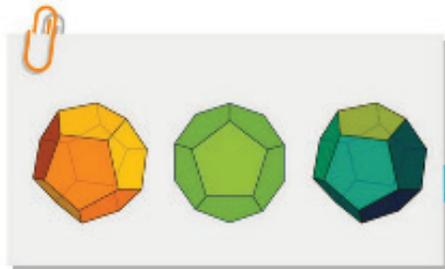
Con este ítem se pretendió saber el conocimiento de los alumnos sobre de las propiedades de una figura plana, observando la figura se puede percibir que 33.4 % que 10 estudiantes fueron capaces de identificar propiedades y conceptos matemáticos, pero el restante 66.7 % del grupo no tiene claro dichas propiedades lo cual llevó a contestar desacertadamente, se puede concluir que desconocen las propiedades de un rectángulo donde los lados opuestos son paralelos, que los ángulos en este caso no son relevantes puesto que hay otro cuadrilátero que cumple con esta característica.

4. Observa las figuras 1, 2 y 3 y describe las diferencias con un tetraedro (figura 4):

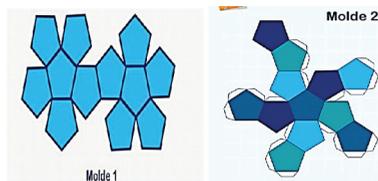


En esta pregunta se pretendió que los estudiantes describieron las diferencias entre las figuras 1, 2 y 3 y las propiedades más relevantes que describe el octaedro (figura 4), para esto el estudiante determina las propiedades de la figura a través de un proceso visual de un todo de la figura, en el análisis de las respuestas dadas por los 30 estudiantes, solo el 30 % acertaron en la respuesta, mientras que el 70 % no logró responder acertadamente debido a que muy probablemente se desconoce los ángulos diedros que se forman en sus vértices.

5. Observa los dodecaedros.



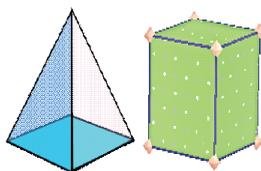
Carla y Wilson deben hacer la figura tridimensional, buscan en internet opciones, Carla cree que el molde 2 es el correcto, pero Wilson cree que el molde correcto es el Molde 1.



La temática abordada en esta pregunta corresponde al desarrollo de un poliedro correspondiente a la superficie que resulta al extender sobre el plano, una figura tridimensional convertir en una figura bidimensional que conlleva a observar características de los polígonos que la conforman. Evidenciando en los resultados que 12 de los estudiantes contestaron correctamente reconociendo que los dos moldes son aptos para construir el dodecaedro, 9 estudiantes marcaron que la opción de Wilson era la

correcta, siete estudiantes creen que la opción de Carla es la correcta y dos estudiantes contestó que ninguno de los moldes es apropiado para la construcción del sólido. De esta forma se concluye que se presentan dificultades en cuanto a la temática.

6. Las bases de dos cajas son cuadradas y congruentes, la longitud del lado de la base en 9 cm y la altura 30 cm.



Luego de hallar el volumen la Fig. 1 es de  $810\text{cm}^3$  y la Fig.2  $2430\text{ cm}^3$  respectivamente, si lo comparamos por medio de una razón, la que mejor opción representa la situación es:

**Figura 10.** Resultados del cuestionario de diagnóstico. Respuesta frente al ítem 6

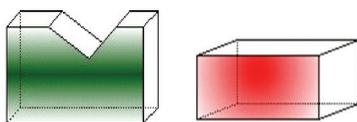


**Fuente:** Elaboración propia.

En esta pregunta se evidencia que el 40 % de los estudiantes relacionan conocimientos del pensamiento variacional para resolver una situación geométrica, pero el restante 60 % contestó de manera errónea por tanto

no tiene claro qué hacer frente a la argumentación. Se concluye que en general el grupo presenta falencias con respecto al tema.

7. ¿Qué tipo de poliedro son los siguientes sólidos?



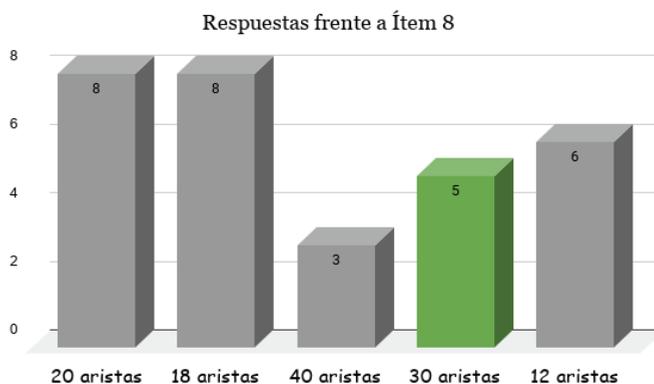
En este punto se evidencia que el 40 % de los estudiantes identifican la diferencia entre un poliedro cóncavo. Algunas de sus caras no pueden apoyarse en un plano, y convexo todas sus caras pueden apoyarse sobre un plano, pero el 60 % de los estudiantes no identifican la diferencia respecto a esta característica de los poliedros. Se concluye que el grupo en general presenta dificultades frente al tema.

8. Leonard Euler (1707-1783) fue uno de los más grandes matemáticos. Fue el creador de la fórmula que, si  $C$  representan el número de caras de un poliedro,  $A$  representa el número de aristas y  $V$  el número de vértices, entonces se cumple que  $C+V-A = 2$ .



Aplicando la fórmula de Euler para determinar el número de aristas de la anterior figura, se puede concluir que el dodecaedro tiene:

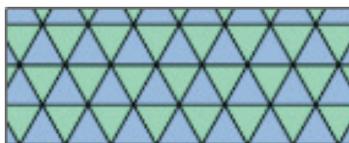
**Figura 11.** Resultados de cuestionario diagnóstico. Respuesta frente al ítem 8



**Fuente:** Elaboración propia.

La temática abordada en esta pregunta corresponde a el número de aristas que contiene una figura tridimensional en este caso un dodecaedro, el estudiante podía realizarlo de dos maneras de resolver la situación planteada, observando la figura y contando las aristas o aplicando la fórmula de Euler. Solo cinco estudiantes respondieron correctamente que se representa en la gráfica con un 16.7 %, los restantes 25 estudiantes no lograron identificar la cantidad de aristas del dodecaedro concluyendo que el concepto de arista no está claro, ni la forma de determinarla.

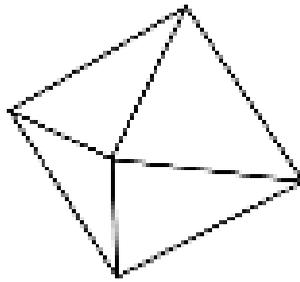
9. Algunas formas poligonales tienen la propiedad de recubrir completamente un plano sin dejar espacios, cuando un polígono cumple con esas características se dice que tesela el plano. Para ello es necesario que las uniones de todos los vértices sumen  $360^\circ$ .



Los tres polígonos regulares que cumplen esta condición son:

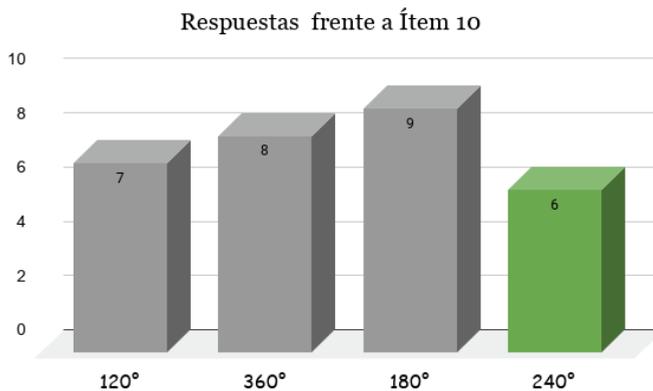
En este punto se buscaba que el estudiante identificará la regularidad de figuras planas que logren cubrir una superficie sin dejar espacios, solo el 23,3 % contestaron correctamente, pero el 66.7 no logró identificar las tres formas que cumplen con esta condición, concluyendo que el grupo en general no tiene aún una modelización acerca de las características que forman estos patrones.

10. Uno de los cinco sólidos platónicos es el octaedro.



Algunas de sus características es que, en cada vértice confluyen cuatro aristas y la suma de los ángulos que allí se forman suman:

**Figura 12.** Resultados de cuestionario diagnóstico. Respuesta frente al ítem 10



**Fuente:** Elaboración propia.

En este punto se aborda la temática de los elementos de un poliedro en este caso en específico los ángulos diedros que concluyen en un vértice, es este caso observando la imagen del octaedro solo 6 estudiantes contestaron correctamente y el 80 % lo resolvió en forma incorrecta por tanto se concluye que la gran mayoría de los estudiantes desconocen las características principales de una figura tridimensional.

### Fase diseño y de trabajo de campo

Esta fase está conformada por cinco sesiones, cada sesión se explica en forma clara la temática a trabajar, al igual que se facilita el material didáctico que se diseñó para la intervención, cada sesión contiene un taller que se desarrolla a la par donde se plantean situaciones geométricas que el estudiante debe resolver ayudado por los recursos didácticos entregados, además de las orientaciones que el docente investigador realice en cada sesión. Como parte del cierre de la intervención se aplicará un cuestionario de salida que busca evidenciar si la aplicación de la propuesta generó el impacto esperado de los recursos didácticos creados para abordar el desarrollo de habilidades cognitivas asociadas a la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

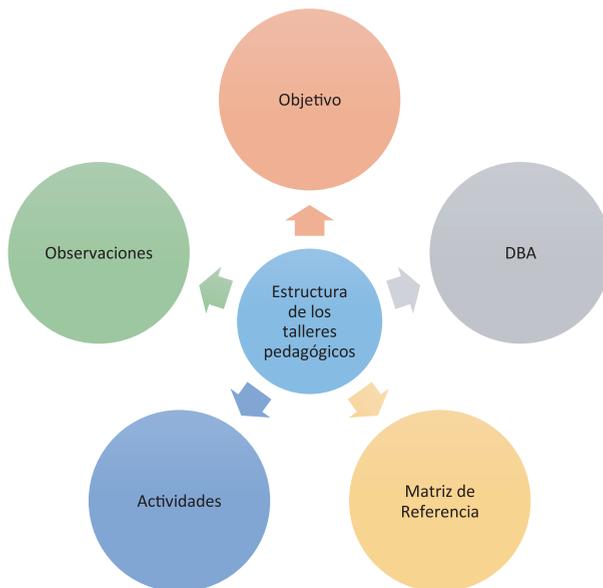
**Tabla 13.** Instrumentos utilizados en la fase 1

Fase de la investigación	Instrumentos
Diseño y trabajo de campo.	<b>Talleres:</b> Como instrumento con actividades elaboradas por los estudiantes del grado séptimo en cada sesión planeada para el trabajo de campo.
	<b>Diario de campo:</b> Obtener información relevante del proceso guiado durante las cinco sesiones por plataforma Zoom, se registra cada detalle del comportamiento de los estudiantes para luego realizar una reflexión profunda y detallada sobre el trabajo desarrollado.

**Fuente:** Elaboración propia.

A continuación, se describen los talleres pedagógicos aplicados en cada una de las sesiones del trabajo de campo, observando cada una de las acciones, específicamente sobre la labor y posición de los estudiantes frente a la estrategia de enseñanza propuesta por el investigador encaminado a potenciar el pensamiento geométrico.

**Figura 13.** Estructura de los talleres pedagógicos



**Fuente.** Elaboración propia.

### Talleres pedagógicos

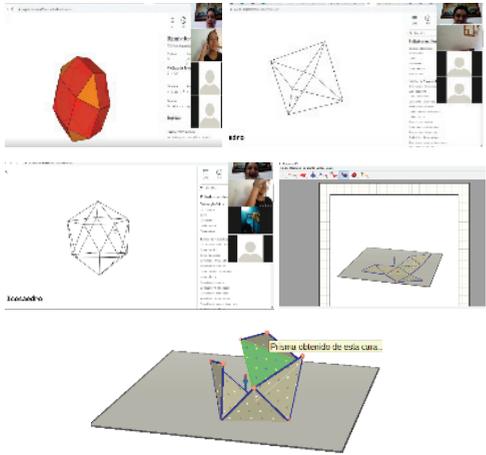
En el primer taller pedagógico se realiza con los estudiantes una explicación detallada del trabajo a realizar, mediante programas de geometría dinámica como Polyhedra y Geogebra se expone las representaciones de los distintos tipos de sólidos a trabajar, como apoyo para la representación de modelos y conceptos de cada una de las estructuras a construir. Los grupos de trabajo estarán conformados por máximo 4 estudiantes, se les darán las orientaciones generales del trabajo a realizar para evitar incertidumbres en el desarrollo de la actividad planteada, se realiza una

verificación de los materiales que fueron solicitados previamente dando inicio con la primera parte del diseño y construcción de las lámparas.

El taller correspondiente a esta sesión contiene una introducción de cada temática, también acompañado de gráficas para orientación de la actividad a realizar a medida que avanza con la utilización del material didáctico.

**Tabla 14.** *Ficha técnica del taller pedagógico, primera sesión*

<b>Taller pedagógico</b>	
DOCENTE: Nayibe Gómez	FECHA:
DURACIÓN: 2 horas	
OBJETIVO: Familiarizar a los estudiantes con poliedros con un solo tipo de polígonos (regulares).	
<b>DBA:</b> Observa objetos tridimensionales desde diferentes puntos de vista, los representa según su ubicación y los reconoce cuando se transforman mediante rotaciones, traslaciones y reflexiones.	
<b>Matriz de Referencia Matemática 7°</b>  COMUNICACIÓN	APRENDIZAJE: Reconocer características de objetos geométricos y métricos.
	EVIDENCIA: Identificar relaciones entre figuras bidimensionales y tridimensionales.
	<p><b>Descripción de actividades</b></p> <p>En la primera sesión se realiza presentación e introducción a los estudiantes del tema objeto de estudio, se explica cada una de las actividades propuestas para la intervención, el objetivo que se espera cumplir con el desarrollo de las actividades.</p> <p>Mediante geometría dinámica específicamente la aplicación Cabri 3D y Polyhedra, se realiza una exposición de los distintos tipos de poliedros, así como sus características generales.</p> <p>Estas aplicaciones permiten observar el truncamiento de un sólido platónico. Se hace referencia a los sólidos arquimedianos, dando a conocer que siete de estos sólidos se obtienen truncando sólidos platónicos como el cubo octaedro, el dodecaedro truncado entre otros.</p>

<p>ACTIVIDADES</p>	<p>Se presenta de la misma forma el desarrollo en el plano de una figura tridimensional mediante la aplicación Cabri.</p>  <p><b>Fuente:</b> Elaboración propia</p> <p>Cada uno de los estudiantes buscó en sus casas formas como las vistas en la actividad anterior.</p> <p>Se les propuso que dibujaran la que creían más interesantes.</p>
--------------------	---

**Fuente.** Elaboración propia.

Se relaciona el diario de campo 1 el cual utilizó el investigador como instrumento para la observación durante el desarrollo del taller pedagógico en la primera sesión del trabajo de campo, para un posterior análisis y reflexión sobre aspectos relevantes durante la implementación de la propuesta para estudiantes de séptimo grado.

### **Fase de análisis y reflexión**

En esta fase se implementa el análisis de la información obtenida posterior a la aplicación del cuestionario de salida, además la caracterización realizada en el diario de campo aplicado a la par con los talleres pedagógicos, utilizados por el investigador para plasmar datos relevantes durante cada sesión estructurada en el trabajo de campo. Este instrumento narra información acerca de aspectos relevantes durante cada intervención, observando fortalezas y debilidades de la aplicación de la propuesta.

**Tabla 15.** *Instrumento utilizado en fase de análisis y reflexión*

<b>Fase de la investigación</b>	<b>Instrumento</b>
Análisis y reflexión	<b>Cuestionario de salida:</b> Tiene como objetivo evidenciar el nivel de conocimiento en cuanto al pensamiento geométrico, posterior a la aplicación de la propuesta de investigación.
	<b>Análisis de diarios de campo:</b> Instrumento de observación para realizar apuntes sobre conductas, actitudes, preguntas que le realizaban el grupo de estudiantes, dificultades, identificar si en las actividades formulaban preguntas.

**Fuente:** Elaboración propia.

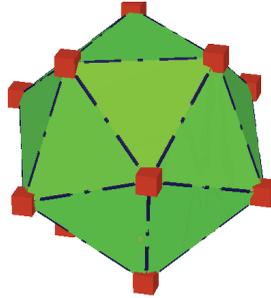
Se analiza a manera de reflexión la información recolectada por el investigador en los diarios de campo que se llenó a la par con cada sesión trabajada durante el trabajo de campo de la fase dos, se interpreta cada una de las vivencias observadas a través de la plataforma virtual.

### **Cuestionario de salida**

El investigador busca por medio de este instrumento evidenciar el impacto del proyecto de investigación, mediante el desarrollo del cuestionario observar el nivel del estudiante posterior a las actividades trabajadas con temáticas abordadas durante el trabajo de campo y aplicadas en cada una de las fases.

El cuestionario consta de diez preguntas con situaciones geométricas relacionadas con cada uno de los temas trabajados en cada sesión, este se desarrolla en forma individual con un tiempo de 45 minutos, permite comprobar el nivel de éxito de los recursos didácticos utilizados para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y por tanto el fortalecimiento del pensamiento geométrico en comparación con los resultados obtenidos en la actividad diagnóstica.

Responde las preguntas 1 y 2 de acuerdo con la información de la siguiente *Figura 1:*



*Figura 1*

1. Los puntos en color naranja donde concurren los lados en el poliedro de la anterior figura se identifican.

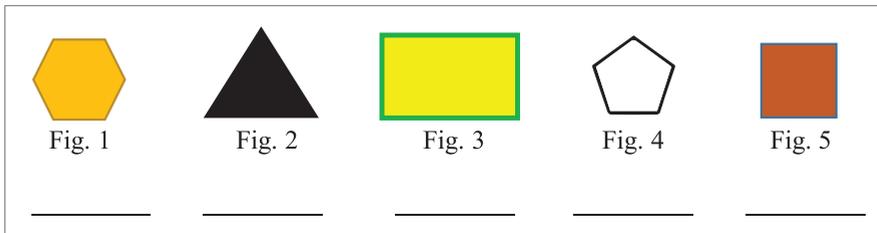
En esta pregunta se pretendió que los estudiantes identificaran el vértice de una figura tridimensional, como los puntos donde concluyen una determinada cantidad de aristas que forman una cara de un poliedro, para esto el estudiante determina las propiedades de la figura a través de un proceso visual de los elementos de la figura, en el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes, el 62,5 % acertaron en la respuesta, mientras que el 37,5 % no logró responder acertadamente, por tanto se concluye que el grupo en general logra identificar este elemento correspondiente a un sólido y desde allí realizar una disertación que conlleve a generar una conceptualización.

2. Con base en el poliedro observado en la *Figura 1* es:

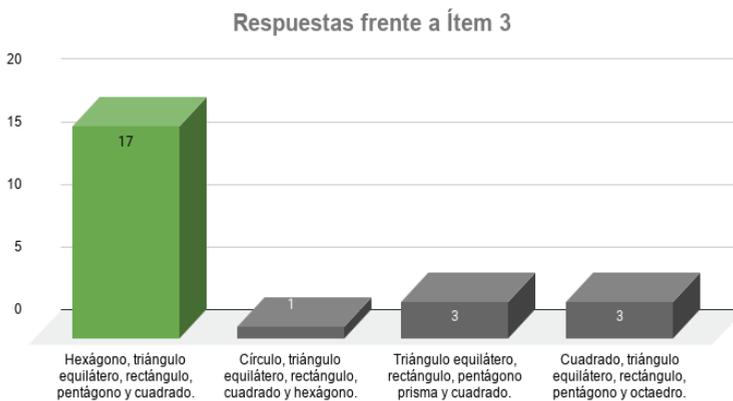
Con este ítem se pretendió saber el conocimiento de los alumnos sobre de las algunas propiedades que identifican un icosaedro, observando la gráfica se puede percibir que 58,3 % que corresponde a 14 estudiantes fueron capaces de identificar propiedades de un icosaedro en este caso la amplitud de los ángulos que conforman sus cinco caras que concluyen en un vértice, pero el restante 41,1 % del grupo no tiene claro dichas propiedades, lo cual llevó a contestar desacertadamente, se puede concluir que el grupo en general tiene apropiación respecto a la distensión de conjeturas.

3. Los polígonos regulares se nombran según el número de lados o vértices que tienen.

Obsrva el cuadro que contiene polígonos y organízalos por su nombre de izquierda a derecha.



**Figura 14.** Resultados de cuestionario de salida. Respuesta frente al ítem 3



**Fuente:** Elaboración propia.

En este punto se evidencia que 17 estudiantes reconocen el nombre de un polígono regular de acuerdo con el número de lados que contenga la figura bidimensional, por lo contrario, siete estudiantes no identificaron la clasificación de los polígonos que contiene la figura, se concluye que en general el grupo presenta una comprensión respecto a este tema. Se puede decir que, en general, los resultados en este ítem fueron positivos, pues dan muestra de un avance en el pensamiento geométrico de los estudiantes.

4. Leonard Euler (1707-1783) fue uno de los más grandes matemáticos. Fue el creador de la fórmula que, si C representan el número de caras de un poliedro, A representa el número de aristas y V el número de vértices, entonces se cumple que  $C+V-A = 2$ .

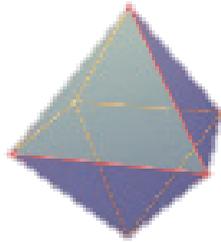
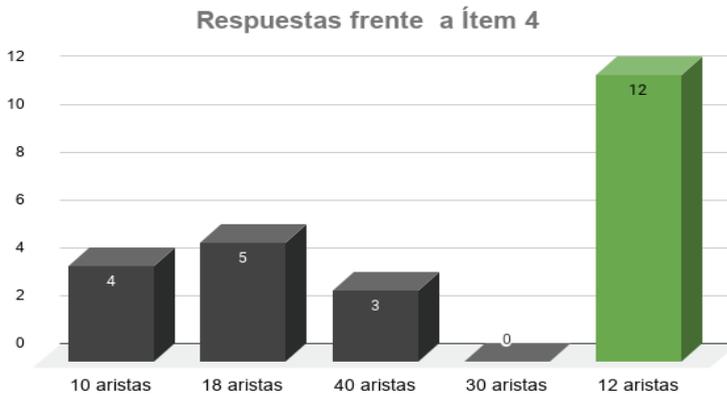


Figura 2

Aplicando la fórmula de Euler para determinar el número de aristas del octaedro, se puede concluir que está formada por:

Figura 15. Resultados de cuestionario de salida. Respuesta frente al ítem 4



Fuente: Elaboración propia.

La temática abordada en esta pregunta corresponde a el número de aristas que contiene una figura tridimensional en este caso un octaedro, el estudiante puede determinarlo desde lo visual mediante la deducción,

el conocimiento que tenga de sus propiedades, aplicando la fórmula de Euler, donde conociendo el número de vértices y caras se puede determinar el número de aristas de un sólido. 12 estudiantes respondieron correctamente que se representa en la gráfica con un 50 %, el otro 50 % de los estudiantes no lograron identificar correctamente la cantidad de aristas del octaedro, concluyendo que, retomando los resultados de la prueba diagnóstica se observa una mejoría significativa, pero aún hay que trabajar más en el conocimiento razonamiento deductivo del estudiante.

5. Los sólidos platónicos son cinco cuerpos geométricos que comparten un conjunto de características. También reciben el nombre de sólidos perfectos, poliedros platónicos y de cuerpos cósmicos, entre otros.

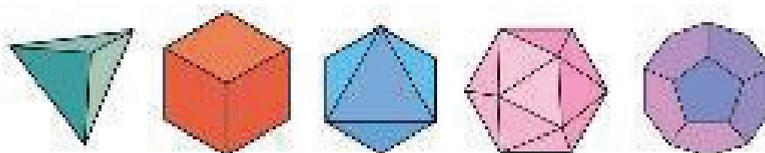


Figura 3

Algunas de sus propiedades son:

En esta pregunta los estudiantes deben identificar las características principales de los cinco sólidos platónicos, el 60 % de los estudiantes lograron contestar correctamente, frente a un 40 % que respondieron incorrectamente no logrando describir correctamente las características de los poliedros regulares convexos, se puede decir que, en general los resultados obtenidos son positivos, observando un significativo avance en cuanto a la temática, esto a factores ligados a la motivación y disposición de los estudiantes.

6. Si se hacen cortes en las esquinas a un sólido regular da origen a un nuevo sólido como se observa en la *Figura 4*:

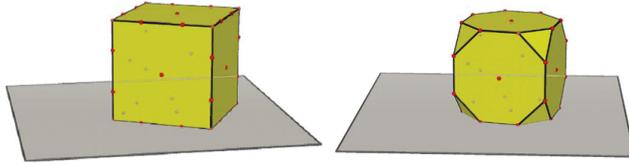
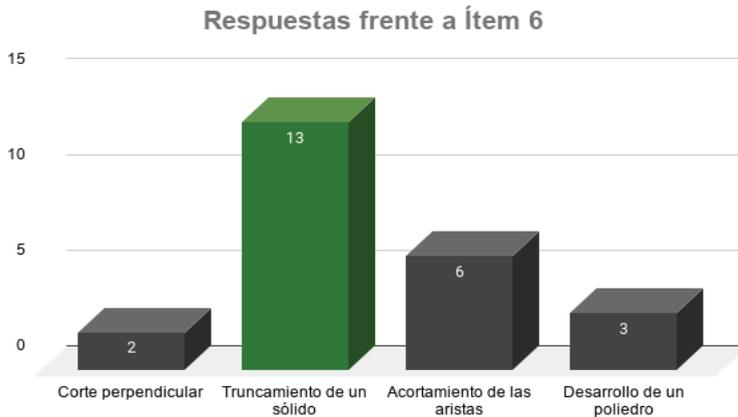


Figura 4

Este proceso se llama:

Figura 16. Resultados de cuestionario de salida- Respuesta frente al ítem 6



Fuente: Elaboración propia.

En este punto se aborda el tema del truncamiento de los poliedros regulares, que se tiene realizando cortes a las esquinas del sólido obteniendo a partir de este corte una cara nueva, uno de los más conocidos es el icosaedro truncado por su asociación a un balón de fútbol. Se evidencia que 13 estudiantes respondieron correctamente este ítem, pero 11 estudiantes contestaron erróneamente a la pregunta, por tanto, se concluye que el grupo tiene un mejor conocimiento acerca del tema posterior a la aplicación de la propuesta.

7. Se acerca navidad y Camilo va de compras para adquirir los detalles que dará a sus familiares. Cuando regresa a casa que necesita envolver los obsequios, toma las medidas para saber la cantidad de papel que necesita para cada obsequio de acuerdo con el área total.

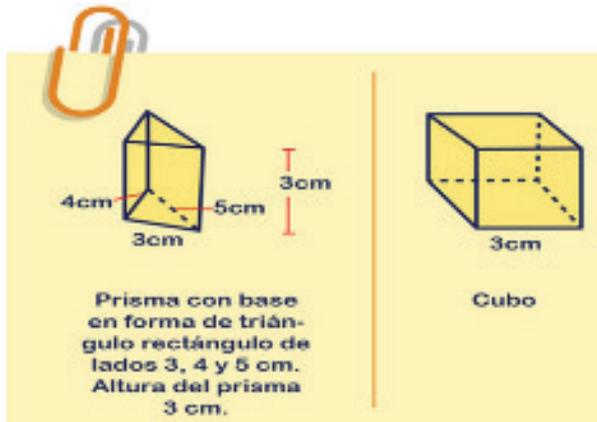
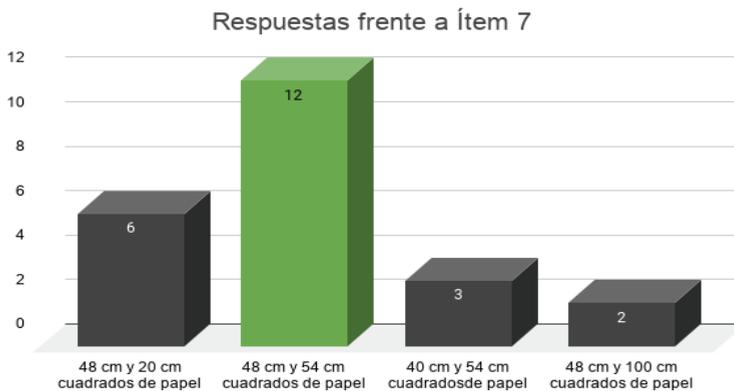


Figura 5

¿Cuál de las siguientes opciones es la cantidad de papel que necesitará Camilo para envolver sus obsequios

Figura 17. Resultados de cuestionario de salida- Respuesta frente al ítem 7



Fuente: Elaboración propia.

En esta pregunta se buscó conocer el nivel de análisis del estudiante en cuanto a la resolución de problemas en situaciones geométricas, se evidenció que el 50 % de los estudiantes marcaron la opción correcta y 50 % restante de estudiantes marcaron la opción incorrecta, se puede concluir que, aunque los resultados supera visiblemente los resultados obtenidos en situación geométrica similar en el cuestionario de entrada, algunos estudiantes siguen con debilidades, por tanto, se debe tratar de hacer más énfasis en aplicar estrategias que impliquen resolver problemas geométricos.

8. Observa el hexaedro *fig. 5* y elige la opción que contiene los elementos de un poliedro.

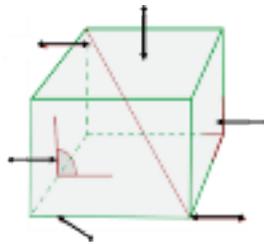


Figura 6

Figura 18. Resultados de cuestionario de salida-Respuesta frente al ítem 8



Fuente: Elaboración propia.

En este punto se aborda la temática de los elementos de un poliedro, en este caso en específico observando la imagen del hexaedro se evidencia que el 60 % de los participantes respondieron correctamente identificando los elementos de un poliedro, aunque el 40 % resolvió en forma incorrecta, esto dado por el desconocimiento de propiedades geométricas como vértices, aristas, además pueden seguir existiendo debilidades en situaciones que involucran definiciones, sin embargo, se puede concluir que, en general los resultados obtenidos en este ítem son satisfactorios, dando muestra de un avance significativo en el desarrollo del pensamiento geométrico, propiciado por los recursos didácticos utilizados como un factor de motivación en los estudiantes que se debe seguir trabajando en los estudiantes

9. Si a un poliedro lo cortamos por un número suficiente de aristas de forma que quede una sola pieza y la extendemos en el plano, obtenemos un desarrollo del poliedro.

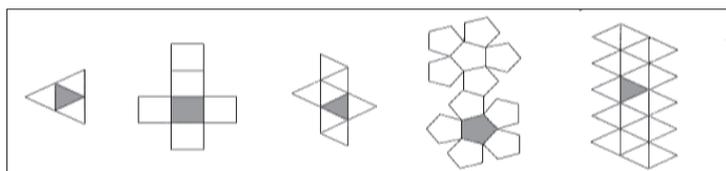


Figura 7

Determina qué poliedros se forman con el desarrollo de los planos de la Figura 6:

En este punto se pretendió llevar al estudiante al razonamiento mediante las descomposiciones y composiciones desde el desarrollo de un poliedro regular en el plano, observando la representación bidimensional de una figura tridimensional, en esta pregunta 12 estudiantes respondieron correctamente, evidenciado el progreso en la comprensión, análisis, visualización y deducción de los estudiantes en cuanto al pensamiento geométrico, a partir de los resultados obtenidos con la aplicación del cuestionario final, se puede concluir que con el desarrollo de estrategias y trabajo constante enfocado a fortalecer este pensamiento se llegan a tener avances muy positivos.

10. Clasifica cada una de las siguientes afirmaciones como falsa (F) o verdadera (V).

**Figura 19.** Resultados de cuestionario de salida- Respuesta frente al ítem 10



**Fuente:** Elaboración propia.

La temática abordada en esta pregunta corresponde a algunas de las características elementales de los prismas, evidenciando que, al enunciado en todo prisma regular la apotema es mayor que la longitud de su radio respondieron correctamente 16 estudiantes, al enunciado la altura de un prisma es la distancia entre las bases del prisma, 21 estudiantes respondieron correctamente y tres erróneamente, al enunciado un prisma es cóncavo si sus bases son polígonos concavos 18 estudiantes respondieron correctamente frente a seis que lo respondieron incorrectamente.

Se observa un evidente progreso tras la aplicación de las estrategias planteadas durante la fase del trabajo de campo de la investigación. Los resultados obtenidos fueron positivos para el grupo en general, adquiriendo herramientas que les permitan fortalecer adecuadamente el pensamiento geométrico. Tomando en cuenta los resultados generales del cuestionario aplicado se puede decir que, los recursos didácticos funcionan como una herramienta que logran mejorar ostensiblemente el desarrollo del pensamiento geométrico, cabe destacar también que la

experimentación a través de las construcciones de las figuras, brindando seguridad en sí mismos conllevando a un aprendizaje de los procesos matemáticos.

### **Conclusiones y reflexiones finales**

Diseñar recursos didácticos como lo es la elaboración de lámparas con formas poliédricas planteada en esta investigación, es una alternativa para suplir en parte las dificultades en el aprendizaje de la geometría y a partir de allí lograr interacciones en un ambiente de confianza capaz de generar un cambio significativo.

A partir del análisis realizado a los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario diagnóstico, se logró determinar las dificultades en cuanto a las competencias del pensamiento geométrico y partiendo de allí crear estrategias encaminadas a lograr un impacto positivo en el aprendizaje de los estudiantes.

En la búsqueda realizada por esta investigación, se focalizó en indagar sobre estrategias alternativas y versátiles para mejorar los procesos en el aula, enfatizando en la capacidad de percibir el conocimiento a través de la experimentación y observación, tratando de lograr un acercamiento interesante de los estudiantes en el proceso de la enseñanza de la geometría, además, permitió una interacción con el entorno, sus familias y compañeros conformando un equipo de trabajo que contribuyó a en la consecución de los resultados esperados en medio anómala situación que vive el mundo en este momento.

El análisis de los resultados posterior a la aplicación de la propuesta permitió realizar un proceso de reflexión acerca de cambiar los paradigmas para lograr una pedagogía más cercana al estudiante, generando un clima de confianza tendiente a mejorar la calidad de los aprendizajes. El éxito de un investigador radica en gran parte en la construcción de estrategias con el rigor necesario teniendo en cuenta los estilos de aprendizaje y la contextualización de los estudiantes, con el fin de obtener resultados favorables en los aprendizajes matemáticos.

## Referencias

- Aguirre, G. M. (1993). *Juan Amós Comenio: obra, andanzas, atmósferas en el IV centenario de su nacimiento (1592-1992)*. Universidad Autónoma de México. UNAM.
- Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J. M. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Síntesis.
- Arango Pinzón, P. A. (2015). *Pensamiento geométrico: ¿qué se planea enseñar en el aula? vs. ¿Qué se evalúa en las pruebas saber 9°?* [Trabajo de Grado, Universidad de los Llanos]. <https://repositorio.unillanos.edu.co/jspui/bitstream/001/354/1/TESIS.pdf>.
- Araya, R., y Alfaro, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 4(5),113-136. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6915/6601>.
- Arraiz, G. A. (2014). Teoría fundamentada en los datos: un ejemplo de investigación cualitativa aplicada a una experiencia educativa virtualizada en el área de matemática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41,19-29. <https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/462/996>.
- Baena, G. (2017). *Metodología de la investigación* (3a. ed.). Grupo Editorial Patria. [http://www.biblioteca.cij.gob.mx/Archivos/Materiales\\_de\\_consulta/Drogas\\_de\\_Abuso/Articulos/metodologia%20de%20la%20investigacion.pdf](http://www.biblioteca.cij.gob.mx/Archivos/Materiales_de_consulta/Drogas_de_Abuso/Articulos/metodologia%20de%20la%20investigacion.pdf)
- Baldissera, A. (2011). *A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos*. (3ed.). Gestaoescolar.
- Bejarano, M. A. (2016). La Investigación Cualitativa. *INNOVA Research Journal*, 1(2), 1-9. doi:Guerrero Bejarano, M. A. (2016). La Investiga <https://doi.org/10.33890/innova.v1.n2.2016.7>.

- Blandón, E., Gulfo, J., y Marín, W. (2016). *Los sólidos platónicos en origami para la comprensión de la fórmula de euler en el contexto de van hiele*. [Tesis de maestría, Universidad Pontificia Bolivariana]. <https://es.scribd.com/document/423286310/Trabajo-de-Grado-Erlin-Blandon-Joel-Gulfo-Wilson-Marin-1>.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Zorzal.
- Buckminster, Fuller, R. (1982). *Explorations in the geometry of thinking*. Macmillan Pub Co.
- Bursill, Hall, P. (2002). *Why do we study geometry?: Answers through the ages*. DPMMS Centre for Mathematical Sciences Wilberforce Road, University of Cambridge. [https://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/F-I-G\\_opening\\_ppr.pdf](https://www.dpmms.cam.ac.uk/~piers/F-I-G_opening_ppr.pdf).
- Cabero A., J., y Llorente, M. d. (2013). La Aplicación del Juicio de experto como técnica de evaluación de las tecnologías de la información y comunicación TIC. *Tecnología de Información y Comunicación en Educación*, 7(2), 11-21. [https://www.researchgate.net/publication/260750592\\_La\\_aplicacion\\_del\\_juicio\\_de\\_experto\\_como\\_tecnica\\_de\\_evaluacion\\_de\\_las\\_tecnologias\\_de\\_la\\_informacion\\_y\\_comunicacion\\_TIC](https://www.researchgate.net/publication/260750592_La_aplicacion_del_juicio_de_experto_como_tecnica_de_evaluacion_de_las_tecnologias_de_la_informacion_y_comunicacion_TIC).
- Carmona, P. A., y Correa Villa, P. A. (2019). Resignificación de los conceptos geométricos en los poliedros a través de la modelación: el hexaedro. *Mova*, 1(1), 67-83. <http://revistas.medellin.edu.co/movaojs/index.php/revistamova/article/view/art3>.

- Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. (3ª ed.) AIKE. [https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID\\_Chevallard\\_Unidad\\_3.pdf](https://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf).
- Corberán, R. M. (Coord.). (1989). *Didáctica de la geometría: el modelo Van Hiele*. Universitat de València.
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Reverté.
- D'Amore, B. (2008). Epistemología, didáctica de la matemática y prácticas de enseñanza. *ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática)*, 17(1), 87-106.
- De Camilloni, A., Cols, E., Basabe, L. y Feeney, S. (2007). *El saber didáctico*. (1ª ed.). Paidós.
- De Miguel González, R. (2015). Del pensamiento espacial al conocimiento geográfico a través del aprendizaje activo con tecnologías de la información geográfica. *Giramundo*, 2(4), 7-13. [file:///C:/Users/Administrador/Downloads/Dialnet-Del Pensamiento Espacial AlConocimientoGeograficoATra-5489976.pdf](file:///C:/Users/Administrador/Downloads/Dialnet-Del%20Pensamiento%20Espacial%20AlConocimientoGeograficoATra-5489976.pdf).
- Dowker, A., Sarkar, A., y Looi, C. Y. (2016). Mathematics anxiety: What have we learned in 60 years? *Frontiers in psychology*, 7. <https://psycnet.apa.org/record/2016-20878-001>
- Duval, R. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow. (Eds.). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis*. (pp. 13-60). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Fernandez, T., Díaz, J., y Cajaraville, A, J. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico.

*Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(42A), 39-64. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000100004>.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162. <http://web.math.unifi.it/users/dolcetti/Fischbein.pdf>

Flores, P. (2018). Poliedros modulares. En P. Flores, J.L. Lupiáñez, y I. Segovia, (Eds.). *Enseñar matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz* (pp. 103-114). Atrio.

Galeano, M. E. (2004). *Diseño de proyectos en la investigación cualitativa*. Fondo Editorial Universidad EAFIT.

Gamboa-Araya, R., y Ballester-Alfaro, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Educare*, 14(2), 125-142. <https://www.redalyc.org/pdf/1941/194115606010.pdf>

Godino, J., y Ruíz, F. (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Universidad de Granada. [https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4\\_Geometria.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf).

Gómez Morales, J. J. (2018). *Desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de séptimo grado con apoyo de materiales manipulables*. [Tesis de maestría, Universidad Externado de Colombia]. <https://1library.co/document/q2n5wleq-desarrollo-pensamiento-espacial-estudiantes-septimo-grado-materiales-manipulables.html>

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, 16(3),103-125. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40516306.pdf>.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?

En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21-68). SEIEM.

Hernández-Sampieri, R., Hernández, C., y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.

Iglesias, M. y., Ortiz, J. (2015). La investigación en pensamiento geométrico y didáctica de la geometría. En J. Ortiz y M. Iglesias, Martha (Eds.). *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación* (pp. 207-224). Universidad de Carabobo.

Jiménez Espinosa, A. (2011). Didáctica de la matemática, educación matemática en investigación. *Ciências em foco*, 4(1), 1-15. <https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/cef/article/view/9198>. Acesso em: 17 out. 2020.

Jiménez, A., y Sánchez, D. (2019). La práctica pedagógica desde las situaciones didácticas en matemáticas. *Revista de Investigación, Desarrollo E Innovación*, 9(2), 333-346. <https://doi.org/10.19053/20278306.v9.n2.2019.9179>.

Jones, K. (1998). Theoretical Frameworks for the Learning of Geometrical Reasoning. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 18(1-2), 29-34. [https://www.researchgate.net/publication/279652830\\_Theoretical\\_frameworks\\_for\\_](https://www.researchgate.net/publication/279652830_Theoretical_frameworks_for_)

[the\\_learning\\_of\\_geometrical\\_reasoning](#).

Jones, K. (2002), Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In: Linda Haggarty (Ed). *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*. Chapter 8, (pp. 121-139). Routledge Falmer.

Lagos, R., Mella, M., y Strocchi, M. V. (2019). Taller de sólidos platónicos. Transferencia del modelo del proyecto en arquitectura a la enseñanza media. *Revista AUS*, 26(05), 22-28.

DOI:10.4206/aus. 2019.n26-05. file:///C:/Users/Administrador/Downloads/5306-1-7997-1-10-20190521.pdf

Lerna-González, H. D. (2016). *Metodología de la investigación: propuesta, anteproyecto y proyecto*. (4ª ed.). Ecoe Ediciones.

Lewin, K. (1946). Action Research and Minority Problems. *Cuestiones sociales*, 2(4), 34-46.

[http://www.secretariassenado.gov.co/senado/basedoc/ley\\_0115\\_1994.html](http://www.secretariassenado.gov.co/senado/basedoc/ley_0115_1994.html)

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Matriz de Referencia Matemáticas. Siempre es día E*. MEN. <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/siemprediae/Documento-Orientador-Dia-E-2019.pdf>

Ministerio de Educación Nacional. (2019). *Documento Orientador*. <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/naspublic/siemprediae/Documento-Orientador-Dia-E-2019.pdf>

Molano, C. (2019). *La visualización en el pensamiento espacial a partir del cálculo de volúmenes*. [Tesis de Maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y tecnológica de Colombia]. [https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/2993/1/TGT\\_1614.pdf](https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/2993/1/TGT_1614.pdf)

Molano, M. (2011). Carlos Eduardo Vasco Uribe. Trayectoria biográfica de un intelectual colombiano: una mirada a las reformas curriculares en el país. *Reflexiones Revista Colombiana de educación*, 61, 161-198. <http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n61/n61a08.pdf>

Monsalve-Fernández, A., y Pérez-Roldán, E. (2012). El diario pedagógico como herramienta para la investigación. The daily teaching and research tool. *Itinerario educativo*, 60, 117-128.

- Orozco-Berdugo, E. (2017). *Estrategia didáctica para fortalecer el pensamiento geométrico a través de la utilización y construcción de objetos de aprendizaje*. [Tesis de Maestría en educación con énfasis en pensamiento matemático, Fundación Universidad del Norte]. <http://manglar.uninorte.edu.co/bitstream/handle/10584/7656/130224.pdf?sequence=1>
- Parraguez, M., Rojas, J., y Vásquez, P. (2015). *Situaciones didácticas para la enseñanza aprendizaje de estrategias de conteo utilizando la resolución de problemas como medio*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1967). *The child's conception of space*. Norton y Co.
- Piaget, J., Inhelder, B., y Szeminska, A. S. (2013). *Child's Conception of Geometry*. Routledge. <https://books.google.com.ag/books?id=-tPoNSV35kQC&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
- Rivera, M. y Salas, R. (2016). La Geometría en la construcción de cajas de regalo y Lámparas artesanales. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C*, 29,1170-1176.
- Rojas, O. Á. (2019). *Aprendizaje significativo en geometría para el octavo grado*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia].
- Segerman, H. (2016). *Visualizing mathematics with 3D printing*. Johns Hopkins University Press.
- Senechal, M. (2013). *Shaping Space: Exploring Polyhedra in Nature, Art, and the Geometrical.*: Springer Science y Business Media.

- Torres, D. (2009). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *ACIMED*, 20(6), 161-174. <https://www.medigraphic.com/pdfs/acimed/aci-2009/aci096e.pdf>
- Ugalde, N., y Balbastre, F. (2013). Investigación cuantitativa e investigación cualitativa: buscando las ventajas de las diferentes metodologías de investigación. *Revista de Ciencias económicas*, 31(2), 179-187. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/economicas/article/view/12730>
- Uribe, L. C. (2011). El legado de Piaget a la didáctica de la Geometría. *Reflexiones Revista Colombiana de Educación*, 60, 41-60. <http://www.scielo.org.co/pdf/rcde/n60/n60a3.pdf>
- Uribe, S., Cárdenas, O. y Becerra, J. (2014). Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. *Educación Matemática*, 26(2), 135-160. <http://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v26n2/v26n2a5.pdf>
- Vargas, G., y Araya, R. G. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia*, 27(1), 74-94. <file:///C:/Users/Administrador/Downloads/Dialnet-ElModeloDeVanHieleYLaEnseñanzaDeLaGeometria-4945319.pdf>
- Zuluaga, O., Echeverry, A., Quiceno, H., Sáenz, J., Álvarez, A., y Martínez, A. (2003). *Pedagogía y Epistemología*. El Magisterio.