

# Propuesta de secuencia didáctica para fortalecer el pensamiento variacional en el estudio de funciones polinómicas<sup>6</sup>

*Julián David Quiroga Garcés<sup>7</sup>  
José Antonio Chacón Benavides<sup>8</sup>*

### Introducción

El presente trabajo surge de la experiencia docente adquirida en los últimos dos años, ante la necesidad de reducir las dificultades de aprendizaje de las matemáticas, evidenciadas en los resultados de pruebas internas y externas (las pruebas Saber 11, el análisis del día de las pruebas OEA y el Test Diagnóstico) de la Institución Educativa San Lorenzo del municipio de Suaza (Huila, Colombia), específicamente en el pensamiento variacional, mediante el tema de funciones polinómicas, teniendo en cuenta que las

6 Se deriva del proyecto de investigación para optar por el título de Maestría en Didáctica de la Matemática.

7 Magíster en Didáctica de la Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Docente de matemáticas de la Institución Educativa San Lorenzo (Suaza, Huila). Correo: daqui02\_jdq@hotmail.com

8 Investigador Junior (I) SNCTel, convocatoria Minciencias 894/2021. Magíster en Administración y Planificación Educativa, Especialista en Educación Personalizada, Licenciado en Ciencias de la Educación Física y Matemáticas. Integrante grupo de Investigación SIEK. Profesor-investigador de la Licenciatura en Educación Básica Primaria, Facultad de Estudios a Distancia, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-8515-7386>. Contacto: jose.chacon@uptc.edu.co

dificultades de aprendizaje son mayoritariamente causadas por prácticas pedagógicas poco eficientes y relacionadas con la construcción del concepto de función, la falta de situaciones significativas y del contexto, la poca utilización de diversas representaciones y la excesiva ejercitación de procesos algebraicos.

Teniendo en cuenta la evolución que está sufriendo la educación matemática gracias al avance tecnológico, algunas investigaciones refieren que el estudio de funciones puede darse mediante el uso de recursos virtuales como Excel y GeoGebra, influenciando positivamente en el aprendizaje.

Sin embargo, el reto que se plantea frente a estos innovadores recursos es la adecuada utilización de éstos para lograr los resultados esperados, por tanto, ¿de qué manera el uso de GeoGebra y Excel podría fortalecer el pensamiento variacional en el aprendizaje de funciones polinómicas? Para ello, es importante conocer las dificultades claves del aprendizaje relacionadas con el pensamiento variacional en los estudiantes, seguido de una examen de la documentación disponible en búsqueda y análisis de investigaciones que fundamenten las secuencias didácticas mediadas por el uso de Excel y GeoGebra y finalmente lograr el diseño de una secuencia didáctica que tenga en cuenta las recomendaciones y estrategias encontradas en otras investigaciones para lograr el desarrollo de las habilidades del pensamiento variacional mediante el abordaje de funciones polinómicas.

## **Fundamentación teórica**

Atendiendo al modelo pedagógico constructivista adoptado por la Institución Educativa San Lorenzo en su Proyecto Educativo Institucional, se exponen algunas teorías de la didáctica como la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007), Teoría de la Transposición Didáctica de Chevallard (1985) y la Teoría de Registros de Representación Semiótica de Duval (1993), que justifican lo propuesto en el presente trabajo; se incorpora el concepto del pensamiento variacional y de la modelación

matemática y se resalta la importancia de las TIC en la educación matemática teniendo en cuenta su marco legal en Colombia.

### **Teoría de situaciones didácticas: Guy Brousseau**

Según Brousseau (2007), una situación didáctica es aquella situación construida intencionalmente por el profesor con el fin de que los estudiantes adquieran un saber determinado o en vías de constituirse. La situación didáctica se planifica con base en actividades de situaciones problema, cuya necesidad de ser resueltas, implique el conocimiento matemático que da sentido a la clase, en un escenario llamado triángulo didáctico (profesor, estudiante y saber). En ciertas ocasiones se requiere que el estudiante logre aprender bajo otra circunstancia o medio, no solamente bajo situaciones didácticas (ejercicios o problemas), para lo cual, Brousseau denomina el polígono didáctico (profesor, estudiante, saber y medio).

Para Brousseau, cuando un estudiante logra acercarse a los resultados esperados mediante la invención de nuevos procesos sin la influencia de condiciones didácticas específicas, se le denomina *situaciones didácticas* o *la teoría de las situaciones matemáticas*. Para Brousseau, es importante que los profesores estén en la capacidad de diseñar prácticas pedagógicas compuestas de situaciones didácticas que faciliten la construcción del conocimiento, logrando que éste se demuestre en la solución de problemas matemáticos.

### **Teoría de la transposición didáctica: Chevallard**

La teoría de transposición didáctica de Yves Chevallard (1985) define el concepto de transposición didáctica como el paso del saber sabio al saber enseñado y luego a la obligatoria distancia que los separa. Hay de esta forma transposición didáctica (en el sentido restringido) cuando los elementos del saber pasan al saber enseñado” (Gómez Mendoza, 2005, p. 87).

Chevallard define también la transposición didáctica como el paso de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de este objeto del saber.

De este modo, la transposición didáctica permite que un saber científico o académico sufra una serie de transformaciones para adaptarlo a un nivel asequible para estudiantes.

Teniendo en cuenta la teoría de la transposición didáctica, es importante destacar las diversas representaciones que posee una función matemática para el desarrollo del pensamiento variacional, logrando que conceptos ligados al tema puedan expresarse de manera que se pueda enseñar.

### **Teoría de registros de representación semiótica: Duval**

La teoría de registros de representación semiótica propuesta por Duval (1993) establece que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial.

Las representaciones semióticas son aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica, etc.), son el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. (Huapaya, 2012, p. 52)

Esto implica que “no existen otras maneras de tener acceso a los objetos matemáticos, sino a través de la producción de representaciones semióticas, y que cada registro de representación es cognitivamente parcial con respecto a lo que él representa” (Castro et al, 2017, p. 4). Por tanto, “el aprendizaje de las funciones no se ha de limitar al de una sola de estas formas de representación, sino que ha de incluir la capacidad de traducir la información de una representación a otra” (Font, 2001, p. 182).

En cuanto a los registros de representación asociados a la función, Janvier (citado por Font, 2001) menciona cuatro: verbal, tabular, gráfico y algebraico, cada uno de los cuales pone en funcionamiento diferentes procesos cognitivos. A continuación, Font (2001) presenta una adaptación de las posibles relaciones que pueden establecerse entre los registros de representación propuestas por Janvier:

**Tabla 1.** *Relación entre registros de representación asociadas a una función*

Hacia / Desde	Situación, Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Expresión analítica
<b>Situación, Descripción verbal</b>	Distintas descripciones	Estimulación/ cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
<b>Tabla</b>	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica, unidades, origen, etc.	Ajuste numérico
<b>Gráfica</b>	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas.	Ajuste gráfico
<b>Expresión analítica</b>	Interpretación de la fórmula. (Interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores.	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula.

**Fuente:** Adaptación de la tabla propuesta por C. Janvier (Font, 2001, p. 182).

Las teorías sobre la didáctica son importantes ya que brindan información relevante acerca de las características que se deben considerar al momento de generar un ambiente de aprendizaje y en el diseño e implementación de estrategias didácticas. Las anteriores teorías sobre la didáctica aportan información importante para el desarrollo del pensamiento variacional.

## Marco metodológico de la investigación

### Enfoque de la investigación

La investigación se centra en la revisión de la literatura disponible, recopilando investigaciones antecedentes relevantes relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional, el estudio de funciones y modelación matemática mediante el uso de las TIC, presentando como resultado de la investigación una propuesta de secuencia didáctica mediada por el uso de GeoGebra y Excel. Con lo anterior, se establece el enfoque cualitativo de la investigación.

## **Tipo de investigación**

La investigación permite establecer características fundamentales de la educación matemática, de la didáctica de las matemáticas, en el uso de las TIC para el desarrollo del pensamiento variacional, en la construcción de una propuesta de secuencia didáctica basada en trabajos prácticos recopilados de la literatura disponible. De este modo, se clasifica como una *investigación de tipo descriptiva*, ya que busca especificar las propiedades de los procesos educativos que se llevan a cabo dentro del aula en relación con el desarrollo del pensamiento variacional, incluyendo el análisis de éstos, además de destacar las características de algunos recursos considerados importantes para la didáctica de las matemáticas, con el fin de establecer un método efectivo de enseñanza.

Este tipo de investigación tiene como objetivo central “obtener un panorama más preciso de la magnitud del problema o situación y sus resultados se ubican en un nivel intermedio en cuanto a la profundidad de los conocimientos se refiere” (Gallardo, E. 2017, p. 53).

## **Método inductivo de la investigación**

Según Rodríguez y Pérez (2017):

La inducción es una forma de razonamiento en la que se pasa del conocimiento de casos particulares a un conocimiento más general, que refleja lo que hay de común en los fenómenos individuales. Su base es la repetición de hechos y fenómenos de la realidad, encontrando los rasgos comunes en un grupo definido, para llegar a conclusiones de los aspectos que lo caracterizan. Las generalizaciones a que se arriban tienen una base empírica. (p. 187)

Los diferentes apartados de este trabajo de investigación se componen de los resultados y conclusiones de la recopilación de diversas investigaciones particulares acerca del tema, induciendo o generalizando los aportes más concurrentes de éstas. La propuesta didáctica de esta investigación está conformada por aportes de diversos estudios prácticos que hacen

uso de herramientas de GeoGebra y Excel en el estudio de funciones de educación media.

### **Diseño de la investigación**

La presente investigación se clasifica en el *diseño documental* puesto que su proceso está “basado en la búsqueda, recuperación, análisis, crítica e interpretación de datos obtenidos y registrados en diversas fuentes documentales: impresas, audiovisuales o electrónicas”. (Gallardo, 2017, p. 54). En la clasificación tradicional sobre investigaciones, muy pocas veces se incluye el diseño documental. Esto puede deberse a que los resultados obtenidos podrían asimilarse como parte del marco teórico, por tanto, es importante que se sepa diferenciar este tipo de diseño con la revisión bibliográfica que obligatoriamente debe contemplar cualquier tipo de investigación.

Para Gómez L. (2010), la consulta de fuentes como diseño de investigación para la construcción del conocimiento “es una forma de velar por la tradición del pensamiento original y desde esa perspectiva, traerlo al presente con una lectura hermenéutica que favorezca la discusión al hacer nuevos aportes al desarrollo científico con propuestas que pueden ser cuestionadas permanentemente pero que siempre se orientaran a alcanzar nuevos desarrollos” (p. 230). En el *diseño documental*, el análisis de contenido documental es análogo a la validación de instrumentos de otros tipos de investigaciones.

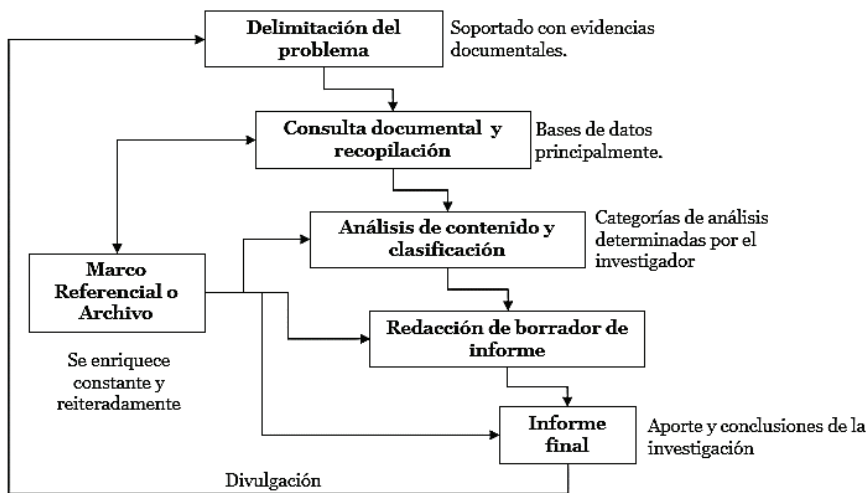
En este sentido, se puede catalogar la presente investigación como una investigación reconstructiva “con nuevas preguntas se reelabora un conocimiento que ha producido unos resultados y un saber previo en esta medida modifica los fenómenos objeto de reflexión” (Vargas, 1992, p. 26, citado en Gómez L., 2010, p. 230).

**Nota aclaratoria:** El diseño documental responde al estado actual de la educación, debido a la emergencia sanitaria a nivel mundial, permitiendo con la continuación de la investigación.

## Proceso de investigación de carácter documental

Debido a que en el enfoque cualitativo la revisión constante de la literatura o marco referencial puede revisarse en cualquier etapa de la investigación, el diseño documental encaja cómodamente con el enfoque. A continuación, se presenta el esquema del proceso de investigación de carácter documental.

Figura 1. Esquema del proceso de la investigación



Fuente: Elaborado con base en los planteamientos de Chong de la Cruz (2007).

## Fases metodológicas de la investigación

Teniendo en cuenta el diseño documental de la investigación, se establecen las siguientes fases:

### Fase I. Diagnóstico DAM

Teniendo en cuenta reportes de pruebas internas y externas, los resultados del Día E, 2019 y un test diagnóstico de conocimientos, se identificaron las principales dificultades de aprendizaje de los estudiantes de grado once de la Institución Educativa San Lorenzo, que obstaculizan el desarrollo



del pensamiento variacional. Se caracterizan estas dificultades de modo que se puede delimitar la problemática.

## **Fase II. Revisión y análisis documental**

Con base en el diseño documental, una etapa muy importante es la recopilación de la información, para ello se deben preparar fichas bibliográficas. En el análisis de contenido de las investigaciones y textos escolares, dirigidos a la enseñanza y aprendizaje de funciones donde se haga uso de GeoGebra y Excel, es fundamental la clasificación de las fuentes recabadas mediante fichas de trabajo, según el aporte de la información, la naturaleza y el alcance del documento en condición de análisis.

## **Fase III. Aporte de la investigación (informe final)**

Mediante la repetitiva y constante corrección del borrador para la presentación del aporte de la investigación. Finalmente, se diseña una secuencia didáctica enfocada al desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso de GeoGebra y Excel, donde se estudia las diversas representaciones semióticas de las funciones polinómicas, centrando la atención en la relación entre la representación algebraica, tabular y gráfica, y en la aplicabilidad de estas funciones en el modelamiento de situaciones de la realidad para la solución de problemas, principales dificultades identificada en los estudiantes de grado once de la I. E. San Lorenzo.

**Tabla 2.** *Fases de la investigación*

<b>Fases</b>	<b>Objetivo específico</b>
Fase I. Diagnóstico DAM	Identificar las dificultades de aprendizaje relacionadas con el pensamiento variacional en los estudiantes de grado once de la I. E. San Lorenzo.
Fase II. Revisión y análisis documental	Examinar la documentación disponible, en búsqueda y análisis de investigaciones que fundamenten prácticas didácticas mediadas por el uso de Excel y GeoGebra.

Fases	Objetivo específico
Fase III. Aporte de la investigación (informe final).	Diseñar una secuencia didáctica, permitiendo el desarrollo de las habilidades del pensamiento variacional mediante el abordaje de funciones polinómicas.

**Fuente:** Elaboración propia.

*Nota.* La fase de implementación de la secuencia didáctica se suprimió debido a la situación de emergencia sanitaria actual obstaculiza su realización. Por tanto, el aporte de la investigación concluye con la presentación de la secuencia didáctica, a espera de implementarse dentro del aula, y de momento expuesta al análisis de otros investigadores.

### **Técnicas e instrumentos de recolección de datos**

En el enfoque cualitativo se trabaja con múltiples fuentes de datos, que pueden ser entrevistas, observaciones directas, documentos, material audiovisual, etc. Además, recolecta datos de diferentes tipos: lenguaje escrito, verbal y no verbal, conductas observables e imágenes. Como se ha resaltado, con el *Diseño Documental* de la investigación, la información requerida para el desarrollo del trabajo es obtenida mediante, la recopilación de diferentes fuentes bibliográficas a escala nacional e internacional: libros, artículos de investigaciones, trabajos de campo y tesis de grado de nivel posgradual. Por tal razón, las investigaciones de carácter documental, se habla de instrumentos destinados al manejo de información, que pueden ser estructurados según lo exija la naturaleza de los datos. Cabe resaltar que se hizo uso fundamental de la base de datos de la Universidad Pedagógica y Tecnología de Colombia.

**Tabla 3.** Fases e Instrumentos de la investigación

Fases	Instrumento	Validación	Autores que soporta la validación
Fase I. Diagnóstico DAM	- Reportes de pruebas externas e internas I. E. San Lorenzo.	- <i>Análisis de contenido</i> de las pruebas Saber 11, cuatrienio 2016-2020.	(Gómez L., 2010)  (Chong de la Cruz, 2007)
	- Día de 2019	- <i>Análisis de contenido</i> del anexo 1 del Día E, 2019.	
	- Cuestionario de diagnóstico.	- <i>Cuestionario</i> . Consiste en un listado de preguntas escritas relacionadas con los diferentes sistemas de representación de funciones polinómicas y su aplicabilidad en algunas situaciones.	(Gallardo E, 2017, p. 73)
Fase II. Revisión y análisis documental	- Teorías que fundamenta la investigación.	- <i>Análisis de contenido</i> de las fuentes seleccionadas que exponen las teorías de situaciones didácticas de Brousseau, Transposición Didáctica de Chevallard y Registros de Representación Semiótica de Duval.	(Gómez L, 2010)  (Chong de la Cruz, 2007)
	- Investigaciones relacionadas con el tema.	- <i>Análisis de contenido</i> de las diferentes investigaciones encontradas sobre el uso de recursos virtuales en el estudio de funciones.	
Fase III. Aporte de la investigación (informe final).	- Secuencia Didáctica.	La validación se realiza con la implementación posterior a la divulgación de la investigación.	Prueba piloto

**Fuente:** Elaboración propia.

*Nota.* La validación de la secuencia didáctica se realiza mediante su implementación, ya que los resultados de la investigación corresponden a lo encontrado en el diseño y su construcción, de momento quedando expuesta al análisis por otros investigadores.

## **Contexto, población y muestra**

A continuación, se describe brevemente la población objeto de estudio, la muestra representativa y su contexto.

### **Población**

La Institución Educativa San Lorenzo, es un colegio oficial mixto, con cinco sedes de primaria (dos urbanas y tres rurales) y una de secundaria (urbana). Actualmente la sede de secundaria cuenta con 668 estudiantes, divididos en tres cursos de grado sexto, tres séptimos, dos octavos, dos novenos, tres décimos y tres undécimos. De acuerdo con el contexto, los estudiantes de la institución educativa diariamente están contemplando situaciones relacionadas a la producción agrícola: siembra, cultivo, transporte y comercialización. Además, se busca que los apuntes considerados en este trabajo sean tenidos en cuenta por otros docentes, extendiendo las características de los ejercicios problemas al contexto en el que se encuentran sus estudiantes.

### **Muestra**

La muestra para el enfoque cualitativo no es probabilística. Para este caso, la muestra puede ser clasificada como una *muestra por conveniencia*, ya que se tiene acceso a los individuos que la componen, en este caso, un grupo de estudiantes de una institución educativa (Hernández, Fernández, y Baptista, 2014, p. 401).

Se espera a corto plazo la implementación de la unidad didáctica diseñada en el presente trabajo con estudiantes de grado once de la I. E. San Lorenzo, que cuenta actualmente con 107 estudiantes cursando este grado, que representan el 16 % de la población objeto de estudio,

sus edades están comprendidas entre los 16 y 18 años, la mayoría de ellos residentes de zona urbana del municipio, sin embargo, un grupo considerable de estudiantes habitan en la zona rural.

## **Contexto**

La Institución Educativa San Lorenzo está situada en la zona urbana del municipio de Suaza-Huila, sin embargo, son bastantes los estudiantes que residen en zona rural y que hacen parte de la institución. Además, Suaza es un municipio que basa su economía principalmente en actividades agrícolas como el cultivo del café, aguacate, maracuyá, entre otros.

Recordando que las dificultades de aprendizaje identificadas en los estudiantes de grado once de la Institución Educativa San Lorenzo, me llevó a desarrollar este trabajo; es por esta razón que los fenómenos propuestos para ser modelados mediante las funciones polinómicas, en búsqueda del desarrollo del pensamiento variacional, son tomados del medio en el que diariamente se encuentran expuestos los estudiantes.

## **Análisis e interpretación de resultados**

Este capítulo presenta los resultados obtenidos durante el diseño y la construcción de la secuencia didáctica, exponiendo el análisis de contenido de los documentos que soportan la investigación, y consigo la clasificación de las fuentes según el aporte de su contenido. Se expone una secuencia didáctica como el aporte de la investigación para el desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso de Excel y GeoGebra, centrándose en el estudio de representaciones semióticas de las funciones polinómicas y la aplicación de éstas en el modelamiento de situaciones problema.

### **Fase I. Diagnóstico DAM**

Una vez analizados los resultados de pruebas Saber 11 de la Institución Educativa San Lorenzo, se pudo establecer que a pesar de haber logrado superar la media nacional en una unidad en el año 2019, aún no logra

superar el promedio de las instituciones que conforman el ente territorial, lo que indica un camino largo para lograr destacar a la institución a nivel departamental y nacional.

Por otro lado, los resultados de las pruebas OEA muestran el grado de acierto de los estudiantes en ejercicios y problemas que implican el desarrollo del pensamiento variacional, representando las preguntas correctas el 46 %, lo que denota que no alcanzan a contestar de manera acertada la mitad de las pruebas referentes al componente variacional.

Cabe destacar los resultados obtenidos en las actividades establecidas para el Día E del año 2019, en los que se ubica a los estudiantes de grado once, en su gran mayoría y de manera equitativa, en los desempeños básico y alto, significando que los estudiantes demuestran un aprendizaje mínimo y sobresaliente del contenido temático.

Mediante la aplicación de un cuestionario a 68 estudiantes, se presenta un diagnóstico de conocimientos de los estudiantes de grado once actual (2020), obteniéndose un 57,8 % de respuestas correctas, en las que se relaciona los diferentes sistemas de representación de funciones polinómicas (algebraico, gráfico, tabular y verbal).

**Nota aclaratoria:** No se logró aplicar el test a la totalidad de estudiantes debido a la no disponibilidad de recursos y de internet de algunos de ellos.

Este análisis permite concluir que se debe trabajar arduamente en estrategias que permitan elevar el desempeño general de los estudiantes, con el fin de obtener un porcentaje cada vez mayor en el desempeño superior.

## **Fase II. Revisión y análisis documental**

Los trabajos de investigación práctica, recopilados para el diseño de la secuencia didáctica, centran la atención en el estudio principalmente en funciones lineales, cuadráticas, exponenciales o logarítmicas, haciendo enfoque en dos aspectos principales: i) el comportamiento gráfico de

funciones mediante la variación de los parámetros que componen la expresión algebraica general de las funciones o ii) en la aplicación de funciones a través de la modelación de situaciones problema.

Algunos trabajos integran ambos aspectos de estudio, sin embargo, hacen uso de Excel, GeoGebra u otro software, y el tema central está dirigido al análisis de una función matemática específica (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica).

**Tabla 4.** Resumen de análisis de investigaciones por categorías

Nombre de la investigación	Categorías de análisis	Función matemática de estudio	Recurso virtual usado	Estudio de variación gráfica	Modelación de situaciones problemas
Desarrollo de tópicos de matemática asistido con Excel (Pareja H., 2012).		Función lineal y cuadrática	Excel	Sí	Sí
Utilización de la hoja de cálculo Excel como recurso didáctico para facilitar el aprendizaje de las matemáticas de 3° de ESO (Almendo 2014).		Funciones cuadráticas	Excel	Sí	No
Representación automática de funciones en Excel y su aplicación docente (Bernal et al. 2011).		Funciones de una variable	Excel	Sí	No
Utilización de la hoja de cálculo Excel en el rendimiento académico del área de matemáticas en estudiantes del noveno grado, Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro; Medellín-2014 (Pérez, 2016).		Función lineal	Excel	Sí	No
Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria (Huapaya, 2012).		Función Cuadrática	Excel	No	Sí
Teaching basic physics through Excel spreadsheets (Subramaniyan, A. L., 2014).		Funciones exponenciales y trigonométricas.	Excel	No	Sí

Nombre de la investigación	Categorías de análisis	Función matemática de estudio	Recurso virtual usado	Estudio de variación gráfica	Modelación de situaciones problemáticas
Modelado de funciones: Una propuesta didáctica mediada por diversos contextos de las ciencias naturales (Medina, 2012).		Funciones de una variable	Excel	No	Sí
Teaching Mathematical Functions Using Geometric Functions Approach and Its Effect on Ninth Grade Students' Motivation (Akçakın V., 2017).		Funciones de una variable	GeoGebra	Sí	No
Apropiación del concepto de función usando el software libre GeoGebra (Martínez, 2013).		Función lineal y cuadrática	GeoGebra	Sí	No
El uso del GeoGebra como recurso educativo digital en la transposición didáctica de funciones de proporcionalidad (Debárbora, 2012).		Función lineal	GeoGebra	Sí	No
Introducing parameters of linear function at undergraduate level: use of GeoGebra (Ersin, 2013).		Función lineal	GeoGebra	Sí	No
Static Versus Dynamic Disposition: The Role of GeoGebra in Representing Polynomial-Rational Inequalities and Exponential-Logarithmic Functions (Caglayan, 2014).		Funciones polinómicas y racionales	GeoGebra	Sí	No
La importancia de las funciones en la formulación de modelos matemáticos utilizando tecnología: implementación del modelo 1 a 1 (Roumieu, 2014).		Función lineal y cuadrática	GeoGebra Excel	Sí No	No Sí
Geogebra and Grade 9 Learners' Achievement in Linear Functions (Mushipe M. y Ogbonnaya U. I., 2019).		Función lineal	GeoGebra	Sí	No
Matematiksel Modellemede GeoGebra Kullanımı: Boy-Ayak Uzunluğu Problemi (Hidiroğlu C. y Bukova-Guzel E., 2014).		Función lineal	GeoGebra	No	Sí



Nombre de la investigación	Categorías de análisis	Función matemática de estudio	Recurso virtual usado	Estudio de variación gráfica	Modelación de situaciones problemas
An Example how Geogebra can be Used as a Tool for STEM (Budinski N., 2017).		Funciones de una variable	GeoGebra	No	Sí
Modelación y simulación con GeoGebra: Una experiencia en el estudio de situaciones con medidas de área y volumen (Flórez C. y Yemail C., 2017)		Funciones polinómicas	GeoGebra	No	Sí
Synthesising Algebraic and Graphical Representations of the Maximum and the Minimum Problems (Hong D. S. y Lee J. K., 2013).		Derivada de Funciones Cuadráticas y Cúbicas	GeoGebra	Sí	No
Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y GeoGebra, para estudiantes de bachillerato (Rojas et al. 2017).		Derivadas de funciones	GeoGebra	Sí	No
Propuesta didáctica: la enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso del GeoGebra (Bustos, 2013).		Límites de funciones	GeoGebra	Sí	No
Cartilla TIC para la enseñanza de matemáticas (González, 2013).		Derivadas de funciones cuadráticas	GeoGebra	Sí	No

**Fuente:** Elaboración propia.

La Tabla 4 relaciona las características de las investigaciones que componen los antecedentes. La investigación de Roumieu es una de las más completas, puesto que integra el uso de GeoGebra y Excel para un estudio de las funciones lineales y cuadráticas; se debe aclarar que Roumieu también hace uso de otros recursos virtuales como Lagrange y Funcionswin-32, además del estudio de funciones exponenciales. El papel que cumple GeoGebra y Funcionswin-32 en el trabajo de Roumieu es únicamente gráfico, por otro lado, Excel y Lagrange son usados para el modelamiento de experimentos propuestos.

La investigación de Roumieu (2014) fue un punto de partida clave para la realización del trabajo, ésta inspiró para hacer el análisis gráfico de las funciones polinómicas mediante una estrategia del uso de GeoGebra y otra con Excel. De igual manera, el modelamiento de fenómenos cotidianos con regresiones polinómicas a través de una estrategia mediada por el uso de GeoGebra y otra con Excel.

Para lograr el estudio de la variación gráfica de las funciones polinómicas mediante el uso de excel, fue importante el trabajo realizado por Bernal et al (2001); a pesar de que ellos hacen uso de macro (programación), brindaron una idea inicial de cómo podría realizarse la variación gráfica relacionada con el cambio de valores de los parámetros de las funciones.

En la realización del presente trabajo también fueron importantes algunos textos de matemáticas para bachillerato, éstos brindan aspectos teóricos importantes y plantean ejercicios y problemas que inspiraron el diseño de las actividades de la secuencia didáctica.

**Tabla 5**

*Resumen de análisis de textos por categorías*

Nombre de la investigación	Categorías de análisis	Función matemática de estudio	Recurso virtual recomendado	Aspectos teóricos de funciones	Problemas de aplicación
Precálculo: Matemáticas para el cálculo sexta edición (Stewart, 2012).		Funciones de una variable	Ninguno	Sí	Sí
Matemáticas B (Alonso et al, 2008) (Libro interactivo virtual)		Funciones de una variable	Ninguno	Sí	Sí
Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas en MAD 3 (Gómez, 2018)		Función lineal, afín, exponenciales crecientes.	Ninguno	Sí	Sí
Aplicaciones de las funciones algebraicas (Rojas A., 2018).		Funciones de una variable	Ninguno	No	Sí

**Fuente:** Elaboración propia.

Algunos libros de matemáticas presentan aspectos teóricos importantes del comportamiento de funciones, sin embargo, no incorporan o recomiendan el uso de algún recurso virtual que permita la construcción de los conceptos, o para el modelamiento matemático en la solución de problemas; y se centran en la aplicación de conceptos algebraicos. Bajo este análisis de la literatura, se diseña la secuencia didáctica que promete la utilidad de GeoGebra y Excel para el estudio de aspectos mencionados de las funciones polinómicas, bajo una guía instructiva del uso de estos recursos para cada actividad planteada.

### Fase III. Aporte de la investigación

Finalmente, este trabajo integra los siguientes aspectos en el contenido de la secuencia didáctica:

**Tabla 6.** Aspectos generales contenidos de la secuencia didáctica

Propuesta de secuencia didáctica para fortalecer el pensamiento variacional en el estudio de funciones polinómicas					
Funciones matemáticas de estudio	Recurso virtual usado	Estudio de variación gráfica	Modelación de situaciones problemas	Aspectos teóricos de funciones	Problemas de aplicación
Funciones polinómicas	GeoGebra	Sí	Sí	Sí	Sí
	Excel	Sí	Sí		

**Fuente:** Elaboración propia.

Como resultado del diseño de la secuencia didáctica, se tiene que hacer enfoque en la construcción de conceptos mediante prácticas para deducir la variabilidad gráfica de las funciones polinómicas a partir de los parámetros que la constituyen. Además de la aplicación de conceptos mediante la determinación de modelos matemáticos para dar respuesta a situaciones planteadas, validando y justificando el ajuste hallado en cada problema.

Atendiendo a las consideraciones de Díaz Barriga (2002) para el diseño de secuencias didácticas, también se propone una estrategia de evaluación contemplada en el momento de cierre de la secuencia compuesta de una

rúbrica y dos evaluaciones. Esta fase presenta la estructura general de la secuencia didáctica propuesta, los momentos, estrategias y actividades que la componen. La secuencia didáctica muestra fundamentalmente dos maneras de abordar el tema de funciones polinómicas: i) mediante el uso de GeoGebra y ii) el uso de Excel.

### Estructuración de la secuencia didáctica

El presente trabajo adopta los planteamientos de Díaz Barriga (2013), para el diseño de la secuencia didáctica, delimitando tres momentos: apertura, desarrollo y cierre.

**Tabla 7.** *Momentos de la secuencia didáctica*

Momento de la secuencia didáctica	Descripción y finalidad del momento
Apertura	<p>Es una fase diagnóstica que permite conocer el estado cognitivo inicial de los estudiantes, está destinada a la recuperación de saberes y preconceptos de los estudiantes para crear andamios entre sus experiencias y las nuevas competencias que se desea adquirir.</p> <p>Es un momento introductorio para abordar funciones polinómicas, es importante anticipar la interacción con los recursos tecnológicos e informáticos que se requerirán en el desarrollo de la secuencia didáctica.</p>
Desarrollo	<p>Este momento está destinado a la creación de escenarios y ambientes de aprendizaje y cooperación, uso de las TIC, la aplicación de estrategias y actividades centradas en el aprendizaje; la integración y ejercitación de competencias y experiencias para aplicarlas en situaciones reales o parecidas. es una etapa importante para la recolección de evidencias.</p>
Cierre	<p>Esta fase propone la elaboración de síntesis, conclusiones y reflexiones argumentativas que permiten advertir los avances o resultados del aprendizaje en el estudiante.</p>

**Fuente:** Basado en Díaz, A. (2013), *Guía para la elaboración de secuencia didáctica*, UNAM.

### Estrategias de aprendizajes de la secuencia didáctica

Cada momento de la secuencia didáctica está compuesto por estrategias de aprendizaje mediadas por actividades que en su mayoría requieren de

la interacción de GeoGebra y Excel, ya sea para conocimiento mismo de estos recursos virtuales, como para determinar propiedades específicas de las diversas representaciones de las funciones polinómicas, además de la resolución de problemas mediante el modelamiento de fenómenos que componen cada problemática. Se describen las estrategias que componen cada momento de la secuencia didáctica.

**Tabla 8.** Estrategias de la secuencia didáctica para cada momento

Momento	Estrategia de aprendizaje	Descripción de la estrategia
Apertura	Situaciones introductorias	Este espacio está destinado a identificar situaciones de la vida diaria que representan la relación y variabilidad entre dos magnitudes, retomando el concepto de función matemática.
	Interacción con los recursos virtuales	Es importante destinar un espacio previo al desarrollo de la secuencia didáctica para el conocimiento de las herramientas de GeoGebra y Excel, mediante la interacción y manejo de éstas.
Desarrollo	Prácticas guiadas	Esta estrategia está compuesta de actividades instruccionales que requieren del uso de GeoGebra y Excel para determinar el cambio del comportamiento gráfico de las funciones polinómicas de acuerdo con las constantes que componen su expresión algebraica.
	Trabajo basado en problemas	Las actividades propuestas en esta estrategia se componen de situaciones problemáticas comunes del entorno que requieren de su modelamiento para su solución, haciendo uso de GeoGebra y Excel.
Cierre	Rúbrica de seguimiento	Es importante resaltar que el proceso de evaluación de la secuencia didáctica debe darse en todos los momentos que la componen (apertura, desarrollo y cierre).
	Evaluación final	Sin embargo, es en la fase de cierre donde se mide el alcance de lo aprendido, por tanto, esta estrategia se compone de un test evaluativo de conocimientos.

**Fuente:** Elaboración propia.

## **Carácter evaluativo de los momentos de la secuencia**

El carácter evaluativo de cada momento se debe diferenciar, con el fin de obtener un proceso evaluativo lo más preciso posible durante la secuencia didáctica.

**Tabla 9.** *Carácter evaluativo de los momentos de la secuencia didáctica*

<b>Momento</b>	<b>Carácter evaluativo</b>
Apertura	Evaluación diagnóstica de conocimientos previos
Desarrollo	Evaluación continua (formativa) para verificar y retroalimentar el desempeño del estudiante.
Cierre	Es final o sumativa, busca valorar la información recabada durante el inicio y en el desarrollo del proceso.

**Fuente:** Elaboración propia.

## **Categorías de análisis de la secuencia didáctica**

Teniendo en cuenta los tres momentos que componen la secuencia didáctica, se definen para el análisis de esta, 5 categorías y 16 indicadores de desempeño:

**Tabla 10.** *Categorías de análisis de la secuencia didáctica*

Momento	Categoría	Indicadores de desempeño
Apertura	Caracterización de funciones	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Identifica situaciones del contexto que muestran variabilidad y dependencia entre dos magnitudes.</li> <li>2. Reconoce una función como una regla de dependencia entre variables, mediante el uso de varios sistemas de representación semiótica.</li> <li>3. Identifica y diferencia las principales funciones polinómicas.</li> </ol>
	Uso de GeoGebra y Excel	<ol style="list-style-type: none"> <li>4. Reconoce las principales herramientas que ofrece la hoja gráfica de GeoGebra</li> <li>5. Reconoce las principales herramientas que ofrece la hoja de cálculo de Excel.</li> </ol>
Desarrollo	Relación entre representaciones semióticas	<ol style="list-style-type: none"> <li>6. Transforma las principales funciones polinómicas en sus diferentes sistemas de representaciones semióticas.</li> <li>7. Relaciona las representaciones algebraicas, tabulares y gráficas de las principales funciones polinómicas.</li> </ol>
	Resolución de problemas mediante la modelación	<ol style="list-style-type: none"> <li>8. Delimita la problemática de las situaciones propuestas.</li> <li>9. Identifica las variables que rigen el problema.</li> <li>10. Establece relaciones de dependencia entre variables según los datos obtenidos en la práctica.</li> <li>11. Transforma los datos obtenidos a representaciones tabulares y gráficas.</li> <li>12. Propone un modelo matemático de acuerdo con las relaciones de dependencia establecidas para las variables.</li> <li>13. Justifica el modelo propuesto, mediante su validación.</li> </ol>
Cierre	Confrontación de lo observado	<ol style="list-style-type: none"> <li>14. Demuestra interés en cada una de las actividades propuestas.</li> </ol>
	Evaluación final	<ol style="list-style-type: none"> <li>15. Desarrolla con facilidad el test de evaluación de conceptos.</li> <li>16. Demuestra conocimiento del tema mediante el modelamiento de problemas planteados.</li> </ol>

**Fuente:** Elaboración propia.

## Momento de apertura

### Consideraciones para la apertura. Conocimientos previos requeridos:

Cuando se aborda el tema de funciones, es importante que los estudiantes cuenten con algunos conocimientos matemáticos que son indispensables para el aprendizaje del tema. Gómez (2018) identifica los conocimientos previos requeridos para resolver las tareas propuestas para el aprendizaje de funciones constantes, lineales y a fin; por ende, son conocimientos que también se extienden para el aprendizaje de funciones polinómicas.

**Tabla 11.** Listado de conocimientos previos del tema de funciones polinómicas

CP	Descripción de capacidades
1	Usar el plano cartesiano
2	Completar tablas
3	Utilizar lenguaje algebraico
4	Operar con números reales
5	Diferenciar relación de función
6	Solucionar ecuaciones de primer y segundo grado
7	Solucionar sistemas de ecuaciones de 2x2 y 3x3.
8	Utilizar notación funcional
9	Hallar el valor numérico de expresiones algebraicas
10	Usar GeoGebra
11	Usar Excel

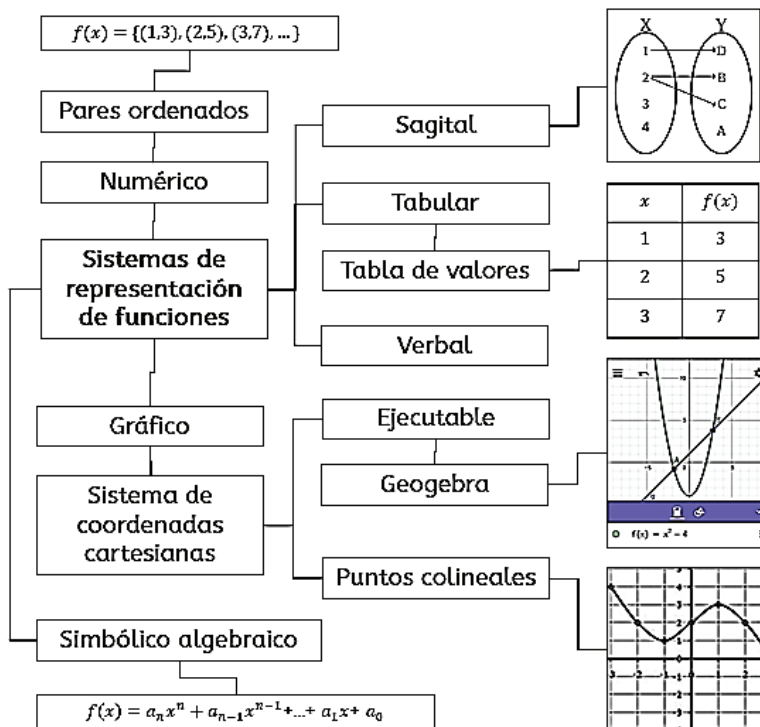
**Fuente:** Adaptado de Gómez (2018)

Es importante aclarar que durante el momento de apertura no es necesario abordar todos conocimientos previos, ya que algunos de ellos son temas extensos que se debieron haber estudiado con anterioridad, de acuerdo con lineamientos curriculares coherentes. Teniendo en cuenta el listado de conocimientos, en sus tres primeras capacidades previas requeridas, se mencionan las diferentes formas de representar las funciones matemáticas.



**Sistemas de representación de funciones polinómicas.** Existen diversas maneras de representar una función. a continuación, se presenta un esquema que resume las diferentes representaciones de las funciones polinómicas

**Figura 2.** *Sistemas de representación de funciones polinómicas*



**Fuente:** Elaboración propia.

En este momento de la secuencia didáctica se presenta como base introductoria la presentación de las principales funciones polinómicas y su utilidad en el ajuste de puntos dados por una base de datos de algún evento en estudio. Además, se incluye un espacio exclusivo para conocer las principales herramientas de Excel y Geogebra que serán usadas en el desarrollo de la secuencia. Este espacio de exploración de las características de los recursos permitirá una familiarización de los estudiantes con Excel y Geogebra.

## **Momento de desarrollo**

Esta etapa de la secuencia la integra algunas consideraciones conceptuales básicas acerca de las principales funciones polinómicas, seguido de una serie de prácticas guiadas por el docente donde los estudiantes deberán usar de Excel y Geogebra una herramienta que les permita variar los coeficientes que componen las funciones polinómicas para lograr observar y concluir el efecto de los valores de los coeficientes en el aspecto gráfico de las funciones, y de esta manera contestar el test incluido en la secuencia didáctica. Este espacio de la unidad temática refuerza el dominio y las transformaciones de las representaciones simbólicas-algebraicas, tabulares y gráficas, de esta manera al finalizar las prácticas propuestas se generaliza las características de las funciones polinómicas: constante, lineal, cuadrática y cúbica.

Dentro de este momento de la secuencia didáctica se presenta un espacio para el trabajo basado en problemas. En este espacio se plantean algunas situaciones problemas del contexto que necesariamente llevará a los estudiantes a la recolección de datos, datos que deberán ser modelados en Excel y Geogebra con el fin de encontrar la función polinómica que mejor se ajusta a éstos, y así dar solución a las situaciones planteadas mediante proyecciones. Este fragmento de la secuencia didáctica es crucial debido a que refuerza el dominio y las transformaciones de la mayoría de las representaciones semióticas de las funciones polinómicas: numérica, verbal, simbólico-algebraica, tabular y gráfica.

## **Momento de cierre**

Consideraciones finales. Esta fase busca valorar la información recabada durante el inicio y en el desarrollo del proceso, para vincularla con los resultados del cierre, con el propósito de identificar en qué medida se cumplieron las metas establecidas al inicio, mediante la elaboración de síntesis, conclusiones y reflexiones argumentativas que permiten advertir los avances o resultados del aprendizaje en el estudiante. Sin embargo, es en la fase de cierre donde se mide el alcance de lo aprendido, por tanto, esta estrategia se compone de un test evaluativo de conocimientos.

**Tabla 12.** Estructura del momento de cierre

Cierre	Rúbrica de seguimiento	Evalúa los desempeños del estudiante y el ambiente de aprendizaje.
	Test de conocimientos	<p><b>Evaluación 1:</b> Evalúa la relación de las representaciones semióticas:</p> <div style="text-align: center;"> <pre> graph TD     A[Algebraica] &lt;--&gt; T[Tabular]     A &lt;--&gt; G[Gráfica]     T &lt;--&gt; G             </pre> </div>
		<p><b>Evaluación 2:</b> Evalúa la aplicación de conceptos en el modelamiento de fenómenos. Además, evalúa la capacidad de representación verbal con la justificación del modelo encontrado.</p>

**Fuente:** Elaboración propia.

## Conclusiones y reflexiones finales

Inicialmente, el bajo desempeño encontrado en las pruebas externas e internas, especialmente en el componente variacional en los estudiantes de grado once de la Institución Educativa San Lorenzo (Suaza-Huila), fue lo que inspiró la búsqueda de nuevas prácticas para el desarrollo del pensamiento variacional. El presente trabajo considera como causa primaria de las dificultades, las prácticas pedagógicas implementadas, es decir, la continuación de metodología tradicionales dentro del aula, por lo que se enfoca en la realización de una secuencia didáctica para abordar el tema de funciones polinómicas, con el fin de orientar el desarrollo del pensamiento variacional mediante el uso de GeoGebra y Excel.

Para lograr el diseño adecuado de la secuencia didáctica encaminada a enfocar el tema, fue importante la revisión de la literatura, la recopilación

de investigaciones que tienen como eje central la utilización de recursos virtuales para la construcción del concepto de función, el análisis y la aplicación en el mundo real.

En el análisis de contenido de los diferentes documentos consultados, se observa que algunas investigaciones se enfocan en analizar las propiedades gráficas de ciertas funciones, olvidando la utilidad de éstas en la resolución de problemas mediante la modelación. El análisis documental también permitió identificar el aporte que éstas brindan al estudio de funciones matemáticas, extendiendo estos aportes al estudio de funciones polinómicas. Por otro lado, las metodologías empleadas por los diferentes autores dieron una idea central de cómo podría ser usado GeoGebra y Excel para el estudio y utilidad de las funciones polinómicas.

Diferentes autores, mediante el carácter práctico que poseen sus investigaciones, después de analizar los resultados, concluyen que el uso de recursos de las TIC, como GeoGebra y Excel, es fundamental para la educación matemática actual. Se debe tener en cuenta que la anterior conclusión, es recurrente en varios autores con investigaciones que implican diferentes poblaciones y los contextos. Por lo anterior, se puede generalizar que, ante un buen uso y dirección de estos recursos, se pueden obtener óptimos resultados para cualquier grupo de estudiantes.

Uno de los aportes más relevantes que se tiene con la implementación de prácticas mediadas por recursos digitales en el estudio de funciones, es que se puede agilizar el análisis gráfico, haciéndolo deductivo y constructivista, para dar paso a la interpretación y análisis de fenómenos que requieren ser modelados para la solución de problemáticas. Además de la influencia positiva en el ambiente de aprendizaje, la motivación e interés de los estudiantes.

Teniendo en cuenta las apreciaciones anteriores, se consolida el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de funciones polinómicas, dirigida a fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional, retomando ideas, estrategias y aspectos teóricos de otras investigaciones, fundamentadas en las teorías de las didácticas de las matemáticas, especialmente en la Teoría

## de Registros de Representaciones Semióticas de Duval y la Modelación Matemática.

El aporte didáctico de la secuencia retoma consideraciones importantes de la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval con el fin de que el estudiante pueda identificar las propiedades gráficas de las funciones, buscando desarrollar la capacidad de transformación a sus diferentes sistemas de representación. Las actividades presentes en la secuencia didáctica están dirigidas para su desarrollo entre estudiantes y profesores con el fin de socializar y generalizar cada una de las propiedades de las funciones. También algunas actividades propuestas requieren del trabajo colaborativo en la obtención de datos y análisis de resultados, el aporte conjunto busca la construcción social de conceptos. Adicionalmente, se tiene en cuenta la modelación de situaciones con funciones polinómicas para la solución de las problemáticas planteadas por cada situación, con el objetivo de fortalecer la capacidad de resolución de problemas.

## Referencias

- Akçakın, V. (27 de Julio de 2017). Teaching Mathematical Functions Using Geometric Functions Approach and Its Effect on Ninth Grade Students' Motivation. *International Journal of Instruction*, 11(1), 17-32. doi:e-ISSN: 1308-1470
- Alonso, J., Cabezón, M., Fernández, J., y García, M. R. (2018). *Matemáticas B*. Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado. CIDEAD.<http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatemáticasB/index.htm>
- Bernal García, J. J., Martínez María-Dolores, S. M., y Bernal Soto, P. (2011). Representación automática de funciones en Excel. *Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA*, 12,141-157.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Budinski, N. (2017). An Example how Geogebra can be Used as a Tool for STEM. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 24(3), 149-153. doi:10.1564/tme\_v24.3.07
- Bustos González, I. (2013). *Propuesta didáctica: La enseñanza del concepto de límite en el grado undécimo, haciendo uso de Geogebra*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales].
- Castro R., M. C., González, M. D., Flores, S., Ramírez, O., María, C., y Fuentes, M. C. (2017). Registros de representación semiótica del concepto de función exponencial. Parte I. *Entre ciencias: diálogos en la Sociedad del Conocimiento*, 12.
- Chong de la Cruz, I. (2007). Métodos y técnicas de la investigación documental. *Investigación y Docencia en Bibliotecología*, 183-201. <http://hdl.handle.net/10391/4716>

- Díaz Barriga, A. F., y Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo*. McGraw Hill.
- Duval, R. (1993). Registros de Representación Semiótica y Funcionamiento Cognitivo del Pensamiento. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive*, 5, 37-65.
- Florez, C., y Yemail, C. (2017). *Modelación y simulación con GeoGebra: Una Experiencia en el Estudio de Situaciones con medidas de Área y Volumen*. [Tesis de Maestría, Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín].
- Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista EMA*. 6(2), 180-200.
- Gallardo, E. (2017). *Metodología de la Investigación: manual autoformativo interactivo*. Universidad Continental.
- Gómez Mendoza, M. A. (2005). LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA: HISTORIA DE UN CONCEPTO. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 83-115.
- Gómez, L. (2010). Un espacio para la investigación documental. *Revista Vanguardia Psicológica*, 1(2), 226-233. doi:ISSN-e 2216-0701
- Gómez, P. (2018). *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas en MAD3*. Ediciones Uniandes.
- Hernández S., R., Fernández C., C., y Baptista L., M. d. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.
- Hong, D. S., y Lee, J. K. (2017). Synthesising Algebraic and Graphical Representations of the Maximum and the Minimum Problems. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 20(4).

- Huapaya G., E. (2012). *Modelación usando función cuadrática: Experimentos de enseñanza con estudiantes de 5to de secundaria*. [Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica del Perú].
- Martínez Gómez, J. N. (2013). *Apropiación del concepto de función usando el software GeoGebra*. [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales].
- Mushipe, M., y Ogonnaya, U. I. (2019). Geogebra and Grade 9 Learners' Achievement in Linear Functions. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET)*, 14(8), 206-219. doi:<https://doi.org/10.3991/ijet.v14i08.9581>
- Pérez, F. (2016). *Utilización de la hoja de cálculo Excel en el rendimiento académico del área de matemáticas en estudiantes del noveno grado, Institución Educativa Juvenil Nuevo Futuro; Medellín-2014*. [Tesis de Maestría, Universidad Privada Norbert Weiner. Medellín].
- Rodríguez, A., y Pérez, A. O. (enero-junio de 2017). Métodos científicos de indagación y de construcción del conocimiento. *Revista EAN* (82), 179-200. doi:<https://doi.org/10.21158/01208160.n82.2017.1647>
- Rojas A., C. J. (2018). *Aplicaciones de las funciones algebraicas*. Editorial Universidad del Norte.
- Rojas Escribano, L., Báez Rojas, J., y Corona Galindo, M. (2017). *Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato. El cálculo y su enseñanza de las ciencias y la matemática*, 9(1),52-63.
- Roumieu, S. M. (2014). La importancia de las funciones en la formulación de modelos matemáticos utilizando tecnología: implementación del modelo 1 a 1. [Congreso] *Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación*, 14, Instituto San Gabriel de Quilmes.