Capítulo 5

Conclusiones generales

5.1. Introducción

Se describen los resultados de los estudios realizados para el logro de cada una de las fases de la investigación que condujeron al logro del objetivo general del estudio, el cual buscaba evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo, para determinar si se había generado o potenciado, un conocimiento común y un conocimiento ampliado del contenido como base del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza universitaria idónea del objeto Grupo.

5.2. Primera fase de la investigación

En la *primera fase de investigación,* se realizaron las actividades conducentes al logro del objetivo específico (1) que daba respuesta a la pregunta ¿Cuál es el significado global del objeto matemático Grupo? y corresponde a la determinación de los significados parciales del objeto de investigación los cuales emergen precisamente del "estudio histórico, epistemológico y fenomenológico".

Los significados identificados según las etapas de evolución del objeto grupo, emergen según la figura 2.6. la cual se determina a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas de cada etapa de evolución de la estructura grupo.

5.3. Segunda fase de la investigación

En la *segunda fase de la investigación*, se realizaron las actividades conducentes al logro de los objetivos específicos: (2) Reconstrucción del significado global de referencia del objeto grupo; (3) Caracterización del significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto sugeridos para los programas de la asignatura Teoría de grupos (4 libros) y (4) Caracterización del significado del objeto Grupo, pretendido por los programas de la asignatura de Teoría de Grupos para los estudiantes de formación matemática.

Para la reconstrucción del significado global del objeto grupo, se describieron los significados parciales que emergen de la caracterización (prácticas matemáticas, configuración de objetos y procesos que se activan en dichas prácticas) los cuales se determinaron a partir del "estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, el cual proporcionó la información sobre el proceso de evolución del objeto Grupo a lo largo de la historia; de igual forma se analizaron las problemáticas más relevantes que dieron origen a las configuraciones epistémicas identificadas. Con este estudio se evidencia en primer lugar, la complejidad del objeto matemático Grupo, el cual presenta serias dificultades a los estudiantes; tanto en el proceso de aprendizaje, como con el de enseñanza.

Como conclusión del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, emerge el significado epistémico - global del objeto Grupo que corresponde a: Un grupo $(G,*)$ es un conjunto G, cerrado bajo una operación $*$ donde se cumplen los siguientes axiomas:

1) *Para todo* $a,b,c \in G$ *se tiene:* $(a*b)*c = a*(b*c)$. *Asociatividad de* $*$.
2) *Existe un elemento* $e \in G$ *tal que para todo* $x \in G$, $e * x = x * e = x$. *Elemento identidad e para* $*$.
3) *Para cada* $a \in G$, *existe un elemento* $a' \in G$ *tal que* $a * a' = a' a = e$ *Inverso* a' *de a.*

5.3.1. Caracterización del significado del objeto grupo pretendido por los programas de estudio

Del análisis de los contenidos mínimos del programa de Teoría de Grupos para los estudiantes de *Licenciatura*, se observa en la unidad (1) del programa curricular, que el *significado* "institucional - referencia" (corresponde al subsistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas que son considerados en la institución como adecuadas y características para resolver problemas pretendidos del objeto matemático), corresponde al significado de Grupo como *Grupo Abstracto,* el cual hace referencia al conjunto donde se define una operación binaria que cumple con los axiomas de: clausura de la operación definida, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos en el conjunto, para cada elemento del conjunto. Este significado corresponde al significado Global del objeto matemático.

Otro significado "institucional" que se pretende y que se infiere de la unidad (5) del programa para los estudiantes de formación matemática, corresponde al significado de Grupo como *Conjunto de Permutaciones*. En esta unidad se establece el estudio de los grupos alternantes, los grupos de permutaciones S_n y se estudian los grupos Diédricos D_n como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo S_n de permutaciones de elementos de un conjunto finito.

De igual forma, del programa de Teoría de Grupos,se evidencia que los significados pretendidos para el objeto matemático según los **contenidos mínimos** presentados corresponden a: Grupo, en el contexto de *Grupo Abstracto* y Grupo como *Conjunto de permutaciones* de elementos de un conjunto finito. Sin embargo, la resolución 2769 de 2003 dada por el Ministerio de Educación Nacional para los programas de ciencias naturales, ubica a la Teoría de Grupos dentro del área disciplinaria "fundamentada en la apropiación por parte del estudiante de los contenidos y métodos de su disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la *epistemolog*ía y en las prácticas científicas propias de su campo". En este sentido, la **epistemología,** como rama de la filosofía interesada por el conocimiento científico, plantea cuestiones fundamentales de las que se deduce que *el estudiante de Matemáticas y de Licenciatura* debería dar respuesta a preguntas tales como: ¿Cuáles son los orígenes del conocimiento científico? (¿empírico? ¿racional?), ¿Cuáles son los criterios de validez del conocimiento científico? (¿Capacidad de predecir sucesos? ¿Consistencia lógica?), ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico? (¿Acumulación y continuidad? ¿Períodos de ciencia normal, revoluciones científicas y discontinuidad? ¿Desplazamiento y refinamiento de programas científicos?

La preguntas propuestas, se formulan en términos generales o específicas con respecto a algún dominio particular del conocimiento científico como las matemáticas y aún más específico como en el caso de la Teoría de Grupos y específicamente para el objeto Grupo: cuestiones tales como ¿Cuáles son las fuentes del significado de ese conocimiento? ¿Cómo se constituye el significado del objeto matemático? (Sierpinska, A. & Lerman, S., 1996, p. 829). Así, de los lineamientos dados por el Ministerio de Educación Nacional, se concluye, que el estudiante de Matemáticas y de Licenciatura, debe tener un conocimiento del objeto Grupo de los diversos contextos de su uso, esto es, como *conjunto de Permutaciones, en aritmética modular, en Teoría de ecuaciones algebraicas, en Teoría de Matrices y en su significado Abstracto e incluso sobre el Grupo de Galois, Grupos de Klein, Grupos de Lie, Grupos cristalográficos, Grupos Puntuales y Grupos aplicados a la Física, entre otros.*

5.3.2. Significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto

El significado del objeto grupo pretendido por los cuatro libros de textos analizados para la asignatura Teoría de Grupos corresponden a:

El texto de Gallian (1990), introduce el objeto Grupo: primero, como un conjunto especial, donde se define una operación que cumple ciertas *propiedades* algebraicas; es decir, se introduce el objeto en su *significado Abstracto*. En la lección que se analizó también se observó que uno de los significados dados al objeto matemático corresponde, al *significado en Aritmética Modular de los conjuntos* Z_n. Y en la siguiente lección del texto, se introduce el objeto grupo a partir del estudio de los "Grupos de Simetrías de polígonos regulares - D_n" es decir desde su significado como *Conjunto de Permutaciones,* que corresponde históricamente al primer significado dado al objeto matemático.

Por su parte, el *texto* de Herstein (1999), introduce el objeto grupo a partir del estudio del conjunto $A_{(S)}$ con S un conjunto finito y que para el caso, se nota como el grupo S_n o grupo de Simetrías o de permutaciones de grado n, al igual que el texto anterior para finalmente, introducir el objeto en su significado Abstracto.

El *texto* de Lezama (2012), introduce el objeto matemático, a partir del estudio de las *propiedades* que cumple la operación definida en el conjunto; así, se inicia con el estudio de las estructuras algebraicas: pirmero como un semigrupo (cuando la operación $*$ es asociativa) y en la medida que la operación $*$ va adquiriendo más propiedades, dicha *estructura* se va haciendo más rica y las posibilidades de operar en el conjunto denominado G se hacen mayores (Lezama, 2012); así, si en el semigrupo además existe un elemento identidad respecto a la operación $*$ entonces, el conjunto adquiere la estructura de Monoide y a partir del Monoide en la lección 2, se introduce el *objeto* de Grupo en su *significado de Grupo Abstracto*. Se observa que también se propone el estudio del objeto matemático a partir del conjunto de aplicaciones $Apl(X)$ con la operación compuesta como una *situación problemática* con estructura de semigrupo y a partir de este conjunto se introduce el significado de grupo como *Grupo de Permutaciones* al trabajar con el conjunto de las funciones biyectivas y la operación compuesta en las funciones.

Finalmente, el *texto* de Caicedo (2003), introduce el objeto Grupo al igual que el texto de Lezama, a partir de la determinación de las *propiedades* que tiene la operación definida en el conjunto: para este caso los conjuntos numéricos con las operaciones usuales; especialmente, se estudia el conjunto de los números enteros con la suma y el conjunto de los reales positivos con el producto verificando las cuatro propiedades o axiomas de grupo.

Aquí se introduce el objeto Grupo en su *significado abstracto* como un conjunto con una operación que cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto. De igual forma, se introduce el objeto Grupo desde su significado como *Conjunto de Permutaciones* al definir el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas con la operación compuesta de funciones al igual que el texto de Lezama.

Así, en general se observa que en los cuatro textos se introduce el objeto grupo desde el estudio de los *Grupos de Permutaciones*, definido por el conjunto de funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo y en este punto se establece la importancia del estudio de estos grupos S_n de orden n y de los grupos D_n de simetrías de los polígonos regulares como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo. Además, se observó que el significado pretendido por los textos para el objeto Grupo, corresponde finalmente al *significado de Grupo Abstracto*.

Como conclusión al análisis de textos, se evidencia que no se introducen los significados de grupo como: Grupo de Galois, Grupo de Lie, Grupos de Klein, Grupos

Cristalográficos, Grupos puntuales y algunos de los grupos aplicados en la Física, dejando estos tópicos en algunos casos como materias de profundización como para el caso de los Grupos de Galois, sin llegar a abordar los otros grupos.

5.4. Tercera fase de la investigación

La *tercera fase de la investigación* correspondió a las actividades orientadas al logro de los objetivos específicos: (5) Selección de las tareas para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática; (6) Diseño e implementación del cuestionario piloto para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto Grupo; (7) Implementación del cuestionario *CDM-Grupo* para evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado: como bases de un conocimiento especializado de los estudiantes de formación matemática y finalmente, (8) Análisis de las categorías del CDM en su dimensión epistémica.

5.4.1. Caracterización de la faceta epistémica del CDM

Se planteó como uno de los objetivos de la investigación, la caracterización de las categorías del conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido, como conocimientos bases para potenciar el desarrollo de un conocimiento especializado del contenido necesario para la labor de la enseñanza del objeto matemático. Según Godino, (2009); Pino-Fan, (2013), Vásquez, (2014) **el conocimiento común del contenido** se relaciona con los conocimientos matemáticos que no son propios de la enseñanza; que posee cualquier persona para resolver situaciones-problemáticas propias del nivel educativo, en este caso del nivel universitario y en relación con el objeto Grupo.

Como conclusión, se establece que el conocimiento común del contenido, se relaciona con el desarrollo de procesos del pensamiento algebraico avanzado de los estudiantes; este desarrollo del pensamiento matemático es uno de los objetivos que se buscan en la educación de los primeros grados hasta el nivel superior: en la educación universitaria, procesos como abstraer, generalizar, sintetizar, representar, definir, refutar, entre otros, toman gran relevancia.

De igual forma, en la categoría del **conocimiento ampliado del contenido;** que se relaciona con los conocimientos matemáticos del estudiante que *no se direccionan necesariamente a la enseñanza* y que también se relacionan con el desarrollo de procesos del pensamiento algebraico avanzado, teniendo presente que las prácticas desarrolladas por los estudiantes corresponden a prácticas algebraicas y este desarrollo del pensamiento es o debe ser uno de los objetivos pretendidos en la Educación Superior. Es claro, que este conocimiento se relaciona con conocimientos matemáticos más avanzados del currículo que se deben potenciar para establecer conexiones con otros temas, por tanto, se espera que se puedan potenciar en cierto grado o nivel, en la formación universitaria inicial.

Finalmente, la categoría del **conocimiento especializado del contenido** que según Pino-Fan, Godino & Font, (2013a, 2013b), se relaciona con el *conocimiento extra que distingue al profesor de otros profesionales que no son profesores* pero que tienen una preparación afín en matemáticas. Con este conocimiento especializado, el profesor tiene en cuenta tanto la diversidad de los significados, así como la diversidad de los objetos y procesos que conllevan dichos significados (Vásquez, 2014), es decir el profesor es conocedor del desarrollo de procesos del pensamiento matemático avanzado necesarios para la comprensión de los objetos matemáticos y lo que es más importante: para lograr esa comprensión por parte de los estudiantes, que seguramente serán futuros profesores. Para evaluar el conocimiento especializado del contenido, se tiene presente la reflexión epistémica de los estudiantes de formación matemáticas sobre los conceptos y propiedades que se ponen en juego en la solución de la situaciones problemáticas planteadas. Para esto, se diseñaron y reformularon distintas situaciones-problemáticas que buscaban dar respuesta a preguntas como: ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas usó para dar solución al problema planteado? que, de acuerdo con Godino (2009), los estudiantes para responder a este tipo de pregunta, tendrán que identificar los distintos conceptos o propiedades involucradas en la solución de la situación problemática planteada.

A partir del análisis a las categorías de la faceta epistémica del CDM se determinaron una serie de indicadores para evaluar el CDM a través de prácticas matemáticas (algebraicas) propuestas para la activación de las configuraciones epistémicas de los estudiantes de formación matemática. Un problema en la Educación básica y media (secundaria) en el contexto Colombiano se relaciona con los concursos docentes realizados por el Ministerio de Educación Nacional, donde se vinculan a profesionales en diversas áreas según pruebas establecidas. Se plantea la hipótesis que estos profesionales han desarrollado un CCC y CAC que les permite acceder como docentes al Sistema Educativo Colombiano y que el mismo sistema considera ciertos conocimientos como básicos y necesarios para el desarrollo del CEC necesario para la enseñanza. De igual forma, en el ámbito universitario se puede plantear la misma hipótesis, ya que los estudiantes ingresan como docentes de las escuelas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y por tanto se espera que estos estudiantes tengan unos conocimientos básicos que les permitan ir adquiriendo la experiencia necesaria (CEC) para la labor de la enseñanza universitaria.

En esta dirección, es importante contar con instrumentos que permitan evaluar la dimensión epistémica del CDM para determinar el nivel que se ha potenciado en los estudiantes respecto al CCC y al CAC como conocimientos básicos para el desarrollo del CEC, necesario para la enseñanza.

5.4.2. Análisis de la dimensión epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática

Según el análisis a las prácticas matemáticas efectuadas por los estudiantes de formación matemática (2 grupos de Licenciados y 1 grupo de Matemáticos) respecto al objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes tienen *grandes dificultades* en relación con el **Conocimiento Común del Contenido**, a excepción del conocimiento de prácticas matemáticas para solucionar las situaciones problemáticas planteadas en los siguientes subítems: conocimiento que se considera como **conocimiento común básico** de los estudiantes de formación matemática: **Subítem 1a), 10b), 10d).**

En esta categoría del Conocimiento Común del Contenido se considera que en general los estudiantes presentan *debilidades* en los conocimientos del objeto matemático, estas **debilidades o dificultades** se relacionan con un bajo nivel de dominio. Según el índice de dificultad de las preguntas, se evidencian estas dificultades: en especial con los conocimientos relacionados con los subítems 2d), 4a), 5b), 8b) y 9b) donde el porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde al 0 por ciento, identificándose como índices de mayor grado de dificultad para los estudiantes.

Bajo la misma perspectiva, del análisis a las prácticas matemáticas de los estudiantes de formación matemática con el objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes presentan al igual que con el Conocimiento Común del Contenido, dificultades (índice de dificulta alto de los conocimientos relacionados con el subítem) en relación con el **Conocimiento Ampliado del Contenido** respecto al objeto Grupo, a excepción del conocimiento Ampliado de los siguientes subítems: conocimiento que se considera como **conocimiento ampliado básico** de los estudiantes de formación matemática: **Subítem 1b), 1c), 1d), 10d).**

En la categoría del Conocimiento Ampliado del Contenido se considera, que en general los estudiantes presentan *grandes debilidades* relacionadas con un *nivel de dominio muy bajo o deficiente* respecto al índice de dificultad del subítem según la escala establecida para el índice, donde 0 índica el mayor grado de dificultad y 1 el mayor grado de facilidad y el conocimiento básico se relaciona con un índice de dificultad entre el (25% y el 75%). En especial en los subítems 2a), 2b), 2d), 3c), 4a), 4b), 4c), 4d), 5b), 8c), 9d) y 11c) presentaron grandes dificultades, hecho que se evidencia del porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde a un 0 por ciento, ya que no desarrollaron ninguna práctica matemática.

De igual forma, de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de formación matemática (2 grupos de Licenciatura y 1 grupo de Matemáticas) respecto al objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes presentan *grandes dificultades* en relación con el **Conocimiento Especializado del Contenido,** a excepción del **conocimiento especializado básico** de los subítems: **Subítem 1a, 1b), 1c), 1d), 10b).** En esta categoría del Conocimiento Especializado del Contenido se considera que la mayoría de los estudiantes presentan **debilidades o dificultades** relacionadas con un bajo nivel de dominio o un dominio deficiente del subítem según el índice de dificultad: en especial de los subítems 4a), 4b), 4c), 4d), 8c), 9d), 11c), 11d) donde el porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde a un 0 por ciento, ya que no desarrollaron ninguna práctica matemática (mayor índice de dificultad del subítem).

Se establece que los tres grupos de estudiantes, presentaron dificultades en relación con el CCC, CAC y por tanto del CEC; ya que presentan un conocimiento bajo en la mayoría de los subítems que permitieron evaluar las categorías del conocimiento didácticomatemático. En general el grupo de licenciatura G1 presenta el más bajo nivel de dominio del conocimiento didáctico-matemático (respecto al índice de dificultad de los subítems), en la dimensión epistémica de este conocimiento y en relación con el objeto Grupo (programa de licenciatura nocturno) en orden ascendente continúa el grupo de licenciatura G2 (programa diurno) y finalmente, se encuentra, el grupo de matemáticas así, al igual que en la prueba piloto este grupo presenta el mayor nivel de desempeño del conocimiento, respecto al objeto Grupo según el índice de dificultad de los subítems.