

Capítulo 4

Tercer Resultado: Evaluación del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática

4.1. Introducción

El capítulo anterior, constituye el segundo punto de partida para evaluar la faceta epistémica del Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo: conocimiento que se ha potenciado y en algunos casos desarrollado en el proceso de formación universitaria.

En este capítulo, se analizan los resultados de la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo*. Se analizan las respuestas dadas por 36 estudiantes de formación matemática a las situaciones problemáticas planteadas en el cuestionario: 16 estudiantes de Licenciatura, grupo G1; 16 estudiantes de Licenciatura del grupo G2 y 4 de Matemáticas. Se presenta en el capítulo el análisis de los conocimientos didácticos-matemáticos puestos en juego en la resolución de las situaciones problemáticas planteadas. Para el análisis de los resultados, se divide el capítulo en tres secciones: en la primera parte, se realiza una presentación; en la segunda, se describen los aspectos relacionados con la metodología y los sujetos participantes, los materiales y procedimientos empleados para la aplicación del cuestionario y finalmente, en la tercera sección, se realiza el análisis de tipo cuantitativo-cualitativo (mixto) de los resultados de la aplicación del cuestionario, junto con el análisis de la puntuación total y del índice de dificultad de los ítems. Se finaliza con un análisis detallado, desde una perspectiva mixta (cualitativo-cuantitativo) de algunos de los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que se pretenden evaluar con los ítems y subítems que componen el cuestionario.

4.2. Método

La presente investigación es de tipo exploratorio-descriptivo, con un enfoque metodológico de tipo mixto (Hart, Smith, Swars & Smith, 2009; Johnson & Onwuegbuzie, 2004) al considerar el análisis de variables cuantitativas por medio de la variable “grado de corrección de las respuestas: correctas, parcialmente correctas e incorrectas” y cualitativas por medio del análisis de las configuraciones puestas en juego por los estudiantes de formación matemática al desarrollar las situaciones problemáticas planteadas, que permitieron evaluar y caracterizar ciertos aspectos del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes, según el modelo del CDM en el enfoque EOS (Godino, 2009).

4.3. Población

El cuestionario se aplicó a 36 estudiantes de formación matemática de una universidad Colombiana, que cursaban la asignatura de Teoría de Anillos (Licenciatura y Matemáticas) al finalizar el segundo semestre académico del 2015. Para los estudiantes de licenciatura se tomaron dos grupos el G1 con 16 estudiantes y el grupo G2 con 16 estudiantes (estos grupos corresponden a dos programas distintos el primero de jornada nocturna y el segundo de jornada diurna) y el grupo G3 de Matemáticas conformado por 6 estudiantes; en este caso, solo 4 estudiantes presentaron la prueba, ya que 2 estudiantes no asistieron el día de la aplicación del cuestionario.

Los datos se obtienen mediante la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo* cuyo proceso de diseño y construcción se describió en el capítulo anterior: el primer paso, fue la aplicación del cuestionario inicial que aportó una primera aproximación al estudio del Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes y de sus dificultades; de igual forma, se trabajó el cuestionario con expertos y finalmente, atendiendo a las recomendaciones de los expertos se realizaron los ajustes pertinentes al cuestionario piloto, de donde se obtuvo el cuestionario final.

Algunas de las diferencias entre las versiones se encuentran en el cambio del orden en que se presentaron los ítems; ya que, según las argumentaciones de los estudiantes, el tiempo para la prueba piloto era insuficiente y por tanto, trabajaron solo las primeras 7 preguntas. También se tuvo presente el juicio de los expertos en la búsqueda de claridad y concisión de los ítems y subítems. Así, en la versión final, los últimos ítems que no se analizaron (8,9,10,11) y que se deseaban analizar para complementar los resultados de la primera aplicación, se colocaron en primer lugar: se buscaba además, identificar la causa de no responder las preguntas mencionadas, ya que podían ser diversas.

4.4. Material y procedimientos

La toma de datos para el cuestionario final estuvo a cargo de dos profesores de la Escuela de Matemáticas y Estadística, los cuales orientaban los cursos de Teoría de

Anillos. Dentro del cuestionario se describe el objetivo de la prueba que corresponde a analizar diferentes aspectos del programa Teoría de Grupos, en la búsqueda de mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático. En el cuestionario se especificaba que este no tenía ningún efecto sobre la nota de la asignatura y que las respuestas eran confidenciales, con el único propósito de utilizarlas en la investigación sobre el objeto Grupo y el conocimiento de los estudiantes. Se entregaron los pliegos del cuestionario *CDM-Grupo* a cada estudiante, con un tiempo de 2 horas. Adicionalmente, en el pliego se solicitaba explicar y argumentar en forma clara y ordenada cada una de las respuestas, además de escribir las dificultades que se les presentaban respecto al contenido matemático con los subítems: en esta ocasión los estudiantes no manifestaron que el tiempo era insuficiente.

4.5. Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación-matemática para la enseñanza del objeto Grupo

Se presenta un análisis mixto de tipo cuantitativo-cualitativo, de los resultados de los 36 estudiantes de formación matemática. Para esta presentación se organiza el apartado en dos secciones: la primera, donde se realiza el estudio cuantitativo de los resultados y la segunda, que corresponde al análisis mixto. Para estos análisis, se codifica la variable cuantitativa “grado de corrección de las respuestas” donde se asignan las puntuaciones de “25,” si la respuesta es correcta; entre “0-25,” si la respuesta es parcialmente correcta y “0,” si la respuesta es incorrecta. La variable cualitativa que corresponde a la “configuración epistémica” activada en el estudiante al desarrollar la práctica matemática, permitió analizar el tipo de conocimiento puesto en juego por el estudiante al desarrollar la situación-problemática planteada: esta variable se analizó de acuerdo a los objetos matemáticos primarios puestos en juego por el estudiante al desarrollar las prácticas matemáticas: se categorizaron las respuestas de los estudiantes y a partir de éstas categorías se llegó al análisis de los conocimientos de los estudiantes sobre el contenido matemático y la determinación de algunas de las dificultades evidenciadas en las respuestas de los subítems que dieron lugar a respuestas parcialmente incorrectas o incorrectas.

4.5.1. Análisis de la puntuación total del cuestionario CDM-Grupo

En la tabla 4.1 se presentan las valoraciones de los tres grupos de estudiantes de formación matemática: el grupo G1 de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno); el grupo G2 de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa diurno) y el grupo G3 de Matemáticas. Las 11 preguntas proporcionan un total de 1100 puntos, el cual se divide la puntuación por 20 para obtener 55 puntos que correspondería a la máxima puntuación de la prueba (en el contexto universitario Colombiano, las puntuaciones de las pruebas toman valores entre 0 y 50 puntos por lo tanto, se hace la conversión respectiva).

Tabla 4.1: Puntuación para el cuestionario *CDM-Grupo*

G1	Puntaje	Total (55)	G2	Puntaje	Total (55)	G3	Puntaje	Total (55)
LM11	80	4	LM21	335	17	M1	220	11
LM12	60	3	LM22	260	13	M2	370	19
LM13	175	9	LM23	310	16	M3	305	15
LM14	105	5	LM24	275	14	M4	210	11
LM15	125	6	LM25	70	4			
LM16	35	2	LM26	95	5			
LM17	175	9	LM27	75	4			
LM18	90	5	LM28	45	2			
LM19	120	6	LM29	45	2			
LM110	90	5	LM210	170	9			
LM111	105	5	LM211	145	7			
LM112	50	3	LM212	140	7			
LM113	55	2	LM213	185	9			
LM114	145	7	LM214	235	12			
LM115	165	8	LM215	255	13			
LM116	125	6	LM216	195	10			

En la tabla 4.2, se presenta el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno) grupo G1, en el cuestionario *CDM-Grupo* sobre el conocimiento didáctico-matemático del objeto Grupo. A partir de esta tabla, se observó que los puntajes totales oscilaron entre 2 y 9 puntos, de lo cual se deduce que ningún estudiante de Licenciatura respondió en forma correcta todo el cuestionario. Se observa además, que la puntuación media es de 5.4 puntos (menos del 10% del puntaje máximo), lo cual es un puntaje demasiado bajo si las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos.

Tabla 4.2: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G1 de Licenciatura

G1-Licenciatura	Estadístico
Media	5.4
Mediana	5
Moda	5
Desv. Típica	2.13
Varianza	4.234
Asimetría	0.293
Curtosis	-0.636

G1-Licenciatura	Estadístico
Mínimo	2
Máximo	9
Rango	7
Recuento	16
Percentiles:	
25	3.750
50	5
75	6.25



Figura 4.1: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G1 de Licenciatura

Los estadísticos descriptivos de la tabla 4.2 y figura 4.1 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es de 5 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher correspondiente a 0.293 pone de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales arriba de la media.



Figura 4.2: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G1 de Licenciatura

En el diagrama de caja de la figura 4.2 se observa que más del 25 por ciento de los estudiantes de Licenciatura del grupo G1, obtienen una puntuación mayor a 3.8 puntos de un total de 55 puntos; más del 50 por ciento obtienen una puntuación de 5 puntos y más del 75 por ciento obtienen una puntuación de 6.3 puntos. De otro lado, como la amplitud del bigote inferior es más corta que la del superior, las puntuaciones se encuentran más concentradas en el 25 por ciento de los datos: estos se encuentran en el intervalo (V_{min}, Q_1) , es decir, entre (2.0, 3.8).

En la misma dirección, se presenta en la tabla 4.3 y en la figura 4.3 el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa diurno) del grupo G2 al cuestionario *CDM-Grupo*, sobre el conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo. A partir de la tabla, se observa que los puntajes totales oscilan entre 2 y 17 puntos, de lo cual se deduce al igual que en el caso del grupo anterior G1, que ningún estudiante de Licenciatura respondió en forma correcta todo el cuestionario. En contraste, en la prueba piloto un estudiante de Licenciatura obtuvo la mayor nota que corresponde a 30 puntos de 50. Se observa además, que la puntuación media es de 9 puntos lo cual es demasiado bajo; ya que, las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos y además, en la puntuación se consideran preguntas correctas y parcialmente correctas.

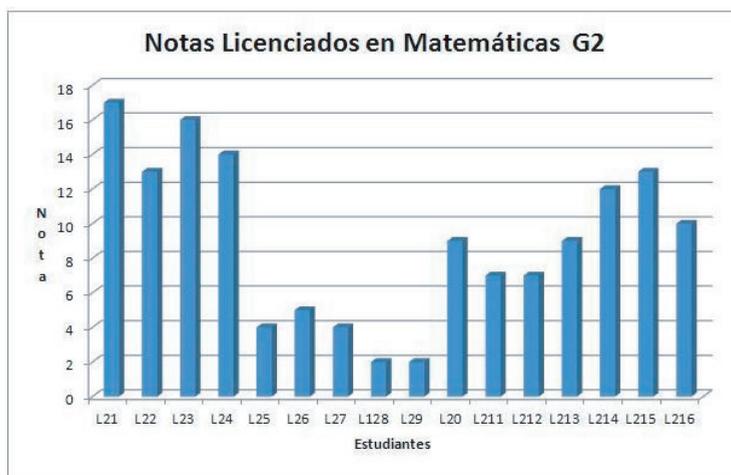


Figura 4.3: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G2 de Licenciatura

Tabla 4.3: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G2 de Licenciatura

G2-Licenciatura	Estadístico
Media	9
Mediana	9
Moda	13
Desv. Típica	4.844
Varianza	22
Asimetría	0.0804
Curtosis	-1.1656
Mínimo	2
Máximo	17
Rango	15
Recuento	16
Percentiles	
25	4.750
50	9
75	13

Los estadísticos descriptivos de la tabla 4.3 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es el de 13 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher que es de 0.0804, deja de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales a la derecha de la media, es decir, que los puntajes totales se distribuyen unilateralmente.

Del diagrama de caja de la figura 4.4 se observa que más del 25 por ciento de los estudiantes de Licenciatura del grupo G2, obtienen una puntuación mayor a 5 puntos aproximadamente, de un total de 55 puntos; más del 50 por ciento de los estudiantes de Licenciatura obtiene una puntuación mayor a 9 puntos y más del 75 por ciento de los estudiantes de Licenciatura obtiene una puntuación mayor a 13 puntos del total de 55 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 24% de la puntuación total). Por otro lado, la amplitud del bigote inferior también, es más corta que la del superior, por lo cual, las puntuaciones se encuentran más concentradas en el 25 por ciento de los datos que se encuentran entre el intervalo (V_{min}, Q_1) , esto es, entre (2,0,4,75).

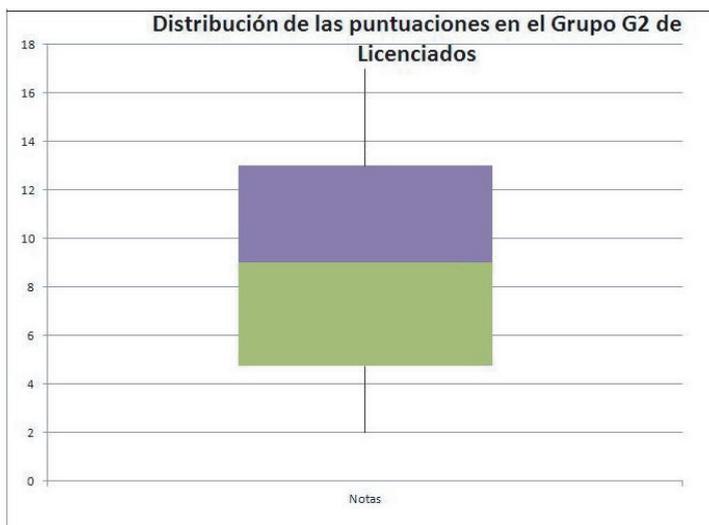


Figura 4.4: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G2 de Licenciados

En la tabla 4.4 y en la figura 4.5 se muestra el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Matemáticas (programa diurno) grupo G3, al cuestionario *CDMGrupo* sobre el conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo. A partir de la tabla, se observa que los puntajes totales oscilaron entre 11 y 19 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 34% del puntaje total), de lo cual se deduce, al igual que en el caso del grupo G1 y G2 de Licenciatura, que ningún estudiante respondió en forma correcta todo el cuestionario. En contraste, en la prueba piloto los estudiantes de Matemáticas obtuvieron las notas de 36, 37, 39, 39, 44 y 46 (alcanzando el 92% del puntaje total de la prueba). Se observó además, que la puntuación media fue de 14 puntos, la cual es demasiado baja (no alcanza el 26% del total de la prueba) al considerar que las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos y además que para la puntuación total se consideraron preguntas correctas y parcialmente correctas.

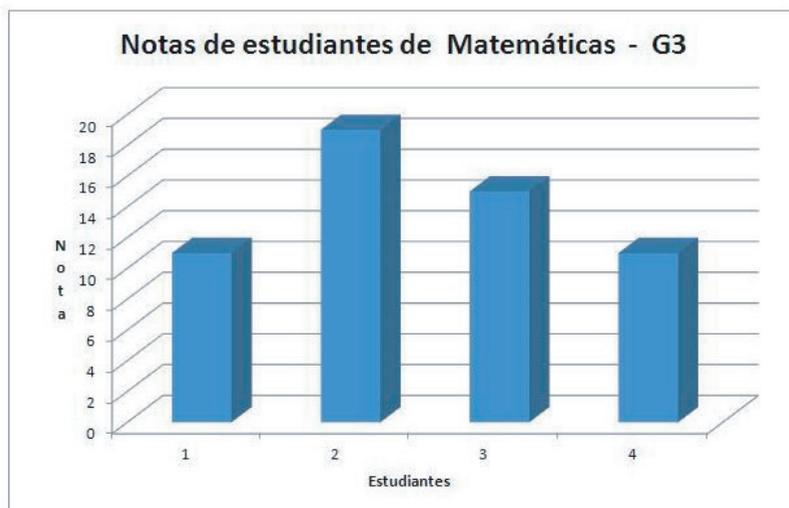


Figura 4.5: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G3 de Matemáticas

Tabla 4.4: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G3 de Matemáticas

G3-Matemáticos	Estadístico
Media	14
Mediana	13
Moda	11
Desv. Típica	3.830
Varianza	11
Asimetría	0.8545
Curtosis	-1.289
Mínimo	11
Máximo	19
Rango	8
Recuento	4
Percentiles	
25	11
50	13
75	16

Los estadísticos descriptivos de la tabla 4.4 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es el de 11 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher de 0.8545, deja

de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales arriba de la media.

Del diagrama de caja de la figura 4.6 se observa que más del 25 por ciento de los Matemáticos del grupo G3, obtuvieron una puntuación mayor a 11 puntos de un total de 55 puntos (puntuación demasiado baja ya que no alcanza el 20% de la puntuación total; más del 50 por ciento de los Matemáticos obtienen una puntuación de 13 puntos y más del 75 por ciento obtiene una puntuación mayor a 16 puntos de un total de 55 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 29% de la puntuación total). Por otro lado, la amplitud del bigote inferior es más corta que la del superior, por lo cual, las puntuaciones se encuentran más concentradas en el 25 por ciento de los datos que se encuentran entre el intervalo (V_{min}, Q_1) esto es, entre (11,19).

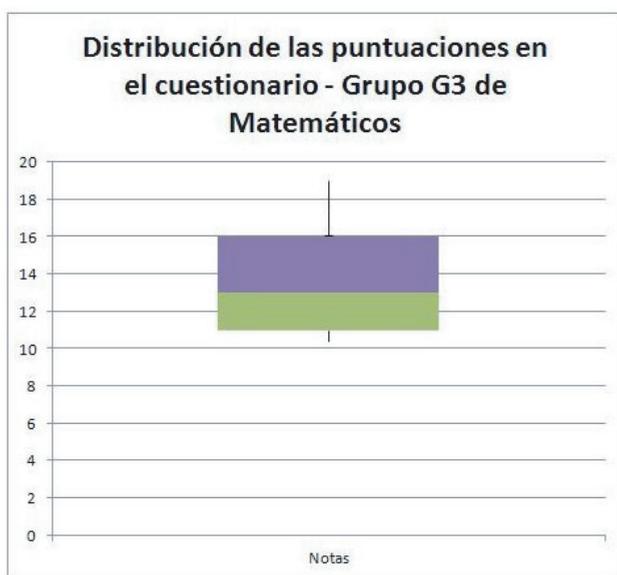


Figura 4.6: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G3 de Matemáticos

4.5.2. Análisis del índice de dificultad a las preguntas del cuestionario

Se presenta en la tabla 4.5 las frecuencias de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1 (programa nocturno).

Tabla 4.5: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G1

Puntuaciones totales del cuestionario:Grupo G1 de Licenciatura						
Ítem	R-Correctas		R-Parcial-mente-C		R-Incorrectas	
P1.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	5	31.25	1	6.25	10	62.5
b)	3	18.75	4	25	9	56.25
c)	4	25	9	56.25	3	18.75
d)	2	12.5	1	6.25	13	81.25
P2.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	0	0	16	100
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P3.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	1	6.25	5	31.25	10	62.5
b)	5	31.25	1	6.25	10	62.5
c)	0	0	0	0	16	100
d)	4	25	0	0	12	75
P4.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	1	6.25	15	93.75
P5.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	0	0	16	100
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P6.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P7.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P8.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	1	6.25	15	93.75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P9.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	2	12.5	2	12.5	12	75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P10.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	5	31.25	0	0	11	68.75
b)	6	37.5	1	6.25	9	56.25
c)	1	6.25	0	0	15	93.75
d)	9	56.25	0	0	7	43.75
P11.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	7	43.75	0	0	9	56.25
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	1	6.25	0	0	15	93.75

A continuación, se resume el índice de dificultad de cada una de las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* para el grupo G1 de Licenciatura en Matemáticas.

Tabla 4.6: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G1

P1.	Ítem	Índice de dificultad %	P7.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	37.5		a)	6.25
	b)	43.75		b)	0
	c)	81.25		c)	0
	d)	18.75		d)	0
	media	45.31		media	1.56
P2.	Ítem	Índice de dificultad %	P8.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	0		a)	6.25
	b)	0		b)	6.25
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	0		media	3.125
P3.	Ítem	Índice de dificultad %	P9.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	37.5		a)	6.25
	b)	37.5		b)	25
	c)	0		c)	0
	d)	25		d)	0
	media	25		media	7.81
P4.	Ítem	Índice de dificultad %	P10.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	12.5		a)	31.25
	b)	0		b)	43.75
	c)	0		c)	6.25
	d)	6.25		d)	56.25
	media	4.68		media	34.37
P5.	Ítem	Índice de dificultad %	P11.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	0		a)	43.75
	b)	0		b)	0
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	0		media	10.93
P6.	Ítem	Índice de dificultad %			
	a)	6.25			
	b)	0			
	c)	0			
	d)	0			
	media	1.56			

Se tiene al igual que para la prueba piloto, la escala para el análisis del índice de dificultad de las preguntas:

Índice de dificultad de 0: ítem de alto-máximo grado de dificultad

Índice de dificultad $\leq 0,05$: ítem difícil

(0,05–0,25]: ítem medianamente difícil

(0,25–0,75]: **ítem de dificultad media** (0,75–0,95]: ítem medianamente fácil

$> 0,95$: ítem fácil

1 : ítem de un grado máximo de facilidad.

En la figura 4.7 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo a su índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1. De los 11 ítems explorados, 2 (P2, P5), que corresponden al 18 por ciento, son preguntas que presentan un máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno); 4 preguntas (P4, P6, P7, P8), que representan el 36 por ciento aproximado de los ítems, son difíciles; las 3 preguntas (P3, P9, P11), son medianamente difíciles (27.3 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y 2 preguntas (P1 y P10), tienen una **dificultad media** para los estudiantes de Licenciatura. En este caso no hay ítems medianamente fáciles, ni fáciles, para los estudiantes; tampoco hay preguntas con índices de un grado máximo de facilidad. Se esperaría en general de un cuestionario de evaluación, que el 50 por ciento de las preguntas presentaran una dificultad media; el 20 por ciento fueran medianamente fáciles; el 20 por ciento medianamente difíciles; el 5 por ciento fáciles y el 5 por ciento difíciles.

En la tabla 4.7 se muestran las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G2 (programa diurno) en el cuestionario.

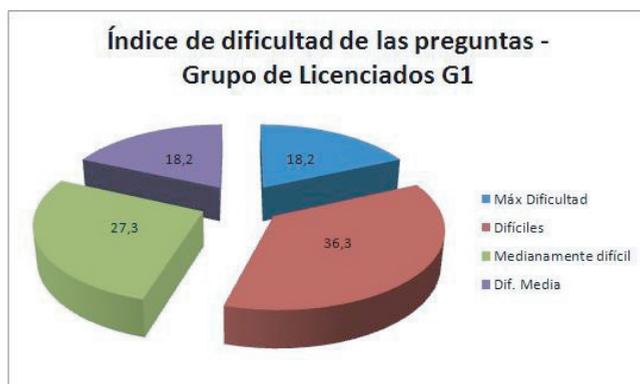


Figura 4.7: Dificultad de los ítems: Estudiantes de Licenciatura - G1

Tabla 4.7: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo: Licenciatura-G2*

Puntuaciones totales del cuestionario: Grupo G2 de Licenciatura						
Ítem	R-Correctas		R-Parcialmente-C		R-Incorrectas	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
P1.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	14	87.5	0	0	2	12.5
b)	8	50	0	0	8	50
c)	9	56.25	6	37.5	1	6.25
d)	7	43.75	1	6.25	8	50
P2.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	0	0	0	0	16	100
c)	3	18.75	0	0	13	81.25
d)	0	0	3	18.75	13	81.25
P3.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	4	25	12	75
b)	0	0	4	25	12	75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	1	6.25	15	93.75
P4.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P5.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	1	6.25	0	0	15	93.75
d)	1	6.25	0	0	15	93.75
P6.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	3	18.75	0	0	13	81.25
b)	0	0	0	0	16	100
c)	3	18.75	0	0	13	81.25
d)	2	12.5	0	0	14	87.5
P7.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	1	6.25	2	12.5	13	81.25
c)	2	12.5	1	6.25	13	81.25
d)	0	0	3	18.75	13	81.25
P8.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P9.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	5	31.25	4	25	7	43.75
b)	8	50	2	12.5	6	37.5
c)	0	0	3	18.75	13	81.25
d)	0	0	2	12.5	14	87.5
P10.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	3	18.75	0	0	13	81.25
b)	6	37.5	1	6.25	9	56.25
c)	0	0	0	0	16	100
d)	7	43.75	1	6.25	8	50
P11.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	7	43.75	0	0	9	56.25
b)	1	6.25	0	0	15	93.75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	1	6.25	0	0	15	93.75

En la tabla 4.8 se presenta el índice de dificultad para cada una de las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* en el grupo G2 de Licenciatura en Matemáticas.

En la figura 4.8 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo al índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G2. De los 11 ítems explorados, 3 preguntas (P4, P5, P8), que representan el 27 por ciento aproximado de los ítems, fueron difíciles para los estudiantes de Licenciatura (programa diurno); 5 preguntas (P2, P3, P6, P11), fueron medianamente difíciles (45 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y 2 preguntas, que corresponden al 18 por ciento (P9 y P10), presentaron una **dificultad media**. No hay ítems con un grado máximo de dificultad, ni medianamente fáciles, tampoco fáciles; de igual forma, no hay preguntas con índices de un de grado máxima facilidad.

Tabla 4.8: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo: Licenciatura-G2*

P1.	Ítem	Índice de dificultad %	P7.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	87.5		a)	12.5
	b)	50		b)	18.75
	c)	93.75		c)	18.75
	d)	50		d)	18.75
	media	70.31		media	17.18
P2.	Ítem	Índice de dificultad %	P8.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	0		a)	6.25
	b)	0		b)	0
	c)	18.75		c)	0
	d)	18.75		d)	0
	media	9.37		media	1.56
P3.	Ítem	Índice de dificultad %	P9.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	25		a)	56.25
	b)	25		b)	62.5
	c)	0		c)	18.75
	d)	6.25		d)	12.5
	media	14.06		media	37.5
P4.	Ítem	Índice de dificultad %	P10.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	6.25		a)	18.75
	b)	0		b)	43.75
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	50
	media	1.56		media	37.5
P5.	Ítem	Índice de dificultad %	P11.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	6.25		a)	43.75
	b)	0		b)	6.25
	c)	6.25		c)	0
	d)	6.25		d)	6.25
	media	4.68		media	14.06
P6.	Ítem	Índice de dificultad %			
	a)	18.75			
	b)	0			
	c)	18.75			
	d)	12.5			
	media	12.5			

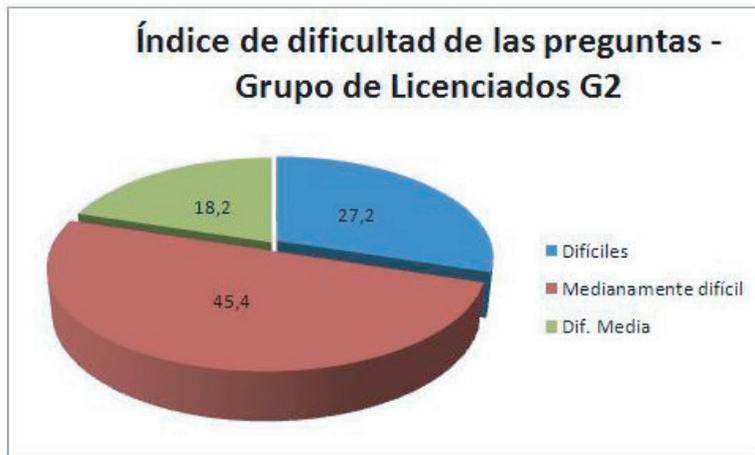


Figura 4.8: Dificultad de los ítems: Estudiantes de Licenciatura - G2

En la tabla 4.7 se muestran las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Matemáticas - grupo G3 (programa diurno) en el cuestionario.

Tabla 4.9: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario CDM-Grupo: Matemáticos-G3

Puntuaciones totales del cuestionario: Grupo G3 de Matemáticos						
Ítem	R-Correctas		R-Parcialmente-C		R-Incorrectas	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
P1.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	4	100	0	0	0	0
b)	4	100	0	0	0	0
c)	4	100	0	0	0	0
d)	4	100	0	0	0	0
P2.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	1	25	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P3.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	4	100	0	0
b)	2	50	2	50	0	0
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	4	100	0	0
P4.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P5.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P6.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	3	75	0	0	1	25
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	1	25	0	0	3	75
P7.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	1	25	0	0	3	75
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	1	25	0	0	3	75
P8.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P9.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	2	50	0	0	2	50
b)	1	25	0	0	3	75
c)	1	25	0	0	3	75
d)	0	0	0	0	4	100
P10.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	2	50	0	0	2	50
b)	2	50	0	0	2	50
c)	0	0	1	25	3	75
d)	2	50	0	0	2	50
P11.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
a)	2	50	0	0	2	50
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100

Se presenta el índice de dificultad para las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* en el grupo G3 de estudiantes de Matemáticas.

Tabla 4.10: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Matemáticos-G3

P1.	Ítem	Índice de dificultad %	P7.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	25		a)	6.25
	b)	25		b)	6.25
	c)	25		c)	0
	d)	25		d)	6.25
	media	25		media	4.68
P2.	Ítem	Índice de dificultad %	P8.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	0		a)	0
	b)	6.25		b)	0
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	1.56		media	0
P3.	Ítem	Índice de dificultad %	P9.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	25		a)	12.5
	b)	25		b)	6.25
	c)	0		c)	6.25
	d)	25		d)	0
	media	12.5		media	6.25
P4.	Ítem	Índice de dificultad %	P10.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	0		a)	12.5
	b)	0		b)	12.5
	c)	0		c)	6.25
	d)	0		d)	12.5
	media	0		media	10.93
P5.	Ítem	Índice de dificultad %	P11.	Ítem	Índice de dificultad %
	a)	0		a)	12.5
	b)	0		b)	6.25
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	0		media	4.68
P6.	Ítem	Índice de dificultad %			
	a)	18.75			
	b)	6.25			
	c)	0			
	d)	6.25			
	media	7.81			

En la figura 4.9 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo al índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Matemáticas - grupo G3. De los 11 ítems explorados, 3 preguntas (P4, P5, P8), presentaron un grado máximo de dificultad para los estudiantes de Matemáticas (27 por ciento aproximado); 3 preguntas (P2, P7, P11), que representan el 27 por ciento aproximado de los ítems, fueron



Figura 4.9: Dificultad de los ítems: estudiantes de Matemáticas - G3

difíciles para los Matemáticos; 5 preguntas (P1, P3, P6, P9, P10), fueron medianamente difíciles (45 por ciento). No hay ítems con dificultad media, ni medianamente fáciles, tampoco fáciles y de igual forma, no se presentaron índices con un grado de máxima facilidad.

Se presenta en la tabla 4.11, el índice de dificultad del cuestionario *CDM-Grupo* para los tres grupos de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (G1 y G2) y el grupo G3 de estudiantes de Matemáticas.

Tabla 4.11: Índice de dificultad del cuestionario CDM-Grupo

Índice de dificultad del cuestionario CDM-Grupo						
Pregunta	Licenciatura-G1	Porcentaje	Licenciatura-G2	Porcentaje	Matemáticas-G3	Porcentaje
P1	0.4531	45.31	0.7036	70.36	0.25	25
P2	0	0	0.0937	9.37	0.0156	1.56
P3	0.25	25	0.14	14	0.125	12.5
P4	0.0468	4.68	0.0156	1.56	0	0
P5	0	0	0.0468	4.68	0	0
P6	0.0156	1.56	0.125	12.5	0.0781	7.81
P7	0.0156	1.56	0.1718	17.18	0.0468	4.68
P8	0.03125	3.125	0.0156	1.56	0	0
P9	0.0781	7.81	0.375	37.5	0.0625	6.25
P10	0.3437	34.37	0.375	37.5	0.1093	10.93
P11	0.1093	10.93	0.1406	14.06	0.0468	4.68
	Media	16.21	Media	20.02	Media	6.67

En la tabla 4.11 se observa que para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1, la mayoría de los ítems (el 55 por ciento aproximado) presentaron una **dificultad alta** del 0 por ciento: el grado de dificultad se relaciona con el bajo nivel de dominio del Conocimiento del Contenido sobre el objeto Grupo. En general el índice de dificultad del cuestionario final corresponde en promedio al 14% resultando medianamente difícil para todos los estudiantes.

Se presenta el análisis de uno de los ítems con mayor grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura del grupo G1.

Subítem 2a):

Según la tabla 4.15, este ítem permite la valoración del conocimiento ampliado del contenido y del conocimiento especializado del contenido, respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos (S_4, \circ) resultando así, de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar si la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ es invariante en el grupo dado. Ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Se observa de la tabla 4.6 que el ítem que presentó menor dificultad en este grupo G1, (81 por ciento, aproximado) fue el ítem 1c) que se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo rectángulo y con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo Z_4 de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo dado.

Analizando el grupo G2 y según la tabla 4.8 se presenta uno de los ítems con dificultad alta: dificultad del 0 por ciento (el 30 por ciento aproximado de los estudiantes). Este grado de dificultad se relacionan con un bajo nivel de dominio del Conocimiento del Contenido respecto al objeto Grupo.

Subítem 2a):

Según la tabla 4.15 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos (S_4, \circ) resultando así, en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar si la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, es un invariante del grupo dado, ya que, ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Para el grupo de Licenciatura G2, finalmente, se observó de la tabla 4.8 que el ítem que presentó menor dificultad (94 por ciento, aproximado) al igual que para el grupo de Licenciatura G1, es el ítem 1c) que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo Z_4 de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo de simetrías dado.

Continuando con el análisis, en la tabla 4.10 se observa que para los estudiantes de Matemáticas del grupo G3, uno de los ítems que presentó un nivel de dificultad alto para este caso, del 0 por ciento, para el 48 por ciento aproximado de los estudiantes que se relacionan con nivel de dominio bajo del Conocimiento del Contenido del objeto Grupo corresponden a:

Subítem 2a):

Que según la tabla 4.15 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos (S_4, \circ), resultando así, en máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar si la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, es un invariante del grupo dado, ya que, ninguno de estos estudiantes respondió en forma correcta.

Para este grupo de estudiantes de Matemáticas G3, finalmente, se observa en la tabla 4.10 que uno de los subítems que presentó menor grado dificultad (para el 25 por ciento, aproximado de los estudiantes) corresponden a:

Subítem 1a):

Que se relaciona con el conocimiento común del contenido sobre el grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con la determinación de un subgrupo del grupo de simetrías; *subítem 1b)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con determinar un grupo isomorfo al subgrupo del grupo de simetrías dado en el subítem anterior; *subítem 1c)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado

del contenido sobre el grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo Z_4 de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo de simetrías dado; *subítem 1d*) que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo (D_3, \circ) , de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con justificar porque el grupo de simetrías no es un grupo cíclico.

Como conclusión, se presenta en la tabla 4.12 los *subítems de mayor dificultad* para los dos grupos de Licenciatura:

Tabla 4.12: Subítems de mayor grado de dificultad en el cuestionario CDM-GRUPO grupos G1 y G2 de Licenciatura

Licenciatura - G1 y G2	Categoría del CDM
2a)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
2b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
3c)	Conocimiento ampliado
4b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
4c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
5b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
6b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8d)	Conocimiento especializado
11c)	Conocimiento ampliado

En la misma dirección, se presenta en la tabla 4.13 los *subítems de mayor grado de dificultad* para los tres grupos de estudiantes.

Tabla 4.13: Subítems de mayor grado de dificultad en el cuestionario CDM-GRUPO grupos G1, G2, G3

Licenciatura - G1 y G2; Matemáticas - G3	Categoría del CDM
2a)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
3c)	Conocimiento ampliado
4b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
4c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
5b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
8c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8d)	Conocimiento especializado
11c)	Conocimiento ampliado

Finalmente, se presenta en la tabla 4.14 el *subítem de menor grado de dificultad* respecto a los tres grupos de estudiantes.

Tabla 4.14: Subítems de menor grado de dificultad en el cuestionario CDM-GRUPO grupos G1, G2, G3

Licenciatura - G1 y G2; Matemáticas - G3	Categoría del CDM
1c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado

Se observa de las tablas 4.6, 4.8 y 4.10 que el cuestionario presentó un nivel de dificultad alto, respecto a las preguntas o ítems: en el grupo G1 de Licenciatura tomó valores entre el 1.56 y el 45 por ciento aproximado resultando *medianamente difícil* (dificultad del 16 por ciento) para este grupo de estudiantes. En el grupo G2 tomó valores entre el 10.56 y 70.31 por ciento, con una dificultad del 20 por ciento aproximada, esto es, el cuestionario también resultó *medianamente difícil* para este grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Finalmente, en el grupo G3 de Matemáticas, tomó valores entre el 0 y el 25 por ciento, siendo también, *medianamente difícil* para los estudiantes.

En conclusión, según la tabla 4.11, el cuestionario presentó en promedio un nivel de dificultad del 14 por ciento, luego de la reorganización de las preguntas, resultando

medianamente difícil, para los estudiantes de formación matemática; pero según el diseño de cuestionarios, estas preguntas se pueden seleccionar de forma que se ajusten a un nivel de dificultad medio, que es lo que se desea de los cuestionario de evaluación. El objetivo de esta evaluación no se relacionaba con la determinación de un nivel de dificultad determinado para el instrumento (importante para una prueba homogénea); al contrario, el objetivo de la investigación involucraba otros aspectos más relevantes, como la identificación de las dificultades de los estudiantes con el objeto matemático y el análisis a las categorías del CDM en su faceta epistémica (relaciona con los conocimientos acerca del contenido matemático para el objeto de investigación); por tanto, lo importante del análisis del índice de dificultad al instrumento es que permite la identificación de las dificultades reales de los estudiantes con el objeto de investigación y en esta dirección se pueden a proponer mejoras en el proceso de enseñanza de los estudiantes.

4.5.3. El Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática

En las secciones anteriores se analizó cuantitativamente el cuestionario *CDM - Grupo*, según la variable “grado de corrección de las respuestas” de esta forma, se estudiaron los aspectos: distribución de las puntuaciones totales y el índice de dificultad de los subítems sin profundizar en los aspectos relacionados con los tipos de conocimientos del contenido relacionados con el objeto Grupo y la identificación de las dificultades y errores que se presentaron en las respuestas de los estudiantes de formación matemática.

En esta dirección, como el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto grupo, no es un conocimiento observable en forma directa, se puede inferir de las prácticas que realizan (visión pragmatista del EOS) al dar respuesta a cada una de las preguntas que componen el cuestionario *CDM-Grupo*, las cuales son observables (Godino, 1996; Vásquez, 2014).

En la búsqueda del logro del objetivo general para la investigación que corresponde a: *Evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, para determinar si se ha generado un conocimiento común y un conocimiento ampliado como bases del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza idónea del objeto Grupo* y bajo los supuestos pragmatistas del marco teórico de la investigación, se presenta el análisis a algunas de las respuestas de los estudiantes, pero en las conclusiones sobre el CDM, se trabajan todos los análisis efectuados según las tres categorías del conocimiento sobre el contenido matemático (Godino, 2009, Pino-Fan, Godino & Font, 2013a, 2013b; Vásquez, 2014).

Para el análisis cuantitativo de las respuestas de los estudiantes de formación matemática se consideró la variable cuantitativa “grado de corrección” la cual

toma los valores de: 25 si la respuesta era correcta, entre (0,25) si la respuesta es parcialmente correcta y 0 si la respuesta es incorrecta o no se responde.

Para el análisis cualitativo, se analizaron las respuestas de los estudiantes agrupando aquellas que eran similares, para llegar a una categorización por medio de un proceso inductivo característico del análisis cualitativo de datos (Buendía, Colás & Hernández, 1998; Vásquez, 2014). Luego de establecer las principales categorías de las respuestas, se realizó el análisis de los conocimientos puestos en juego en las respuestas, así como de las dificultades que dieron lugar a respuestas parcialmente correctas o incorrectas. A partir de este análisis, se obtiene una información descriptiva para cada una de las respuestas, lo que permite describir algunos de los errores y dificultades en las argumentaciones presentes y así del conocimiento didáctico-matemático en relación con el objeto grupo.

Tabla 4.15: Categorías del CDM

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 1.	Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.	
	(a)	Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3 Justifique	Conocimiento común
	(b)	¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(c)	¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(Z_4, +_4)$? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(d)	¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 2.	Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ y sea $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1, x_2, x_3, x_4) := f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$ se dice que f es un invariante del grupo S_4 .	
	(a)	¿Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(b)	¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a f invariante? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(c)	Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. Dé un polinomio simétrico. Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	(d)	Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine b, c en función de sus raíces x_1, x_2 . Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 3.	Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1, 2, 3, 4\}$.	
	(a)	Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2. Justifique	Conocimiento común
	(b)	El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique	Conocimiento ampliado
	(c)	El subconjunto de permutaciones del grupo S_4 que deja invariante a la función $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$. Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 4.	El subgrupo de permutaciones regular de n - símbolos, mueve los n - símbolos excepto la identidad.	
	(a)	Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(b)	¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	¿El subgrupo es conmutativo? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado (a)? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 5.	Divida el polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$. Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto $(\mathbb{Z}_5, +_5)$.	
	(a)	¿El cociente corresponde? Justifique	Conocimiento ampliado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	(b)	¿El residuo corresponde a? Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado
	(c)	¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(d)	¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 6.	Dado el conjunto $A_2 := \{1,2,3,\dots,99\}$ de los z -números y la función $r: \mathbb{N} \rightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r , por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52 + 98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$. Se define además, en el conjunto A_2 la operación $x \oplus y = r(x + y)$.	
	(a)	Solucione $x \oplus 17 = 99$ y diga que propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(b)	¿Existe el elemento identidad en (A_2, \oplus) ? Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(c)	¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo (A_2, \oplus) ? Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(d)	¿Qué z -números son divisibles por 3 en el conjunto (A_2, \oplus) ? Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 7.	Sea (G, \cdot) un grupo con elemento identidad e . La función $f: G \rightarrow G$ tal que $x \rightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).	
Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM

	(a)	El grupo es Abelian.	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(b)	$a = e$	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	$a^2 = a$ y el grupo es abeliano.	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	$a^3 = e$ y el grupo es abeliano	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 8.	Sea $G = \langle A, B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde $A =$ $\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $B =$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	
	(a)	Determine los elementos de G . Justifique	Conocimiento común
	(b)	¿ G es grupo abeliano? Justifique	Conocimiento común
	(c)	Determine el subgrupo de orden 2. Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	¿Cuál es la operación en $GL(2, \mathbb{C})$ y cuál es la operación en G ? Justifique	Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 9.	Sea (\mathbb{R}, \bullet) el conjunto de los números reales y se define la operación \bullet por: $a \bullet b = 3a + 4b$	
	(a)	¿La operación \bullet cumple la propiedad de clausura? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(b)	¿La operación \bullet es asociativa? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(c)	¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM

	(d)	¿En el conjunto \mathbb{R}^2 defina una operación en la cual no exista el elemento identidad? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 10.	Sea el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.	
	(a)	Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(b)	Escriba un subconjunto de $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ que no sea subgrupo. Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	¿Es \mathbb{Z}_3 un subgrupo de \mathbb{Z}_6 ? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	Elabore la tabla de operación para el conjunto $(\mathbb{Z}_6, +_6)$	Conocimiento común
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 11.	Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.	
	(a)	Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.	Conocimiento común
	(b)	Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique	Conocimiento ampliado
	(c)	¿Qué condición cumple el subgrupo H para determinar el grupo cociente? Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	Liste los elementos de la clase bH . Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

4.5.3.1. Análisis del Conocimiento Común del Contenido

Según Godino (2009) y Vásquez (2014), el conocimiento común del contenido se relaciona con los conocimientos matemáticos que no son propios de la enseñanza y que posee cualquier persona para resolver situaciones-problemáticas propias de un nivel educativo, en este caso el nivel universitario y en relación con el objeto Grupo. Para analizar el conocimiento común del contenido de los estudiantes de formación matemática se diseñaron los subítem (ver, tabla 4.15); **1a), 2d), 3a), 4a), 5b), 6a), 6b), 6c), 6d,7a), 7b), 7c), 7d), 8a), 8b), 9a), 9b), 9c), 9d), 10a), 10b), 10c), 10d) y 11a)** que representan el 55 por ciento de los subítems del cuestionario (44 en total).

Según Godino, Batanero & Font (2007), este conocimiento no es observable, pero se analiza del conjunto de prácticas realizadas por los estudiantes, al dar respuesta a las situaciones problemáticas que se le plantean y obtener así, algunos indicadores empíricos, que permiten evaluar el conocimiento común del contenido (Vásquez, 2014). En esta dirección, se presentan en la figura 4.10 y según la tabla 4.15 los subítems que permitieron evaluar la categoría del conocimiento común del contenido de los estudiantes de formación matemática.



Figura 4.10: Subítems del Conocimiento Común del Contenido

En esta dirección, se presenta el análisis de algunos de los subítems que permitieron evaluar el Conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009) de los estudiantes de Formación Matemática, en la categoría del *Conocimiento Común del Contenido -CCC* y en relación con el objeto matemático Grupo, según la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo*.

Análisis del subítem 1a)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo equilátero, específicamente, sobre los subgrupos del grupo; para lo cual se solicitó a los estudiantes dar un ejemplo de un subgrupo del grupo y justificar (bajo algún criterio conocido), por qué el subconjunto dado es subgrupo.

Tabla 4.16: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 1a)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observó de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que del 93.75 por ciento de los estudiantes que dieron respuesta al subítem, solo el 31.25 por ciento lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 4.7, se observó de las respuestas, que los estudiantes no tuvieron dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes dieron respuesta al subítem, el 88 por ciento aproximado, lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 4.9, se observó de las respuestas, que los estudiantes no tuvieron dificultades para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes de formación matemática, se muestra en la tabla 4.15 la clasificación de las respuestas que permitieron inferir algunos de los aspectos relacionados con la comprensión del estudiante, de los subgrupos del grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo equilátero.

Tabla 4.17: Tipos de respuestas al subítem 1a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
<p>Respuesta 1: El subgrupo del grupo (D_3, \circ) corresponde a:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	<p>5 estudiantes que representan el 14 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática; 4 estudiantes del grupo G1 representan el 25 por ciento del grupo y el 11.1 por ciento de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento en el grupo G3 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.</p>
	<p>Justifican, probando la propiedad de clausura, asociatividad, existencia del elemento identidad y de los inversos.</p>
<p>Respuesta 2: El subgrupo del grupo (D_3, \circ) corresponde a $\{A, B, C\}$</p> <p>A=</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ <p>B=</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ <p>C=</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	<p>2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante del grupo G1 que corresponden al 6.25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento de los estudiantes del grupo y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.</p>
	<p>Justifican, probando la propiedad de clausura.</p>
<p>Respuesta 3:</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	<p>1 estudiante, que representa el 6.25 por ciento en el grupo G1 y el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática.</p>
	<p>Justifica, probando la propiedad de clausura con los elementos del subconjunto.</p>
<p>Respuesta 4: $\langle \rho_0 \rangle = \{ \rho_0 \}$</p> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	<p>5 estudiantes del grupo G2 que representan el 31 por ciento y el 14 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.</p>
	<p>Justifican, argumentando que los generadores del grupo son subgrupos del grupo; un subgrupo es el generado por la identidad.</p>
<p>Respuesta 5: El centralizador para de la permutación identidad $C(R_0)$.</p>	<p>2 estudiantes del grupo G3 que representan el 50 por ciento en el grupo y el 5.5 por ciento de los estudiantes de formación matemática.</p>
	<p>Justifican, argumentando que R_0 conmuta con todos los elementos de D_3; que R_0 es el centralizador de D_3.</p>
<p>Respuesta 6: $\{R_0, R_1, R_2\}$ las rotaciones respecto al eje de simetría</p>	<p>2 estudiantes del grupo G3 que representan el 50 por ciento y el 5.5 por ciento de los estudiantes de formación matemática.</p>
	<p>Justifican con la propiedad de clausura para los elementos en el segundo caso; el primer estudiante no justifica.</p>

A continuación, se presenta en la figura 4.11 la respuesta del estudiante de Licenciatura en Matemáticas, LM15 del grupo G1.

Tarea 1

a) $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Sea $A = \{P_0, M_2\} \in D_3$ debe cumplir la clausura y el producto de un elemento de D_3 debe estar en el subgrupo.

$P_0 P_0 = P_0$
 $P_0 M_2 = M_2$
 $M_2 M_2 = P_0$
 $M_2 P_0 = M_2$

✓ 2/5

Por tanto el subgrupo es grupo (cumple la asociatividad, tiene elemento identidad, elemento inverso)

Figura 4.11: Respuesta al subítem 1a -CCC- estudiante LM15

En cuanto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante de Licenciatura en Matemáticas LM15, se evidencia la comprensión del grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo equilátero al presentar sus elementos y en cuanto a los subgrupos del grupo, al probar que el conjunto $\{P_0, M_2\}$ forma subgrupo. De la tabla 4.5 de respuestas y del grado de corrección de las preguntas, se observa que en general los estudiantes tienen una comprensión de los subgrupos del grupo (D_3, \circ) .

Análisis del subítem 2d)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes.

Tabla 4.18: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 2d)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observó de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 4.7, se observó de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, del 18.75 por ciento de los estudiantes (3) dieron respuesta al subítem, el 18.75 por ciento lo hizo en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 4.9, se observó de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante (4) lo hizo en forma correcta.

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas que permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes de la relación existente entre las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 4.19.

Tabla 4.19: Tipos de respuestas subítem 2d)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
Respuesta 1: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $c = (x^2 a + b)^2 \pm b^2 + 4a$	1 estudiante del grupo G1 que corresponde al 6.25 por ciento en el grupo y al 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 2: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\frac{-bx \pm \sqrt{(-bx)^2 - 4x^2 c}}{2x^2}$ $\frac{(-bx_2) \pm \sqrt{(bx_1)^2 - 4x_1^2 c}}{2x_1^2}$	1 estudiante del grupo G1 que corresponde al 6.25 por ciento en el grupo y al 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 3: $(x + x_1)(x + x_2) = 0$ donde $x_1 x_2 = c$ $x_1 + x_2 = b$ $x_1 = -x$ $x_2 = -x$ $(-x)(-x) = c$ $x^2 = c$ $-x + -x = b$ $-2x = b$	3 estudiantes del grupo G2 que corresponden al 19 por ciento del grupo y al 8 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con el procedimiento.
Respuesta 4 : No se entiende el enunciado; no entendí	3 estudiantes del grupo G1 que corresponden al 19 por ciento aproximado del grupo y al 8 por ciento del grupo de estudiantes de formación matemática.

En la figura 4.12 se presenta la respuesta de un estudiante de Licenciatura del grupo G2.

$x^2 + bx + c = 0$
 $(x+x_1)(x+x_2) = 0$ Seq
 $(x+x_1)(x+x_1') = 0$
 $(x+x_1) = 0$ $x+x_1' = 0$

$x_1' = -x_1$	$x_2 = -x_1' \rightarrow x_2$
$x = -x_1' = x_1$	$x_1' = -x$

$-(x'+x'') = b$
 $x' \cdot x'' = c$
 $x_1' = -x_1$ $x_2 = -x_1'$
 $x' + x'' = b$? c
 $-x + (-x) = b$
 $-2x = b$
 $x = -b/2$
 $x' + x'' = c$
 $-x - x = c$
 $-2x = c$
 $x = -c/2$

Figura 4.12: Respuesta al subítem 2d -CCC- estudiante LM32

En cuanto al Conocimiento Común del Contenido, del estudiante LM32, se evidencia de la notación y las representaciones de las raíces de la ecuación, la comprensión del estudiante de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y de sus coeficientes, aunque la misma notación presenta dificultades al estudiante, al llamar por un lado x_1 una raíz y por otra parte la llama x' igual sucede con la segunda raíz. En cuanto a las dificultades de los estudiantes se observa de las tablas 4.1 y 4.11 que solo el 8% de los estudiantes de formación matemática comprenden la relación entre los coeficientes de una ecuación de segundo grado y sus raíces.

4.5.3.2. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Común del Contenido

A partir del análisis efectuado en la sección anterior, se considera que en general los estudiantes de formación matemática, presentan grandes debilidades, en relación con el conocimiento común del contenido, ya que, presentan un conocimiento deficiente, según la escala establecida para los niveles de dominio del conocimiento, cuando se analizan las prácticas algebraicas. Estos niveles de dominio se tomaron en relación con el índice de dificultad de cada una de las preguntas: en esta dirección, el CCC de los estudiantes resultó en algunos casos muy deficiente para la mayoría de los subítems que permitieron evaluar este conocimiento sobre el objeto Grupo, a excepción de los siguientes subítems, lo cual se considera como un conocimiento común básico del contenido (se observa nuevamente que las últimas preguntas que se reorganizaron de la prueba piloto resultaron nuevamente con niveles de dificultad media que es lo que se espera de los cuestionarios de evaluación):

Subítem 1a) mide un nivel básico (medianamente fácil o pregunta fácil según la escala de clasificación para medir el índice de dificultad de la pregunta) el cual les permite determinar un subgrupo del grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo

equilátero, aunque para el grupo de Licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 31 por ciento aproximado.

Subítem 10b) mide un nivel básico al relacionarse de igual forma, con los subconjuntos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, que no cumplen con la propiedad de ser subgrupo.

Subítem 10d) corresponde a un nivel básico al solicitar la tabla de operación para los elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$. Los otros subítems que miden este tipo de conocimiento presentan un muy bajo porcentaje de respuestas correctas como se evidencia en el análisis de los subítems del apartado anterior.

En la figura 4.13 se muestran los porcentajes de las respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de formación matemática, de acuerdo con la variable *grado de corrección* de los subítems que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido. Se observa que para este tipo de conocimiento predominaron en los tres grupos las *respuestas incorrectas*, ya que, en promedio por subítems, las respuestas correctas para el subítem 1a) corresponde al 73% en promedio aproximado; para el subítem 10b) el 42% aproximado y para el subítem 10d) el 50%, pero en general, considerando los tres grupos y según los subítems que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido, las *respuestas correctas no superaron el 15 por ciento*.

En la figura 4.14 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el conocimiento común del contenido, correspondiente a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas parcialmente correctas, en promedio es muy poco y corresponde al 5.5 por ciento.

Según la figura 4.13 y 4.14 para el grupo de Licenciatura - G1, las *preguntas correctas* no superaron el 11 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, el porcentaje de respuestas correctas no superó el 16 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de matemáticas, este porcentaje de respuestas correctas no superó el 26 por ciento: se observa que en este tipo de conocimiento común predominaron en los tres grupos, las respuestas incorrectas, ya que en el promedio general de los subítems que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido, el porcentaje de respuestas correctas no supera el 18 por ciento.

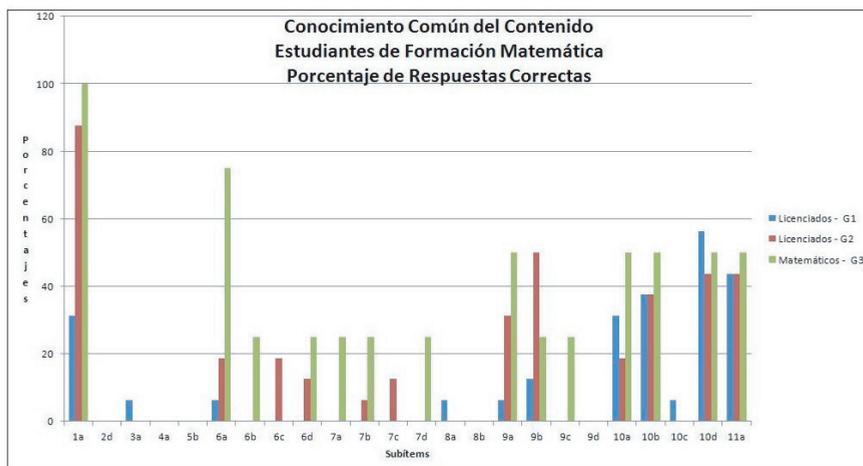


Figura 4.13: Conocimiento Común del Contenido - respuestas correctas

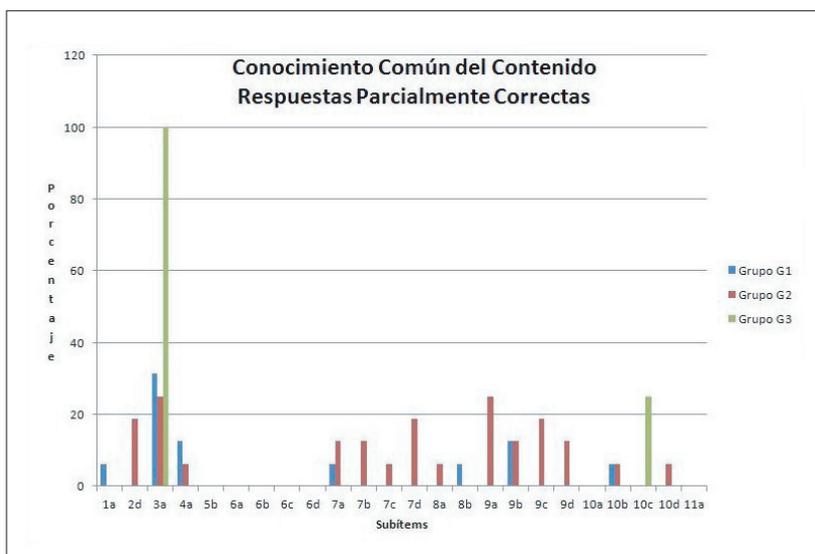


Figura 4.14: Conocimiento Común del Contenido - respuestas parcialmente correctas

En esta dirección, el porcentaje de las preguntas parcialmente correctas (ver, figura 4.14) es muy bajo (5.5% en promedio): en el grupo de Licenciatura G1, el aporte es de 3.4% en respuestas parcialmente correctas; en el grupo de Licenciatura G2 de un 7.8% y en el grupo de Matemáticos G3 el porcentaje corresponde a 5.5% en promedio: por tanto, este aporte no proporciona mayor información en la valoración de la categoría del Conocimiento Común del contenido, ya que, en general, este no supera el 23 por ciento (corresponde al 22 por ciento). En este sentido, se deben diseñar estrategias

que permitan potenciar el CCC en los estudiantes de formación matemática, en especial se deben introducir en los cursos de Teoría de Grupos todos los significados del objeto Grupo, determinados a partir del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico para introducir la metodología propuesta por la fenomenología (Freudenthal) en busca de sentido para el objeto grupo.

4.5.3.3. Análisis del Conocimiento Ampliado del Contenido

Este tipo de conocimiento al igual que el Conocimiento Común del Contenido, se relaciona con los conocimientos matemáticos del estudiante que no se direccionan necesariamente a la enseñanza. El Conocimiento Ampliado del Contenido-CAC se refiere a los conocimientos matemáticos más avanzados en el currículo que el profesor debe poseer en relación con un determinado tema: para el caso, corresponde a conocimientos sobre el objeto Grupo. Por tanto, se espera que el profesor universitario de Teoría de Grupos, adquiera en su preparación universitaria, una comprensión de las propiedades de los grupos, para aplicarlas luego a cualquier conjunto dado, en el cual se define una operación binaria interna y con la finalidad de orientar a sus estudiantes en la realización de las diferentes situaciones problemáticas que se proponen en los libros de texto de la asignatura de Teoría de Grupos.

Para analizar el Conocimiento Ampliado del Contenido que poseen los estudiantes de formación matemática, se analizaron subítems que permitieron evaluar algunos de los aspectos de este conocimiento didáctico-matemático, sobre el objeto de investigación. Según la tabla 4.15 y el cuestionario final, se tienen las siguientes consignas respecto al conocimiento del objeto Grupo de los estudiantes de formación matemática (ver, figura 4.15): **1b), 1c), 1d), 2a), 2b), 2c), 2d), 3b), 3c), 3d), 4a), 4b), 4c), 4d), 5a), 5b), 5c), 5d), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c), 7d), 8c), 9a), 9b), 9c), 9d), 10a), 10b), 10c), 11b), 11c) y 11d)** que constituyen el 84 por ciento de los subítems del cuestionario *CDM-Grupo* (de 44 subítems).

Según Godino, Batanero & Font (2007) este conocimiento, al igual que el conocimiento común del contenido, no se puede observar, pero se pueden utilizar las prácticas realizadas por los estudiantes al dar respuesta a las situaciones problemáticas que se les plantean y obtener así algunos indicadores empíricos, que permitan evaluar el conocimiento ampliado del contenido (Vásquez, 2014). En esta dirección, se presentan algunos análisis a las respuestas que se relacionan con la categoría de conocimiento ampliado del contenido.

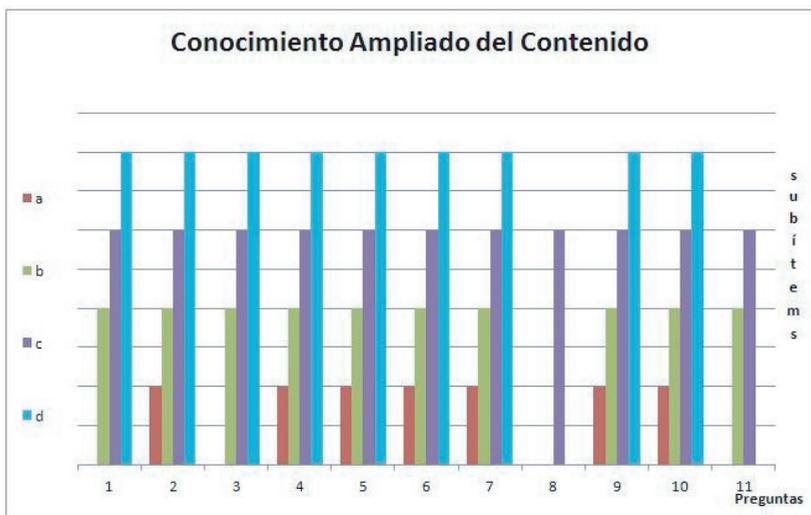


Figura 4.15: Subítems del Conocimiento Ampliado del Contenido

Análisis del subítem 5

Con este ítem se buscaba evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ de polinomios con coeficientes en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$.

Análisis del subítem 5a)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y la determinación del cociente.

Tabla 4.20: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma incorrecta	Según la tabla 4.7, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma incorrecta.	Según la tabla 4.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 4.21. Estas prácticas permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes de formación matemática en relación con la división del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ para determinar el cociente de la división.

Tabla 4.21: Tipos de respuestas al subítem 5a)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
Respuesta 1: $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x$	2 estudiantes del grupo G1 que representan el 12.5 por ciento del grupo y al 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con el procedimiento para hallar el cociente.
Respuesta 2: $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$	3 estudiantes que representan el 19 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G1 y el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el cociente.
Respuesta 3 : 1	1 estudiante del grupo G2 que representa el 6.25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado, del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 4: $1 + x$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del Grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el cociente.

A continuación se presenta en la figura 4.16, la respuesta del estudiante de Licenciatura LM29.

The image shows handwritten mathematical work for problem 5a. At the top right, a linear equation is solved: $-\frac{13}{4} + 2x = 0$, leading to $2x = \frac{13}{4}$ and $x = \frac{13}{8}$. To the right of this, it says $4 = 2 \cdot m - d$ and $2 \cdot 2$. The main part of the work is a polynomial division: $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ divided by $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$. The student has written several steps of the division, including $-\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{11}{8}$ and $-\frac{1}{2}x^4 - x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + 1$. There are also some calculations on the right side, such as $\frac{13}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{16}$ and $\frac{13}{8} \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{32}$, with a note $3 = \frac{1}{2} \cdot m - d$ and $3 \cdot 2 = 6$.

Figura 4.16: Respuesta al subítem 5a -CAC- estudiante LM29

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM29, se evidencia que el estudiante no comprende la operación de división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ para determinar el cociente. En general se establece de las tablas 4.5, 4.7 y 4.9, que los estudiantes de formación matemática no comprenden la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ ya que operan en el grupo $(\mathbb{Q}, +)$. En esta dirección se establece que los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio de la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ resultando la pregunta difícil para ellos.

Análisis del subítem 5b)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento *común del contenido* y el *conocimiento ampliado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y la determinación del residuo.

Tabla 4.22: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16estudiantes)porciento de los estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma incorrecta	Según la tabla 4.7, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 100 porciento de los estudiantes (16) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma incorrecta.	Según la tabla 4.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Respecto al Conocimiento Común del Contenido y al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de las tablas 4.5, 4.7, 4.9 y 4.22, que los estudiantes no comprenden la división de polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ donde se solicita dividir el polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y determinar el residuo. En general para los estudiantes de formación matemática resulta difícil dividir polinomios en el grupo $(\mathbb{Z}_5[x], +_5)$ y por tanto se establece que ellos tienen un bajo nivel de dominio respecto a la división de polinomios en el grupo dado.

4.5.3.4. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

A partir del análisis realizado al CAC, se considera que en general los estudiantes de formación matemática, presentan *grandes debilidades* al igual que con el conocimiento común, ya que, presentan un conocimiento deficiente y en algunos casos muy deficiente respecto al nivel de dificultad determinado del cuestionario final, donde desarrollaron situaciones problemáticas relacionadas con el Conocimiento Ampliado del Contenido (ver, Figura 4.17 y 4.18): la mayoría de los subítems que permiten evaluar este conocimiento resultaron difíciles para los estudiantes (menos del 25% en el nivel de dificultad) a excepción de los siguientes subítems que se consideran como un conocimiento ampliado básico de los estudiantes de formación matemática:

Subítem 1b) que corresponde a un nivel medio del conocimiento, al determinar un subgrupo de grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo equilátero y determinar un grupo al cual puede ser isomorfo. En el grupo de Licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 18.75 por ciento (3 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2, al 50 por ciento (8 estudiantes) y en grupo de Matemáticos, el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general de 56.25 en el subítem (dificultad media que es lo que se espera de un ítem de evaluación).

Subítem 1c) que corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento, al determinar que el grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo equilátero no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ de los enteros módulo 4, al aplicar el Teorema de Lagrange. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 56.25 por ciento (9 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2 al 37.5 por ciento (6 estudiantes) y en grupo de Matemáticos al 0 por ciento para un promedio general de 42% (dificultad media del ítem relacionada con un nivel medio de dominio del conocimiento Ampliado).

Análisis del subítem 1d) que corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento, al determinar que el grupo (D_3, \circ) de simetrías del triángulo equilátero no cumple la propiedad de ser cíclico. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 12.5 por ciento (2 estudiantes), en el grupo

de estudiantes de licenciatura G2 al 43.75 por ciento (7 estudiantes) y en grupo de Matemáticos el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 52 por ciento en el subítem (dificultad media, que es lo que se espera en un ítem de evaluación).

Análisis del subítem 10d) que corresponde a un nivel medio de dominio del conocimiento Ampliado de los estudiantes, al construir la tabla de operación para los elementos del grupo $(Z_6, +_6)$ de los enteros módulo 6. En el grupo de los estudiantes de licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 56.25 por ciento (9 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2, al 43.75 por ciento (7 estudiantes) y en grupo de Matemáticos, el 50 por ciento (2) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 50 por ciento en el subítem (dificultad media del ítem).

En la figura 4.18 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el Conocimiento Ampliado del contenido, que corresponden a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas en promedio es muy bajo, ya que, corresponde al 8 por ciento aproximado, siendo representativo el subítem 1c) con el 46%; 10b) con el 42 por ciento y el 10d) con el 50 por ciento aproximado: en el grupo G1 el porcentaje de respuestas parcialmente correctas es del 7%; en el grupo G2 del 9 por ciento y de igual forma en el grupo de Matemáticos.

Como conclusión, se deduce de la figura 4.17 y 4.18 que en el grupo de Licenciatura - G1, las preguntas correctas no superaron el 7.2 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, este porcentaje no superó el 12 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de Matemáticas este porcentaje no superó el 22 por ciento: así, en general el porcentaje de respuestas correctas no superó el 14 por ciento aproximado. En la figura 4.17 se muestran los porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de Formación matemática de acuerdo a la variable *grado de corrección* de los subítems que permitieron evaluar la categoría del CAC. Se observa que para este conocimiento, predominan en los tres grupos, las respuestas incorrectas; con las excepciones del subítem 1c) donde el porcentaje corresponde al 46%; en el subítem 10b) el 42% aproximado y en el subítem 10d) el 50%, pero en promedio y considerando los tres grupos de estudiantes las respuestas correctas no superaron el 14 por ciento y las respuestas parcialmente correctas no superaron el 8 por ciento, así, la categoría del conocimiento ampliado del contenido, el porcentaje de respuestas “correctas y parcialmente correctas” no superó el 22 por ciento, al igual que en la categoría del conocimiento común del contenido.

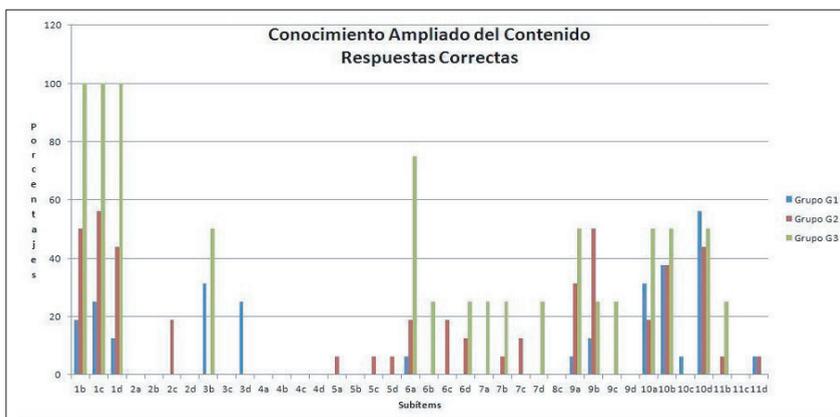


Figura 4.17: Conocimiento Ampliado del Contenido - respuestas correctas

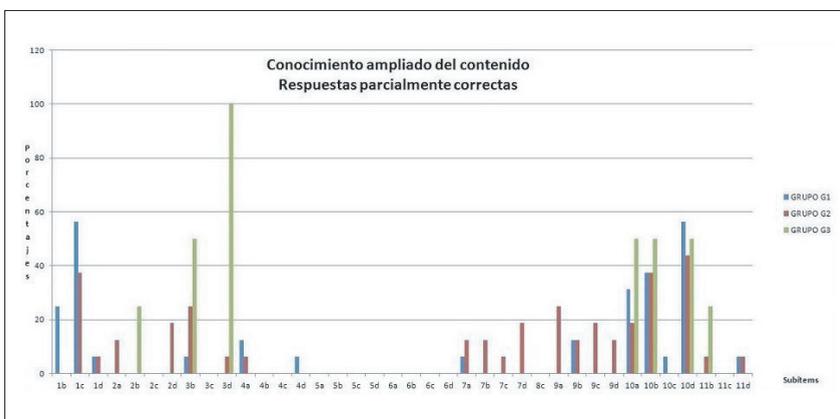


Figura 4.18: Conocimiento Ampliado del Contenido - respuestas parcialmente correctas

9.5.3.5. Análisis del Conocimiento Especializado del Contenido

Este conocimiento según Pino-Fan, Godino & Font (2013a, 2013b), corresponde al conocimiento extra, que distingue al profesor de otros profesionales que no son profesores pero que tienen una preparación afín en matemáticas: se refiere al conocimiento especializado del contenido matemático en cuestión, para el cual es necesario que el profesor tenga en cuenta tanto la diversidad de significados y la diversidad de objetos y procesos que conllevan dichos significados (Vásquez, 2014).

Para evaluar el conocimiento especializado del contenido, se tiene presente la reflexión epistémica de los estudiantes de formación matemáticas sobre los conceptos o propiedades que se ponen en juego en la solución de la situaciones problemáticas planteadas. Para esto, se diseñaron distintas situaciones problemáticas que daban

respuesta a la pregunta ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas utiliza para dar solución al problema planteado?. De acuerdo con Godino (2009), para responder a este tipo de pregunta, los estudiantes de formación matemática (futuros profesores) tienen que identificar los distintos conceptos o propiedades involucrados en la solución de la situación problemática planteada.

En esta dirección, para analizar el conocimiento especializado del contenido sobre el objeto Grupo que poseen los estudiantes de formación matemática, se diseñaron subítems donde se pregunta por los conceptos o propiedades para solucionar una situación problemática y corresponden a los subítems: **1a), 1b), 1c), 1d), 3d), 4a), 4b), 4c), 4d), 5c), 5d), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c), 7d), 8d), 9d), 10b), 10c), 10d)** (55% de las preguntas del cuestionario).

Al igual que con el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido, este conocimiento no se puede observar, pero se pueden utilizar las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes para dar respuesta a las situaciones problemáticas planteadas y obtener de esta forma, algunos indicadores empíricos, que permitieron evaluar el CEC, al igual que el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido (Godino, Batanero & Font (2007); Vásquez, (2014).

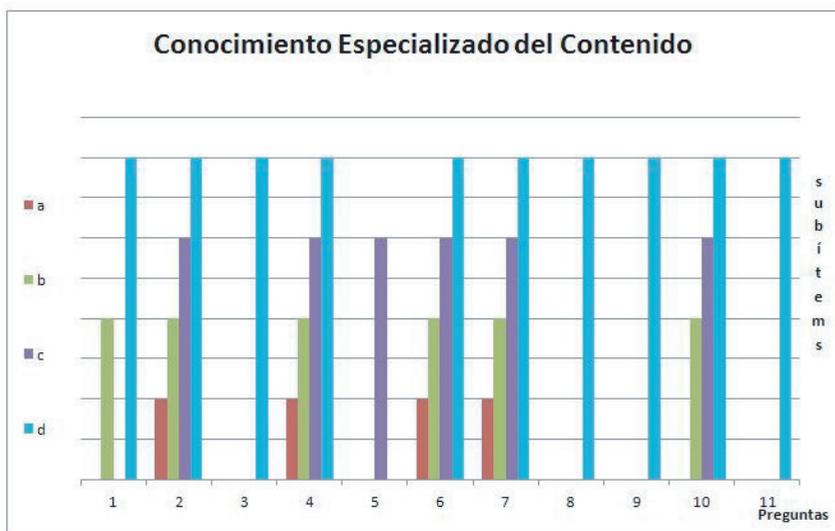


Figura 4.19: Subítems del Conocimiento Especializado del Contenido

En esta dirección, se presenta el análisis de algunos de los subítems, que se relacionan con la categoría de conocimiento especializado del contenido.

Análisis del subítem 10

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6.

Análisis del subítem 10b)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, al determinar un subconjunto que no fuera subgrupo.

Tabla 4.23: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron dificultades para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correctay 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 4.7, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron dificultades para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correctay 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 4.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de las tablas 4.5, 4.7, 4.9 y 4.23 que para los estudiantes la propiedad de ser subconjunto y no ser subgrupo en el grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6, resultó de una dificultad media, por tanto se establece un nivel de dominio medio del conocimiento especializado respecto a la propiedad de ser un subconjunto pero no subgrupo del grupo. Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$.

Análisis del subítem 10c)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido*, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ de los enteros módulo 6 y determinar que el grupo \mathbb{Z}_3 no es un subgrupo del grupo \mathbb{Z}_6 .

Tabla 4.24: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta 1 (6.25 por ciento) lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 4.7, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 4.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes tuvieron grandes dificultades para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4) de los estudiantes que respondieron la pregunta solo 1 (25 por ciento) lo hizo en forma parcialmente correcta.

4.5.3.6. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Especializado del Contenido

Se considera que en general, los tres grupos de estudiantes de formación matemática, presentan *grandes debilidades* en relación con el conocimiento especializado del contenido al igual que con el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido, ya que, presentan un conocimiento deficiente y en algunos casos muy deficiente, de la mayoría de los subítems que permitieron evaluar esta categoría del conocimiento didáctico-matemático, a excepción de los siguientes subítems que se consideran como un conocimiento especializado básico, de los estudiantes de formación matemática, lo que corresponde a un nivel de dominio medio: **Subítem 1a), 1b), 1c) y 1d)**.

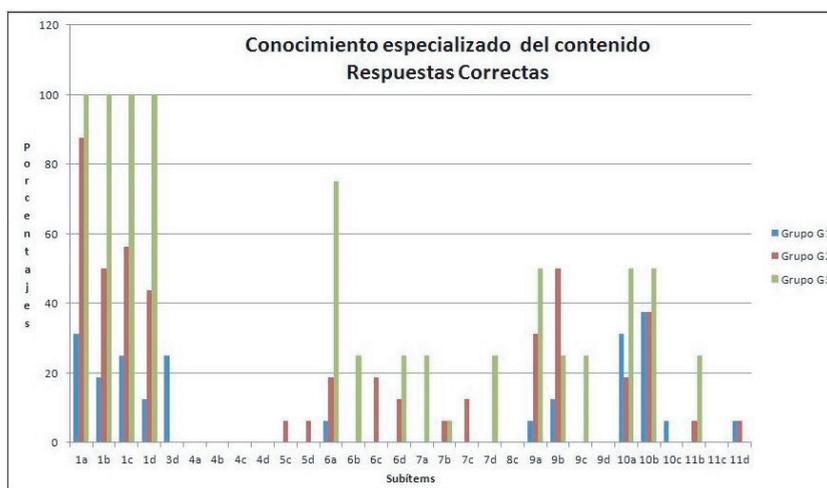


Figura 4.20: Conocimiento Especializado del Contenido - respuestas correctas

En la figura 4.21 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el conocimiento especializado del contenido, que corresponden a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas, en promedio es muy poco y corresponde al 5 por ciento aproximado en general, siendo representativo el subítem 1c) con un 31% y el 3d) con un 35 por ciento aproximado, pero en promedio, con este aporte, la categoría del conocimiento especializado del contenido en los estudiantes de formación matemática no supera el 22 por ciento, aproximado.

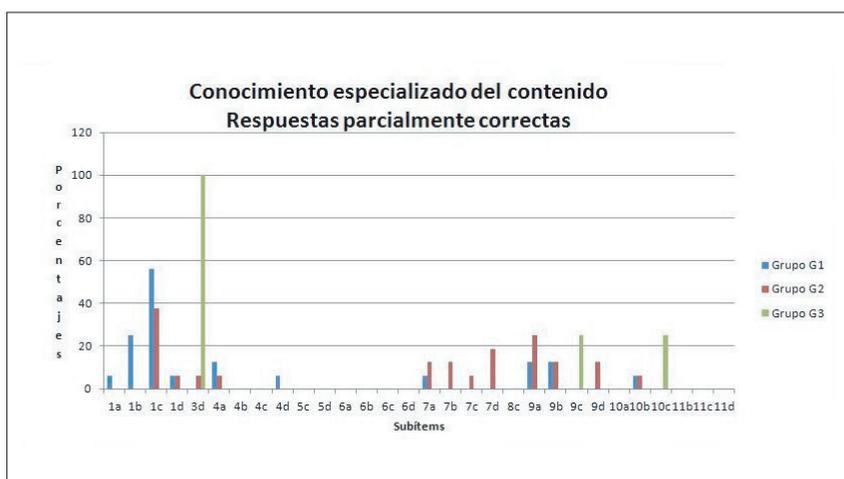


Figura 4.21: Conocimiento Especializado del Contenido - respuestas parcialmente correctas

Como conclusión, se infiere de la figura 4.20 y 4.21 que en el grupo de Licenciatura-G1, las preguntas correctas no superaron el 7.29 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, el porcentaje de respuestas correctas no superó el 16 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de Matemáticas este porcentaje de respuestas correctas no superó el 27 por ciento. En la figura 4.20 se muestran los porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de formación matemática de acuerdo con la variable *grado de corrección* de los subítems que evalúan el conocimiento especializado del contenido. Se observa que para este tipo de conocimiento, predominaron en los tres grupos, las respuestas incorrectas, ya que, en promedio por subítems, las respuestas correctas para el subítem 1a) corresponden al 73% en promedio aproximado; para el subítem 1b) el 56% aproximado; para el 1c) el 60% aproximado y para el subítem 10b) el 42%, pero el promedio general para los tres grupos de estudiantes y según los subítems que evalúan el conocimiento especializado del contenido, las respuestas correctas no superaron el 17.01 por ciento (en esta dirección las preguntas resultaron difíciles según la escala establecida para el índice de dificultad de las preguntas) y en general

las respuestas correctas y las parcialmente correctas no superaron el 22 por ciento aproximado al igual que para la categoría del conocimiento común del contenido y la del conocimiento ampliado del contenido.