Capítulo 3

# Segundo Resultado: Diseño de un instrumento para evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática

## 3.1. Introducción

En el presente estudio se relaciona el conocimiento de los estudiantes de formación matemática (Licenciados y Matemáticos) sobre el objeto Grupo y el conocimiento didáctico-matemático, que se han potenciado y en algunos casos desarrollado en el proceso de formación, para la enseñanza universitaria del objeto matemático. En esta dirección, se describe la fase de diseñó del instrumento que permitió evidenciar el nivel de preparación de los estudiantes de formación matemática, para la enseñanza universitaria en relación con el objeto Grupo; para esto se analizan las categorías del conocimiento común del contenido en relación con el objeto matemático y el conocimiento ampliado del contenido, como bases para la potenciación y desarrollo del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza del objeto matemático. Con el estudio del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de los estudiantes de formación matemática, se posibilita la determinación de criterios y orientaciones para mejorar su formación, como es el caso de la identificación de las dificultades de los estudiantes con el objeto de estudio.

En esta dirección, se describe el proceso para la construcción del instrumento que permitió evaluar el CDM de los estudiantes de formación matemática. En primer lugar, se establecen los objetivos del instrumento *CDM - Grupo;* luego, el proceso de diseño del instrumento: se presenta el análisis de la versión piloto que se aplicó al grupo de estudiantes de formación matemática junto con el juicio de expertos (9) en didáctica del Álgebra y específicamente, en Teoría de Grupos. También, se realiza el análisis a las tareas seleccionadas para la prueba 178 piloto, junto con los análisis cualitativo y cuantitativo de la prueba para llegar finalmente a la versión definitiva del instrumento *CDM - Grupo* cuya aplicación es motivo de análisis en el siguiente capítulo.

### 3.2. Objetivo del instrumento, CDM-Grupo

Las investigaciones que se relacionan con los conocimientos del profesor de matemáticas, parten del hecho que este posee un Conocimiento del Contenido matemático que le permite, desempeñarse en la labor de la enseñanza: esto como un primer requisito, ya que es necesario la potenciación de un complejo de conocimientos en el futuro profesor universitario, para la labor de la docencia. El conocimiento del contenido sobre un objeto matemático, según el modelo del CDM (Godino, 2009) se encuentra integrado por las categorías de: Conocimiento Común del Contenido, en el sentido de Shulman y Conocimiento Ampliado del Contenido, que en este estudio se toman como base para la potenciación o desarrollo del Conocimiento Especializado, necesario para la labor de la enseñanza. En la investigación se analiza como se ha potenciado el conocimiento común, el ampliado y el conocimiento especializado del contenido. Además, se tiene presente que la población de estudio se encuentra integrada por estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) y no por profesores en ejercicio de su profesión. Así, desde este punto de vista, se hacen relevantes las investigaciones que permitan evidenciar y caracterizar los conocimientos de los estudiantes, para la labor de la enseñanza universitaria en tópicos de matemática y específicamente, los relacionados con el objeto Grupo, como en la línea de estudio en formación de docentes.

En esta dirección, se diseñó el instrumento *CDM - Grupo* con el objetivo de "explorar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática": faceta que forma parte de uno de los componentes del CDM en el modelo propuesto por Godino (2009) analizado en el marco teórico. Así, el instrumento se orienta a evaluar aspectos de la faceta epistémica del CDM que incluyen en congruencia con el modelo de Ball y Colaboradores (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) los tres tipos de conocimientos: Conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido. Al respecto, la dimensión epistémica del conocimiento CDM no solo se refiere al conocimiento del contenido matemático que deben poseer los profesores, se relaciona también, con todos aquellos conocimientos que son necesarios para la enseñanza y que el profesor adquiere y aprende en la institución educativa, producto de la instrucción y no de la práctica: en esta dirección se enfoca el presente estudio (Vásquez, 2014).

Con la aplicación del instrumento, se busca obtener datos sobre el CDM de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo; estos datos corresponden a evidencias sobre el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado que poseen los estudiantes desde la aplicación del modelo del Conocimiento Didáctico y Matemático de Godino y Colaboradores (Godino, 2009; Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino & Font 2013a, 2013b; Vásquez, 2014). Así, se busca con el diseño e implementación del instrumento, caracterizar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática en aspectos parciales, debido a la complejidad inmersa en los estudios sobre los componentes del CDM y a la misma complejidad del objeto de estudio.

### 3.3. Construcción del instrumento CDM-Grupo

Para cumplir con los objetivos 5, 6, 7 y 8 planteados en la investigación, los cuales dan respuesta a la pregunta: ¿Cómo diseñar un instrumento que permita evaluar el conocimiento común y el conocimiento ampliado como bases del conocimiento especializado necesario para una enseñanza idónea del objeto Grupo? Se plantearon los siguientes seis (6) pasos en el proceso de diseño y construcción del cuestionario *CDM-Grupo*: 1) estudio de las investigaciones relacionadas con el objeto Grupo; 2) estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo; 3) análisis de libros de texto y programas de estudio; 4) construcción de la versión piloto del instrumento *CDM - GRUPO*; 5) análisis de la aplicación de la versión piloto del instrumento y del juicio de expertos y finalmente, 6) implementación y análisis de la versión final del cuestionario.

El primer paso corresponde a la revisión de las investigaciones sobre el objeto Grupo. En la segunda fase, se determinaron los distintos significados del objeto matemático a través de su evolución histórica; en un tercer paso, se realizó el análisis de los diferentes significados del objeto de investigación que pretenden: por un lado, los libros de texto y por otro los programas de estudio: con esta información se definieron los criterios que permiten abordar la fase cuatro, sobre la construcción e implementación de la versión piloto del instrumento, para continuar con la aplicación y análisis de la prueba piloto y finalizar en este capítulo con la presentación de la versión definitiva del cuestionario.

#### 3.3.1. Criterios para la selección de tareas

Para el diseño de este instrumento que tiene como objetivo: evaluar las categorías del conocimiento CDM de los estudiantes de formación matemática, necesarias para la labor de la enseñanza del objeto Grupo en la Educación Superior; se tomó como referencia el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de Godino (2009), y la metodología que el modelo propone. Dicha metodología incluye dos fases: en primer lugar, la selección de la tarea matemática que lleve al estudiante a poner en juego por medio de la solución a la situación (prácticas matemáticas), los aspectos más relevantes en relación el conocimiento que se pretende evaluar; en segundo lugar, la formulación de ítems y subítems de evaluación o actividades que contemplen los distintos tipos de conocimientos del contenido matemático y didáctico, que se desean evaluar (Vásquez, 2014).

La fase cuatro para el diseño del instrumento *CDM-Grupo* contempló como un primer paso, la creación de un banco de problemas recopilados de las investigaciones que sirvieron como antecedentes para el estudio y el análisis de los cuatro libros de texto. Del banco de problemas (200 preguntas) se seleccionaron las tareas que cumplieran, según el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) presentado en el marco teórico, con tres aspectos definidos para el estudio de la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática:

1) Globalidad del significado del objeto Grupo: este criterio hace referencia a que las tareas deben proporcionar información sobre el significado personal respecto del significado global del objeto Grupo, determinado a partir del estudio histórico del desarrollo del objeto de investigación, hasta la consolidación del significado abstracto del objeto Grupo. Según este criterio, se eligieron las tareas que proporcionaran información respecto al significado del objeto Grupo en los contextos de: *Conjuntos de Permutaciones, Conjuntos* $\mathbf{Z}_n$ *en Aritmética Modular, Teoría de Ecuaciones Algebraicas, Teoría de Galois, Teoría de Matrices y en general, en el contexto de Grupo abstracto*. Así, se tiene que el significado global del objeto Grupo, se relaciona con el contexto de "Grupo Abstracto" y corresponde a: Un conjunto $G$ con una operación $*$ se denomina un grupo si:

   *En el conjunto G la operación* $*$ *cumple las propiedades:* G1. *Asociatividad de la operación* $*$*;* G2. *Existencia en el conjunto de un elemento identidad e tal que para todo elemento del conjunto se cumple que* $g * e = e * g = g$ *y* G3. *Existencia en el conjunto de un elemento denominado inverso a para cada elemento a del conjunto, tal que* $a * \tilde{a} = a * \tilde{a} = e$.

2) Contenido curricular: criterio que hace referencia a que las tareas se deben relacionar con los contenidos principales propuestos en los programas de formación matemática para el objeto Grupo.

3) Tipo de conocimiento del contenido a evaluar: criterio, que hace referencia a que las tareas deben poner en juego ciertos tipos de conocimientos del contenido matemático: un conocimiento común del contenido; un conocimiento ampliado del contenido y tareas que requieran de un conocimiento especializado necesario para la labor de la enseñanza en el ámbito universitario.

Se presenta en la tablas 3.1. los criterios definidos para la selección de las tareas del banco de tareas.

Tabla 3.1: Criterios para la selección de tareas

| Criterio1: Significados del objeto Grupo |
| --- |
| a) Conjunto de Permutaciones.<br>b) Conjuntos $\mathbf{Z}_n$ en Aritmética Modular.<br>c) En Teoría de Ecuaciones Algebraicas: conjuntos de permutaciones que dejen a una función invariante.<br>d) En Teoría de Galois: conjunto de permutaciones asociadas a un polinomio: Grupo de Galois del polinomio.<br>e) EnTeoríadeMatrices:conjuntosdematricesquecumplenciertaspropiedades algebraicas.<br>f) **Grupo Abstracto: un conjunto, con una operación binaria interna, que cumple los axiomas de grupo.** (Significado que se adicionó finalmente). |
| Criterio 2: Contenido curricular de los programas de formación matemática |
| a) Operación Binaria<br>b) Estructuras algebraicas<br>c) Grupo<br>d) Subgrupo<br>e) Orden del grupo, orden del elemento<br>f) Propiedades de los grupos |
| Criterio3: Conocimiento didáctico-matemático: faceta epistémica |
| a) Conocimiento común del contenido: que permite resolver la tarea matemática, propia de la Teoría de Grupos.<br>b) Conocimiento ampliado: que permite generalizar las tareas del conocimiento común o especializado o realizar conexiones con objetos más avanzados del currículo.<br>c) Conocimiento especializado: este conocimiento es el necesario para la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos y corresponde al uso de representaciones, uso de diferentes significados del objeto matemático; aplicación de diferentes procedimientos para resolver un problema; las diversas argumentaciones válidas para un procedimiento; la identificación de los conocimientos puestos en juego para la solución de una tarea matemática (se tiene en cuenta que el estudio se realiza con estudiantes y no con profesores en ejercicio, por esto, se analiza si, este conocimiento se ha podido potenciar a partir del conocimiento común y del ampliado). |

Para la construcción de la versión piloto del instrumento *CDM - GRUPO* se seleccionaron 11 tareas con el objetivo de evaluar la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo. Así, para la construcción del instrumento se consideran los tres criterios descritos: con el primer criterio, se consideró que las tareas debían proporcionar información sobre el grado de ajuste respecto al significado global del objeto matemático, para compararlo con los posibles significados personales de los estudiantes de formación matemática; para esto, se incluyeron ítems que activaran los distintos significados del objeto Grupo correspondientes a: conjunto de raíces de una ecuación polinomial-Teoría de ecuaciones algebraicas, conjunto de permutaciones, grupo de Galois de un polinomio, problemas en aritmética modular con los conjuntos $\mathbf{Z}_n$, Teoría de matrices: conjuntos especiales de matrices; todos ellos hacen referencia a la definición abstracta de Grupo, pero se toman en los diferentes contextos de uso del objeto matemático.

Con el segundo criterio, se pretendía que los ítems seleccionados se relacionaran con los principales contenidos curriculares para el objeto matemático: así, luego de la revisión en el capítulo anterior de los programas para los estudiantes de formación matemática se establecieron los contenidos programáticos relacionados con el objeto Grupo: operación binaria, estructuras algebraicas (semigrupo, monoide y grupo), grupo-ejemplos y contraejemplos, subgrupo, orden del grupo y propiedades de los grupos.

Con el tercer criterio, se tenía el propósito de *categorizar* las tareas según los componentes de la dimensión epistémica, en el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) para la enseñanza del objeto grupo en el marco teórico del enfoque EOS, como marco para el estudio: se consideró la inclusión de tres tipos de tareas con este criterio: (1) tareas que pusieran en juego un conocimiento común (resolver una tarea sobre el objeto grupo); (2) tareas que requirieran de un conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo) y finalmente, (3) tareas que requirieran de un conocimiento especializado necesario para la enseñanza (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática.)

Con estos criterios se seleccionaron las tareas del banco de tareas (200 preguntas) y se eligieron las que cumplieran con los tres criterios, pero luego de hacer los análisis correspondiente y teniendo en cuenta la complejidad que tiene el planteamiento o selección de tareas que cumplieran con los tres criterios simultáneamente, se estableció que las tareas se seleccionaban de tal forma que, dentro del instrumento *CDM-Grupo,* se complementaran y que permitieran al mismo tiempo, llegar a evaluar los criterios propuestos. En esta dirección, se seleccionaron 11 tareas luego de un análisis minucioso a las preguntas respecto a los criterios propuestos y buscando que permitieran evaluar las distintas categorías del conocimiento didáctico-matemático en relación con el objeto Grupo y la faceta epistémica del CDM. En esta dirección, el instrumento se elaboró con el objetivo de explorar ciertos aspectos iniciales de las categorías que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático, por medio del planteamiento de situaciones-problemáticas de enseñanza relacionadas con el objeto matemático, para analizar así las prácticas matemáticas operativas y discursivas de los estudiantes ligadas a sus configuraciones cognitivas.

De esta forma, las preguntas del cuestionario dan respuesta a preguntas como: ¿Existe el elemento identidad en el conjunto, cuál es el inverso de un elemento, se cumple la propiedad de clausura; la asociativa...? hecho que permite evaluar en "cierta medida" un nivel de conocimiento común del contenido relacionado con el objeto Grupo: para medir el conocimiento ampliado, se plantearon preguntas como: ¿A qué otro grupo conocido resulta isomorfo el subgrupo anterior?; defina una operación similar en el conjunto dado; ¿En qué grupo se está trabajando?; determine un conjunto que deje *invariante* el 2 (no se define la propiedad de invariante) y finalmente, se diseñaron o seleccionaron preguntas como: ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas se usan para dar solución al problema?, ¿Qué conceptos de la Teoría de Grupos utilizó para solucionar el ejercicio ...? preguntas que permiten evaluar el conocimiento especializado de los estudiantes de formación matemática, respecto al objeto Grupo.

Como el objetivo de la investigación se encuentra centrado en la evaluación del conocimiento didáctico-matemático que poseen los estudiantes de formación matemática, para la labor de la enseñanza del objeto Grupo, en su dimensión epistémica, se considera necesario precisar nuevamente, que se entiende por "conocimiento": este término se utiliza en la investigación como un constructo epistémico-cognitivo-afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209), en el que la "comprensión" se refiere a las relaciones que se establecen entre los distintos elementos que influyen en el proceso de implementación; ya sea de una configuración epistémica o cognitiva idónea. La "competencia" por su parte, se relaciona con la activación de la configuración cognitiva adecuada e idóneamente acoplada a la configuración epistémica o configuración de referencia, al contexto en el que se desarrolla la práctica. Mientras que la disposición o capacidad, se relacionan con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica (Pino-Fan, 2013, p. 143-144).

### 3.3.2. Selección de tareas para la versión piloto del cuestionario

Considerando los criterios mencionados, se seleccionan las siguientes once (11) tareas:

**TAREA 1.** En el conjunto $(Z,*)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$

a) Existe el elemento identidad? Justifique

a) $*$ define una operación asociativa? Justifique

b) Existe el inverso del elemento 3? Justifique

c) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...,_1,0,1,2,3,...}

**TAREA 2.** Sea (R,∗) el conjunto de los números reales, se define $a * b = 3a + 4b$

a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura? Justifique

b) La operación es asociativa? Justifique

c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique

d) En (R,·) cómo se puede definir una operación en forma similar a la propuesta y que significado tendría según otras asignaturas del programa.

**TAREA3.**Dividaelpolinomio$3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$porelpolinomio$2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(Z_5,+_5)$

a) El cociente corresponde a ? Justifique

b) El residuo corresponde a? Justifique

c) En qué grupo se está trabajando? Justifique

d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

**TAREA 4.** Dado el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números, la función $r : N \to A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto $A_2$ se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además, se define en el conjunto $A_2$ la operación $x \oplus y = r_{(}x + y_{)}$.

a) Solucione $x \oplus 17 = 99$. ¿Qué propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique

b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \oplus)$? Justifique

c) A que grupo es isomorfo $(A_2, \oplus)$? Justifique

d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3? Justifique

**TAREA 5.** Sea el conjunto $(Z_6,+_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6. a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique

a) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo. Justifique

b) Es $Z_3$ subgrupo de $Z_6$? Justifique

c) Elabore la tabla de operación del conjunto.

**TAREA 6.** Sea $D_3$ el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) De un ejemplo de un subgrupo de $D_3$. Justifique

b) A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique

c) Existe un subgrupo de $D_3$ isomorfo a $(Z_4,+4)$? Justifique

d) El grupo $D_3$ es cíclico? Justifique

**TAREA 7.** Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.

b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$. Justifique

c) Qué condición cumple el subgrupo $H$? Justifique

d) Liste los elementos de la clase $bH$. Justifique

**TAREA 8.** Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad $e$. La función $f : G \rightarrow G$ tal que $x \rightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que $f$ es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

**TAREA 9.** Determine el subconjunto de $S_4$ que:

a) Deja invariante el número 2.

b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial? Justifique

c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique

d) Cómo se define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

**TAREA 10.** Sea el grupo $S_4$ definido en los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) = f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que $f$ es invariante.

a) Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que $f$ sea invariante ? Justifique

c) Un polinomio $f$ se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. De un polinomio simétrico? Justifique

d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces $x_1$, $x_2$? Justifique

**TAREA 11.** El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.

a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo? Justifique

c) Es conmutativo el grupo? Justifique

d) A qué otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

### 3.3.3. Revisión del instrumento mediante juicio de expertos

Luego del diseño del instrumento, se somete a un proceso de validación en dos aspectos: "validez del contenido" que se garantiza, primero, a partir de la selección de los contenidos relacionados con el estudio del objeto Grupo (programas de pregrado universitario) y con la selección de los diferentes referentes curriculares involucrados (programas de estudio, libros de texto e investigaciones didácticas) y segundo, con la "contrastación de la validez de los ítems" es decir, se valida el cuestionario para determinar, si realmente mide lo que se pretende medir; para esto se realizaron dos procedimientos: el juicio de expertos y el análisis de los ítems a partir de la aplicación piloto del instrumento (análisis cualitativo y cuantitativo).

#### 3.3.3.1. Análisis del contenido de las tareas

Se presenta el análisis a las tareas de la prueba piloto, iniciando con la opinión de (9) expertos; este juicio de expertos, se contrastó con la experiencia del investigador en tópicos de Teoría de Grupos: este proceso resulto complejo, tanto para los expertos en Álgebra como para el investigador debido a la poca experiencia en la utilización de las herramientas proporcionadas por el enfoque EOS y debido a la complejidad que conlleva la construcción de instrumentos para evaluar las categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático para la enseñanza del objeto Grupo y además la complejidad del mismo objeto. En especial, se encontró gran dificultad con la asignación de las tareas a un posible significado del objeto; ya que, para los expertos era claro que todas las tareas correspondían al contexto de Grupo en su significado abstracto, es decir, definido por unos axiomas o propiedades de grupo y de igual forma para los expertos era claro el Teorema de Cayley, en teoría de grupos, que afirma que: “todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones” es decir, que todo grupo se puede verse como un grupo de Permutaciones. Por esta razón, se transcriben las respuestas de los expertos y se realiza un análisis minucioso de las mismas.

Los criterios establecidos se dieron a conocer a los expertos: (1) Criterio, respecto a que la tarea perteneciera a uno de los significados establecidos para el objeto matemático; (2) Criterio: que la tarea correspondiera a un contenido curricular y (3) Criterio, respecto a que la tarea permitiera evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada, esto es, que la tarea permitiera evidenciar alguna de las categorías definidas en el modelo del conocimiento didáctico-matemático, correspondientes a la dimensión epistémica de este conocimiento (CDM). De igual forma se presentaron a los expertos las tareas con su propósito, según los subítems de cada una. Se establece del juicio de expertos, que en general resultó más sencillo dar respuesta a los criterios 2 y 3 que relacionaban los subítems de la tarea con un determinado conocimiento del contenido según el modelo del Conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del objeto grupo y el criterio 2 respecto a que la tarea y así los subítems se relacionaran con un contenido curricular. En la aplicación del criterio 1, que correspondía a ubicar la tarea en un significado del objeto Grupo o en uno de sus contexto de uso, resultó ser un proceso complejo y para algunos subítems, los investigadores no respondieron nada en cuanto al criterio.

Se presentan las 11 tareas de la prueba piloto con el análisis cualitativo, según los aportes de los expertos en Álgebra Abstracta(9) y del investigador. Las tareas se tomaron de las investigaciones que sirvieron como antecedentes al estudio, pero se modificaron en algunos subítems, ya que estas investigaciones no pretendía analizar los conocimientos didácticos y matemáticos de los estudiantes para la enseñanza del objeto Grupo. Se analiza la tarea según la opinión de los expertos respecto al criterio sobre el significado de grupo y según la escala dada, donde NA-No aplica; NR-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante.

**Análisis del ítem 1**

La tarea 1, se seleccionó de la investigación sobre el “Sentido de la estructura para el álgebra universitaria” (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria.

| |
|---|
| **TAREA 1.** En el conjunto (Z,$*$) de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$ |
| a) Existe el elemento identidad? Justifique |
| a) $*$ define una operación asociativa? Justifique |
| c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique |
| d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...,_1,0,1,2,3,...} |

## Solución a la tarea 1

(1a) ¿Existe el elemento identidad?
Justifique.

$a * e = a$

$a + e - 4 = a$

$e = 4$

(1b) ¿$*$ define una operación asociativa? Justifique.

Si.

$(a * b) * c = (a + b - 4) * c = a + b - 4 + c - 4$

$= a + b + c - 8$

$a * (b * c) = a * (b + c - 4) = a + b + c - 4 - 4$

$= a + b + c - 8$

(1c)¿Existe el inverso del elemento 3? Justifique.

Si. $(3)^{-1} = 5$

$3 * b = 4$

$3 + b - 4 = 4$

$b = 5$

(1d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...-1,0,1,2,3,...}

| * | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 |
| 0 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 |
| 1 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
| 2 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |
| 3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |

| **Criterio1: Significados del objeto Grupo** | **NR (1-5) a)** | **NR (1-5) b)** | **NR (1-5) c)** | **NR (1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | NA | NA | NA | NA |
| Aritmética modular | 2 | 2 | 2 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 3 | 3 | 3 | 3 |

Con la tarea 1 se esperaba evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática que corresponde a: la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática de las propiedades o axiomas del objeto Grupo: propiedad asociativa, de existencia de identidad y de inversos aditivos; además, la comprensión respecto al significado del objeto matemático que se puede ubicar en la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 2, según el juicio de expertos (9) a los subítems ((a),(b),(c) y (d)) de la tarea 1. Sin embargo, en el cuestionario dado a los expertos, no se había definido el significado de Grupo como *Grupo abstracto*, tratando de evitar que la mayoría de los ítems y subítems correspondieran a este significado; luego de un análisis minucioso, se consideró conveniente, relacionar la tarea con este significado y asignarle un nivel de relevancia de 3 en una escala de niveles de relevancia.

| **Criterio2: Contenido Curricular: objeto Grupo** | **NR (1-5) a)** | **NR (1-5) b)** | **NR (1-5) c)** | **NR (1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 2 | 2 | 4 | 5 |
| Estructuras algebraicas (semigrupo, monoide, grupo) | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Grupo, ejemplos y contra ejemplos | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Subgrupo | NA | NA | NA | NA |
| Orden del grupo | NA | NA | NA | NA |
| Propiedad del Grupo | 2 | 2 | 2 | 2 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 1 se relaciona con el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en promedio, al preguntar por las propiedades de la operación incluyendo parte de la tabla de operaciones en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); con el tema de *estructuras algebraicas* en un nivel de relevancia de 5; ya que, se pretende el análisis del conjunto $Z$ con una operación definida en el conjunto; con esta tarea se buscaba que el estudiante realizará un análisis de las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto de los enteros y que según estas propiedades, analizará la estructura algebraica del conjunto en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); corresponde al tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, para determinar si el conjunto con la operación definida alcanza la estructura de grupo; se debe verificar las propiedades que se preguntan, en los subítems ((a),(b) y (c)) y finalmente, se puede ubicar la tarea en el tema de *propiedad de Grupo* ya que, se analizan las propiedades que definen la estructura algebraica de grupo, en los subítmes ((a),(b) y (c)) con un nivel de relevancia de 2.

| **Criterio3: Categorías del CDM: objeto Grupo** | **NR (1-5) a)** | **NR (1-5) b)** | **NR (1-5) c)** | **NR (1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Conocimiento especializado del contenido | 3 | 3 | 3 | 3 |

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según los expertos (9) y el análisis del investigador, la tarea 1 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 2, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) y un conocimiento especializado, con un nivel de relevancia 3 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)). Las preguntas que componen la tarea tenían como propósito evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con el análisis de las propiedades que cumple la nueva operación definida en el conjunto **Z** de los números enteros; propiedades que definen si el conjunto con la operación alcanza la estructura de Grupo, en su significado global. El conocimiento ampliado se relaciona con la determinación de la existencia del elemento identidad y del elemento inverso y el conocimiento especializado se relaciona, con la identificación de las propiedades que cumple un grupo conocido con una operación definida que no es la suma tradicional.

**Análisis del ítem 2**

La tarea 2, es una pregunta que se organizó según los problemas propuestos en la investigación: el Sentido de la estructura para el álgebra universitaria (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria. En esta pregunta, el sentido de la estructura se relaciona con la comprensión del estudiante de la propiedad asociativa en el conjunto de los números reales, cuando se define una nueva operación.

**TAREA 2.** Sea $(R,\bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a \quad b = 3a + 4b$

a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura? Justifique

b) La operación es asociativa? Justifique

c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique

d) En $(R,\bullet)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta, y que significado tendría según otras asignaturas del programa?

## Solución a la tarea 2

(a) ¿La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura? Justifique

Sí, porque como $a \bullet b = 3a + 4b \in \mathbf{R}$ ya que $a,b \in \mathbf{R}$

(b) ¿La operación es asociativa? Justifique No, porque:

$(a \bullet b) \bullet c = (3a + 4b) \bullet c = 3(3a + 4b) + 4c$

$= 9a + 12b + 4c$

$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (3b + 4c) = 3a + 4(3b + 4c)$

$= 3a + 12b + 16c$

(c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique

No, porque: Si $a \bullet b = a$ entonces,

$3a + 4b = a$

$b = \frac{-1a}{2}$

Es decir, no existe el elemento identidad ya que este debe ser único para todos los elementos.

Por tanto, no puede existir el elemento inverso de ningún número en el conjunto dado.

(d) ¿En $(R^2, \bullet)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta y qué significado tendría según otras asignaturas del programa?

Ejemplo:

$(x1, y1) \bullet (x2, y2) = (3x1y1, 4x2y2)$

Podrían definirse muchas operaciones en el conjunto $R^2$.

Con esta pregunta se busca que el estudiante relacione el subítem con conceptos de álgebra lineal o con otra asignatura del programa.

Se analiza ahora la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos.

| **Criterio1: significados del objeto Grupo** | **NR (1-5) a)** | **NR (1-5) b)** | **NR (1-5) c)** | **NR (1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | NA | NA | NA | NA |
| Aritmética modular | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 3 | 3 | 3 | 3 |

La tarea 2, al igual que la anterior, busca evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada, correspondiente a la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática de las propiedades o axiomas que cumple el conjunto $R$ de los números reales, con una operación definida diferente a la usual (suma): propiedad de clausura, asociativa, existencia de identidad y de inversos aditivos en los subítems ((a),(b) y (c)); además, se busca evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático correspondiente a la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 2 según el juicio de los expertos (9); sin embargo, en el cuestionario de expertos, no se definió el significado de Grupo como *Grupo abstracto*, tratando de evitar que la mayoría de los ítems tomaran ese significado del objeto. Se decide, luego de un análisis minucioso, relacionar esta tarea con el significado mencionado y asignarle un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a),(b) y (c)); es decir, la tarea tiene un mayor nivel de complejidad respecto de la tarea anterior.

| **Criterio2:contenidocurricular: objeto Grupo** | **NR (1-5) a)** | **NR (1-5) b)** | **NR (1-5) c)** | **NR (1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Estructuras algebraicas | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Grupo, ejemplos y contra ejemplos | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Subgrupo | NA | NA | NA | NA |
| Orden del grupo | NA | NA | NA | NA |
| Propiedad de Grupo | 4 | 4 | 4 | 4 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 2, se relaciona con el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 5 en promedio para los subítems ((a),(b) y (c)); al tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 5 en los subítems ((a),(b) y (c)); ya que, en el tema se analizan las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto dado; finalmente, se relaciona con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, para determinar si el conjunto ($R$,•) con la operación definida alcanza la estructura de grupo se deben verificar las propiedades de los subítems(a),(b) y (c).

| **Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo** | **NR (1-5) a)** | **NR (1-5) b)** | **NR (1-5) c)** | **NR (1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 5 | 5 | 5 | 4 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Conocimiento especializado del contenido | 2 | 2 | 2 | 2 |

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico - matemático (CDM) que se buscan evidenciar con la tarea y según el criterio de los expertos (9) y del investigador: la tarea 2, permite evidenciar un conocimiento común del contenido con un nivel de relevancia en promedio de 4 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 2 respecto a la comprobación de la propiedad de clausura, asociativa y a la existencia de un elemento inverso en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 2 relacionada con la definición de una operación similar, pero en otro conjunto dado en el subítem (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con la verificación de las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto $(R, \bullet)$ y de evidenciar un conocimiento especializado para definir una operación en el conjunto $R^2$, esto es, una operación con elementos que son parejas.

**Análisis del ítem 3**

La tarea 3, es una pregunta que se seleccionó también, de la investigación sobre el Sentido de la estructura para el álgebra universitaria (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria. En la investigación, la pregunta se relaciona con el sentido de la estructura al aplicar los conocimientos de identidad e inverso en el conjunto $(Z_p, +_p)$ cuando se dividen dos polinomios con coeficientes en Z.

| |
|---|
| **TAREA 3.** Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(Z_5,+_5)$<br>a) El cociente corresponde a ? Justifique<br>b) El residuo corresponde a? Justifique<br>c) En que grupo se esta trabajando? Justifique<br>d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores? |

**Solución a la tarea 3**

| |
|---|
| (a) ¿El cociente corresponde a? Justifique<br>$q = 4x^2 + x + 4$<br>La justificación corresponde a realizar la división en forma tabular. |
| (b) ¿El residuo corresponde a? Justifique<br>$r = x^2 + 2x + 2$<br>La justificación se toma del punto anterior. |
| (c) ¿En qué grupo se esta trabajando? Justifique<br>En el grupo de los polinomios $Z_5[x]$ |

(d) ¿Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

Posibles respuestas:

Operaciones en el grupo $(Z_5,+_5)$ para los coeficientes.

Elemento identidad e inverso en el conjunto $(Z_5,+_5)$ Operaciones con exponentes.

Se analiza la tarea respecto a los criterios de selección y según la opinión de los expertos.

| **Criterio1: significados del objeto Grupo** | **N.R.(1-5)a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | NA | NA | NA | NA |
| Aritmética modular | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 5 | 5 | 5 | 5 |

Con la tarea 3, se espera evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática en cuanto a las operaciones en el conjunto $(Z_5,+_5)$ y en el conjunto $(Z_5[x],+_5)$ y se relaciona con la configuración de: *Problemas en aritmética modular*; con un nivel de relevancia de 5, según el juicio de expertos (9) y del investigador para los subítems ((a),(b) y (c)); la tarea además, busca evidenciar la comprensión del estudiante respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* al identificar el grupo donde se realiza la práctica matemática; el nivel de relevancia asignado es de 5 y con ésta tarea, se busca también aumentar el nivel de complejidad al relacionar dos grupos distintos: $(Z_5,+_5)$ y el grupo $(Z_5[x],+_5)$ en el subítem (c).

| **Criterio2:contenidoCurricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Estructuras algebraicas | 3 | 3 | 5 | 5 |
| Grupo, ejemplos y contra ejemplos | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Subgrupo | NA | NA | NA | NA |
| Orden del grupo | NA | NA | NA | NA |
| Propiedad de Grupo | 5 | 5 | 5 | 5 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 3 se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a) y (b)); en el tema de *estructuras algebraicas,* con un nivel de relevancia de 4 en promedio al analizar las propiedades que cumplen las operaciones definidas en los conjuntos dados, para los subítems ((a),(b),(c)y(d)) y al tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 5; ya que, se trabaja con dos grupos distintos, en los subítems ((a),(b) y (c)) y corresponde a *propiedades de Grupo*; ya que, al realizar las operaciones requeridas se verifican las propiedades de identidad e inverso: propiedades que definen al objeto matemático Grupo, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 5.

| **Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Conocimiento especializado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según los expertos (9) y el investigador, la tarea 3, permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems ((a),(b)); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems ((c) y (d)). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con las operaciones en aritmética módulo 5, en el conjunto $(Z_5[x],+_5)$ de los polinomios con coeficientes en el grupo $(Z_5,+_5)$; un conocimiento ampliado respecto al conjunto de polinomios y un conocimiento especializado, que permite reconocer el grupo de trabajo y las propiedades que se utilizan para solucionar la situación planteada.

**Análisis del ítem 4**

La tarea 4, corresponde a una pregunta que se seleccionó de la investigación de Stehlíkova (2004) sobre un proyecto matemático en aritmética, en el cual se iniciaba con la definición del conjunto de los $z-$*números* y luego, se proponían operaciones en él, se establecen proposiciones y teoremas que se cumplen en el conjunto, para finalmente, concluir que la descomposición en el conjunto de los enteros, creada por la función de reducción es idéntica a la descomposición creada por la factorización $Z/99Z$ además, se establecen los isomorfismos correspondientes.

**TAREA 4.** Dado el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números, la función $r : \mathrm{N} \rightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto $A_2$ se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además se define en el conjunto $A_2$ la operación $x \oplus y = r(x + y)$.

a) Solucione $x \oplus 17 = 99$, que propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique

b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \oplus)$? Justifique

c) A que grupo es isomorfo $(A_2, \oplus)$ ? Justifique

d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3? Justifique

**Solución a la tarea 4**

| |
|---|
| (a) Solucione $x \oplus 17 = 99$ ¿qué propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique<br>x=82, porque $x \oplus 17 = r(x+17) = r(82+17) = r(99) = 99$ |
| (b) ¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\oplus)$? Justifique<br>Sea $a \oplus e = a$<br>r(a+e)=r(a) entonces $e = 0$, pero 0 no pertenece al conjunto $A_2$ Entonces e=99 |
| (c) ¿A qué grupo es isomorfo $(A_2,\oplus)$ ? Justifique<br>$(A_2,\oplus) \cong (Z_{99},+_{99})$<br>Para la justificación es suficiente con definir la función biyectiva, que establece el isomorfismo.<br>$f : a \rightarrow amod99$ |
| (d) ¿Cuáles $z\_$ números son divisibles por 3? Justifique<br>Los que pertenecen a la clase del 3={3,6,9,12,...,99}=3M<br>Porque, $r(3m) = 3r(m)$ |

Se presenta la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos.

| Criterio1: significados del objeto Grupo | NR(1-5) a) | NR(1-5) b) | NR(1-5) c) | NR(1-5) d) |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | NA | NA | NA | NA |
| Aritmética modular | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 4 | 4 | 4 | 4 |

La tarea 4, buscaba evidenciar el conocimiento matemático, necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las operaciones en aritmética modular; para el caso de las operaciones en el conjunto $(Z_{99},+_{99})$ y se puede ubicar en la configuración de *problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)), según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea además, pretende evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *solución de ecuaciones algebraicas,* al solucionar la ecuación planteada en el conjunto $(Z_{99},+_{99})$ que se presenta en una forma distinta sin una definición rigurosa de la operación establecida en el subítem (a); el nivel de relevancia asignado corresponde a 5; además, la tarea explora el significado del objeto en la configuración de *Grupo abstracto,* al trabajar con las propiedades que cumple un conjunto para definir la estructura de grupo; el nivel de relevancia asignado es de 4 en los subítems ((a),(b) y (c)): en esta tarea, se aumenta el nivel de complejidad al presentar un grupo no conocido pero isomorfo a uno conocido $(Z_{99},+_{99})$; para esto, el estudiante debe tener una comprensión de las operaciones en aritmética modular.

| **Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Estructuras algebraicas | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Grupo, ejemplos y contraejemplos | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Subgrupo | NA | NA | NA | NA |
| Orden del grupo | NA | NA | NA | NA |
| Propiedad del Grupo | 5 | 5 | 5 | 5 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 4, se puede ubicar en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(b),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se analizan las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto $(A_2,\oplus)$ con una operación definida; en el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* en el subítem (c)) con un nivel de relevancia de 5, ya que, en la tarea se pregunta por una de las propiedades que definen al grupo y por un grupo isomorfo al grupo dado; corresponde, también, al tema de *propiedades de Grupo* ya que se pregunta por la propiedad de identidad que es una de las propiedades que determinan si un conjunto con la operación definida alcanza la estructura de Grupo y además, se pregunta por un grupo isomorfo al dado, junto con la propiedad de divisibilidad en el grupo en los subítems (a),(b) y (c); el nivel de relevancia asignado es de 5.

| Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo | NR(1-5) a) | NR(1-5) b) | NR(1-5) c) | NR(1-5) d) |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Conocimiento especializado del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar y según el criterio de los expertos (9) y del investigador, esta tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3, en los subítems (b) y (c); un conocimiento ampliado del contenido en los subítems (a),(b),(c)y(d) con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común, en relación con la identificación del elemento identidad en el conjunto $(A_2, \oplus)$ y a la identificación de un grupo isomorfo a este; se busca evidenciar el conocimiento ampliado y especializado que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con las operaciones en aritmética modular, presentadas en una forma distinta; el conocimiento ampliado respecto a establecer un isomorfismo con otro grupo conocido y un conocimiento especializado al identificar las propiedades que se aplican en la solución de una ecuación y al definir en el conjunto $(A_2, \oplus)$ la propiedad de divisibilidad por 3.

**Análisis del ítem 5**

La tarea 5, se seleccionó de la investigación de Dubinsky et al. (1994) la cual tenía el objetivo de mirar los tipos de comprensión en Álgebra abstracta (Teoría de Grupos), que habían adquirido los estudiantes y los resultados de la investigación estaban dirigidos a implementar un método de enseñanza.

| |
|---|
| **TAREA 5.**Sea el conjunto $(Z_6,+_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6. |
| a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique |
| a) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo? Justifique |
| b) Es $Z_3$ subgrupo de $Z_6$? Justifique |
| c) Elabore la tabla de operación del conjunto? |

**Solución a la tarea 5**

| |
|---|
| (a) ¿Dé un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique<br>H={0,2,4}<br>(i) Si $a,b \in H$ entonces $a+b \in H$: 0+2=2+0=2;<br>2+4=4+2=0; 4+4=2; 2+2=4<br>(ii) Si $a \in H$ entonces $-a \in H$:<br>-0=0;<br>-2=4;<br>-4=2 |
| (b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo. Justifique<br>T={0,1,3} por ejemplo, donde no se cumple la clausura, ni la propiedad de inversos. |
| (c) ¿Es $Z_3$ subgrupo de $Z_6$? Justifique<br>No, porque son grupos no isomorfos. |
| (d) Elabore la tabla de operación del conjunto. |

| +6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos.

| **Criterio 1: significados del objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | NA | NA | NA | NA |
| Aritmética modular | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 3 | 3 | 3 | 3 |

La tarea 5, busca evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática en aritmética modular y corresponde a la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 5, en el subítems (d) según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea busca también, evidenciar la comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3 al preguntar por los subgrupos del grupo ($Z_6$,$+_6$) en los subítems (a),(b),(c) y (d); así, la tarea busca evidenciar la comprensión respecto a los criterios que se establecen para que un subconjunto sea un subgrupo.

| **Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Estructuras algebraicas | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Grupo, ejemplos y contraejemplos | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Subgrupo | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Orden del grupo | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Propiedad de Grupo | NA | NA | NA | NA |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 5, se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se pregunta por las propiedades que cumple la operación definida en un subconjunto del grupo ($Z_6$,$+_6$) para que sea un subgrupo y finalmente, en el tema de *Subgrupo* por las razones anteriores en los subítems (a),(b) y (c) y el nivel de relevancia asignado es de 5.

| **Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Conocimiento especializado del contenido | 3 | 3 | 3 | 3 |

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según los expertos (9) y el investigador, la tarea 5 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); un conocimiento ampliado del contenido en los subítems (b) y (c) con un nivel de relevancia de 2 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 3 en los subítems (b) y (c). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con las operaciones en aritmética módulo 6; el conocimiento ampliado respecto a la identificación de subgrupos del grupo ($Z_6$,$+_6$) y un conocimiento especializado al identificar las clases de equivalencia en cada uno de los grupos dados y al describir un subconjunto que no es subgrupo dando la justificación correcta.

**Análisis del ítem 6**

La tarea 5, se seleccionó de la investigación de Dubinsky et al. (1994) la cual tenía el objetivo de mirar los tipos de comprensión en Álgebra abstracta (Teoría de Grupos) que habían adquirido los estudiantes y los resultados de la investigación estaban dirigidos a implementar un método de enseñanza.

| |
|---|
| **TAREA 6.** Sea $D_3$ el conjunto de simetrías del triángulo equilátero. |
| a) ¿Dé un ejemplo de un subgrupo de $D_3$? Justifique |
| b) ¿A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique |
| c) ¿Existe un subgrupo de $D_3$ isomorfo a $(Z_4,+_4)$ ? Justifique |
| d) ¿El grupo $D_3$ es cíclico ? Justifique |

**Solución a la tarea 6**

| |
|---|
| (a) ¿Dé un ejemplo de un subgrupo de $D_3$? Justifique<br>$H1 = \{R_0,R_{120},R2_{40}\}$<br>$H_2 = \langle R_i\rangle$ para $i = 0,120,240$<br>$H_3 = \langle d_i\rangle$ para $d_i$ = reflexión por el vértice 1,2 o 3<br>En este punto, el estudiante puede construir muchos ejemplos de subgrupos. |
| (b) ¿A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique<br>Por ejemplo $H_1 \cong Z_3$<br>Para $H_2$ y $H_3$ los puede hacer isomorfos a subgrupos del grupo $S_3$ de permutaciones con tres elementos, o analizar los isomorfismos con el grupo $Z_n$ según el caso.<br>$H_3 \cong Z_2$ son subgrupos de orden 2. |
| (c) ¿Existe un subgrupo de $D_3$ isomorfo a $(Z_4,+_4)$ ? Justifique<br>No. Porque, el orden del subgrupo debe dividir al orden del grupo y 4 no divide a 6. |
| (d) ¿El grupo $D_3$ es cíclico? Justifique<br>No, no existe ningún elemento de orden 6. Se puede también hacer los generados y llegar al mismo resultado. |

Se analiza la tarea respecto a los criterios de selección y según la opinión de los expertos.

| **Criterio1: significados del objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Aritmética modular | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 3 | 3 | 3 | 3 |

La tarea 6, busca evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las operaciones en el grupo de simetrías de los polígonos regulares; específicamente, en el grupo de simetrías del triángulo equilátero $(D_3,\circ)$ que es isomorfo a un subgrupo del grupo $(S_3,\circ)$ y por tanto, se puede ubicar en la configuración de: *Conjunto de Permutaciones* con un nivel de relevancia de 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d) según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea, busca también evidenciar la comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* al preguntar por grupos isomorfos a subgrupos del grupo $D_3$ en los subítems (b) y (c) y con un nivel de relevancia de 3.

| **Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Estructuras algebraicas | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Grupo, ejemplos y contraejemplos | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Subgrupo | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Orden del grupo | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Propiedad del Grupo | 5 | 5 | 5 | 5 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 6 se ubica en el tema de *operación binaria*, con un nivel de relevancia de 2, en los subítems (a),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a), b),(c) y (d); ya que, se indaga por los subgrupos del conjunto $D_3$; al tema de *Grupo* al preguntar por los grupos a los cuales son isomorfos los subgrupos del conjunto, en los subítems (a),(b) y (c), con un nivel de relevancia de 4 y específicamente, corresponde al tema de *Subgrupo* en los subítems (a),(b) y (c) con un nivel de relevancia de 5 y corresponde al tema de: *orden del Grupo* al preguntar si existe un subgrupo de orden 4 que sea isomorfo al grupo $(Z_4,+_4)$ en el grupo $D_3$ (pregunta (c)) con un nivel de relevancia de 3 y finalmente, la tarea corresponde al tema de *propiedad del grupo* al preguntar si el grupo $D_3$ es un grupo cíclico en el subítem (d) con un nivel de relevancia de 5.

| Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo | NR(1-5) a) | NR(1-5) b) | NR(1-5) c) | NR(1-5) d) |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Conocimiento especializado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según el juicio de los expertos, la tarea 6, permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems ((b),(c) y (d))con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (b),(c) y (d). Las preguntas que componen esta tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con la determinación de los elementos que forman un grupo de simetrías para determinar de allí un subgrupo. Para este caso, se trabaja con el grupo de simetrías del triángulo equilátero y se pretende identificar algunos subgrupos de este grupo; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de grupos isomorfos a un subgrupo dado y a la propiedad de ser grupo cíclico y un conocimiento especializado al preguntar por un grupo isomorfo al dado; la existencia de un subgrupo con 4 elementos en el grupo $D_3$ y la propiedad de ser grupo cíclico.

**Análisis del ítem 7**

La tarea 7, se construyó a partir de la investigación de Hazzan (1999), sobre el grupo cociente. Para ésta tarea se cambio el grupo. La investigación tenía el objetivo de estudiar los niveles de abstracción en Álgebra Abstracta.

**TAREA 7.** Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.

b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$? Justifique

c) Qué condición cumple el subgrupo $H$ ? Justifique

d) Liste los elementos de la clase $bH$ ? Justifique

**Solución a la tarea 7**

(a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.

| • | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |

(b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$. Justifique

$H = \langle a \rangle = \{a,e\}$

$G/H = \{Ha, Hb\}$

$G = \{e, a, b, c\}$ $Ha = \{a, e\} = H = He$ $Hb = \{c, b\} = Hc$

(c) ¿Qué condición cumple el subgrupo $H$? Justifique

$H$ debe ser un subgrupo normal para obtener el grupo cociente; esto es

$Hg = gH$ para todo elemento del conjunto.

(d) Liste los elementos de la clase $bH$. Justifique

$bH = b\{a,e\} = \{ba,be\} = \{c,b\}$

Se analiza la tarea, respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos.

| **Criterio1: significados del objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | NA | NA | NA | NA |
| Aritmética modular | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 3 | 3 | 3 | 3 |

La tarea 7, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a: la comprensión del estudiante de formación matemática en cuanto a la estructura de grupo cociente con la identificación de clases laterales y de operaciones en estas clases; la tarea corresponde a la configuración de: *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3, en los subítems (a),(b),(c) y (d).

| Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo | NR(1-5) a) | NR(1-5) b) | NR(1-5) c) | NR(1-5) d) |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Estructuras algebraicas | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Grupo, ejemplos y contra ejemplos | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Subgrupo | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Orden del grupo | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Propiedad del Grupo | 4 | 4 | 4 | 4 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 7, se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se pregunta por el grupo cociente y sus elementos que corresponden a clases laterales; la condición del subgrupo en el grupo cociente (la normalidad del subgrupo); al tema *Grupo;* ya que, se busca la construcción de otro grupo en el subítem (b) y el nivel de relevancia es de 5; al tema de *subgrupo* con la pregunta de la condición que cumple el subgrupo para realizar un grupo cociente, en el subítem (c) con un nivel de relevancia de 4; al tema *orden del grupo* al realizar la tabla de operaciones en este grupo V-4 de Klein (a) con un nivel de relevancia de 3 y finalmente, al tema de *propiedad del grupo* con la pregunta sobre la condición del subgrupo para formar el nuevo grupo denominado el grupo cociente, en el subítem (c) y el nivel de relevancia es de 4.

| Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo | NR(1-5) a) | NR(1-5) b) | NR(1-5) c) | NR(1-5) d) |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Conocimiento especializado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar; según el juicio de los expertos y del investigador, la tarea 7 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia de 5 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems (c) y (d). Las preguntas que componen esta tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con la elaboración de la tabla de operación de los elementos del grupo; un conocimiento ampliado respecto a la construcción de un nuevo grupo denominado "grupo cociente", la descripción de la condición necesaria para la construcción del grupo cociente y la construcción de clases laterales y un conocimiento especializado con la construcción del grupo cociente y la identificación de la condición que cumple el subgrupo (ser subgrupo normal) para llegar al grupo cociente y de igual forma, con la construcción de clases laterales.

**Análisis del ítem 8**

La tarea 8, se seleccionó de un conjunto de pruebas elaboradas en el departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Colombia (2014) para una prueba de *eficiencias 1*, de los estudiantes de matemáticas con conceptos relacionados con Teoría de Grupos. La pregunta se modificó ya que la prueba no pretendía medir los conocimientos didácticos y matemáticos de los estudiantes de matemática.

**TAREA 8.** Sea $(G,\bullet)$ un grupo con elemento identidad $e$. La función $f: G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que $f$ es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

**Solución a la tarea 8**

(a) El grupo es Abeliano.

Falso, porque:

Si el grupo es abeliano $f(xy) = a(xy)a^2 = (ax)(ay)a = xya^3$

$f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xya^6$

(b) $a = e$ y el grupo es abeliano:

Verdadero, porque:

$f(xy) = axya^2 = xy$

$f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xy$

Si el grupo no es abeliano también se cumple.

(c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

Verdadero, porque:

$f(xy) = a(xy)a^2 = axya = (ax)(ay) = f(x)f(y)$

$f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = (axa)(aya) = axaya = axay = f(x)f(y)$

(d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

Verdadero, porque: $f(xy) = axya^2 = xy$

$f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xya^6 = xy$

Se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según los expertos.

| **Criterio 1: significados del objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | NA | NA | NA | NA |
| Aritmética modular | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 5 | 5 | 5 | 5 |

La tarea 8, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las propiedades que se preservan en el grupo bajo homomorfismos, en los subítems (a),(b),(c) y (d) y corresponde a la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 5.

| **Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | NA | NA | NA | NA |
| Estructuras algebraicas | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Grupo, ejemplos y contra ejemplos | NA | NA | NA | NA |
| Subgrupo | NA | NA | NA | NA |
| Orden del grupo | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Propiedad del Grupo | 5 | 5 | 5 | 5 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 8 se ubica en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(c) y (d); ya que, se debe analizar la propiedad de ser grupo conmutativo; al tema de *orden del grupo* pero, específicamente, con el orden de los elementos del grupo, en los subítems (c) y (d) y con un nivel de relevancia de 2; al tema de *propiedad del grupo* con la pregunta sobre la identidad y el orden de los elementos, con un nivel de relevancia de 5 y también, en esta tarea se pregunta por la propiedad del grupo de ser abeliano, en los subítems (a),(c) y (d).

| Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo | NR(1-5) a) | NR(1-5) b) | NR(1-5) c) | NR(1-5) d) |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Conocimiento especializado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar con la tarea 8, según el juicio de los expertos y del investigador, la tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (a),(b),(c) y (d) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación a la preservación de propiedades del grupo por homomorfismos; un conocimiento ampliado respecto a las propiedades que se preservan por homomorfismo y a la identificación del homomorfismo como tal y finalmente, un conocimiento especializado con la verificación del homomorfismo y las propiedades que se preservan por éstos homomorfismos.

**Análisis del ítem 9**

La tarea 9, se seleccionó del curso de Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) en el capítulo 9, sobre Grupos y aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta se modificó según los aportes de los expertos en Álgebra y se adaptó para el estudio de las categorías del conocimiento didáctico matemático.

**TAREA 9.** Determine el subconjunto de $S_4$ que:

a) Deja invariante el número 2.

b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique

c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique

d) Como define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

**Solución a la tarea 9**

| |
|---|
| (a) Deja invariante el número 2.<br>$H = \{(1),(13),(14),(134),(43),(143)\}$ |
| (b) El subconjunto anterior es un subgrupo. ¿Tiene algún nombre especial? Justifique Sí, porque:<br>$(13)(13) = (1)$ (clausura) y además:<br>$(1)^{-1} = (1)$<br>$(13)^{-1} = (13)$ por ser un ciclo de orden 2.<br>$(14)^{-1} = (14)$ por ser un ciclo de orden 2.<br>$(134)^{-1} = (143)$ elemento de orden 3.<br>$(143)^{-1} = (134)$ elemento de orden 3.<br>No. No es isomorfo a $\mathbf{Z}_6$. |
| (c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. ¿Tiene algún nombre especial? Justifique<br>$H = \{(1),(13)\}$<br>$\{(13)(13) = (1)\}$ (clausura) y además:<br>$(1)^{-1} = (1)$<br>$(13)^{-1} = (13)$ por ser un ciclo de orden 2.<br>$(14)^{-1} = (14)$ por ser un ciclo de orden 2.<br>Se puede decir que es un subgrupo de orden 2, cíclico y que por tanto, isomorfo a $\mathbf{Z}_2$ |
| (d) ¿Cómo define en este ejercicio la propiedad de ser invariante? Exprésela mediante una fórmula y Justifique.<br>Ejemplo:<br>La normalidad: $Hg = gH$ para todo $g$ elemento del grupo.<br>Con esta pregunta se quería llegar a que si se cumple que:<br>$\alpha\ f\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) := f\ (x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},\ldots,x_{\alpha(n)})$ para toda permutación $\alpha \in S_n$ entonces $f$ es un invariante del grupo finito $S_n$. Para este grupo, los polinomios simétricos corresponden a los elementos invariantes. |

Se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y el criterio de los expertos.

| **Criterio 1: significados del objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Aritmética modular | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 3 | 3 | 3 | 3 |

La tarea 9, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática del grupo de permutaciones con cuatro elementos y a la propiedad de ser un invariante de un grupo finito; por tanto, se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* en los subítems (a),(b),(c) con un nivel de relevancia de 5; ya que, en toda la tarea se pregunta por las propiedades que se definen en este conjunto; también, corresponde a la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3 al definir propiedades de los subgrupos del grupo $S_4$ en los subítems (a),(b) y (c).

| **Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | NA | NA | NA | NA |
| Estructuras algebraicas | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Grupo, ejemplos y contra ejemplos | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Subgrupo | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Orden del grupo | NA | NA | NA | NA |
| Propiedad del Grupo | 4 | 4 | 4 | 4 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 9 corresponde al tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(b) y (c); ya que, se debe analizar la propiedad de ser subgrupo, es decir, las propiedades de grupo; al tema *grupo, ejemplos y contraejemplos* ya que la tarea se relaciona con las propiedades de un grupo específico: el grupo $S_4$ de permutaciones de cuatro elementos y el nivel de relevancia asignado es de 4, en el subítem (b); al tema de *subgrupo*; ya que, se pregunta si un subconjunto define un subgrupo y con un nivel de relevancia de 4 en el subítem (b); finalmente se ubica en el tema de *propiedad del grupo;* ya que, se define una propiedad y se pregunta si con esa propiedad el conjunto es un subgrupo, en el subítem (b) y el nivel de relevancia asignado es de 4.

| **Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Conocimiento especializado del contenido | 2 | 2 | 2 | 2 |

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según el juicio de los expertos y del investigador, la tarea 9 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (b),(c) y

(d) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 2 en el subítem (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con el análisis de la propiedad que permite determinar algunos de los subgrupos del grupo $S_4$: una tarea común en Teoría de Grupos que se relaciona con determinar los subgrupos del grupo; ésta tarea permite evidenciar un conocimiento ampliado respecto a la determinación de propiedades en el subconjunto que lo lleven a ser un subgrupo y con la definición de la propiedad de ser un invariante de un grupo finito. Finalmente, la tarea permite evidenciar un conocimiento especializado, al pretender que el estudiante en forma intuitiva construya la definición de la propiedad de ser un invariante de un grupo finito.

**Análisis del ítem 10**

La tarea 10, complementa la tarea 9 y se seleccionó del curso Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) en el capítulo 9, sobre Grupos; aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta se modificó según los aportes de los expertos en Álgebra y se adaptó para medir las categorías del conocimiento didáctico matemático y el contexto de significado de la Teoría de Galois.

**TAREA 10.** Sea el grupo $S_4$ definido en los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que $f$ es invariante.

a) Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que $f$ sea invariante? Justifique

c) Un polinomio $f$ se llama simétrico si para toda permutación $\alpha$ se cumple que $\alpha f = f$

De un polinomio simétrico ? Justifique

d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces $x_1$, $x_2$? Justifique

**Solución a la tarea 10**

(a) ¿Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique No. Porque, existe $\alpha = (13) \in S_4$ tal que:

$\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$

$= f(x_3,x_2,x_1,x_4) = x_3x_2 + x_1x_4 \neq x_1x_2 + x_3x_4 = f$

| |
|---|
| (b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que $f$ sea invariante. Justifique $\alpha = (1) \in S_n$ la identidad deja a todo polinomio igual.<br>Esta pregunta según los expertos, estaría mal formulada por la definición de ser invariante que afirma que: $f$ es un invariante del grupo $S_n$ si $\alpha f = f$ para toda $\alpha \in S_n$.<br>Pero en el contexto histórico, para la solución de ecuaciones algebraicas por radicales se habla de "las permutaciones" que dejan invariante a una función en las raíces de la ecuación y es en este sentido que se formula la pregunta. |
| (c) Un polinomio $f$ se llama simétrico si para toda permutación $\alpha$ se cumple que $\alpha f = f$. De un polinomio simétrico. Justifique Ejemplo, una posible solución sería:<br>Sea $f = x_1 + x_2$ y el grupo $S_2 = \{(1),(12)\}$ ya que: $f(x1,x2) := f(x\alpha(1),x\alpha(2))$<br>$= f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 = f$ para $\alpha = (1)$ la identidad y<br>$= f(x_1,x_2) = x_2 + x_1 = f$ para $\alpha = (12)$.<br>En $S_4$ se tiene como respuesta al conjunto:<br>$H = \{(1),(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1423),(1324)\}$ |
| (d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2+bx+c=0$ en función de sus raíces $x_1,x_2$. Justifique<br>$b = -x_1 - x_2$<br>$c = x_1x_2$<br>Justificación:<br>Sea $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$<br>$= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$<br>luego, $b = -(x_1 + x_2)$<br>$c = x_1x_2$ |

Se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, y los expertos.

| **Criterio1: significados del objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Aritmética modular | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Teoría de Galois | 2 | 2 | 2 | 2 |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 4 | 4 | 4 | 4 |

Con la tarea 10, se pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de los invariantes de un grupo finito, relacionados con los polinomios simétricos; para este caso, el grupo finito corresponde al grupo $S_4$ de permutaciones de 4 elementos; por tanto, esta tarea se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b) y (c); la tarea se relaciona también, con la comprensión que tiene el estudiante de la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación algebraica y las raíces o soluciones de la misma y la relación con el grupo $S_4$, es decir, la relación de las soluciones de una ecuación de grado cuatro y el grupo $S_4$; por tanto, corresponde a la configuración de *Teoría de ecuaciones algebraicas* con un nivel de relevancia de 4; además, los invariantes del grupo $S_4$ fueron fundamentales para determinar las soluciones de las ecuaciones algebraicas de grado cuatro mediante el método de radicales, en los subítems (a),(b),(c) y (d). Finalmente, la tarea corresponde a la comprensión del estudiante de la estructura de Grupo en su significado abstracto y se ubica por tanto, en la configuración de *Grupo Abstracto;* ya que, la tarea permite relacionar el grupo $S_4$ con las soluciones de la ecuación de grado cuatro, en los subítems (a),(b) y (c) y el nivel de relevancia es de 4. Esta tarea tiene en general un nivel alto de complejidad y los expertos proponen varios arreglos para lograr una mejor comprensión por parte de los estudiantes de formación matemática; hecho que se analiza en la evaluación de la prueba piloto. La tarea se relaciona con la configuración *Grupo de Galois del polinomio-Teoría de Galois* al relacionar los coeficientes de la ecuación de grado dos con sus raíces, en el subítem (d).

| **Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | NA | NA | NA | NA |
| Estructuras algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Grupo, ejemplos y contra ejemplos | NA | NA | NA | NA |
| Subgrupo | NA | NA | NA | NA |
| Orden del grupo | NA | NA | NA | NA |
| Propiedad del Grupo | 5 | 5 | 5 | 5 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 10 se ubica en el tema de *propiedad del grupo* con un nivel de relevancia de 5. Se busca indagar por los invariantes de un grupo finito, en este caso del grupo $S_4$ y la relación con las ecuaciones algebraicas, en los subítems (a),(b),(c) y (d). En general, los subítems no fueron claros para los expertos y por tal motivo, la pregunta se reorganizó en la versión final del cuestionario; ya que, ella se relaciona con uno de los problemas que dieron origen al objeto Grupo. Se tiene presente además, que dentro del contenido curricular de los programas de formación matemática, no aparece el tema de polinomios simétricos, ni la determinación de los invariantes de un grupo finito, según el análisis de los programas de estudio presentados en el capítulo anterior: en la asignatura de Teoría de Grupos, no se trabaja Teoría de Galois.

| Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo | NR(1-5) a) | NR(1-5) b) | NR(1-5) c) | NR(1-5) d) |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Conocimiento especializado del contenido | 5 | 5 | 5 | 5 |

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM), la tarea 10 buscan evidenciar, según el juicio de los expertos y del investigador, un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3 en el subítem (d); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (a),(b),(c) y (d) con un nivel de relevancia de 5 y un conocimiento especializado, con un nivel de relevancia 5, en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común de los estudiantes de formación matemática en cuanto a la identificación de la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación de grado dos y las soluciones o raíces de la misma; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de un polinomio como función invariante y a la identificación de la relación existente entre los coeficientes de la ecuación y sus soluciones o raíces y un conocimiento especializado al pretender que el estudiante de formación matemática llegue a definir la propiedad de invariante de un grupo finito, para el caso del grupo $S_4$.

**Análisis del ítem 11**

La tarea 11, se toma del curso Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) del capítulo 9, sobre Grupos y aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta no fue clara para los expertos y se modificó según los aportes dados; además, se adaptó para mediar las categorías del conocimiento didáctico matemático.

**TAREA 11.** El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.

a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo. Justifique

c) Es conmutativo el grupo? Justifique

d) A que otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

**Solución a la tarea 11**

| |
|---|
| (a)Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique<br>$H = \{\alpha 1 = (1), \alpha 2 = (12)(34), \alpha 3 = (13)(24), \alpha 4 = (14)(23)\}$ Por tabla se verifica la propiedad de clausura, identidad e inverso y la propiedad asociativa se hereda del grupo de funciones. |

| o | α 1 | α 2 | α 3 | α 4 |
|---|---|---|---|---|
| α 1 | α 1 | α 2 | α 3 | α 4 |
| α 2 | α 2 | α 1 | α 4 | α 3 |
| α 3 | α 3 | α 4 | α 1 | α 2 |
| α 4 | α 4 | α 3 | α 2 | α 1 |

| |
|---|
| (b)¿Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo? Justifique<br>$\lvert\alpha 1\rvert = 1$ el orden de la identidad en cualquier grupo es 1.<br>$\lvert\alpha 2\rvert = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos.<br>$\lvert\alpha 3\rvert = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos.<br>$\lvert\alpha 4\rvert = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos. |
| (c) ¿Es conmutativo el grupo? Justifique<br>Si, por la simetría de la tabla, o se prueba que $\alpha i \alpha j = \alpha j \alpha i$ para $i = 1,2,3,4$. |
| d) ¿A qué otro grupo puede ser isomorfo? Justifique<br>Al grupo $k - 4$ de Klein.<br>Se puede comparar con la tabla presentada en la tarea 7 subítem 1a)<br>Por el orden de los elementos el grupo regular no puede ser isomorfo al grupo $Z_4$.<br>Se puede establecer una función biyectiva entre los dos conjuntos, pero se buscan justificaciones cortas, que muestren la comprensión del estudiante. |

Se analiza la tarea respecto a los criterios y según la opinión de los expertos.

| **Criterio 1: significados del objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Aritmética modular | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | NA | NA | NA | NA |
| Grupo Abstracto | 4 | 4 | 4 | 4 |

La tarea 11, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática del subgrupo de rotaciones del cuadrado y las propiedades del grupo $D_4$ que en esta tarea se toma isomorfo a un subgrupo del grupo $S_4$ de permutaciones con 4 elementos; por tanto, la tarea se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* en los subítems (a),(b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 4; la tarea se relaciona también, con la comprensión que tiene el estudiante de la estructura de Grupo: grupo conmutativo, subgrupo e isomorfismos con subgrupos del grupo $S_4$ y se ubica en la configuración de *Grupo Abstracto* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d).

| **Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Estructuras algebraicas | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Grupo, ejemplos y contra ejemplos | 5 | 5 | 5 | 5 |
| Subgrupo | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Orden del grupo | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Propiedad del Grupo | 5 | 5 | 5 | 5 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea 11 ubica en el tema de *operación binaria* los subítems (a),(b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 3; en el tema de *estructuras algebraicas* con un nivel de relevancia de 4, en los subítems (a),(c) y (d). La tarea también pretende indagar por la propiedad conmutativa para un subgrupo del grupo $D_4$ visto como subgrupo isomorfo a un subgrupo del grupo $S_4$. También, corresponde al tema de *grupo* con un nivel de relevancia de 5, en los subítems (a),(c) y (d) al preguntar por el grupo regular de cuatro símbolos, el orden de los elementos de ese grupo regular, la propiedad conmutativa en el grupo regular y por un grupo isomorfo al grupo regular; además, la tarea corresponde de igual forma, al tema de *subgrupo* con un nivel de relevancia de 3, en los subítems (a),(c) y (d); ya que, el grupo regular en mención es un subgrupo del grupo $D_4$ y por tanto, todas las preguntas se relacionan con el subgrupo: los subgrupos son en si mismos grupos. Finalmente, la tarea corresponde al tema de *propiedad del grupo*con un nivel de relevancia de 5, en los subítems (b),(c) y (d); ya que, indaga por el orden de los elementos del grupo regular.

| **Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 3 | 3 | 3 | 3 |
| Conocimiento especializado del contenido | 4 | 4 | 4 | 4 |

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) la tarea 11 busca evidenciar, según el juicio de los expertos y del investigador, un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 4 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común de los estudiantes de formación matemática en cuanto a la determinación de un grupo según una propiedad definida; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de un grupo a partir de una propiedad, la determinación del orden de los elementos en el grupo, la verificación de la propiedad conmutativa y la determinación de un grupo isomorfo al grupo regular y finalmente, un conocimiento especializado al pretender que el estudiante construya un grupo a partir de una propiedad establecida; encuentre el orden de los elementos de ese grupo; verifique la propiedad conmutativa en el grupo y finalmente, encuentre un grupo que sea isomorfo al grupo regular de rotaciones del cuadrado.

Se presentan en la tabla 3.2, los 11 ítems y sus subítems clasificados según los "significados" dados al objeto Grupo y seleccionados según el primer criterio para la construcción del cuestionario piloto. El significado del objeto grupo como *Grupo abstracto* contiene todos los ítems y subítems del cuestionario, como se evidencia en la tabla 3.2; ya que, los significados parciales del objeto grupo subyacen al significado de referencia del objeto matemático. En esta misma dirección, se presenta la tabla 3.3 con los 11 ítems y sus subítems clasificados según el criterio dos: este criterio corresponde a la *pertenencia de la tarea a alguno de los contenidos curriculares* establecidos para el estudio del objeto Grupo luego del análisis de los programas de los estudiantes de formación matemática. Y en la tabla 3.4 se presentan de igual forma, los 11 ítems y sus subítems clasificados según el criterio tres para la selección de preguntas del cuestionario; este criterio corresponde a *las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) del estudiante de formación matemática* que se pretenden evaluar con las tareas. Finalmente, en la tabla 3.5, se presentan cada una de las tareas y los criterios que ella permitirá evaluar.

Tabla 3.2: Significados del objeto Grupo

| **Significados del objeto Grupo** | Ítem | **Subítem** | **Nivel de relevancia** |
|---|---|---|---|
| Permutación | 6 | a) b) c) d) | 5 |
| | 9 | a) b) c) | 5 |
| | 10 | a) b) c) | 4 |
| | 11 | a) b) c) d) | 4 |
| Aritmética modular | 3 | a) b) c) | 5 |
| | 4 | a) b) c) d) | 3 |
| | 5 | d) | 5 |
| Teoría de ecuaciones algebraicas | 4 | a) | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10 | a) b) c) d) | 4 |
| Teoría de Galois | 10 | a) | 2 |
| Teoría de Matrices | | | |
| Grupo Abstracto | 1 | a) b) c) d) | 3 |
| | 2 | a) b) c) | 4 |
| | 3 | c) | 5 |
| | 4 | a) b) c) | 4 |
| | 5 | a) b) c) | 3 |
| | 6 | a) b) c) d) | 3 |
| | 7 | a) b) c) d) | 3 |
| | 8 | a) b) c) d) | 5 |
| | 9 | a) b) c) | 3 |
| | 10 | a) b) c) | 4 |
| | 11 | a) b) c) d) | 4 |

Tabla 3.3: Contenidos curriculares para el estudio del objeto Grupo

| **Contenidos curriculares para el objeto Grupo** | Ítem | **Subítem** | **Nivel de relevancia** |
|---|---|---|---|
| Operación binaria | 1 | a) b) c) d) | 3 |
| | 2 | a) b) c) | 5 |
| | 3 | a) b) | 3 |
| | 4 | a) b) c) d) | 3 |
| | 5 | a) b) c) d) | 4 |
| | 6 | a) c) d) | 2 |
| | 7 | a) b) d) | 4 |
| | 11 | a) b) c) d) | 3 |
| Estructuras algebraicas | 1 | a) b) c) d) | 5 |
| | 2 | a) b) c) | 5 |
| | 5 | a) c) d) | 4 |
| | 6 | a) b) c) d) | 4 |
| | 7 | a) b) c) d) | 5 |
| | 8 | a) c) d) | 3 |
| | 9 | a) c) d) | 3 |
| | 11 | a) b) c) d) | 4 |
| Grupo, ejemplos y contraejemplos | 1 | a) b) c) | 4 |
| | 2 | a) b) c) | 4 |
| | 3 | a) b) | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 | c) | 5 |
| | 6 | a) b) c) | 4 |
| | 7 | b) | 5 |
| | 8 | a) b) d) | 4 |
| | 9 | b) | 4 |
| | 11 | a) c) d) | 5 |
| Subgrupo | 5 | a) b) c) | 5 |
| | 6 | a) b) c) | 5 |
| | 7 | c) | 4 |
| | 9 | b) | 4 |
| | 11 | a) c) d) | 3 |
| Orden del grupo | 6 | c) | 3 |
| | 7 | a) | 3 |
| | 8 | c) d) | 2 |
| Propiedad del grupo | 1 | a) b) c) | 4 |
| | 3 | a) b) c) d) | 5 |
| | 4 | a) b) c) | 5 |
| | 6 | d) | 5 |
| | 7 | c) | 4 |
| | 8 | a) c) d) | 5 |
| | 9 | b) | 4 |
| | 10 | a) b) c) d) | 5 |
| | 11 | b) c) d) | 5 |

Tabla 3.4: Categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático

| **Categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático** | **Item** | **Subitem** | **Nivel de relevancia** |
|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 1 | a) b) c) d) | 5 |
| | 2 | a) b) c) d) | 4 |
| | 3 | a) b) | 5 |
| | 4 | a) b) c) d) | 3 |
| | 5 | a) b) c) d) | 5 |
| | 6 | a) | 5 |
| | 7 | a) | 5 |
| | 8 | a) b) c) d) | 5 |
| | 9 | a) | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10 | d) | 3 |
| | 11 | a) | 4 |
| Conocimiento Ampliado del contenido | 1 | a) b) c) d) | 2 |
| | 2 | a) b) c) d) | 2 |
| | 3 | a) b) c) d) | 4 |
| | 4 | a) b) c) d) | 4 |
| | 5 | a) b) c) | 2 |
| | 6 | b) c) d) | 5 |
| | 7 | b) c) d) | 5 |
| | 8 | a) b) c) d) | 3 |
| | 9 | b) c) d) | 3 |
| | 10 | a) b) c) d) | 5 |
| | 11 | a) b) c) d) | 3 |
| Conocimiento especializado del contenido | 1 | a) b) c) d) | 3 |
| | 2 | d) | 2 |
| | 3 | c) d) | 4 |
| | 4 | a) b) c) d) | 5 |
| | 5 | b) c) | 3 |
| | 6 | b) c) d | 4 |
| | 7 | c) d) | 4 |
| | 8 | a) b) c) d) | 4 |
| | 9 | d) | 2 |
| | 10 | a) b) c) d) | 5 |
| | 11 | a) b) c) d) | 4 |

Tabla 3.5: Tareas del cuestionario piloto *CDM-GRUPO*

| Tarea | Significados | Subítems | Contenido | Subítems | Categoría del CDM | Subítems |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Grupo abstracto | a) b) c) d) | Operación binaria | a) b) c) d) | Conocimiento común | a) b) c) d) |
| | | | Estructuras algebraicas | a) b) c) d) | Conocimiento ampliado | a) b) c) d) |
| | | | Grupo, ejemplos, contraejemplos | a) b) c) | Conocimiento especializado | a) b) c) d) |
| 2 | Grupo abstracto | a) b) c) | Operación binaria | a) b) c) | Conocimiento común | a) b) c) d) |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Estructuras algebraicas | a) b) c) | Conocimiento ampliado | a) b) c) d) |
| | | | Grupo, ejemplos, contraejemplos | a) b) c) | Conocimiento especializado | d) |
| 3 | Aritmética modular | a) b) c) | Operación binaria | b) | Conocimiento común | b) |
| | Grupo abstracto | c) | Grupo, ejemplos, contraejemplos | b) | Conocimiento ampliado | a) b) c) d) |
| | | | Propiedad del grupo | a) b) c) d) | Conocimiento especializado | c) d) |
| 4 | Aritmética modular | a) b) c) | Operación binaria | a) b) c) d) | Conocimiento común | a) b) c) d) |
| | Teoría de ecuaciones algebraicas | a) | Grupo, ejemplos, contraejemplos | c) | Conocimiento ampliado | a) b) c) d) |
| | Grupo abstracto | a) b) c) | Propiedad del Grupo | a) b) c) | Conocimiento especializado | a) b) c) d) |
| 5 | Aritmética modular | d) | Operación binaria | a) b) c) d) | Conocimiento común | a) b) c) d) |
| | Grupo abstracto | a) b) c) | Estructuras algebraicas | a) c) d) | Conocimiento ampliado | a) b) c) |
| | | | Subgrupo | a) b) c) | Conocimiento especializado | b) c) d) |
| 6 | Permutación | a) b) c) d) | Operación binaria | a) c) d) | Conocimiento común | a) |
| | Grupo abstracto | a) b c) d) | Estructuras algebraicas | a) b) c) d) | Conocimiento ampliado | b) c) d) |
| | | | Grupo, ejemplos, contraejemplos | a) b) c) | Conocimiento especializado | b) c) d) |
| | | | Subgrupo | a) b) c) | | |
| | | | Orden del grupo | c) | | |
| | | | Prop. del grupo | d) | | |
| 7 | Grupo abstracto | a) b) c) d) | Operación binaria | a) b) d) | Conocimiento común | a) |

| Tarea | Significados | Subítems | Contenido | Subítems | Categoría del CDM | Subítems |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Estructuras algebraicas | a) b) c) d) | Conocimiento ampliado | b) c) d) |
| | | | Grupo, ejemplos, contraejemplos | b) | Conocimiento especializado | d) |
| | | | Orden del grupo | a) | | |
| | | | Propiedad del grupo | c) | | |
| 8 | Grupo abstracto | a) b) c) d) | Estructuras algebraicas | a) c) d) | Conocimiento común | a) b) c) d) |
| | | | Grupo, ejemplos, contraejemplos | a) b) d) | Conocimiento ampliado | a) b) c) d) |
| | | | Orden del grupo | c) d) | Conocimiento especializado | a) b) c) d) |
| | | | Propiedad del grupo | a) c) d) | | |
| 9 | Permutación | a) b) c) | Estructuras algebraicas | a) c) d) | Conocimiento común | a) |
| | Grupo abstracto | a) b) c) | Subgrupo | b) | Conocimiento ampliado | b) c) d) |
| | | | Propiedad del Grupo | b) | Conocimiento especializado | d) |
| | | | Grupo, ejemplos y contraejemplos | b) | | |
| 10 | Permutación | a) b) c) | Propiedad del grupo | a) b) c) d) | Conocimiento común | d) |
| | Teoría de ecuaciones algebraicas | a) b) c) d) | | | Conocimiento ampliado | a) b) c) d) |
| | Teoría de Galois | a) b) c) d) | | | Conocimiento especializado | a) b) c) d) |
| | Grupo abstracto | a) b) c) | | | | |
| 11 | Permutación | a) b) c) d) | Operación binaria | a) b) c) d) | Conocimiento común | a) |
| | Grupo abstracto | a) b) c) d) | Estructuras algebraicas | a) b) c) d) | Conocimiento ampliado | a) b) c) d) |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | Grupo, ejemplos y contraejemplos | a) c) d) | Conocimiento especializado | a) b) c) d) |
| | | | Subgrupo | a) c) d) | | |
| | | | Propiedad del grupo | b) c) d) | | |

El documento para los expertos se imprimió y organizó en carpetas que fueron entregadas a los 11 expertos en Álgebra Abstracta; se obtuvo respuesta solo de 9 expertos, los cuales son docentes universitarios, magísteres y otros doctores en matemática en la línea de Álgebra: profesores de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (7); de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (1) y de la Universidad del Norte (1). Estos docentes se seleccionaron por su conocimiento experto en el tema de Teoría de Grupos y por su desempeño como docentes de programas de formación matemática y específicamente, de la asignatura de Teoría de Grupos (Millman & Green, 1989); se les solicitó emitir un juicio según las indicaciones presentadas en el cuestionario, donde se preguntaba por el grado de relevancia de cada subítem respecto a los tres criterios definidos para la selección de tareas.

Se presenta parte del documento:

**Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia**

**Escuela de Matemáticas y Estadística**

**Cuestionario CDM-Grupo**

**Nombre:**____________________________________________

**Universidad donde labora:**______________________________

**Último título académico:**______________________________

Estimado doctor, queremos agradecerle por el apoyo que nos puede brindar, para llevar a cabo una de las etapas más importantes en el desarrollo de nuestra tesis doctoral titulada: *El Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor Universitario: Objeto Grupo.* Esta evaluación mediante juicio de expertos, sustenta la fiabilidad y validez del instrumento que se está construyendo para evaluar el conocimiento didáctico - matemático del estudiante de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) sobre el objeto Grupo, para la labor de enseñanza en el ámbito universitario.

Como criterios de evaluación en la selección de las tareas del cuestionario, se han tenido en cuenta los siguientes:

- Tareas que proporcionen información sobre el grado de ajuste del **significado**

**personal** de los estudiantes de formación matemática, respecto del significado global del objeto Grupo. Para esto, se incluyen ítems que activan los diferentes sentidos del objeto Grupo: *Permutaciones, Aritmética Modular, Teoría de Ecuaciones Algebraicas, Teoría de Galois, Teoría de Matrices e invariantes en Geometría;* según su evolución histórica, hasta llegar a la consolidación del concepto que se tiene en la actualidad.

- Aquellas tareas que ponen en juego:
  El conocimiento común del contenido (resolver la tarea matemática propia de la Teoría de Grupos. Es el conocimiento que tendrían por ejemplo los físicos, químicos o cualquier estudiante que cursa Teoría de Grupos); tareas que requieren de un conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado y/o realizar conexiones con objetos más avanzados del currículo) y aquellas que requieren del conocimiento especializado, que se define como aquel que es necesario para la labor de la enseñanza en el ámbito universitario (como: usar diferentes representaciones, distintos significados del objeto matemático, resolver un problema mediante diferentes procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego para la resolución de una tarea matemática).

- Tareas que se relacionen con los siguientes contenidos:
  Operaciones binarias, Estructuras algebraicas elementales, Grupos, ejemplos y contraejemplos, Grupo de elementos invertibles de un semigrupo, Subgrupos, Orden de un grupo, orden de un elemento, Propiedades de los Grupos (ser Abeliano, cíclico, ser un grupo de permutaciones, isomorfismos, homomorfismos, etc.)

En este sentido, solicitamos su colaboración para evaluar cada una de las tareas que componen el instrumento denominado *Cuestionario CDM - Grupo,* respecto a los criterios anteriores. Nos interesa saber su punto de vista sobre los siguientes aspectos:

- El grado de relevancia con el que el ítem evalúa alguno de los diferentes significadosdel objeto grupo (teniendo en cuenta el origen de este objeto: desde la Teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la Geometría).

- El grado de relevancia con el que evalúa los diferentes tipos de conocimientos del es-tudiante de formación matemática, para la labor de profesor universitario de Teoría de Grupos.

- El tipo y grado de relevancia con el que se evalúa el CDM (conocimiento didáctico-matemático).

- La ausencia de algún contenido importante.

- La redacción y comprensión de los enunciados.

- Sugerencias.

Para este análisis se han incluido tablas que evalúan el grado de relevancia de los tres criterios mencionados, siendo: NR=Nivel de Relevancia

Nada relevante = 1

Totalmente relevante = 5

NA= No aplica

Por favor, para cada uno de los ítems de la tarea, marque el nivel que corresponda según su criterio; si un ítem no aplica marque NA.

**TAREA 1.** En el conjunto $(Z, *)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$
a)¿ Existe el elemento identidad? Justifique

b) ¿ $*$ define una operación asociativa? Justifique

c) ¿Existe el inverso del elemento 3? Justifique

d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{\ldots,-1,0,1,2,3,\ldots\}$

| **Conocimiento Didáctico - Matemático** | **NR** | **NR** | **NR** | **NR** | **NR** | **NA** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| **Significados del objeto Grupo:** Permutaciones | | | | | | |
| a) | | | | | | |
| b) | | | | | | |
| c) | | | | | | |
| d) | | | | | | |

En la misma dirección y según el juicio de los expertos, se presenta en la figura 3.1 el grado de relevancia asignado a cada una de las tareas del cuestionario, según el criterio 1, que corresponde a la pertenencia de la tarea en un contexto de significado del objeto Grupo: estos contextos corresponden a: P=Permutación; AM=Aritmética modular; TEA=Teoría de ecuaciones algebraicas; TG=Teoría de Galois; TM=Teoría de Matrices; GA=Grupo abstracto.

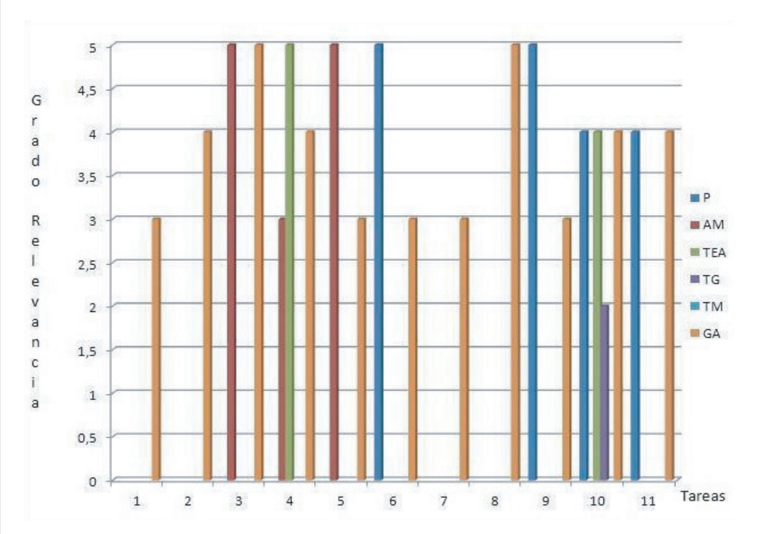



Figura 3.1: Tareas según el significado del objeto Grupo y grado de relevancia

Para la selección de tareas, con el criterio 1, se pretende que estas se ubiquen en un contexto de significado. Según el grado de relevancia asignado por los expertos se concluye que en el contexto de *Conjunto de Permutaciones* se encuentran las preguntas 6 y 9 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 10 y 11 con un nivel de relevancia de 4; en el contexto de *Aritmética Modular* se encuentran las preguntas 3 y 5 con un nivel de relevancia de 3; respecto al significado de Grupo en el contexto de *Teoría de Ecuaciones algebraicas* se encuentra la pregunta 4 con un nivel de relevancia de 5 en el subítem (a) y la pregunta 10 con un nivel de relevancia de 4 en todos los subítems. Al contexto de la *Teoría de Galois* corresponde la pregunta 10 con un nivel de relevancia de 2 en el subítem (a) y finalmente, en el contexto de Grupo como *Grupo abstracto* se encuentran las preguntas 3 y 8 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 2,4,10 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 1,5,6,7,9 con un nivel de relevancia de 3 (ver, tabla 3.2).

De los criterios dados por expertos, se concluye que se debe incluir una pregunta que corresponda al contexto de la *Teoría de Galois y Teoría de Matrices.* Por tanto, se analiza la figura 3.1. y se determina que las tareas que pueden eliminar según los criterios de los expertos pueden ser: la tarea 7 que tiene un nivel de relevancia de 2 y corresponde a la categoría de grupo como *Grupo abstracto,* donde quedan incluidas todas las preguntas del cuestionario (11 preguntas) y la tarea 1 que corresponde al significado de Grupo abstracto, con un nivel de relevancia de 3 y en este contexto se encuentran todas las tareas del cuestionario.

De la prueba piloto aplicada a los estudiantes de formación matemática y luego de una revisión y un análisis al desarrollo de las tareas; junto con el análisis de los comentarios de los estudiantes; tales como: “el tiempo de 2 horas no alcanza para resolver las tareas propuestas”, se concluye, que se deben eliminar o sintetizar algunas de las tareas y además, se deben incluir las tareas que hacen falta: se resalta que algunas preguntas se relacionan con la Teoría de Galois, solo que la relación no es dada en forma explícita.

En la figura 3.2 se presenta las tareas según el criterio 2 de selección que buscaba que las tareas se relacionaran con un contenido curricular. Según el grado de relevancia asignado por los expertos (ver, tabla 3.3) se concluye que en el tema de Operación binaria (OB), se encuentra la pregunta 2 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 5 y 7 con un nivel de relevancia de 4; en el tema de Estructuras algebraicas (EA), las preguntas 1,2 y 7 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 5,6 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 8 y 9 con un nivel de relevancia de 3. En el tema de Grupo, ejemplos y contraejemplos (GEC), se encuentran las tareas 3,4,7 y 11 con un nivel de relevancia de 5; las tareas 1,2,6,8 y 9 con un nivel de relevancia de 4; en el tema de Subgrupo (S), las preguntas 5 y 6 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 7 y 9 con un nivel de relevancia de 4 y la pregunta 11 con un nivel de relevancia de 3; en el tema: Orden del grupo (OG), se encuentran las tareas 6 y 7 con un nivel de relevancia de 3 y la pregunta 8 con un nivel de relevancia de 2; en el tema: Propiedades del grupo (PG), se encuentran las preguntas 3,4,6,8,10 y 11 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 1,7 y 9 con un nivel de relevancia de 4.

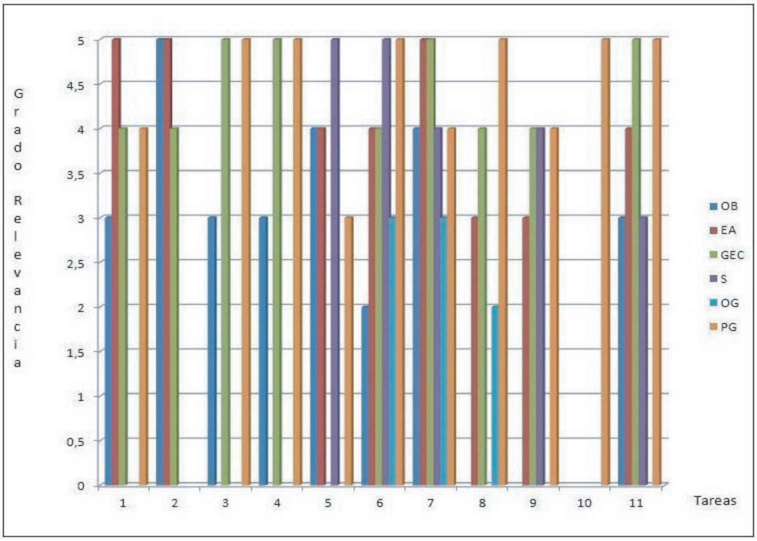



Figura 3.2: Tareas según el contenido curricular para el objeto Grupo y grado de relevancia. OB=Operación binaria; EA=Estructuras algebraicas; GEC=Grupo, ejemplos y contraejemplos; S=Subgrupo; OG=Orden del grupo; PG=Propiedades del grupo.

Del juicio de expertos y según el grado de relevancia asignado respecto al criterio 2, se concluye que se puede eliminar la pregunta 7 que se relaciona con el tema de *Operación binaria* con un nivel de relevancia de 4, con el tema de *Estructuras algebraicas* con un nivel de relevancia de 5, con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 5, con el tema de *Subgrupo* donde se encuentran otras 9 tareas y un nivel de relevancia de 4 y con el tema de *Propiedad de Grupo* con un nivel de relevancia de 4. De igual forma, la pregunta 8 se encuentra en el tema de *Estructuras algebraicas* donde aparecen 8 tareas con un grado de relevancia de 3, en el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4, en el tema de *Orden del grupo* con un nivel de relevancia de 2. Se realiza en la misma dirección el análisis a la tarea 1 y se encuentra que se relaciona con el tema *Operación binaria* con un grado de relevancia de 3, con el tema de *Estructuras algebraicas* con un grado de relevancia de 5, con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* donde se encuentran 9 tareas con un grado de relevancia de 4 y con el tema de *Propiedades de Grupo* donde se encuentran 9 tareas con un nivel de relevancia de 4.

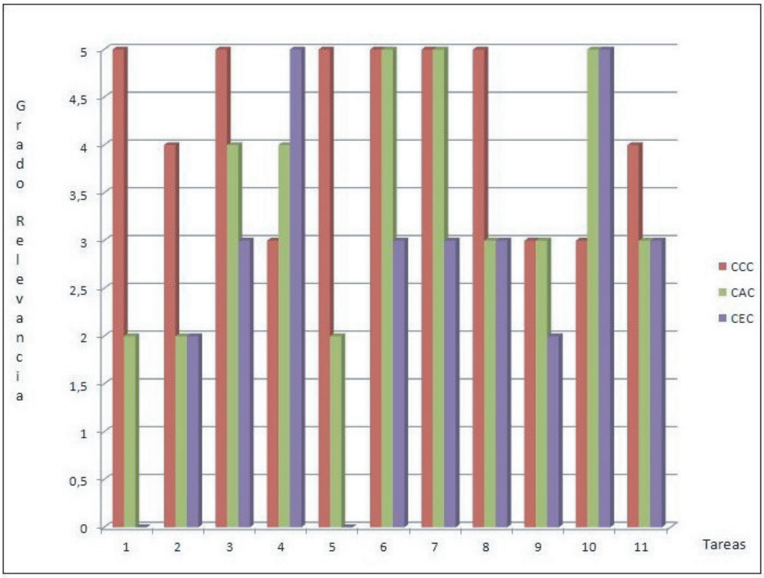



Figura 3.3: Tareas de la subcategoría del CDM y grado de relevancia. CCC=Conocimiento común del contenido; CAC= Conocimiento ampliado del contenido; CEC=Conocimiento especializado del contenido.

En la figura 3.3 se presenta las tareas respecto al criterio de selección 3, que busca que las tareas permitan evaluar una subcategoría del *Conocimiento didáctico-matemático del estudiante de formación matemática sobre el objeto grupo* referente a la faceta epistémica de este CDM. Según el grado de relevancia asignado por los expertos (ver, tabla 3.4) se concluye que en la subcategoría del *Conocimiento común del contenido*

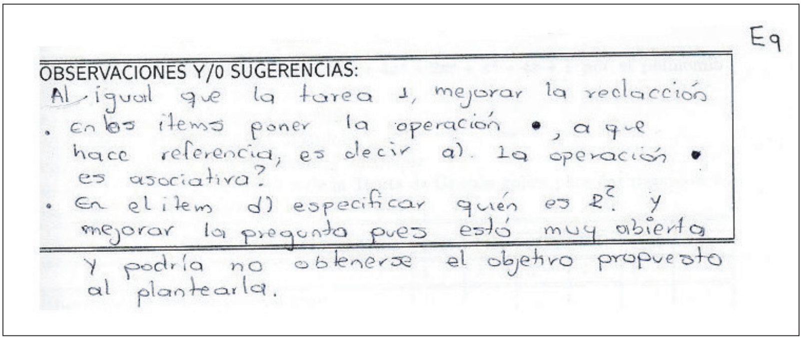
*(CCC)* se encuentran las preguntas 1,3,5,6,7 y 8 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 2 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 4,9 y 10 con un nivel de relevancia de 3; en la subcategoría de *Conocimiento ampliado del contenido (CAC)* se encuentran las preguntas 6,7 y 10 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 3 y 4 con un nivel de relevancia de 4; las preguntas 8,9 y 11 con un nivel de relevancia de 3 y las preguntas 1,2 y 3 con un nivel de relevancia de 2. En la subcategoría de *Conocimiento especializado del contenido (CEC)* se encuentran las tareas 4 y 10 con un nivel de relevancia de 5; las tareas 3,6,7,8 y 11 con un nivel de relevancia de 3 y las tareas 2 y 9 con un nivel de relevancia de 2.

Del juicio de expertos y del grado de relevancia asignado por ellos respecto al criterio 3, se concluye que se puede eliminar la pregunta 2 que permite evaluar en ciertos aspectos, el CAC y el CEC con un nivel de relevancia de 2; de igual forma, la tarea 8 que permite evaluar el CAC y el CEC con un nivel de relevancia de 3. Se analiza la tarea 7 como posible tarea a ser eliminada y se concluye que ella permite medir el CCC con un nivel de relevancia de 5 pero que en esta categoría se encuentran 6 tareas; de igual forma, permite medir el CAC con un nivel de relevancia de 5 y se encuentran entre 3 tareas y finalmente, permite medir el CEC con un nivel de relevancia de 3 en una categoría que cuenta con 5 tareas (ver, figura 3.4).

En la misma dirección, se analiza la pregunta 1, bajo el criterio 3 y según el juicio de los expertos: se encuentra que respecto al CCC el nivel de relevancia es 5, pero respecto al CAC el nivel de relevancia es de 2.

De igual forma, se analizaron las sugerencias de los expertos, que en algunos casos se relacionaron con la *formulación* de las preguntas y en la búsqueda de mayor claridad y comprensión por parte de los estudiantes: estas sugerencias se analizaron minuciosamente, ya que en algunos casos, para el experto no era clara la pregunta dentro del contexto histórico. Por ejemplo, respecto a la Teoría de Galois, no es habitual que se trabaje en los cursos de Teoría de Grupos así corresponda a un significado del objeto Grupo; por tanto, algunos de los ejercicios con el grupo $S_n$ que se relacionan con el grupo de Galois del polinomio, no eran claros para los expertos. Finalmente, se incluye la tarea 8 que corresponde al significado de Grupo en el contexto de la *Teoría de Matrices* en el cual hacían falta algunas preguntas.

Se presentan una de las sugerencias de los expertos: cada una fue motivo de un análisis minucioso, para determinar la validez y concreción de las mismas y su aplicabilidad respecto a los criterios definidos para su análisis.


Eq

OBSERVACIONES Y/O SUGERENCIAS:
Al igual que la tarea 1, mejorar la redacción
• en los ítems poner la operación •, a que hace referencia, es decir a). la operación • es asociativa?
• En el ítem d) especificar quién es $\mathbb{R}^2$. y mejorar la pregunta pues está muy abierta y podría no obtenerse el objetivo propuesto al plantearla.

Figura 3.4: Sugerencia de expertos a la tarea 2

En esta dirección, luego de realizar los análisis y de cruzar la información respecto a los análisis presentados para la eliminación o cambio de tareas, se concluye que se cambia la pregunta 1; ya que la pregunta 2 en cuanto a los significados tiene un grado de relevancia alto de 4 y en cuanto al contexto de Grupo como grupo abstracto; además, corresponde al tema de operación binaria, con un grado de relevancia de 5; al tema de Grupo, ejemplos y contraejemplos con un nivel de relevancia de 5 y al tema de subgrupo con un nivel de relevancia de 4. La tarea 7 es la única tarea donde se trabaja el grupo cociente y la tarea 8 es la tarea que realmente correspondería al concepto de grupo como Grupo Abstracto; por tanto, se determina que la pregunta que se elimina o se cambia es la pregunta 1.

### 3.4. Prueba piloto del instrumento CDM-Grupo

El cuestionario piloto se aplicó a 17 estudiantes de formación matemática: 11 de Licenciatura en Matemáticas y 6 de Matemáticas en la asignatura de Teoría de Anillos; estudiantes que ya han aprobado la asignatura Teoría de Grupos y continúan con esta otra asignatura. A estos estudiantes, se les solicitó responder el cuestionario con el objetivo de evaluar algunos de los conocimientos relacionados con Teoría de Grupos. El objetivo de la aplicación de la prueba piloto era valorar, por medio de un análisis cualitativo y cuantitativo, ciertos aspectos, tales como: adecuación del tiempo estimado (2 horas), claridad, comprensión de los enunciados e índice de dificultad de los subítems que componen cada ítem, además de incrementar y sustentar la validez y factibilidad del cuestionario definitivo (Cohen, Manion & Morrison, 2011).

Al iniciar la aplicación de la prueba piloto, se dieron y se leyeron las instrucciones claras y precisas sobre cómo responder el cuestionario y sobre cuál era el objetivo de dicha aplicación. Además, se les solicitó a los estudiantes que indicaran las dificultades en relación a la comprensión y redacción de los ítems. Por lo anterior, durante la aplicación del cuestionario, algunos de los estudiantes informaron que el tiempo de 2 horas era insuficiente para abordar las 11 preguntas del cuestionario:

atendiendo a esta inquietud se valoran y analizan las primeras 7 preguntas y se hacen pequeñas modificaciones al cuestionario piloto.

### 3.4.1. Análisis cuantitativo de la prueba piloto en el grupo de Licenciados en Matemáticas

La prueba piloto fue aplicada en el curso de Teoría de anillos, en la segunda semana de Junio del 2015. En esta asignatura se espera reforzar y continuar con el desarrollo de los conceptos de Teoría de Grupos al estudiar los anillos como estructura matemática, en las cuales se definen dos operaciones para el conjunto dado $(A,+,.)$ de modo que el conjunto con la primera operación $(A,+)$ es un grupo abeliano y con la segunda operación un semigrupo (clausura y asociatividad de la operación) y se cumplen dos propiedades distributivas. Atendiendo a las sugerencias de los expertos en Álgebra, se consideró que al final de esta asignatura era apropiado aplicar la prueba piloto; se esperaba que como en la asignatura de anillos se profundizan los conceptos y definiciones del objeto grupo, los estudiantes tuvieran estos conocimientos presentes para la solución de las tareas planteadas. La prueba tuvo una duración de dos horas y fue aplicada por el profesor de la asignatura de Teoría de Anillos.

Los resultados individuales en la prueba piloto se presentan en las tablas 3.6 a 3.11 para el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Para la valoración de la prueba se tuvo presente que como la mayoría de los estudiantes solo contestó hasta la pregunta 7 -por cuestiones de tiempo- la nota definitiva para este análisis se tomó sobre 70 puntos al analizar las 7 primeras preguntas; se hizo la equivalencia de 70 a 50 y en cada caso se presenta la respectiva conversión para asignar una valoración definitiva a la prueba que tome valores entre 0 y 50 puntos que es lo habitual en este contexto universitario y como cada tarea consta de cuatro subítems, a cada uno se le asigna una valoración de 2.5 puntos para la suma total y luego se aplica la conversión respectiva.

Para el análisis cuantitativo de la prueba piloto, se consideró la variable "grado de corrección de las respuestas del ítem" donde se asignan los valores de 0 si la respuesta es incorrecta; 2.5 si la respuesta es correcta y entre 0 y 2.5 si la respuesta se encuentra parcialmente correcta. Los criterios de corrección para la consideración de una respuesta incorrecta, parcialmente incorrecta o correcta se encuentran en la solución dada para cada una de las tareas. En consecuencia, de acuerdo con las puntuaciones establecidas para el grado de corrección de las respuestas al ítem, el puntaje máximo y mínimo a obtener en el cuestionario corresponde a 50 y 0 puntos respectivamente.

Para determinar el índice de dificultad de la tarea (ítem), se divide el número de personas que contestan correctamente el ítem, entre el total de personas. La escala de clasificación para la dificultad de los ítems se toma de la literatura especializada (Muñiz, 1994). Según los índices de dificultad, establecidos en la literatura se recomendaban los siguientes porcentajes:

5 por ciento de ítems fáciles.
20 por ciento para ítems medianamente fáciles.
50 por ciento, para ítems de dificultad media.
20 por ciento, para ítems medianamente difíciles.
5 por ciento, para ítems difíciles.

Según la escala anterior se establecen los siguientes intervalos de clasificación que se pueden traducir en porcentajes o en forma decimal, para el índices de dificultad del ítem:

dificultad de 0: ítem de alto grado de dificultad (valor extremo).

$\leq 0,05$ ítem difícil.
$(0,05 - 0,25]$ ítem medianamente difícil.
$(0,25 - 0,75]$ ítem de dificultad media.
$(0,75 - 0,95]$ ítem medianamente fácil.
$> 0,95$ ítem fácil.
1 ítem de un grado máximo de facilidad.

De igual forma, se establecen los siguientes niveles de dominio del conocimiento, según la escala del índice de dificultad de la pregunta:

Dificultad $\leq 0,25$: bajo nivel de dominio.
Dificultad entre $(0,25, 0,75)$: nivel de dominio medio.
Dificultad $\geq 0,75$: alto nivel de dominio.

Se consideró necesario incluir en el instrumento ítems de todos los grados de dificultad; para obtener, un nivel de dificultad balanceado y en especial, se consideró pertinente que el nivel de dificultad del ítem correspondiera a un nivel de dominio medio, como se establece en la literatura especializada.

Se presentan los resultados de la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas en la tabla 3.6.

Tabla 3.6: Resultados de la prueba piloto - Licenciados en Matemáticas

| Resultados de la prueba piloto del cuestionario CDM – Grupo | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 2 | a | 0 | a | 0 | a | 2.5 | a | 1.5 | a | 0 | a | 2.0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 2.0 | b | 1.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 2.0 | c | 2.0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 2 | d | 0 | d | 2.5 | d | 2.0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 10 | | 10 | | 0 | | 2 | | 2 | | 0 | | 9 | | 7 | | 0 | | 2 | | 0 |
| N | = | 42 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 30 |
| L2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 2.5 | | 0 | | 0 | | 2.5 | | 5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 0.7 |
| L3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 10 | | 5 | | 5 | | 2.5 | | 2.5 | | 0 | | 2.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 27.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 20 |
| L4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 2.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 7.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 0.7 |
| L5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 0 | a | 2.5 | a | 0 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 5 | | 5 | | 0 | | 2.5 | | 2.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 15 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 11 |
| L6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | ¡ |
| | 10 | | 5 | | 2.5 | | 2.5 | | 2.5 | | 0 | | 2.5 | | 5 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 30 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 21 |

| Resultados de la prueba piloto del cuestionario CDM – Grupo | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L7 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 5 | | 10 | | 5 | | 2.5 | | 0 | | 0 | | 5 | | | 0 | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 27.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 20 |
| L8 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 2.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 2.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 0.2 |
| L9 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 7.5 | | 5 | | 0 | | 2.5 | | 5 | | 5 | | 2.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 27.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 20 |
| L10 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 0 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 0.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 2.5 | | 7.5 | | 3 | | 0 | | 2.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 15.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 11 |
| L11 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 7.5 | | 5 | | 7.5 | | 5 | | 0 | | 2.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 27.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 20 |

Tabla 3.7: Resultados en la prueba piloto de los Licenciados en Matemáticas

| Estudiante | Valoración |
|---|---|
| LM1 | 30 |
| LM2 | 0.7 |
| LM3 | 20 |
| LM4 | 0.7 |
| LM5 | 11 |
| LM6 | 21 |

| Estudiante | Valoración |
|---|---|
| LM7 | 20 |
| LM8 | 0.2 |
| LM9 | 20 |
| LM10 | 11 |
| LM11 | 20 |

Tabla 3.8: Distribución de frecuencias de la puntuación total en el grupo de Licenciados en Matemáticas

| **Intervalos de puntuación** | **Frecuencia absoluta** | **Porcentaje** |
|---|---|---|
| 0-5 | 1 | 9.1 |
| 5-10 | 2 | 18.2 |
| 10-15 | 2 | 18.2 |
| 15-20 | 0 | 0 |
| 20-25 | 5 | 45.4 |
| 25-30 | 1 | 9.1 |
| 30-35 | 0 | 0 |
| 35-40 | 0 | 0 |
| 40-45 | 0 | 0 |
| 45-50 | 0 | 0 |

Según la tabla 3.8 de frecuencias, se observa que el 45.5 por ciento *de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas* obtienen una puntuación menor a 20 puntos (sobre 50) en la prueba piloto, lo que muestra *cierto grado de dificultad* (ver, figura 3.5) para los estudiantes. Se presenta en la tabla 3.9. y 3.10. los estadísticos que permitieron hacer inferencias sobre las valoraciones de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

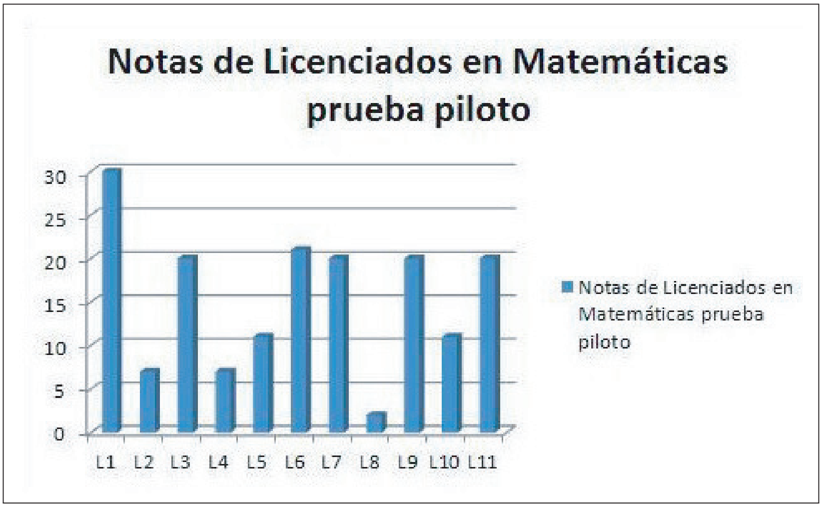



Figura 3.5: Resultados de la prueba piloto en el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Tabla 3.9: Distribución de frecuencias de la puntuación total de los Licenciados en Matemáticas

| | **Estadístico** |
|---|---|
| Mínimo | 2 |
| Máximo | 30 |
| Rango | 28 |
| Media | 15.36 |
| Mediana | 20 |
| Desviación estándar | 8.29 |

De la tabla 3.6 se observa que ningún estudiantes obtuvo la puntuación máxima de 50 puntos, siendo la media de 15.36 puntos, es decir, que el porcentaje de logro corresponde a un 9 por ciento, lo que evidencia que el instrumento presentó cierto grado de dificultad para los estudiantes. En la tabla 3.10. se presentan los cuartiles correspondientes a las notas y en la figura 3.16 se presenta la distribución de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en la prueba piloto.

Tabla 3.10: Puntuación total en la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas

| | **Valores** | **Ancho** |
|---|---|---|
| Mínimo | 2 | 2 |
| Quartil1 | 9 | 7 |

| | Valores | Ancho |
|---|---|---|
| Quartil2- Mediana | 20 | 11 |
| Quartil3 | 20 | 0 |
| Máximo | 30 | 10 |

Se presenta en la figura 3.6 el diagrama de caja, realizado partir de la tabla 3.10 con el fin de complementar el análisis de la prueba piloto aplicada a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

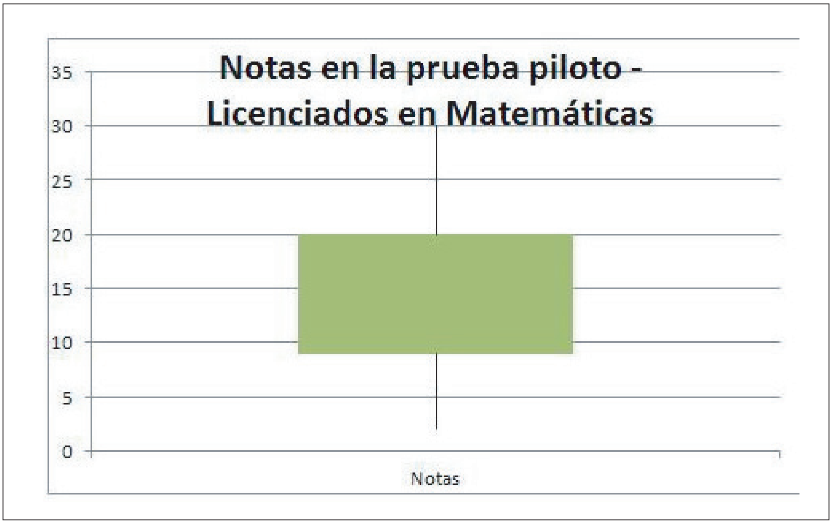



Figura 3.6: Distribución de las puntuaciones y puntuación media en la prueba piloto de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

En la figura 3.6 y en la tabla 3.10, se observa que la mediana corresponde a la nota de 20 puntos y que el 50 por ciento de las notas, se encuentran en el intervalo (9,20); el rango intercuartílico (Q3-Q1) corresponde a 11 puntos, lo que permite concluir que no se encuentran valores atípicos en la distribución de las notas.

### 3.4.1.1. Análisis de la fiabilidad

Con el cuestionario piloto y utilizando las respuestas dadas por los estudiantes de Licenciatura en Matemática a los siete primeros ítems, se realizó un análisis según las respuestas, ya que, ellas son observables y medibles. Así, con base en los conocimientos puestos en juego en las soluciones a las situaciones problemáticas planteadas, fue posible inferir algunos aspectos del conocimiento didáctico-matemático sobre el objeto de investigación que no se pueden observar en forma directa, pero sí en las prácticas de los estudiantes. En esta dirección, es necesario que el instrumento sea fiable, que permita realizar inferencias útiles sobre lo que se busca medir. Por esto, se analizó la fiabilidad, entendida como la estabilidad en las puntuaciones que el cuestionario proporciona si este fuera administrado en repetidas ocasiones al mismo grupo de estudiantes (Vásquez, 2014). Se utiliza el estadístico: “coeficiente alfa de Cronbach” ya que el representa una forma de acercarse a la fiabilidad. Más que la estabilidad de las medidas, el coeficiente alfa de Cronbach refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test y por tanto, es un indicador de la consistencia interna del test (Muñiz, 1994).

El Coeficiente Alfa de Cronbach, requiere de una sola administración del instrumento de medición y se aplicó a la prueba piloto: este coeficiente produce valores que oscilan entre O y 1: se trata de un índice de consistencia interna, que sirve para comprobar si el instrumento que se está evaluando recopila información defectuosa y por tanto, puede llevar a conclusiones equivocadas o si por el contrario se tiene un instrumento fiable que hace mediciones estables y consistentes. El alfa, mide la homogeneidad de las preguntas promediando todas las correlaciones entre los ítems para ver que efectivamente se parezcan. Cuanto más se acerque al valor de uno (1) mejor es la fiabilidad; la ventaja de su aplicación radica en que simplemente se aplica a la medición y se calcula directamente.

El valor obtenido de la notas del cuestionario para el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas fue de aproximadamente $\alpha = 0{,}6$. Este valor sugiere una correlación no tan fuerte; sin embargo, si se interpreta como un índice de fiabilidad el valor no es excesivamente elevado, pero si se puede considerar como suficiente para el caso, ya que el cuestionario no es homogéneo en tanto que incluye gran variedad de aspectos y contenidos a evaluar. En este aspecto, se pueden eliminar ítems en el sentido de mala discriminación lo que aumenta el valor del $\alpha = 0{,}6$.

### 3.4.1.2 Análisis del índice de dificultad

El índice de dificultad, valora la dificultad que conlleva la resolución de la situación problemática planteada y se define como la razón entre el “número de aciertos/ número de respuestas” (Muñiz, 1994). Dicho índice de dificultad toma valores entre 0 y 1, donde 0 indica que el subítem tiene un alto grado de dificultad, mientras que 1 indica que el subítem tiene un grado de *máxima facilidad*, siendo los índices de dificultad media los que mejor discriminan.

Para el cálculo del índice de dificultad se clasificaron las respuestas en correctas e incorrectas y parcialmente correctas, las respuestas en blanco no se consideraron; así que fue posible analizar qué situaciones problemáticas resultaron más “fáciles” o más “difíciles” para el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Se tomó el índice de dificultad respecto a las 7 primeras preguntas, ya que, en los dos grupos según, los informes de los profesores que aplicaron la prueba; solo se alcanzó a trabajar en estas preguntas. Se presenta en la tabla 3.11 el índice de dificultad de la pregunta y el índice promedio de dificultad del ítem para los Licenciados en Matemáticas.

Tabla 3.11: Índice de dificultad de la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas

| Índice de dificultad del cuestionario para los Licenciados en Matemáticas | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | R-Correctas | | R-Incorrectas | | R-Parcial-mente-C | | | |
| P1. | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Índice | % |
| a) | 6 | 55 | 5 | 45 | 0 | 0 | 0.55 | 55 |
| b) | 6 | 55 | 5 | 45 | 0 | 0 | 0.55 | 55 |
| c) | 4 | 36 | 7 | 64 | 0 | 0 | 0.36 | 36 |
| d) | 10 | 90 | 1 | 10 | 0 | 0 | 0.90 | 90 |
| | Media | 0.59 | | | | | | |
| P2. | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Índice | % |
| a) | 8 | 73 | 3 | 27 | 0 | 0 | 0.73 | 73 |
| b) | 8 | 73 | 3 | 27 | 0 | 0 | 0.73 | 73 |
| c) | 3 | 27 | 8 | 73 | 0 | 0 | 0.27 | 27 |
| d) | 3 | 27 | 8 | 73 | 0 | 0 | 0.27 | 27 |
| | Media | 0.50 | | | | | | |
| P3. | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Índice | % |
| a) | 5 | 45 | 6 | 55 | 0 | 0 | 0.45 | 45 |
| b) | 3 | 27 | 8 | 73 | 0 | 0 | 0.27 | 27 |
| c) | 0 | 0 | 11 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| d) | 1 | 10 | 9 | 80 | 1 | 10 | 0.18 | 18 |
| | Media | 0.22 | | | | | | |
| P4. | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Índice | % |
| a) | 6 | 54 | 4 | 36 | 1 | 10 | 0.64 | 64 |
| b) | 0 | 0 | 11 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| c) | 1 | 10 | 10 | 90 | 0 | 0 | 0.1 | 10 |
| d) | 1 | 10 | 10 | 90 | 0 | 0 | 0.1 | 10 |
| | Media | 0.21 | | | | | | |
| P5. | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Índice | % |
| a) | 2 | 18 | 9 | 82 | 0 | 0 | 0.18 | 18 |
| b) | 2 | 18 | 9 | 82 | 0 | 0 | 0.18 | 18 |
| c) | 2 | 18 | 9 | 82 | 0 | 0 | 0.18 | 18 |
| d) | 6 | 54 | 4 | 36 | 1 | 10 | 0.64 | 64 |
| | Media | 0.30 | | | | | | |
| | R-Correctas | | R-Incorrectas | | R-Parcial-mente-C | | | |
| P6. | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Índice | % |
| a) | 0 | 0 | 11 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| b) | 1 | 10 | 10 | 90 | 0 | 0 | 0.1 | 10 |
| c) | 1 | 10 | 10 | 90 | 0 | 0 | 0.1 | 10 |
| d) | 2 | 18 | 9 | 82 | 0 | 0 | 0.18 | 18 |
| | Media | 0.10 | | | | | | |
| P7. | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Índice | % |
| a) | 4 | 36 | 7 | 64 | 0 | 0 | 0.36 | 36 |
| b) | 1 | 9 | 9 | 82 | 0 | 0 | 0.18 | 18 |
| c) | 1 | 10 | 10 | 90 | 0 | 0 | 0.1 | 10 |
| d) | 2 | 18 | 8 | 82 | 0 | 0 | 0.18 | 18 |
| | Media | 0.18 | | | | | | |
| | Media General | 0.30 | | | | | | |

En la figura 3.7 se observan los resultados obtenidos al agrupar los ítems del cuestionario piloto según su índice de dificultad y según las ponderaciones obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. De los 7 ítems explorados, el 43 por ciento (3) presentan una dificultad media con valores entre (0.41 - 0.60); en este punto según la literatura consultada (Muñiz, 1994), se espera que el 50 por ciento de los ítems de un cuestionario presenten un índice de dificultad media; mientras que 57 por ciento (4), resultaron con un índice de dificultad medianamente difícil y según la literatura se espera el 20 por ciento de los ítems. De otra parte, no se encuentran ítems medianamente fáciles, ni ítems fáciles según la escala de clasificación tomada para los índices de dificultad y tampoco hay ítems difíciles. Las escalas para la clasificación de los índices de dificultad pueden variar según los resultados que espera el investigador que valida el cuestionario. Para el caso se podrían omitir la pregunta 3, 4 o 6 para reducir el índice de dificultad del instrumento (preguntas difíciles).

En la tabla 3.11 y en la figura 3.7 se presentan los índices de dificultad para los distintos ítems. Se observa que el cuestionario en general presenta un nivel de dificultad que oscila entre el *10 por ciento y el 59 por ciento*; esto corresponde a preguntas medianamente difíciles, es decir, con una dificultad media. Se observó que, en general el cuestionario presentó una dificultad media, tendiente a medianamente difícil con un porcentaje del 30 por ciento, por lo que se concluye que en cierta forma no debería representar mayores dificultades a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, ya que, este es el índice que se espera de un instrumento de evaluación, pero lo que realmente se evidencia de la aplicación del instrumento, es que este presentó dificultad para los estudiantes.

Se describen los principales hallazgos de la aplicación de la prueba piloto al grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

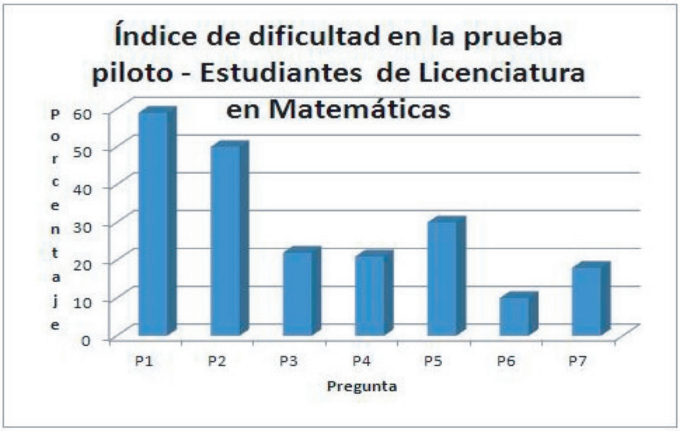



Figura 3.7: Dificultad de los ítems en la prueba piloto - estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

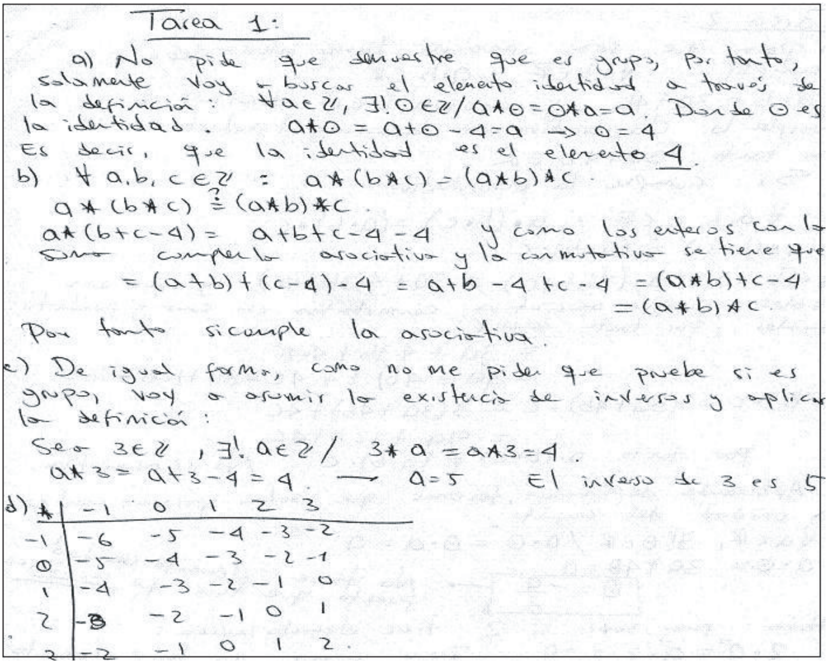
**Pregunta 1**

En relación con la pregunta 1 y según la tabla 3.11 donde se muestran las frecuencias y los porcentajes de respuestas se observa que el 55 por ciento de los estudiantes de Licenciatura, pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el elemento identidad en el conjunto de los $(Z,*)$; donde $a * b := a + b - 4$ y comprobar que se cumple la propiedad asociativa con esta nueva operación; además, para los estudiantes es *muy fácil* elaborar parte de la tabla de operación de los elementos del conjunto (90 por ciento) pero para los estudiantes es "medianamente difícil" identificar el inverso del elemento 3 con la operación definida en los enteros (0.36); según el rango considerado, este porcentaje se sitúa en un *nivel de dificultad media (0.31-0.4)*. Se ha decidido cambiar la pregunta 1 en su totalidad, teniendo presente el análisis de contenido del ítem y teniendo presente que se debe incluir un ítem relacionado con el contexto de Teoría de Matrices.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas a la pregunta, se infiere que el 45 por ciento de los estudiantes no pueden determinar cuál es el elemento identidad en los enteros con la operación $*$; 7 estudiantes (64) por ciento no comprenden como determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido una nueva operación y el 10 por ciento de los licenciados no comprende la operación $*$ ya que, no elaboran parte de la tabla de operaciones en el conjunto de los enteros con esta operación.

En relación con el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido se observa del índice de dificultad de la pregunta (59 por ciento en promedio) que los estudiantes de Licenciatura tienen un *nivel de dominio medio,* respecto al significado de grupo como *Grupo abstracto* y en relación a los contenidos curriculares: *Operación binaria, Estructuras algebraicas, Ejemplos de Grupos y verificación de las propiedades de grupo.*

Se presenta el análisis a la respuesta del Licenciado en Matemática (L1) en la pregunta (figura 3.8).



Tarea 1:

a) No pide que demuestre que es grupo, por tanto, solamente voy a buscar el elemento identidad a través de la definición: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! \odot \in \mathbb{Z} / a * \odot = \odot * a = a$. Donde $\odot$ es la identidad. $a * \odot = a + \odot - 4 = a \rightarrow \odot = 4$

Es decir, que la identidad es el elemento $\underline{4}$.

b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ : $a * (b * c) = (a * b) * c$.

$a * (b * c) \stackrel{?}{=} (a * b) * c$.

$a * (b + c - 4) = a + b + c - 4 - 4$ y como los enteros con la suma cumple la asociativa y la conmutativa se tiene que

$= (a + b) + (c - 4) - 4 = a + b - 4 + c - 4 = (a * b) + c - 4$
$= (a * b) * c$.

Por tanto si cumple la asociativa.

c) De igual forma, como no me pide que pruebe si es grupo, voy a asumir la existencia de inversos y aplicar la definición:

Sea $3 \in \mathbb{Z}$, $\exists! a \in \mathbb{Z} / 3 * a = a * 3 = 4$.

$a * 3 = a + 3 - 4 = 4 \longrightarrow a = 5$ El inverso de 3 es 5

d)

| * | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| -1 | -6 | -5 | -4 | -3 | -2 |
| 0 | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 |
| 1 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 |
| 2 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 |
| 3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |

Figura 3.8: Respuesta a la pregunta 1 - estudiante L1

El estudiante de Licenciatura de Matemáticas, tiene todas las respuestas correctas en la pregunta 1, lo que equivale a una valoración de 10 puntos sobre 10; pero el índice de dificultad de la pregunta 1 en el grupo de Licenciados es del 59 por ciento, lo que evidencia un grado de *dificultad media* en la comprensión de la pregunta (100 por ciento) por parte del grupo.

**Pregunta 2**

En relación con la pregunta 2 y según la tabla 3.11 donde se muestran las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 73 por ciento de los estudiantes pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el cumplimiento de la propiedad de clausura en el conjunto de los números reales ($R$,•) con la nueva operación $a \bullet b := 3a + 4b$; de igual forma, los estudiantes verifican la propiedad asociativa; pero, para los estudiantes es "difícil" identificar el inverso del elemento 2, con ésta operación (0.27 de respuestas correctas) por lo que no pueden comprobar la no existencia del elemento identidad y por tanto, que no hay inversos para los elementos. *La pregunta en general, presenta un nivel de dificultad media del (50 por ciento)*. En base a lo anterior, se ha decidido conservar el ítem 2 en su totalidad, incorporando solamente ciertos cambios en la redacción como concretar el subítem 2d); ya que, son deseables las preguntas de índice de dificultad media (el 50 por ciento de las preguntas deberían tener un nivel de dificultad media).

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas: para el primer subítem, el 27 por ciento de los estudiantes no determinan si la operación • en los reales cumple la propiedad de clausura y para el siguiente subítem, 3 estudiantes (27) por ciento no comprenden la propiedad asociativa de ésta operación. De igual forma, el 73 por ciento de los licenciados no identifican la no existencia del elemento identidad y por tanto, la no existencia de los elementos inversos en este conjunto de los números reales.

En relación al conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido, se observa que el índice de dificultad de la pregunta es del 50 (por ciento) por lo que los estudiantes de Licenciatura pueden resolver la tarea, identificar la no existencia del elemento identidad con un nivel de dificultad media; así, los estudiantes de Licenciatura tienen un *nivel de dominio medio* respecto al conocimiento común del contenido, al conocimiento ampliado del contenido y respecto al conocimiento especializado (2d); como la pregunta presenta un índice de dificultad media (27 por ciento) se observa en general, que los estudiantes tienen, un nivel de dominio medio, respecto a este conocimiento especializado y por tanto medianamente generalizan la propiedad al conjunto $R^2$ lo que equivale a decir, que para los licenciados la tarea presenta una dificultad media; que es lo que se espera de las tareas propuestas.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L11) a la pregunta 2:

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 2, tiene correctas las respuestas 2a) y 2b) (ver, figura 3.9) es decir, identifica la propiedad de clausura de los reales con la operación definida y la propiedad asociativa para la operación dada en los reales; pero no puede identificar que el elemento identidad no existe y por tanto, que los elementos inversos no existen y no puede definir una operación similar en el conjunto $R^2$, por tanto, la valoración de la pregunta es 5 puntos de 10 y la valoración promedio de toda la prueba

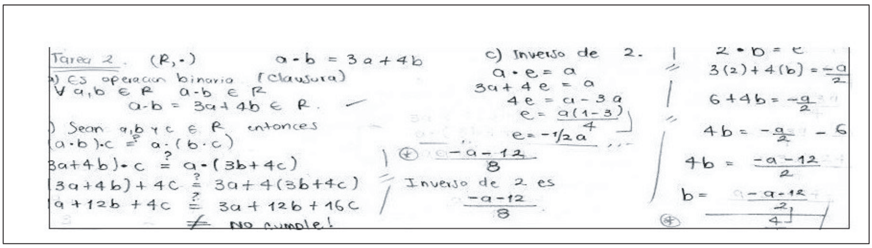



Figura 3.9: Respuesta a la pregunta 2 - estudiante L11

para el estudiante es de 20 puntos sobre 50. Pero, como el índice de dificultad de la pregunta corresponde al 50 por ciento, se evidencia que en general, la pregunta presenta una dificultad media para los estudiantes de Licenciatura (índice de dificultad en el intervalo (0.25, 0.75).

**Pregunta 3**

En la pregunta 3 y según la tabla 3.11 de frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 45 por ciento de los estudiantes pudieron resolver correctamente la situación problemática planteada al efectuar la adición de polinomios en el conjunto $Z_5[x]$ y determinar su cociente y el (0.27) por ciento de los estudiantes pueden determinar el residuo de esta división de polinomios. Para los Licenciados en general es "difícil" identificar el grupo $Z_5[x]$ donde se trabajan los polinomios; ya que, ningún Licenciado lo pudo identificar y el 10 por ciento puede identificar las propiedades y conceptos que se aplican para dar respuesta a las preguntas de la situación planteada. *La pregunta es medianamente difícil (22 por ciento),* para los Licenciados. Con base en lo anterior, se conserva la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad, especialmente las preguntas de dificultad media.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas, se tiene que el 55 por ciento de los estudiantes no realizó la división de polinomios en el conjunto $Z_5[x]$y por tanto, no determinaron en forma correcta el cociente; el 73 por ciento no determina el residuo de la división; el 100 por ciento de los estudiantes no identifica el grupo donde se trabaja la división de polinomios y el 80 por ciento no identifica las propiedades que debe utilizar para solucionar toda la tarea.

Respecto, al conocimiento común del contenido, este presenta un nivel de dificultad media del 36 por ciento ((a) y (b)) esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido y en cuanto conocimiento ampliado del contenido, se observa del índice de dificultad que corresponde al 22 (por ciento) que los estudiantes de Licenciatura no resuelven la tarea y no generalizan las operaciones del conjunto $Z_5$ siendo *medianamente difícil* para ellos el trabajo en este grupo; esto es, los estudiantes tienen un nivel de dominio bajo del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado ((c) y (d)) el índice de dificultad corresponde al 18 por ciento, por lo que resulta medianamente difícil para los estudiantes reconocer las propiedades de inverso e identidad en el conjunto $Z_5$ y generalizarlas al conjunto $Z_5[x]$, esto corresponde a un *nivel de dominio bajo* del conocimiento especializado (índice de dificultad $\leq 0,25$).

La respuesta del Licenciado en Matemática (L11) a la pregunta 3:

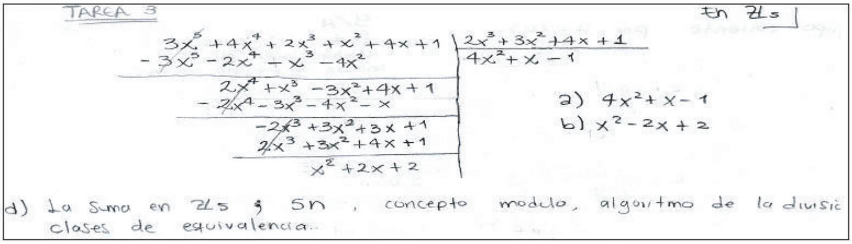



Figura 3.10: Respuesta a la pregunta 3 - estudiante L11

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 3, desarrolla en forma correcta las respuestas 3a) 3b) y 3d) (ver, tabla 3.11), es decir, realiza la operación entre polinomios en el conjunto $Z_5[x]$ identificando el cociente y el residuo; además, identifica los conceptos necesarios para desarrollar la operación entre polinomios en el conjunto dado y en aritmética módulo 5; pero no puede identificar el grupo de trabajo, es decir, el conjunto $Z_5[x]$; pero identifica claramente algunos de los conceptos y propiedades necesarias para desarrollar la tarea propuesta. La valoración de la pregunta corresponde a 7.5 de 10 puntos y la valoración promedio en toda la prueba para el estudiante es de 20 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 50 por ciento, se evidencia que la pregunta presenta una dificultad media para los otros estudiantes de Licenciatura, que es la dificultad que se espera de un ítem (índice de dificultad entre (0.25,0.75)).

**Pregunta 4**

En relación con la pregunta 4 y según la tabla 3.11 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 54 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al solucionar una ecuación en el conjunto definido que es nuevo para los estudiantes, este es el conjunto $(A_2,\oplus)$ de los $z$– números; ningún estudiante identifica el elemento identidad en el conjunto; el 10 por ciento (1 estudiante) identifica el isomorfismo del conjunto con el grupo $(Z_{99},+_{99})$ y el 10 por ciento de los estudiantes identifica en este conjunto que números cumplen la propiedad de ser divisibles por 3. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 21* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta es “medianamente difícil” para los Licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems en su mayoría de dificultad media.

Respecto a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas a la pregunta, el 36 por ciento de los estudiantes no puede solucionar la ecuación en el nuevo conjunto; el 100 por ciento de los estudiantes (11) no puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 90 por ciento de los estudiantes no encuentra un grupo isomorfo al dado y no identifica la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto.

En relación con el conocimiento común del contenido de los estudiantes, se presenta un bajo nivel de dominio (del 21 por ciento); es decir, es medianamente difícil para los estudiantes, realizar las tareas en el conjunto dado; solucionar ecuaciones e identificar el elemento inverso y en cuanto al conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes, se observa nuevamente que el índice de dificultad es del 22 (por ciento) y por tanto, los estudiantes de Licenciatura no relacionan el nuevo conjunto con el conjunto conocido $\mathbb{Z}_{99}$, esto corresponde a un nivel de dominio bajo del conocimiento ampliado del contenido. En cuanto al conocimiento especializado, como el índice de dificultad es del 21 por ciento, resulta medianamente difícil para los estudiantes generalizar las propiedades del grupo $\mathbb{Z}_{99}$ al grupo $(A_2,\oplus)$ y así, según la clasificación establecida, los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado (nivel de dificultad $\leq 0{,}25$.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L9) a la pregunta 4 fue la siguiente:

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 4, soluciona en forma correcta la ecuación en el conjunto $(A_2,\oplus)$; identifica el conjunto de los números que son divisibles por 3, pero su justificación no es clara y no identifica el elemento identidad en el nuevo conjunto; de igual forma, no identifica un conjunto isomorfo al grupo dado. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 20 puntos sobre 50 y al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 21 por ciento, se evidencia que la pregunta es *medianamente difícil* para los estudiantes de Licenciatura.

**Pregunta 5**

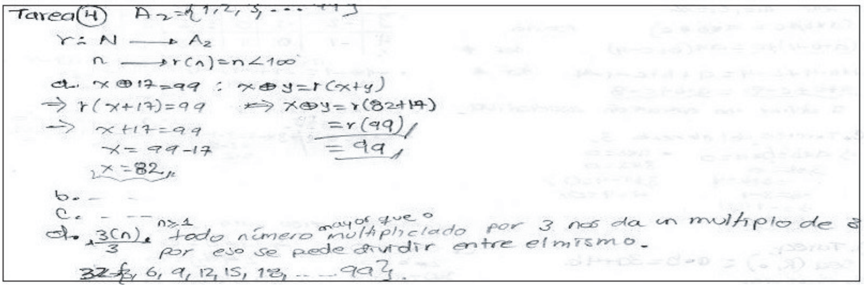



Figura 3.11: Respuesta a la pregunta 4 - estudiante L9

En relación con ésta pregunta y según la tabla 3.11 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 18 por ciento de los estudiantes pueden resolver correctamente la situación problemática planteada al dar un subgrupo de 3 elementos en el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$; de igual forma, el 18 por ciento de los estudiantes determina un subconjunto del grupo que no cumple la propiedad de ser subgrupo y para el 18 por ciento de los estudiantes, es claro que el grupo $(\mathbb{Z}_3,+_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$. *La pregunta presenta un nivel de dificultad media del 30* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta no debería presentar mayores dificultades para los licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad, especialmente con un nivel de dificultad media.

En cuanto a los *posibles errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta: el 82 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(Z_6,+_6)$, de igual forma, no determinan un subconjunto que no cumple con la propiedad de ser subgrupo y no identifican claramente si $(Z_3,+_3)$ es subgrupo del grupo $(Z_6,+_6)$; pero, solo el 36 por ciento tiene dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(Z_6,+_6)$.

En relación al conocimiento común del contenido de los estudiantes, se observa que tienen un nivel de dominio medio con un nivel de dificultad media del 30 por ciento en la pregunta en cuanto a la realización de tareas comunes en este grupo; en cuanto al conocimiento ampliado, del índice de dificultad de la pregunta es del 18 por ciento: se observa que para los estudiantes no es clara la propiedad de ser subgrupo para aplicarla en un caso específico, de igual forma, la propiedad de ser subconjunto resultando la pregunta medianamente difícil para los estudiantes de Licenciatura; esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad que presenta la pregunta es del 41 por ciento: se evidencia que existe una dificultad media en cuanto al trabajo en el grupo $Z_6$ y esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento especializado.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L4) a la pregunta 5:

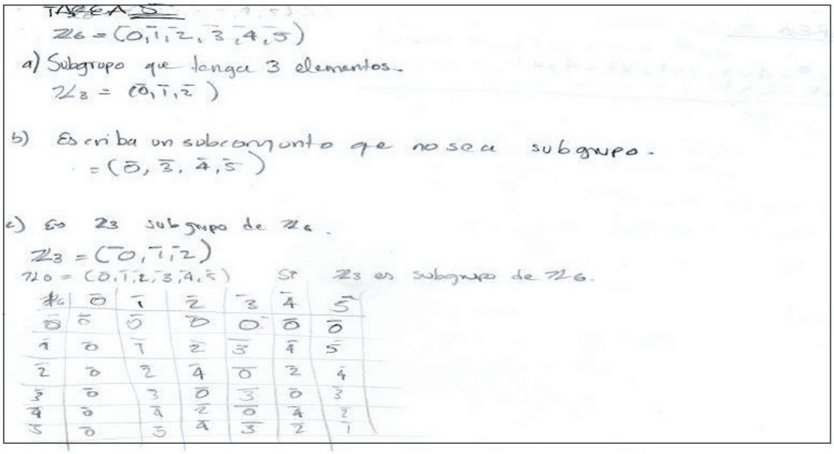

TAREA 5
Z6 = (0,1,2,3,4,5)
a) Subgrupo que tenga 3 elementos.
Z3 = (0,1,2)
b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo.
= (0,3,4,5)
c) Es Z3 subgrupo de Z6.
Z3 = (0,1,2)
Z6 = (0,1,2,3,4,5) Si Z3 es subgrupo de Z6.

Figura 3.12: Respuesta a la pregunta 5 - estudiante L4

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 5, da el subgrupo de 3 elementos en el grupo $(Z_6,+_6)$; escribe un subconjunto que no es subgrupo e identifica claramente que $(Z_3,+_3)$ no es subgrupo de $(Z_6,+_6)$; pero diferente a los otros estudiantes, no elabora en forma correcta la tabla de operaciones de los elementos del grupo. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 7 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 30 por ciento, se evidencia que la pregunta presenta una dificultad media, esto indicaría que la pregunta no presenta mayores dificultades para los estudiantes de licenciatura o que los estudiantes tienen un dominio medio en cuanto a la comprensión de la propiedad de ser subgrupo y en cuanto al trabajo con los grupos $Z_n$.

**Pregunta 6**

En relación con la pregunta 6 y según la tabla 3.11 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 10 por ciento de los estudiantes (1) identifica que el grupo $D_3$ es isomorfo al grupo $S_3$: la pregunta en este caso, resultó ambigua ya que, ella hacia referencia al subgrupo de orden 3; de igual forma, el 10 por ciento de los estudiantes

(1) identifica que el grupo $D_3$ y en general, los grupos $D_n$ de simetrías de polígonos regulares no cumplen la propiedad de ser cíclicos. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 10* por ciento por lo que se puede decir, que los estudiantes no logran reconocer los conceptos y/o propiedades relacionadas con el grupo $D_3$; esto es, la pregunta es medianamente difícil para los estudiantes. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En relación a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta, el 100 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(D_3,\circ)$; de igual forma, el 90 por ciento no pueden determinar un subconjunto isomorfo al subgrupo que se pide y el 90 por ciento no tiene claro el Teorema de Lagrange, por el cual el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo $(D_3,\circ)$ de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4. Para el 82 por ciento de los estudiantes de Licenciatura, no es claro que en general los grupos $(D_n,\circ)$ no cumplen la propiedad de ser grupo cíclicos.

En cuanto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (ítem (a)): como el nivel de dificultad corresponde al 0, esto significa que los estudiantes no logran reconocer los subgrupos del grupo $(D_3,\circ)$ siendo la pregunta muy "difícil" para los estudiantes: esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento común del contenido. En cuanto al conocimiento ampliado, como el índice de dificultad es del 13 por ciento, esto indica que para los estudiantes no es claro cuales son los subgrupos del grupo $(D_3,\circ)$ esto corresponde a una pregunta, medianamente difícil para el estudiante con un bajo nivel de dominio del conocimiento ampliado; no es claro, el teorema de Lagrange para aplicarlo a este grupo particular ni la propiedad de ser un grupo cíclico y en cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 13 por ciento se evidencia que los estudiantes no tienen un conocimiento claro del grupo $(D_3,\circ)$ y por tanto, de sus propiedades, lo que corresponde a bajo nivel de dominio del conocimiento especializado del contenido.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L1) a la pregunta 6:

Tarea 6: Tendría que repasar y buscar más información para poder hacer esta tarea.

Figura 3.13: Respuesta a la pregunta 6 - estudiante L1

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas es el único que da una respuesta, en la cual afirma que tiene que repasar el estudio de este grupo particular $(D_3,\circ)$. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 30 puntos sobre 50, siendo la mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 10 por ciento, se evidencia que los estudiantes no reconocen conceptos y/o propiedades del grupo $(D_3,\circ)$; este índice de dificultad indica que la pregunta es medianamente difícil para los estudiantes, pero se tiene presente que se relaciona con el conocimiento de un grupo particular; lo que indica un bajo nivel de dominio respecto al conocimiento de los grupos $(D_n,\circ)$.

**Pregunta 7**

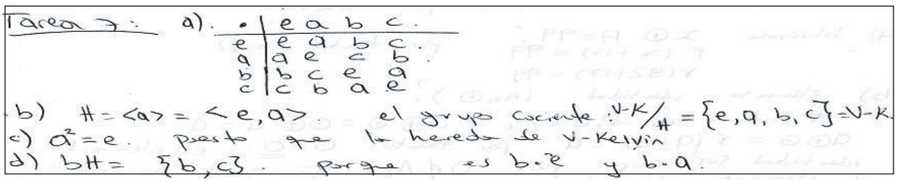
En relación con la pregunta 7 y según la tabla 3.11 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 36 por ciento de los estudiantes (4) construye la tabla de operación del grupo $V_4$ o el grupo $k-4$ de Klein; el 9 por ciento, realiza el grupo cociente determinando el subgrupo $H = \langle a \rangle$; el 10 por ciento reconoce la propiedad del subgrupo de ser normal para realizar un grupo cociente y el 18 por ciento de los estudiantes determina los elementos de la clase $bH$. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 18* por ciento por lo que se puede decir, que resulta medianamente difícil para los Licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad.

En cuanto a los *posibles errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta, el 64 por ciento de los estudiantes no reconocen la tabla de operación del grupo $V_4$; de igual forma, el 82 por ciento no puede construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H = \langle a \rangle$; el 90 por ciento no tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal, para determinar el grupo cociente y el 82 por ciento de los estudiantes de Licenciatura no reconocen una clase lateral izquierda.

En relación al conocimiento común del contenido de los estudiantes (ítem (a)), la pregunta presenta un nivel de dificultad del 36 por ciento, es decir, que existe una difícil media para los estudiantes, esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido; en cuanto al conocimiento ampliado, del índice de dificultad del 16 por ciento, se evidencia que el estudiante no construye el grupo cociente; de igual forma, en cuanto al conocimiento especializado, no tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal para aplicarla a casos particulares y de igual forma, no construye una clase lateral izquierda por el subgrupo en un grupo específico, esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado del contenido.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L1) a la pregunta 7.

El estudiante de Licenciatura de Matemáticas reconoce el grupo $V_4$ de Klein; construye el grupo cociente para el subgrupo dado; lista los elementos de la clase izquierda *bH*; da una propiedad del grupo, pero no es la propiedad del subgrupo para construir el grupo cociente. La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 30 puntos sobre 50 siendo la mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 18 por ciento, se evidencia que los estudiantes de licenciatura no reconocen el concepto de normalidad y grupo cociente; el índice de dificultad de la pregunta en general es elevado: del 18 por ciento, es decir, la pregunta resulta medianamente difícil para los Licenciados, lo que corresponde a un nivel de dominio bajo en cuanto al conocimiento del grupo $V_4$ de Klein.


Tarea 7: a).

| · | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |

b) $H = \langle a \rangle = \langle e, a \rangle$. el grupo cociente $V\text{-}K/_H = \{e, a, b, c\} = V\text{-}K$

c) $a^2 = e$. puesto que lo hereda de V-Kelvin

d) $bH = \{b, c\}$. porque es $b \cdot e$ y $b \cdot a$.

Figura 3.14: Respuesta a la pregunta 7 - estudiante L1

Finalmente, como conclusión al análisis del índice de dificultad en la prueba piloto para el grupo de estudiantes de licenciatura, se observa que en general, el cuestionario presenta una *dificultad media* (0.30) para los estudiantes, como se muestra en la tabla 3.11, siendo los subítems que mayor dificultad presentaron el 1c), 2c), 2d), 3b), 3c), 3d), 4b), 4c), 4d), 5a), 5b), 5c), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c) y 7d). Del índice de dificultad de las preguntas del cuestionario piloto para los estudiantes de Licenciatura en matemáticas, se concluye que la pregunta 6 es la que presenta mayor índice de dificultad: del 10 por ciento, la pregunta 4 y 7 tienen un índice de dificultad del 21 por ciento, la pregunta 3 un índice de dificultad del 23 por ciento y la pregunta 5 un índice de dificultad del 30 por ciento y las preguntas 1 y 2 un índice de 59 y 50 por ciento respectivamente. De las 7 preguntas analizadas solo la pregunta 6 resulta medianamente *difícil* y en general, ninguna pregunta presenta un *grado máximo de facilidad*. Se tiene en cuenta que se desearía para un instrumento un índice de dificultad media y que los índices de dificultad no se encuentren en los extremos de la escala; así, se de la figura 8.17 se evidencia que las preguntas P1 y P2 presentan un índice de dificultad media (25-75 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y las otras cinco preguntas resultaron ser medianamente difíciles para los Licenciados ( $\leq$ 25 por ciento).

La pregunta con mayor índice de dificultad para los Licenciados en Matemáticas es la pregunta 6.

**TAREA 6.** Sea $D_3$ el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) ¿De un ejemplo de un subgrupo de $D_3$? Justifique

b)¿A que grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique

c) ¿Existe un subgrupo de $D_3$ isomorfo a $(Z_4,+_4)$ ? Justifique

d) ¿El grupo $D_3$ es cíclico? Justifique

Se presenta, a continuación el análisis cuantitativo de la prueba piloto para el segundo grupo de estudiantes de formación matemática (estudiantes de Matemáticas).

### 3.4.2. Análisis cuantitativo de la prueba piloto en el grupo de estudiantes de Matemáticas

En primer lugar, se presentan en la tabla 3.12, las puntuaciones en la prueba piloto de los estudiantes de Matemáticas; luego, se agrupan los datos para inferir conclusiones respecto a ellos y finalmente, se analiza en la tabla 3.17. el índice de dificultad de la prueba para este segundo grupo de estudiantes.

Tabla 3.12: Resultados de la prueba piloto - Matemáticos

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Resultados de la prueba piloto - Matemáticos | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| M1 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 1.0 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 10 | | 7.5 | | 7.5 | | 2.5 | | 8.5 | | 0 | | 10 | | 5 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 51 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 36 |
| M2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 10 | | 10 | | 10 | | 0 | | 10 | | 10 | | 4.5 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 54.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 39 |
| M3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 7.5 | | 10 | | 7.5 | | 6.5 | | 10 | | 0 | | 10 | | 10 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 61.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 44 |
| M4 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 2.5 | | 10 | | 10 | | 0 | | 2.5 | | 0 | | 0 |
| N | = | 65 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 46 |
| M5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.5 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 2.5 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 2.5 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 10 | | 10 | | 10 | | 5 | | 10 | | 0 | | 10 | | 0 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 55 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 39 |
| M6 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | val | 2 | val | 3 | val | 4 | val | 5 | val | 6 | val | 7 | val | 8 | val | 9 | val | 10 | val | 11 | val |
| a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 2.5 | a | 2.5 | a | 0 | a | 0 | a | 0 |
| b | 2.5 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 0 | b | 2.5 | b | 2.5 | b | 0 | b | 0 | b | 0 |
| c | 2.0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 2.5 | c | 0 | c | 0 | c | 0 | c | 0 |
| d | 0 | d | 2.0 | d | 0 | d | 0 | d | 2.5 | d | 0 | d | 2.5 | d | 2.5 | d | 0 | d | 0 | d | 0 |
| | 7.0 | | 9.5 | | 5 | | 2.5 | | 10 | | 0 | | 10 | | 7.5 | | 0 | | 0 | | 0 |
| N | = | 51.5 | | | | | | | | | | | | | | | | | | = | 37 |

Tabla 3.13: Resultados de Matemáticos

| Estudiante | Valoración |
|---|---|
| M1 | 36 |
| M2 | 39 |
| M3 | 44 |
| M4 | 46 |
| M5 | 39 |
| M6 | 37 |

Tabla 3.14: Distribución de frecuencias para la puntuación total de los Matemáticos

| Intervalos de puntuación | Frecuencia absoluta | Porcentaje |
|---|---|---|
| 0-5 | 0 | 0 |
| 5-10 | 0 | 0 |
| 10-15 | 0 | 0 |
| 15-20 | 0 | 0 |
| 20-25 | 0 | 0 |
| 25-30 | 0 | 0 |
| 30-35 | 0 | 0 |
| 35-40 | 4 | 66 |
| 40-45 | 1 | 17 |
| 45-50 | 1 | 17 |

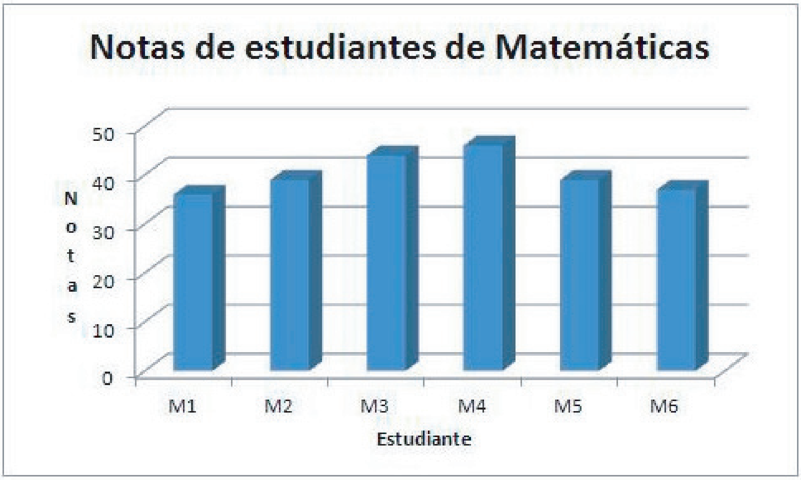



Figura 3.15: Resultados de la prueba piloto a los Matemáticos

Según la tabla 3.14 y 3.15 de frecuencias se observa que el 66 por ciento *de los estudiantes de Matemáticas* obtiene una puntuación menor a 40 puntos en la prueba piloto, lo que podría mostrar *cierto grado de facilidad* del instrumento para estos estudiantes (ver, figura 3.15). Se presenta en la tabla 3.15 y 3.16 algunos estadísticos que permiten emitir juicios sobre las valoraciones de los estudiantes de Matemáticas.

Tabla 3.15: Distribución de frecuencias para la puntuación total de los Matemáticos

| | Estadístico |
|---|---|
| Mínimo | 36 |
| Máximo | 46 |
| Rango | 10 |
| Media | 40 |
| Mediana | 39 |
| Desviación estándar | 4 |

De la tabla 3.12 y figura 3.15 se observa que ningún estudiante obtuvo la puntuación máxima de 50 puntos, siendo la media de 40 puntos sobre 50, es decir, que el porcentaje de logro corresponde al 100 por ciento, lo que evidencia que el instrumento resultaría "fácil" para estos estudiantes. En la tabla 3.16. se presentan los cuartiles correspondientes a las notas y en la figura 3.16. se presenta la distribución de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Matemáticas en la prueba piloto según los cuartiles correspondientes.

Tabla 3.16: Puntuación total en la prueba piloto de los Matemáticos

| | Valores | Ancho |
|---|---|---|
| Mínimo | 36 | 36 |
| Quartil1 | 38 | 2 |
| Quartil2- Mediana | 39 | 2 |
| Quartil3 | 43 | 4 |
| Máximo | 46 | 3 |

Se presenta a continuación, el diagrama de caja a partir de la tabla 3.16 para complementar el análisis a la prueba piloto de los estudiantes de Matemáticas.

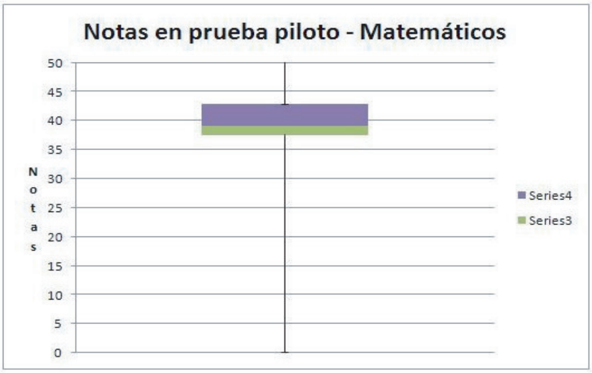



Figura 3.16: Distribución de las puntuaciones y puntuación media en la prueba piloto de los Matemáticos

Según la figura 3.16 y tabla 3.16 se observa que la mediana corresponde a una puntuación de 39 puntos y que el 50 por ciento de las notas se encuentran en el intervalo (38,43) y el 50 por ciento de los estudiantes obtuvieron una nota menor a 39 y el 75 por ciento obtienen una nota menor a 43; el rango intercuartílico (Q3-Q1) corresponde a 5.25 puntos, lo que permite concluir que no se encuentran valores atípicos en la distribución de las notas.

### 3.4.2.1 Análisis de la fiabilidad

Para esta medida, se utilizó el coeficiente alfa de Cronbach, al igual que para el grupo de licenciados; ya que este constituye una forma de acercarse a la fiabilidad (Muñiz, 1994).

El alfa mide la homogeneidad de las preguntas promediando todas las correlaciones entre los ítems para ver que efectivamente se parecen. Cuanto más se acerque al valor uno (1) mejor es la fiabilidad. El valor obtenido en el grupo de estudiantes de Matemáticas es de $\alpha= 0.54$, al calcular el índice de las tres primeras preguntas que se correlacionan. En el caso de las siete preguntas, el coeficiente $\alpha = 0.88$ que denota un alto grado de consistencia interna del examen para las 7 preguntas. La confiabilidad aumenta al eliminar las preguntas en el sentido de mala discriminación.

### 3.4.2.2 Análisis del índice de dificultad

Para el cálculo del índice de dificultad se clasifican las respuestas en correctas e incorrectas y parcialmente correctas, las respuestas en blanco no se consideran; así, se pueden analizar qué situaciones problemáticas resultaron más fáciles o más difíciles para este grupo de estudiantes de Matemáticas. Se toma el índice de dificultad para 7 preguntas, ya que, en los dos grupos y según los informes de los docentes que aplicaron la prueba los estudiantes, solo alcanzaron a trabajar estas siete preguntas.

Se presenta en la tabla 3.17 el índice de dificultad por pregunta y el índice promedio de dificultad del instrumento piloto.

Tabla 3.17: Índice de dificultad de la prueba piloto para los Matemáticos

| Índice de dificultad del cuestionario para los Matemáticos | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **R-Correctas** | | **R-Incorrectas** | | **R-Parcial-mente-C** | | | |
| **P1.** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Índice** | **%** |
| a) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| b) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| c) | 5 | 83 | 1 | 17 | 0 | 0 | 0.83 | 83 |
| d) | 4 | 67 | 2 | 33 | 0 | 0 | 0.67 | 67 |
| | Media | 0.88 | | | | | | |
| P2. | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Frecuencia | % | Índice | % |
| a) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| b) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| c) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| d) | 4 | 66 | 1 | 17 | 1 | 17 | 0.85 | 83 |
| | Media | 0.96 | | | | | | |
| **P3.** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Índice** | **%** |
| a) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| b) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| c) | 4 | 67 | 2 | 33 | 0 | 0 | 0.67 | 67 |
| d) | 4 | 67 | 1 | 17 | 1 | 17 | 0.83 | 83 |
| | Media | 0.88 | | | | | | |
| **P4.** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Índice** | **%** |
| a) | 5 | 83 | 1 | 17 | 0 | 0 | 0.83 | 83 |
| b) | 2 | 33 | 4 | 67 | 0 | 0 | 0.33 | 33 |
| c) | 2 | 33 | 4 | 67 | 0 | 0 | 0.33 | 33 |
| d) | 1 | 17 | 5 | 83 | 0 | 0 | 0.17 | 17 |
| | Media | 0.42 | | | | | | |
| **P5.** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Índice** | **%** |
| a) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| b) | 5 | 83 | 1 | 17 | 0 | 0 | 0.83 | 83 |
| c) | 4 | 66 | 1 | 17 | 1 | 17 | 0.83 | 83 |
| d) | 5 | 83 | 1 | 17 | 0 | 0 | 0.83 | 83 |
| | Media | 0.87 | | | | | | |
| **P6.** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Índice** | **%** |
| a) | 2 | 33 | 4 | 67 | 0 | 0 | 0.33 | 33 |
| b) | 2 | 33 | 4 | 67 | 0 | 0 | 0.33 | 33 |
| c) | 2 | 33 | 4 | 67 | 0 | 0 | 0.33 | 33 |
| d) | 2 | 33 | 4 | 67 | 0 | 0 | 0.33 | 33 |
| | Media | 0.33 | | | | | | |
| **P7.** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Frecuencia** | **%** | **Índice** | **%** |
| a) | 5 | 83 | 0 | 0 | 1 | 17 | 1 | 100 |
| b) | 5 | 83 | 1 | 17 | 0 | 0 | 0.83 | 83 |
| c) | 5 | 83 | 1 | 17 | 0 | 0 | 0.83 | 83 |
| d) | 6 | 100 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |
| | Media | 0.92 | | | | | | |

En la figura 3.18 se observan los resultados obtenidos al agrupar los ítems del cuestionario piloto de acuerdo a su índice de dificultad y según las ponderaciones obtenidas por los estudiantes de Matemáticas. De los 7 ítems explorados, 2 (29 por ciento) se clasifican como preguntas de dificultad media con valores de 0.33 a 0.42; 4 se clasifica como medianamente fáciles (57 por ciento) y 1 se clasifica como fácil (14 por ciento) con un índice de 0.96; no hay ítems medianamente difíciles, ni ítems difíciles, para los estudiantes de Matemáticas; tampoco hay índices con valores extremos. Se espera de un cuestionario que el 50 por ciento de las preguntas presenten una dificultad media; el 20 por ciento sean medianamente fáciles; el 20 por ciento medianamente difíciles; el 5 por ciento fáciles y el 5 por ciento difíciles.

En la tabla 3.17 y figura 3.18 se presentan los índices de dificultad para los distintos ítems. Se observa que el cuestionario en general, presenta un nivel de dificultad que oscila entre el 33 por ciento y el 96 por ciento, con un promedio del 75 por ciento, por lo que se concluye que el instrumento representa una dificultad media tendiente a medianamente fácil, para los estudiantes de Matemáticas según la escala establecida. Se toma una sola escala de clasificación para el índice de dificultad del instrumento para los dos grupos de estudiantes de formación matemática.

Se describen los principales hallazgos de la aplicación de la prueba piloto al grupo de estudiantes de Matemáticas.

**Pregunta 1**

En relación con la pregunta 1 y según la tabla 3.17 se observa que el 100 por ciento de los estudiantes de Matemáticas, pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el elemento identidad en el conjunto de los $(\mathbb{Z}, *)$ donde $a * b := a + b - 4$ y comprobar que se cumple la propiedad asociativa con esta nueva operación; además, para los estudiantes tiene una dificultad media el elaborar parte de la tabla de operación de los elementos del conjunto (67 por ciento) y es "medianamente fácil" identificar el inverso del elemento 3, con esta operación definida en los enteros (83); el nivel de dificultad del ítem corresponde al 83 por ciento que según el rango considerado, así, la pregunta presenta un

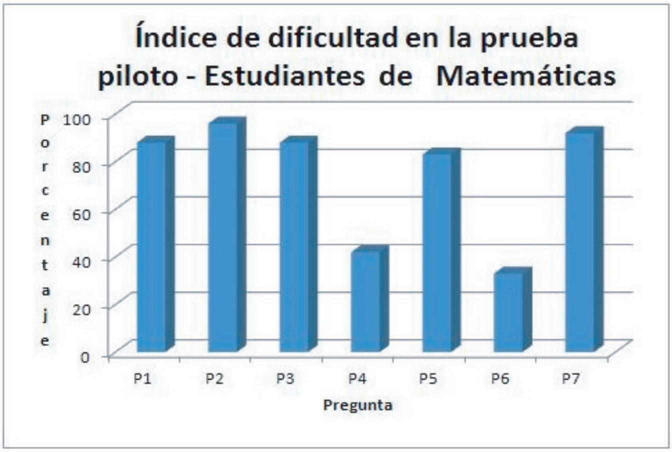



Figura 3.17: Preguntas e índice de dificultad - Estudiantes de Matemáticas

*nivel medianamente fácil* para éstos estudiantes. Se ha decidido cambiar la pregunta 1 en su totalidad, teniendo presente el análisis de contenido del ítem y teniendo presente que se debe eliminar un ítem para incluir otro relacionado con el contexto de Teoría de Matrices.

En lo que se refiere a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes de matemáticas no pueden determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido una nueva operación y el 33 por ciento de los estudiantes no comprende la operación $*$; ya que, no elaboran parte de la tabla de operaciones en el conjunto de los enteros con esta operación.

En lo que se refiere al conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido se observa del índice de dificultad de la pregunta (88 por ciento) que ella es medianamente fácil y los estudiantes de matemáticas tienen un alto dominio de conocimiento común, ampliado y especializado del contenido, respecto al significado de grupo como *Grupo abstracto* y en cuanto a los contenidos curriculares de: *Operación binaria, Estructuras algebraicas, Ejemplos de Grupos y verificación de las propiedades de grupo.* Específicamente, en lo que respecta al grupo $(\mathbb{Z},*)$.

Se presenta la respuesta del Matemático (M1) a la pregunta 1 (Figura 3.18):

El estudiante de Matemáticas en la pregunta 1, tiene todas las respuestas correctas (ver, tabla 3.17) lo que equivale a una valoración de 10 puntos sobre 10 y como el índice de dificultad de la pregunta en el grupo de Matemáticos es del 88 por ciento, se evidencia un nivel *medianamente fácil* respecto a la comprensión de toda la pregunta (100 por ciento) por los estudiantes.

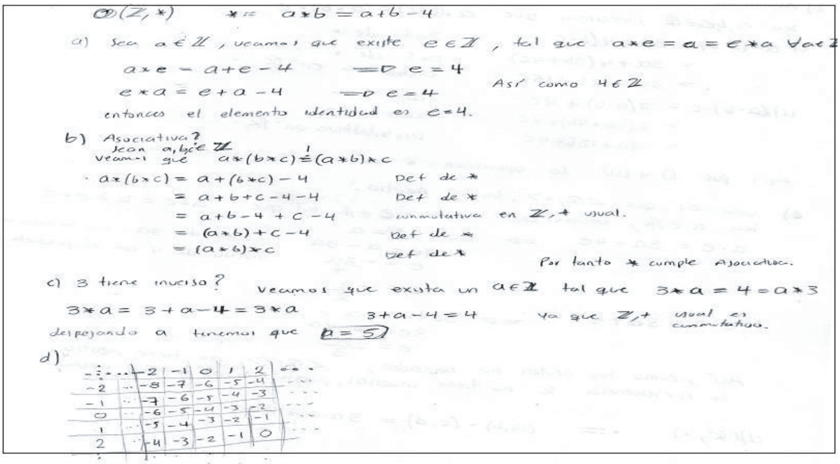


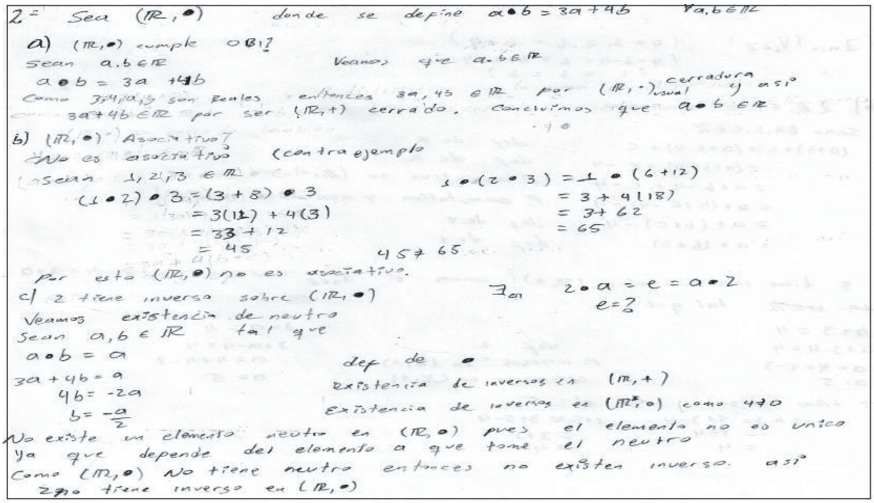

Figura 3.18: Respuesta a la pregunta 1 - estudiante M1

**Pregunta 2**

En relación con la pregunta 2 y según la tabla 3.17 donde se muestran las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el cumplimiento de la propiedad de clausura en el conjunto de los números reales ($R$,•) con una nueva operación $a \bullet b := 3a + 4b$; de igual forma, los estudiantes pueden comprobar que se cumple la propiedad asociativa e identifican el inverso del elemento 2 con esta operación (100 por ciento de respuestas correctas) por lo que comprueban la no existencia del elemento identidad y por tanto, la no existencia de inversos para los elementos. *La pregunta presenta un nivel de mediana facilidad (96 por ciento)*. En base a lo anterior, se ha decidido conservar el ítem 2 en su totalidad, incorporando solamente ciertos cambios en la redacción y concretar el subítem 2d).

En lo que se refiere a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas para el primer subítem, solo el 17 por ciento de los estudiantes de Matemáticas no logran definir una operación similar en el conjunto ($R^2$,•), es decir, una operación donde no existe el elemento identidad.

La respuesta del Matemático (M2) a la pregunta 2 corresponde a (ver, figura 3.19):


2 = Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde se define $a \bullet b = 3a + 4b$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

a) $(\mathbb{R}, \bullet)$ cumple OBI?
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ Veamos que $a \bullet b \in \mathbb{R}$
$a \bullet b = 3a + 4b$
Como 3, 4, a, b son Reales entonces $3a, 4b \in \mathbb{R}$ por $(\mathbb{R}, \cdot)_{\text{usual}}$ cerradura y así $3a + 4b \in \mathbb{R}$ por ser $(\mathbb{R}, +)$ cerrado. Concluimos que $a \bullet b \in \mathbb{R}$

b) $(\mathbb{R}, \bullet)$ Asociativo?
No es asociativo (contraejemplo)
Sean $1, 2, 3 \in \mathbb{R}$
$(1 \bullet 2) \bullet 3 = (3 + 8) \bullet 3 = 3(11) + 4(3) = 33 + 12 = 45$
$1 \bullet (2 \bullet 3) = 1 \bullet (6 + 12) = 3 + 4(18) = 3 + 62 = 65$
$45 \neq 65$
Por esto $(\mathbb{R}, \bullet)$ no es asociativo.

c) 2 tiene inverso sobre $(\mathbb{R}, \bullet)$ $\exists a$ $2 \bullet a = e = a \bullet 2$ $e = ?$
Veamos existencia de neutro
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que
$a \bullet b = a$ def de •
$3a + 4b = a$ Existencia de inversos en $(\mathbb{R}, +)$
$4b = -2a$ Existencia de inversos en $(\mathbb{R}^*, \bullet)$ como $4 \neq 0$
$b = -\frac{a}{2}$
No existe un elemento neutro en $(\mathbb{R}, \bullet)$ pues el elemento no es único ya que depende del elemento a que tome el neutro
Como $(\mathbb{R}, \bullet)$ No tiene neutro entonces no existen inverso. así 2 no tiene inverso en $(\mathbb{R}, \bullet)$

Figura 3.19: Respuesta a la pregunta 2 - estudiante M2

Este estudiante de Matemáticas en la pregunta 2, tiene correctas todas las respuestas (ver, tabla 3.17), es decir, identifica la propiedad de clausura de los reales con la operación definida; que la propiedad asociativa no se cumple para la operación definida en los reales; que el elemento identidad no existe y por tanto, los elementos inversos no existen y define una operación similar en el conjunto $R^2$, por tanto, la valoración de la pregunta es de 10 puntos de 10 y la valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 36 puntos sobre 50. Pero, del índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 96 por ciento, evidencia que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes de Matemáticas.

**Pregunta 3**

En relación con la pregunta 3 y según la tabla 3.17 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes pudo resolver correctamente la situación problemática planteada, al efectuar la adición de polinomios en el conjunto $Z_5[x]$ y determinar el cociente y el residuo de esta división de polinomios. Para los Matemáticos tiene una "dificultad media" (67) identificar el grupo $Z_5[x]$ donde se trabajan los polinomios y el 67 por ciento puede identificar las propiedades y conceptos que aplica para dar respuesta a las preguntas de la situación planteada. *La pregunta es medianamente fácil (88 por ciento),* para los Matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En cuanto a los errores y dificultades presentes en las respuestas a la pregunta, el 33 por ciento, de los estudiantes, no identifica el grupo donde se trabaja la división de polinomios y solo el 17 por ciento no identifica las propiedades que debe utilizar para solucionar toda la tarea.

En relación con el conocimiento común del contenido, este presenta un nivel de dominio alto correspondiente al 100 por ciento ((a) y (b)) y para el conocimiento ampliado del contenido, se observa del índice de dificultad del 88 (por ciento) que los estudiantes de matemáticas, resuelven la tarea y generalizan las operaciones del conjunto $Z_5$, siendo "fácil" para ellos trabajar en este grupo; esto corresponde, a un alto nivel de dominio de este conocimiento ampliado del contenido. En cuanto al conocimiento especializado ((c) y (d)) el índice de dificultad media del 67 por ciento, indica que no presenta problema para los estudiantes de matemáticas reconocer las propiedades de inverso e identidad en el conjunto $Z_5$ y generalizarlas al conjunto $Z_5[x]$; presentando en general, un nivel de dominio medio del conocimiento especializado del contenido.

La respuesta del Matemático (M3) a la pregunta 3 se presenta en la figura 3.20.

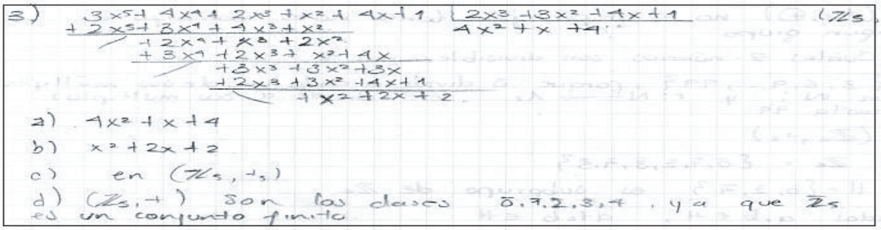



Figura 3.20: Respuesta a la pregunta 3 - estudiante M3

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 3, desarrolla en forma correcta todas las preguntas (ver, tabla 3.17), es decir, realiza la operación entre polinomios en el conjunto $\mathbb{Z}_5[x]$ identificando el cociente y el residuo; además, identifica los conceptos necesarios para desarrollar la operación entre polinomios en el conjunto dado y en aritmética módulo 5, pero no identifica el grupo de trabajo, es decir, el conjunto $\mathbb{Z}_5[x_]$ esto es, identifica claramente algunos de los conceptos y propiedades necesarias para desarrollar la tarea propuesta.

La valoración de la pregunta corresponde a 7.5 de 10 puntos y la valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 44 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 88 por ciento, se evidencia que la pregunta no presenta dificultad para los otros estudiantes de matemáticas, siendo medianamente fácil.

**Pregunta 4**

En relación con la pregunta 4 y según la tabla 3.17 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 83 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al solucionar una ecuación en un conjunto nuevo para los estudiantes; este es el conjunto $(A_2,\oplus)$ de los $z-$ números; el 33 por ciento puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 3 por ciento relaciona el conjunto con el conjunto $\mathbb{Z}_{99},+_{99}$ y el 17 por ciento de los estudiantes identifica en este conjunto que números cumplen la propiedad de ser divisibles por 3. *El nivel de dificultad es del 42* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta presenta una "dificultad media" para los matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas a la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes no puede solucionar la ecuación en el nuevo conjunto; el 67 por ciento de los estudiantes (4) no puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 67 por ciento de los estudiantes no encuentra un grupo isomorfo al dado y el 83 por ciento (5) no identifican la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto.

El conocimiento común del contenido de los estudiantes, presentan un nivel de dominio medio (42 por ciento), es decir, que no presenta mayor dificultad para los matemáticos realizar las tareas en el conjunto dado; solucionar ecuaciones e identificar el elemento inverso y en cuanto conocimiento ampliado del contenido, se observa nuevamente del índice de dificultad del 43 (por ciento) que para los estudiantes no presenta mayores dificultades relacionar el nuevo conjunto con el conjunto conocido de $\mathbb{Z}_{99}$, es decir, hay un nivel de dominio medio del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 42 por ciento, se evidencia que los estudiantes tienen un nivel de dominio medio para generalizar las propiedades del grupo $\mathbb{Z}_{99}$ al grupo $(A_2,\oplus)$.

La respuesta del matemático (M5) a la pregunta 4 corresponde a (Figura 3.21.):

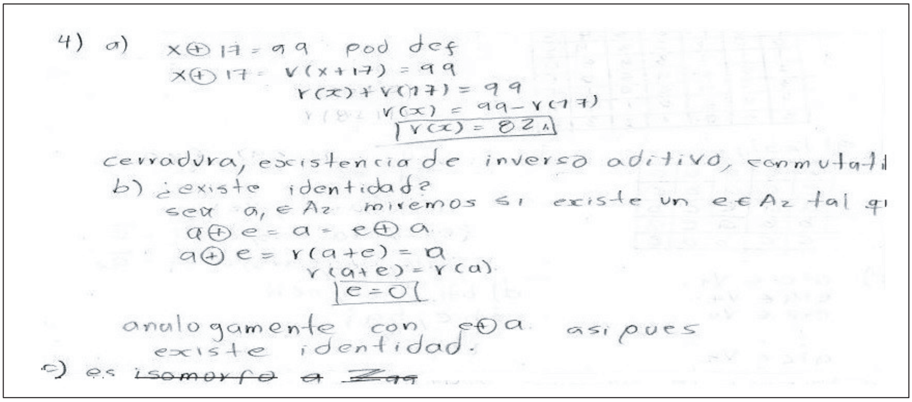

4) a) $x \oplus 17 = 99$ pod def
$x \oplus 17 = r(x+17) = 99$
$r(x)+r(17) = 99$
$r(x) = 99 - r(17)$
$\boxed{r(x) = 82_A}$
cerradura, existencia de inverso aditivo, conmutati
b) ¿existe identidad?
sea $a_1 \in A_2$ miremos si existe un $e \in A_2$ tal q
$a \oplus e = a = e \oplus a$
$a \oplus e = r(a+e) = a$
$r(a+e) = r(a)$
$\boxed{e = 0}$
analogamente con $e \oplus a$ asi pues
existe identidad.
c) es isomorfo a $\mathbb{Z}_{99}$

Figura 3.21: Respuesta a la pregunta 4 - estudiante M5

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 4, soluciona en forma correcta la ecuación en el conjunto $(A_2,\oplus)$; e identifica que el grupo $(A_2,\oplus)$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_{99}$; pero, no identifica el elemento identidad . La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 39 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 42 por ciento, se evidencia una dificultad media en general para los estudiantes de Matemáticas.

**Pregunta 5**

Según la tabla 3.17 de frecuencias y porcentajes a las respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes puede resolver la situación problemática planteada en la pregunta al dar un subgrupo de 3 elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$; de igual forma, el 83 por ciento de los estudiantes puede determinar un subconjunto del grupo que no cumple la propiedad de ser subgrupo y para el 66 por ciento de los estudiantes es claro que el grupo $(\mathbb{Z}_3,+_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$; el 83 por ciento de los estudiantes elabora la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 87* por ciento por lo que se puede establecer, que la pregunta no presenta dificultad para los matemáticos (medianamente fácil). Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En relación con los errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, para el 17 por ciento de los estudiantes no determinan un subconjunto que no cumple con la propiedad de ser subgrupo y no identifican claramente que $(\mathbb{Z}_3,+_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$; de igual forma, solo el 17 por ciento tiene dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$.

Respecto al conocimiento común del contenido de los estudiantes, este presenta un alto nivel de dominio (87 por ciento), es decir, que la pregunta resultó medianamente fácil para los matemáticos en cuanto a la realización de tareas comunes con el grupo dado; en cuanto al conocimiento ampliado del contenido del índice de dificultad del 83 por ciento se evidencia que los estudiantes de matemática comprenden la propiedad de ser subgrupo y la aplican a casos específicos, de igual forma, la propiedad de ser subconjunto; es decir, presentan un nivel de dominio alto del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado del índice de dificultad media de la pregunta del 75 por ciento; los estudiantes presentan un nivel de dominio medio, por lo que resulta claro para los estudiantes, identificar los subgrupos y elaborar la tabla de operaciones de los grupos $\mathbb{Z}_n$.

La respuesta del estudiante de matemáticas (M6) a la pregunta 5 se presenta en la figura 3.23.

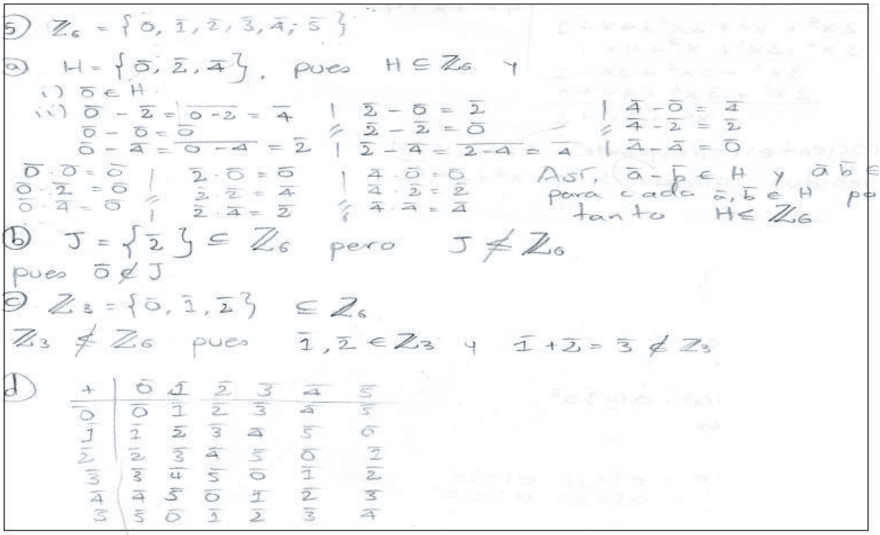



Figura 3.22: Respuesta a la pregunta 5 - estudiante M6

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 5, da el subgrupo de 3 elementos en el grupo ($\mathbb{Z}_6$,$+_6$), escribe un subconjunto que no es subgrupo; identifica claramente que ($\mathbb{Z}_3$,$+_3$) no es subgrupo de ($\mathbb{Z}_6$,$+_6$) y elabora en forma correcta la tabla de operaciones de los elementos del grupo. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 37 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 83 por ciento, se evidencia que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes de matemáticas.

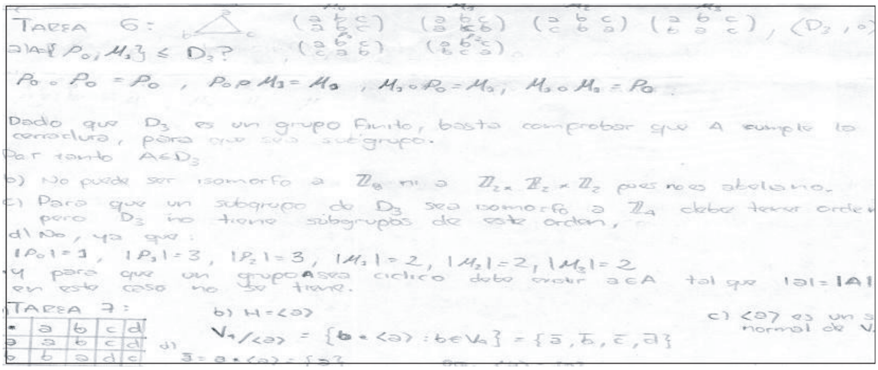
**Pregunta 6**

En relación con la pregunta 6 y según la tabla 3.17 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 33 por ciento de los estudiantes (2 estudiantes,) identifican el grupo $D_3$ como isomorfo al grupo $S_3$: la pregunta en este caso, fue ambigua ya que, ella hacia referencia al subgrupo de orden 3; de igual forma, el 33 por ciento de los estudiantes identifican que el grupo $D_3$ y en general, los grupos $D_n$ de simetrías de los polígonos regulares no cumplen la propiedad de ser cíclicos. El nivel de dificultad de la pregunta fue del 33 por ciento, por lo que se puede decir, que los estudiantes tienen una dificultad media para reconocer los conceptos y propiedades relacionadas con el grupo $D_3$. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

Respecto a los errores y dificultades se concluye que el 67 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo ($D_3$,o); de igual forma, no determinan un subconjunto isomorfo al subgrupo de orden 3 que se pide y el 67 por ciento no tiene claro el Teorema de Lagrange por el cual se establece que el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo ($D_3$,o) de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4. Finalmente, para el 67 por ciento de los estudiantes de matemáticas, no es claro que en general, los grupos ($D_n$,o) no cumplen la propiedad de ser cíclicos.

En cuanto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (a), este presenta un nivel de dificultad media del 33 por ciento, es decir, que en general, la pregunta no debería representar mayores dificultades para los matemáticos, esto corresponde a reconocer los subgrupos del grupo ($D_3$,o). Se observa entonces, un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido; en cuanto al conocimiento ampliado el índice de dificultad del 33 por ciento, indica que el estudiante posee un nivel de dominio medio sobre los subgrupos del grupo ($D_3$,o); de igual forma, del teorema de Lagrange para aplicarlo a este grupo particular y de la propiedad de ser un grupo cíclico; en cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 33 por ciento, se observa que los estudiantes de matemáticas tienen un nivel de dominio medio del grupo ($D_3$,o) y de sus propiedades.

La respuesta de estudiante de matemática (M4) a la pregunta 6 corresponde a (Figura 3.23):


TAREA 6:

a) $A = \{P_0, M_3\} \leq D_3$?

$P_0 \circ P_0 = P_0$, $P_0 \circ M_3 = M_3$, $M_3 \circ P_0 = M_3$, $M_3 \circ M_3 = P_0$.

Dado que $D_3$ es un grupo finito, basta comprobar que A cumple la cerradura, para que sea subgrupo.

Por tanto $A \leq D_3$

b) No puede ser isomorfo a $\mathbb{Z}_8$ ni a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pues no es abeliano.

c) Para que un subgrupo de $D_3$ sea isomorfo a $\mathbb{Z}_4$ debe tener orden pero $D_3$ no tiene subgrupos de este orden,

d) No, ya que:

$|P_0| = 1$, $|P_1| = 3$, $|P_2| = 3$, $|M_1| = 2$, $|M_2| = 2$, $|M_3| = 2$

y para que un grupo A sea cíclico debe existir $a \in A$ tal que $|a| = |A|$ en este caso no se tiene.

TAREA 7:

b) $H = \langle a \rangle$

$V_4 / \langle a \rangle = \{b * \langle a \rangle : b \in V_4\} = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$

c) $\langle a \rangle$ es un s normal de $V_4$

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | a | d | c |

Figura 3.23: Respuesta a la pregunta 6 - estudiante M4

El estudiante de matemáticas da respuesta correcta a la pregunta en todos sus subítems; esto es, da un subgrupo del grupo $D_3$ de simetrías del triángulo rectángulo; establece que este grupo no es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_8$ que no es la pregunta que se formula y reconoce el teorema de Lagrange al afirmar que el grupo $D_3$ no puede tener un subgrupo isomorfo de orden 4; finalmente, identifica que el grupo no es cíclico hallando los subgrupos cíclicos. La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 46 puntos sobre 50 siendo la mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 33 por ciento, se evidencia que para los estudiantes de matemáticas, la tarea presenta una dificultad media; pero en general, un índice de dificultad media es lo que se desea para las preguntas que conforman un cuestionario e indica que la pregunta no debería presentar mayores dificultades para los estudiantes; en este caso, el reconocer los conceptos y propiedades del grupo ($D_3$,o).

**Pregunta 7**

En relación con la pregunta 7 y según la tabla 3.17 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 83 por ciento de los estudiantes (5) construyen la tabla de operación del grupo $V_4$ o el grupo $k - 4$ de Klein; realizan el grupo cociente determinando el subgrupo $H = \langle a \rangle$; reconocen la propiedad del subgrupo de ser normal para realizar un grupo cociente y el 100 por ciento de los estudiantes, lista los elementos de la clase $bH$. El nivel de dificultad de la pregunta es del 92 por ciento, por lo que se puede decir, que resulta *medianamente fácil* para los matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

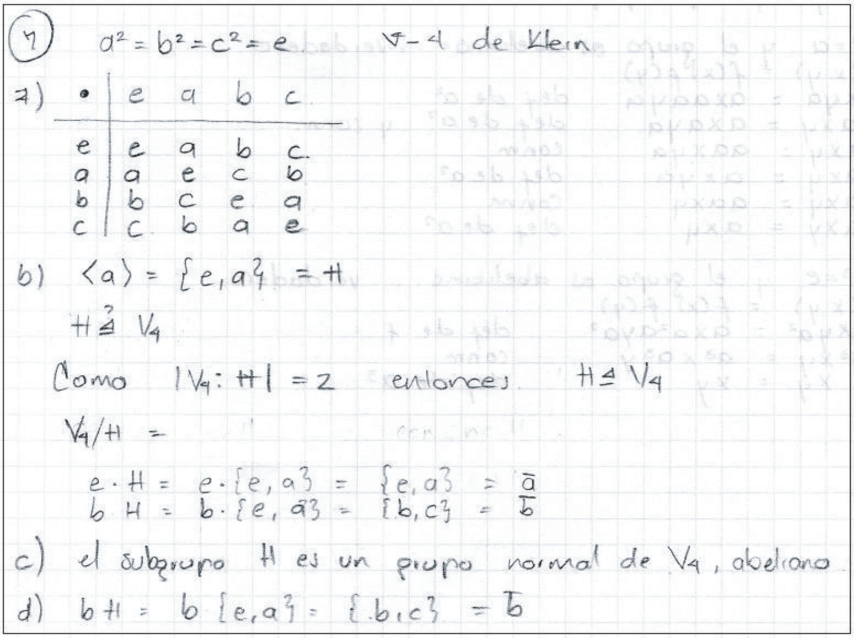
En cuanto a los errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes no puede construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H = \langle a \rangle$ y no tienen presente la propiedad del subgrupo de ser normal para determinar el grupo cociente.

Respecto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (a); la pregunta presenta un nivel de dificultad del 83 por ciento, es decir, que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes, esto corresponde a un alto nivel de dominio. En cuanto al conocimiento ampliado, el índice de dificultad del 88 por ciento aproximado, indica un nivel de dominio alto en cuanto a que el estudiante construye el grupo cociente; de igual forma, tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal para aplicarla a casos particulares y en la misma dirección, construye una clase lateral izquierda por el subgrupo en un grupo específico; así, los matemáticos tienen un alto nivel de dominio del conocimiento especializado respecto a los conceptos mencionados en la pregunta.

La respuesta de estudiante de matemática (M3) a la pregunta 7 corresponde a (ver, figura 3.24).

Este estudiante de matemáticas reconoce el grupo $V_4$ de Klein; construye el grupo cociente para el subgrupo dado; lista los elementos de la clase izquierda *bH*; da la propiedad del subgrupo de ser normal para construir el grupo cociente; construye el grupo cociente. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 44 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 92 por ciento; se evidencia que los estudiantes de matemáticas reconocen los conceptos de normalidad y grupo cociente; el índice de dificultad de la pregunta evidencia que en general es medianamente fácil para los matemáticos trabajar con grupos cocientes.

Como conclusión del análisis al índice de dificultad de la prueba piloto aplicada al grupo de estudiantes de Matemáticas, se observa que en general, el cuestionario presenta una dificultad media (0.75) para los Matemáticos, como se muestra en la tabla 8.20 siendo los subítems que mayor dificultad presentaron el 4d) con un nivel de dificultad del 17 por ciento y los subítems 4b) 4c) 6a) 6b) 6c) 6d) con un índice de dificultad del 33 por ciento presentando estas preguntas una dificultad media. Del índice de dificultad de las preguntas, para los estudiantes de Matemáticas, se concluye al igual que para los licenciados, que la pregunta 6 es la que presenta el mayor índice de dificultad, en este caso del 33 por ciento; la pregunta 4, un índice de dificultad del 42 por ciento; la pregunta 5,3,1,7 resultaron medianamente fáciles para los matemáticos y la pregunta 2 con un índice del 96 por ciento resultó fácil. De las 7 preguntas analizadas la pregunta 6 resulta con una dificultad media que es lo que se espera de las preguntas de un cuestionario (que el 50 por ciento de las preguntas del cuestionario presenten una dificultad media) y en general, ninguna pregunta presenta un *grado de máxima facilidad*.



(7) $a^2 = b^2 = c^2 = e$ V-4 de Klein

a)

| $\bullet$ | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |

b) $\langle a \rangle = \{e, a\} = H$

$H \overset{?}{\trianglelefteq} V_4$

Como $|V_4 : H| = 2$ entonces $H \trianglelefteq V_4$

$V_4/H =$

$e \cdot H = e \cdot \{e, a\} = \{e, a\} = \bar{a}$

$b\,H = b \cdot \{e, a\} = \{b, c\} = \bar{b}$

c) el subgrupo H es un grupo normal de $V_4$, abeliano

d) $bH = b\{e, a\} = \{b, c\} = \bar{b}$

Figura 3.24: Respuesta a la pregunta 7 - estudiante M3

### 3.4.3. Análisis cualitativo de la prueba piloto

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes de formación matemática en la prueba piloto, se observaron algunos aspectos importantes para el proceso de construcción del instrumento: el tiempo de aplicación de la prueba piloto fue insuficiente para abordar las 11 preguntas del cuestionario, por tal motivo en primer lugar, se cambia la pregunta 1 (medianamente fácil) por otra pregunta relacionada con el significado del objeto grupo en el contexto de "Teoría de Matrices" y las preguntas se reorganizan para llegar a un análisis de las preguntas 8,9 y 10 que quedaron faltando.

Se reorganiza el cuestionario para su versión final con el objetivo de analizar las preguntas 8, 9, 10 y 11 y poder concluir si realmente el tiempo de 2 horas no es suficiente o por el contrario las preguntas presentan un índice de dificultad alto para los estudiantes. En esta dirección, las últimas preguntas se ubican en primer lugar en el cuestionario y adicionalmente se revisan las preguntas, teniendo presente los aportes de los expertos, en lo que se relaciona con aspectos técnicos que permitan la comprensión y claridad de las preguntas.

Se presentan las tareas de la versión piloto y las tareas definitivas, luego de los análisis cuantitativos y cualitativos presentados y teniendo presente el análisis cualitativo según el juicio de expertos en Álgebra Abstracta.

**Tarea antigua**

**TAREA 6.** Sea $D_3$ el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) De un ejemplo de un subgrupo de $D_3$? Justifique

b) A que grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique

c) Existe un subgrupo de $D_3$ isomorfo a $(Z_4,+_4)$ ? Justifique

d) El grupo $D_3$ es cíclico ? Justifique

**Tarea reformulada**

**TAREA 1.** Sea $D_3$ el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) Dé un ejemplo de un subgrupo de $D_3$. Justifique

b) ¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique

c) ¿Existe un subgrupo de $D_3$ isomorfo al grupo $(Z_4,+_4)$? Justifique

d) ¿El grupo $D_3$ es cíclico? Justifique

**Tarea antigua**

**TAREA 10.** Sea el grupo $S_4$ definido en los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que $f$ es invariante.

a) ¿Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que $f$ sea invariante. Justifique

c) Un polinomio $f$ se llama simétrico si para toda permutación $\alpha$ se cumple que $\alpha f = f$

De un polinomio simétrico. Justifique

d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces $x_1,x_2$. Justifique

**Tarea reformulada**

**TAREA 2.** Sea el grupo $S_4$ de permutaciones de los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ se dice que $f$ es un invariante del grupo $S_4$.

a) ¿Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 {}_{+} x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) ¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a $f$ invariante? Justifique

c) Un polinomio $f$ se llama simétrico si para toda permutación $\alpha$ se cumple que $\alpha f = f$.

De un polinomio simétrico. Justifique

d) Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine $b,c$ en función de sus raíces $x_1,x_2$. Justifique

**Tarea antigua**

**TAREA 9.** Determine el subconjunto de $S_4$ que:

a) Deja invariante el número 2.

b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique

c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique

d) Como define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

**Tarea reformulada**

**TAREA 3.** Considere el grupo $S_4$ de permutaciones de los cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$.
a) Determine el subconjunto de $S_4$ que deja invariante el número 2. Justifique

b) El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique

c) El subconjunto de permutaciones del grupo $S_4$ que deja invariante a la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ Justifique

d) ¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique

**Tarea antigua**

**TAREA 11.** El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.

a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo. Justifique

c) Es conmutativo el grupo? Justifique

d) A que otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

**Tarea reformulada**

**TAREA 4.** El subgrupo de permutaciones regular de $n-$ símbolos, mueve los $n-$ símbolos excepto la identidad.

a) Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) ¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique

c) ¿El subgrupo es conmutativo? Justifique

d) ¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado a)? Justifique

**Tarea antigua**

**TAREA 3.** Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(Z_5,+_5)$

a) El cociente corresponde a ? Justifique

b) El residuo corresponde a? Justifique

c) En que grupo se esta trabajando? Justifique

d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

**Tarea reformulada**

**TAREA 5.** Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$.

Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto: $(Z_5,+_5)$. a) ¿El cociente corresponde a? Justifique

b) ¿El residuo corresponde a? Justifique

c) ¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique

d) ¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique

**Tarea antigua**

**TAREA 4.** Dado el conjunto $A_2$ = {1,2,3,...,99} de los $z$− números, la función $r : \mathrm{N} \rightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto $A_2$ se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214_) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además se define en el conjunto $A_2$ la operación $x \oplus y = r(x + y)$.

a) Solucione $x \oplus 17 = 99$, que propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique

b) Existe el elemento identidad en $(A_2,\oplus\ )$? Justifique

c) A que grupo es isomorfo $(A_2,\oplus\ )$ ? Justifique

d) Cuáles $z$− números son divisibles por 3 ? Justifique

**Tarea reformulada**

**TAREA 6.** Dado el conjunto $A_2$ := {1,2,3,...,99} de los $z$− números y la función $r : \mathrm{N} \rightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto $A_2$ tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente $r$, por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$.

Se define además, en el conjunto $A_2$ la operación $x \oplus y = r(x + y)$.

a) Solucione $x \oplus 17 = 99$ y diga que propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.

b) ¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\oplus)$? Justifique

c) ¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2,\oplus)$? Justifique

d) ¿Qué $z$− números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2,\oplus)$? Justifique

**Tarea antigua**

**TAREA 8.** Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad $e$. La función $f : G \rightarrow G$ tal que $x \rightarrow axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que $f$ es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

**Tarea reformulada**

| |
|---|
| **TAREA 7.** Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad $e$. La función $f: G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que $f$ es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique). |
| a) El grupo es Abeliano. |
| b) $a = e$ |
| c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano. |
| d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano |

**Tarea antigua**

| |
|---|
| **TAREA 1.** En el conjunto $(Z,*)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$ |
| a) Existe el elemento identidad? Justifique |
| b) $*$ define una operación asociativa? Justifique |
| c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique |
| d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...,_1,0,1,2,3,...} |

**Tarea que se cambia por**

| |
|---|
| **TAREA 8.** Sea $G = \langle A,B \rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ |
| $Y\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| a) Determine los elementos de $G$. Justifique |
| b) ¿$G$ es grupo abeliano? Justifique |
| c) ¿Determine el subgrupo de orden 2? Justifique |
| d) ¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en $G$? Justifique |

**Análisis al ítem**

La tarea se seleccionó del texto "An Introduction to the Theory of Groups" (Rotman, 1995) en el capítulo 2, correspondiente a la lección: Cyclic Groups y permite explorar el objeto grupo, en el contexto de Conjunto de Matrices: atendiendo a la sugerencia de los expertos, se incluyó un ítem relacionado con el significado de Grupo de Matrices.

**Solución a la tarea**

a) Determine los elementos de $G$. Justifique

Dada la matriz $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $A^2 =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= -I$

$A^3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$= -A$

$A^4 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I$ (identidad)

$B^2 =$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= -I = A^2$

$B^3 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= -B$

$B^4 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I$

$AB =$

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$BA =$

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$= -AB$

$A^2B =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$=-B = BA^2$

Luego, $G = \{A, B, A^2 = -I, A^3 = -A, A^4 = I, B^3 = -B, AB, BA = -AB = A^3B\}$ es de orden 8

b) ¿$G$ es grupo abeliano? Justifique. No, porque $AB \neq BA$ como se muestra en 1a)

c) Determine el subgrupo de orden 2. Justifique: $H = \{I, A^2\}$ se tiene que $A^2A^2 = A^4 = I$

d) ¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en $G$? Justifique

La operación en el grupo lineal $GL(2,\mathbb{C})$ es el producto usual de matrices e induce el mismo producto en $G$.

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas (investigador).

| **Criterio1: significados del objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Permutación | NA | NA | NA | NA |
| Aritmética modular | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de las ecuaciones algebraicas | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Galois | NA | NA | NA | NA |
| Teoría de Matrices | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Grupo Abstracto | 4 | 4 | 4 | 4 |

Para el caso se tiene que: NA-No aplica; NR-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica.

Con la tarea, se busca evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a: la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática del producto usual de matrices para determinar los elementos del grupo, con el subítem (a); el no cumplimiento de la propiedad conmutativa en general para las matrices, con el subítem (b); el orden de un elemento para determinar el subgrupo de orden 2, en el subítem (c) y la identificación de la operación binaria de producto usual de matrices en el grupo lineal de Matrices, constituido por matrices con determinante distinto de cero y la comprensión del estudiante respecto a que el subgrupo toma la operación del Grupo. Además, se busca evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático correspondiente a la configuración de: *Teoría de Matrices - Grupos de Matrices* con un nivel de relevancia de 4 según el juicio del investigador y de igual forma, el significado de Grupo en el contexto de Grupo abstracto.

| **Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Operación binaria | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Estructuras algebraicas | 1 | 1 | 4 | 4 |
| Grupo, ejemplos y contraejemplos | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Subgrupo | 4 | 2 | 4 | 4 |
| Orden del grupo | 1 | 1 | 4 | 1 |
| Propiedad de Grupo | 1 | 4 | 1 | 1 |

En cuanto al contenido curricular, la tarea corresponde al tema de *operación binaria*, con un nivel de relevancia de 4 en promedio, en los subítems (a),(b),(c) y (d); al tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4, en los subítems (a),(b); ya que, en los subítems se analizan la propiedad que tiene $G$ de ser subgrupo; al tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, en los subítems (a), (c) y (d), se pregunta por la operación en el grupo $GL(2, \mathbb{C})$; al tema de orden del grupo y orden del elemento ya que en el subítem (a) se preguntan los elementos del grupo y en el subítem (c) se pregunta por el subgrupo de orden 2, finalmente al tema propiedades del grupo, al preguntar en el subítem (b) si el grupo es Abeliano.

| **Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo** | **NR(1-5) a)** | **NR(1-5) b)** | **NR(1-5) c)** | **NR(1-5) d)** |
|---|---|---|---|---|
| Conocimiento común del contenido | 5 | 5 | 1 | 1 |
| Conocimiento ampliado del contenido | 1 | 1 | 5 | 1 |
| Conocimiento especializado del contenido | 1 | 1 | 1 | 5 |

Respecto a las categorías del modelo del Conocimiento Didáctico -Matemático (CDM) que se buscan evidenciar con la tarea y según el criterio del investigador, la tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia de 5 según el subítem (a) al determinar los elementos del grupo e identificar el no cumplimiento de la propiedad conmutativa en el grupo; un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 5 respecto a la determinación del subgrupo de orden 2 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 5 respecto al subítem (d) al identificar la operación en el grupo $GL(2, \mathbb{C})$ y la operación que se induce en el subgrupo $G$.

**Tarea antigua**

**TAREA 2.** Sea $(R,\bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a \bullet b = 3a + 4b$

a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura ? Justifique

b) La operación es asociativa? Justifique

c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique

c) En $(R^2,\bullet)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta, y que significado tendría según otras asignaturas del programa?

**Tarea reformulada**

**TAREA 9.** Sea $(R,\bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$

a) ¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique

b) ¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique

c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique

d) En el conjunto $R^2$ defina una operación en la cual no exista el elemento identidad. Justifique

**Tarea antigua**

**TAREA 5.** Sea el conjunto $(Z_6,+_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6.

a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique

b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo? Justifique

c) Es $Z_3$ subgrupo de $Z_6$ ? Justifique

d) Elabore la tabla de operación del conjunto?

**Tarea reformulada**

**TAREA 10.** Sea el grupo $(Z_6,+_6)$ de los enteros módulo 6.

a) Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique

b) Escriba un subconjunto de $(Z_6,+_6)$ que no sea subgrupo. Justifique

c) ¿Es $Z_3$ un subgrupo de $Z_6$? Justifique

d) Elabore la tabla de operación para el conjunto $(Z_6,+_6)$

**Tarea antigua**

**TAREA 7.** Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.

b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$ ? Justifique

c) Qué condición cumple el subgrupo $H$ ? Justifique

d) Liste los elementos de la clase $bH$ ? Justifique

**Tarea reformulada**

**TAREA 11.** Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.

b) Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique

c) ¿Qué condición cumple el subgrupo $H$ para determinar el grupo cociente? Justifique

d) Liste los elementos de la clase $bH$. Justifique

Finalmente, luego de realizar los análisis a las preguntas y respuestas del cuestionario piloto y tomando en consideración la información obtenida de la revisión del instrumento mediante el juicio de expertos y la aplicación piloto del cuestionario, se obtiene la versión definitiva del cuestionario que permitió evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos de los estudiantes de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo.

### 3.5. Versión final del instrumento *CDM-Grupo*

Se presenta en la tabla 3.18 la distribución de las tareas del cuestionario final, luego de los análisis minuciosos respecto al juicio de los expertos; el criterio del investigador y la revisión de los resultados de la prueba piloto. Las tareas se reorganizaron tratando de ubicar en primer lugar, aquellas que no se alcanzaron a analizar (por el tiempo) y a partir del análisis a los subítems en busca de claridad y tratando de simplificar las tareas del cuestionario para adecuarlas al tiempo de 2 horas.

Tabla 3.18: Organización de tareas del cuestionario *CDM-Grupo*

| TAREA NUEVA | TAREA ANTIGUA |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 10 |
| 3 | 9 |
| 4 | 11 |
| 5 | 3 |
| 6 | 4 |
| 7 | 8 |
| 8 | 1* (se cambia) |
| 9 | 2 |
| 10 | 5 |
| 11 | 7 |

**TAREA 1.** Sea $D_3$ el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) Dé un ejemplo de un subgrupo de $D_3$. Justifique

b) ¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique

c) ¿Existe un subgrupo de $D_3$ isomorfo al grupo $(Z_4,+_4)$? Justifique

d) ¿El grupo $D_3$ es cíclico? Justifique

**TAREA 2.** Sea el grupo $S_4$ de permutaciones de los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ se dice que $f$ es un invariante del grupo $S_4$.

a) ¿Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) ¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a $f$ invariante? Justifique

c) Un polinomio $f$ se llama simétrico si para toda permutación $\alpha$ se cumple que $\alpha f = f$. Dé un polinomio simétrico. Justifique

d) Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine $b,c$ en función de sus raíces $x_1$, $x_2$. Justifique

**TAREA 3.** Considere el grupo $S_4$ de permutaciones de los cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$.

a) Determine el subconjunto de $S_4$ que deja invariante el número 2. Justifique

b) El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique

c) El subconjunto de permutaciones del grupo $S_4$ que deja invariante a la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_{2+}x_3x_4$ Justifique

d) ¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique

**TAREA 4.** El subgrupo de permutaciones regular de $n-$ símbolos, mueve los $n-$ símbolos excepto la identidad.

a) Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) ¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique

c) ¿El subgrupo es conmutativo? Justifique

d) ¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado a)? Justifique

**TAREA 5.** Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$.

Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto: $(Z_5,+_5)$.

a) ¿El cociente corresponde a? Justifique

¿El residuo corresponde a? Justifique

¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique

¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique

**TAREA 6.** Dado el conjunto $A_2 := \{1, 2, 3,...,99\}$ de los $z$– números y la función $r : \mathrm{N} \to A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto $A_2$ tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente $r$, por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$.

Se define además, en el conjunto $A_2$ la operación $x \oplus y = r_{(}x + y_{)}$.

Solucione $x \oplus 17 = 99$ y diga qué propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.

¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\oplus)$? Justifique

¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2,\oplus)$? Justifique

¿Qué $z_{-}$ números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2,\oplus)$? Justifique

**TAREA 7.** Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad $e$. La función $f : G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que $f$ es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

**TAREA 8.** Sea $G = \langle A,B \rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$Y\ B =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los elementos de $G$. Justifique

b) ¿$G$ es grupo abeliano? Justifique

c) ¿Determine el subgrupo de orden 2? Justifique

d) ¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en $G$? Justifique

**TAREA 9.** Sea $(R, \bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$

a) ¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique

b) ¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique

c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique

d) En el conjunto $R^2$ defina una operación en la cual no exista el elemento identidad. Justifique

**TAREA 10.** Sea el grupo $(Z_6,+_6)$ de los enteros módulo 6.

a) Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique

b) Escriba un subconjunto de $(Z_6,+_6)$ que no sea subgrupo. Justifique

c) ¿Es $Z_3$ un subgrupo de $Z_6$? Justifique

d) Elabore la tabla de operación para el conjunto $(Z_6,+_6)$

**TAREA 11.** Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.

b) Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique

c) ¿Qué condición cumple el subgrupo $H$ para determinar el grupo cociente? Justifique

d) Liste los elementos de la clase $bH$. Justifique