Capítulo 2

Primer Resultado: Estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo

2.1. Introducción

En este capítulo se inicia con la argumentación de la importancia del estudio de los significados del objeto matemático grupo para continuar con el desarrollo del análisis epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto de investigación; para esto se retoma la obra de Piaget & García (2008), para la realización de un primer análisis sobre la génesis del álgebra abstracta. Para Piaget & García (2008) "la epistemología explica cómo el pensamiento real del hombre, puede producir la ciencia en tanto sistema coherente de conocimiento objetivo" (pp.134-155); desde este punto de vista, los autores presentan en su obra consideraciones importantes sobre la evolución del pensamiento científico desde la antigüedad griega, hasta la evolución newtoniana, para el objeto matemático Grupo: en la obra se describen unos mecanismo de un progreso evolutivo que resultaban evidentes para los autores, los cuales consideraron que el conocimiento se produce por la interacción del individuo con su medio y de acuerdo con del desarrollo de unas estructuras que poseen los individuos.

A partir de la descripción del proceso evolutivo del objeto matemático, se realiza un análisis de las principales problemáticas que fueron dando forma al significado global del objeto Grupo: esto se realiza mediante la identificación y análisis de las configuraciones socio-epistémicas y a partir de ellas se describe la emergencia del significado global del objeto de investigación.

2.2. Estudio de los significados de la estructura algebraica

En el estudio de los antecedentes de la investigación surgieron preguntas importantes para la investigación, como: ¿qué es el objeto Grupo? ¿cuáles son los significados del objeto matemático? Estas preguntas llevaron a enfocar la investigación al análisis de la relación entre la evolución del objeto Grupo y la exploración del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de los estudiantes de formación matemática sobre dicho objeto: este conocimiento CDM, se explora ya que él se pone en juego en la labor de la enseñanza universitaria. Para dar respuesta a las preguntas formuladas, fue necesario comprender ampliamente qué debían conocer los estudiantes de formación matemática, futuros profesores, sobre el objeto de investigación; para llegar así, en una siguiente fase de investigación y bajo estos supuestos a explorar y evaluar su conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor: es decir, es necesario en primer lugar dar respuesta a la pregunta ¿cuál es el significado global del objeto Grupo? y en especial cuáles son los distintos significados dados al objeto matemático, en su desarrollo histórico.

Bajo esta perspectiva, el estudio de los significados del objeto de investigación, es de gran importancia, ya que a partir del significado global del objeto matemático, el profesor como representante de una institución educativa, determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, los efectivamente implementados y los evaluados en el proceso de instrucción del tópico matemático (Pino-Fan, 2013).

2.2.1. Génesis del álgebra

El uso de la palabra “álgebra” para designar una de las ramas de las matemática tiene su origen en el libro *Hisãb al–jabr w'al–muqãbalah* del matemático Muhammed ibn Musa, al–Khowarizmi (al–Juarismi). Esta obra corresponde al año 825 y una traducción del título corresponde a: La solución de ecuaciones por medio de restitución y reducción.

Así, la palabra *al–jabr* y *w'al–muqãbalah* significaban: restauración y oposición, por lo que en el contexto hacían referencia a resolver la ecuación agregando o quitando las mismas cantidades en cada lado de la ecuación, lo cual restaura el balance de la misma (esto es al–jabr) y simplifica la ecuación por medio de la cancelación de los términos opuestos (al–muqãbalah).

En Piaget & García (2008) se presenta un estudio basado en una *epistemología genética* sustentada en el método histórico-crítico, el cual se apoyaba en el método psicogenético para tratar de extraer los procesos inherentes a toda construcción de conocimiento: para este estudio, se retoma el capítulo de la obra orientado a la emergencia del objeto Grupo y en general al desarrollo del álgebra donde estos autores, subordinan la psicogénesis y la historia de la ciencia a la verificación de la hipótesis de una epistemología constructivista: la visión de la génesis del conocimiento del niño se refina y profundiza en este estudio histórico relacionado con la evolución del pensamiento científico (p. 134).

Algunos historiadores de la matemática, hacen remontar los orígenes del álgebra a diversos pueblos de la antigüedad: asirios, babilonios y egipcios; otros, ubican el punto de partida, en la escuela de Alejandría. Se tiene a *Diophanto* como la figura que representa al formulador de los problemas de aritmética en términos simbólicos:

el que introduce los valores determinados, representados no por números sino por letras para expresar de manera general las cantidades específicas que aparecen como incógnitas en las ecuaciones que conducen a la solución de los problemas propuestos. Para Piaget & García (2008) esta interpretación fue insatisfactoria, ya que resultaba claro por una parte, que las dificultades que encontraron los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos, se explicaba por la carencia de un álgebra que les permitiera formularlos en términos de operaciones. Por otra parte, resultaba difícil explicar el estancamiento total de una ciencia que solo vuelve a dar resultados en el siglo XVI.

En la interpretación de los autores, aparece Viète (Vieti-Vieta) como un renacentista, al cual el estudio de los griegos, le permite retomar la ciencia de Diophanto y perferccionarla para convertirla en el punto de partida del álgebra en la época moderna. Para los autores, no era claro el papel que desempeñaron los árabes, fuera de introducir una notación más adecuada para las operaciones aritméticas, de haber aportado el concepto de cero como número (que ellos importaron de la India) y del uso generalizado de las *letras* para representar cantidades indeterminadas. En este contexto, la obra de*Viète* se toma como la de un erudito y un sistematizador, más como la de un creador y un revolucionario en el campo científico.

El panorama cambia para los autores, con la obra de Klein, publicada en Alemania en 1934, con el título *Die grieschische Logistik und die Entstehung der Algebra,* y un mayor impactó se da con la publicación de la versión inglesa en 1968, de Greek mathematical thought and the origin of algebra. En ella, Jacob Klein presenta un análisis a las obras de Diophanto y Viète sobre la base de un estudio del pensamiento griego y del significado de la nueva ciencia desarrollada en los siglos XVI y XVII (Piaget & García, 2008, p.136).

Piaget & García (2008) citan el estudio de Klein, para ubicar los orígenes del álgebra dentro de un esquema general de unos mecanismos que se encontraron en el desarrollo de otros campos de la matemática y la física, así, como de las etapas más avanzadas del álgebra misma. El capítulo de la obra de Klein, *On the difference between ancient and modern conceptualization* les da los elementos para la interpretación de unos mecanismos puestos en juego, siendo coherente y sólidamente fundados. El eje de distinción entre Diophanto y Viète, pasa por una diferenciación que se establece sobre el uso de los símbolos matemáticos. El carácter algebraico atribuido a la Aritmética de Diophanto, se basaba en la utilización de diversos signos y abreviaturas, con referencia a las incógnitas de las ecuaciones, a las cuales se las ha interpretado como la expresión de un simbolismo algebraico: pero para estos autores, la simple utilización de letras para representar números o entes geométricos no le confiere el carácter simbólico al tratamiento de un problema (p.136).

A partir del siglo XVI el uso de letras inició a tener un carácter simbólico. Según los autores, cuando se le atribuye a Diophanto, la invención del álgebra, se toma partido, explícita o implícitamente, sobre el carácter simbólico de sus métodos de solución. Por lo cual se argumenta, que el hecho de que Diophanto hablara de problemas generales y de una solución general, podría sustentar la interpretación clásica. Sin embargo, la interpretación de Klein ponía en tela de juicio el carácter simbólico -en el sentido algebraico del término- que pudiera atribuirse a estas expresiones. A este respecto, su distinción entre "generalidad del método" y "generalidad del objeto de investigación" era fundamental: La matemática antigua se caracterizó por una tensión entre método y objeto (Piaget & García, 2008, p.137).

Viète, retomó una metodología característica del pensamiento griego, pero le da una extensión y una profundidad que le permiten reorganizar la obra de Diophanto en un nivel muy diferente. Para los autores, el mérito de la obra de Klein, se encuentra en mostrar, en qué se basaba dicha reorganización y por qué Viète debía ser considerado como el verdadero fundador del álgebra (Piaget & García, p.138).

Respecto al análisis, Viète retoma una distinción, hecha por los griegos, en dos géneros: el análisis zetético o teórico y el análisis porístico o problemático. Pero agrega un tercer género al que llama rético o exegético. Hay por consiguiente -según Viète- un arte zetético por el cual se encuentra la ecuación o la proporción entre la magnitud que se busca y aquella que es dada; un arte porístico por el cual, a partir de la ecuación o de la proporción, se busca verificar el teorema establecido y un arte exegético por el cual, a partir de la ecuación establecida o de la proporción, se descubre la magnitud que se busca.

El hecho esencial en la formulación de Viète fue el término "magnitud" el cual se utilizó en su sentido más general: la magnitud buscada era, o bien un número determinado, o una magnitud geométrica específica medible (Piaget & García, 2008, p. 138).

Klein citado en Piaget & García (2008) establece en su obra (1972):

> **De allí deriva el doble nombre de la tercera forma de análisis cuyo objetivo es, tanto el cálculo de las magnitudes aritméticas, como la construcción de las magnitudes geométricas partiendo de las ecuaciones canónicas ordenadas; ella es llamada rética con respecto a los números a los cuales conduce y que pueden ser expresados por los nombres comunes de los números de nuestro lenguaje; ella es llamada exegética con respecto a las *magnitudes geométricas* que considera como directamente presentes a nuestra vista (p. 138).**

Para Klein, convergen allí dos líneas independientes: el análisis geométrico de Pappo y los métodos aritméticos de Diophanto. La nueva álgebra de Viète era a la vez geométrica y aritmética. Para lograrlo, fue necesario llegar a un nivel de generalización más elevado que lo que estuvo al alcance de los antiguos. En la obra de Viète se introduce una nueva distinción aclaratoria:

> **Las consideraciones numéricas (logistice numerosa) operan con números; las consideraciones por especies (logistice speciosa) operan con especies o formas de las cosas como por ejemplo, con las letras del alfabeto (citado en Piaget & García, 2008, p. 139).**

La distinción crucial hecha por Viète que le permitió dar un gran paso adelante y constituir el álgebra, como una nueva disciplina, fue el pasaje del concepto de "arithmos" al concepto de "símbolos generales". El arithmos hace referencia inmediatamente a las cosas o a las unidades, mientras que los símbolos (letras) utilizados por Viète hacían referencia directamente a la propiedad de ser un número, propiedad que pertenece a cada uno de los números e indirectamente a las cosas o a las unidades cuya numerosidad está representada por un número. En otros términos, las letras remiten al concepto de número en general (Piaget & García, 2008).

A partir de Viète y hasta mediados del siglo XIX, el estudio del álgebra se limitó al estudio de las ecuaciones algebraicas. El método de resolución de la ecuación de segundo grado fue descubierto por los hindúes, aun cuando los babilonios habían encontrado anteriormente soluciones de ecuaciones particulares de este grado. Las ecuaciones de tercero y cuarto grado fueron resueltas hacia finales del siglo XVII y se conoce la disputa entre Tartaglia y Cardano, sobre quién era el verdadero descubridor de la fórmula que permitía resolver las ecuaciones de tercer grado (Piaget & García, 2008, p.141).

Durante largo tiempo tuvieron lugar numerosas tentativas para encontrar fórmulas para resolver ecuaciones de grado superior a cuatro por el método de radicales: pero los únicos logros de este período se refieren a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En la misma época se encuentran también soluciones algebraicas para ciertos problemas particulares provenientes de la geometría o de la mecánica. Sin embargo, cada problema necesitaba de un método de resolución propio. Este es un período que se caracteriza como de "intra-operacional" (Piaget & García, 2008).

La ausencia de progreso en este campo durante el siglo XVII y primera mitad del siglo XVIII se debe a que la atención de los matemáticos se concentró, durante ese largo intervalo de tiempo, en el nuevo instrumento creado por Leibniz y por Newton: el cálculo infinitesimal. Esta herramienta, en manos de matemáticos como: Euler, Lagrange, Gauss, Cauchy, conducen el álgebra -durante la segunda mitad del siglo XVIII- a un nuevo nivel de desarrollo. En ese momento se llegan a formular, en el interior del álgebra, problemas de una gran generalidad, tal como el que conduce al "Teorema Fundamental del Álgebra" donde se llega haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas y sus transformaciones, tomadas del cálculo infinitesimal. Este período se cataloga como a una etapa inter-operacional. Durante largo tiempo, las "transformaciones" dominaron el álgebra, hasta el surgimiento de la primera estructura algebraica: Grupo, donde se da inicio a la etapa "trans-operacional" (Piaget& García, 2008, p.141).

La figura clave en la transición entre la etapa intra-operacional y la etapa interoperacional es *Lagrange*. Las tentativas empíricas para resolver ecuaciones de diversos grados (propias de la etapa intra operacional) fueron sustituidas por Lagrange, por una cuestión de alcance mucho más general; Lagrange se cuestionó sobre **¿cuál es exactamente la naturaleza de los métodos de resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado y cuál ha sido la razón de su éxito?** Lagrange pensó obtener de ésta forma, ideas que le permitieran abordar las ecuaciones de grado superior. En su análisis llegó a mostrar que todos los métodos consistían en introducir funciones que transformaran la ecuación de la cual se partía y que permitieran llegar a una ecuación reducida. El problema así formulado se reducía a encontrar la relación entre las soluciones de la ecuación reducida y las soluciones de la ecuación original (Piaget & García, 2008, p.142).

Lagrange, utilizó las ideas que conducirán a la teoría de grupos: "el número de valores diferentes que toma un polinomio cuando se permutan las variables de todas las formas posibles". Para esto, analizó ciertas funciones de las raíces de la ecuación y demostró que el número de valores que puede tomar una función en las raíces $x_1,x_2,...,x_n$ cuando se permutan las x_j de todas las formas posibles es un divisor de n!: el número de permutaciones posibles de las raíces (Piaget& García, 2008, p.142).

Para una ecuación de cuarto grado, con raíces x_1,x_2,x_3,x_4 la función $y = x_1x_2 + x_3x_4$ toma tres valores diferentes cuando se permutan las raíces de las 24 formas posibles. Lagrange demuestra que el número de dichos valores diferentes determinaba el grado de la ecuación reducida que permitía resolver la ecuación original (Piaget & García, 2008).

Seguidamente, *Ruffini* retoma las ideas de Lagrange e intenta demostrar la imposibilidad de encontrar una solución por radicales de la ecuación de quinto grado. Su demostración quedo incompleta, pero el marco conceptual en el interior de su trabajo lo sitúan en un lugar excepcional dentro de este período inter-operacional del álgebra, muy próximo a la etapa siguiente que Galois inaugura (Piaget & García, 2008, p.143).

Para Ruffini, las permutaciones estaban ligadas a los valores de las raíces. La clase de las permutaciones que no cambiaban el valor de la función, no tenían para él estructura: él concibe la transformación implicada en el pasaje de una permutación a otra, pero no concibe la estructura matemática dentro de la cual esta transformación está a su vez implicada (Piaget & García, 2008, p.143).

Por su parte, *Cauchy* consideró las funciones con un grado mayor de generalidad: se trataba de funciones de cantidades, pero dichas cantidades no eran consideradas como raíces de las ecuaciones: eran solamente letras que representaban cantidades indeterminadas. Cauchy, llama “permutación” al orden de las letras. La transición de una permutación A_1 a otra A_2 la llamó *sustitución* y la representó en la notación:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

En la misma dirección, Cauchy define la multiplicación de sustituciones y la sustitución idéntica, llegando a la introducción de la sustitución inversa:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

A partir de estos desarrollos se demuestran algunos teoremas que se consideran como los antecesores inmediatos de los teoremas generales sobre los grupos de sustituciones. Pero no hay en Cauchy una idea de estructura ya tematizada (interiorizada), sino de cierto modo explícitada (Piaget & García, 2008, p.143).

Continuando con esta emergencia de significados, las investigaciones aritméticas de *Gauss* ocupan un lugar singular hacia el final de este período. En particular en su obra, en la sección quinta que tenía el título: "De las formas y de las ecuaciones de segundo grado" Gauss, estudia las formas cuadráticas en relación con la solución de las ecuaciones cuadráticas indeterminadas: realiza un análisis minucioso de las formas cuadráticas binarias y ternarias, lo cual se convierte en su tema principal.

Para Piaget & García (2008), Gauss, llegó a uno de los puntos más originales en su obra, que introduce en los siguientes términos: vamos a pasar a otro tema muy importante y del cual nadie se ha ocupado hasta ahora, a la composición de formas (p. 241). La definición de composición de formas dada por Gauss constituye la primera operación introducida en un dominio no numérico, cuyas propiedades no podían ser deducidas directamente de las operaciones entre números.

Algunos historiadores de la matemática, mostraron su asombro ante la ausencia de respuesta a la pregunta ¿por qué estos matemáticos, habiendo llegado tan cerca de los conceptos de la teoría de grupos, no pudieron dar el pequeño salto que hacía falta para constituirla? Para Piaget & García (2008), hay una respuesta a esta cuestión, el pequeño salto solo lo era, en apariencia. Gauss constituye, junto con Lagrange, Ruffini, Cauchy y otros matemáticos, la culminación del período "inter-operacional" en el desarrollo del álgebra y más particularmente, en la historia de la teoría de las ecuaciones algebraicas. Sus métodos consistieron esencialmente en transformar funciones y encontrar las relaciones que permanecían estables. Las propiedades que ellos dedujeron corresponden a: "los invariantes de sistemas de transformaciones" (Piaget & García, 2008, p. 146).

El tipo de desarrollo encontrado tanto en la historia de las ciencias como en la psicogénesis, evidenció que hay un largo camino por recorrer antes de poder pasar de un sistema dado de transformaciones a una estructura total dentro de la cual aquéllas resultaban variaciones intrínsecas. Pero en eso consistía, el pasaje de las conexiones inter-operacionales a las conexiones trans-operacionales. A nivel psicogenético, la etapa "trans-operacional" se alcanza cuando el sujeto puede efectuar operaciones sobre operaciones (Piaget & García, 2008, p.146).

A este respecto, se señala que *Galois* es quien introduce la noción de grupo a partir de la acción de agrupar. Las definiciones siguientes constituyen su punto de partida (Piaget & García, 2008, p.146):

> **La permutación de la cual se parte para indicar las sustituciones es totalmente arbitraria cuando se trata de funciones; puesto que no existe ninguna razón para que en una función de varias letras, una ocupe un rango más que otra. Sin embargo, como apenas se puede formar la idea de una sustitución sin la de permutación, haremos en el lenguaje un empleo frecuente de las permutaciones y no consideraremos las sustituciones sino como el pasaje de una permutación a otra.**
>
> **Cuando deseemos agrupar sustituciones, las haremos provenir todas de una misma permutación. Como se trate siempre de cuestiones donde la disposición primitiva de las letras no influye en nada, en los grupos que consideraremos, se deberán tener las mismas sustituciones cualquiera que sea la permutación de donde se haya partido. Por consiguiente, si en un grupo tal, se tienen las sustituciones S y T, se está seguro de tener la sustitución ST (Piaget & García, 2008, p. 146).**

Más adelante, dice explícitamente: "Se llama grupo a un sistema de permutaciones tal que [...] representaremos este conjunto por G" (Piaget & García, 2008, p. 146).

Aquí, se encuentran las fuentes de la primera noción de estructura en la historia del álgebra, se encuentra el punto que permite comprender el pasaje del periodo inter al periodo trans: exactamente como en el caso de la psicogénesis, esta transición supone el pasaje de las operaciones sobre elementos, a las operaciones sobre operaciones (Piaget & García, 2008).

Luego de la presentación de la visión general en la emergencia del objeto Grupo, se pasa a analizar en forma más detallada cada una de las etapas en la evolución, para presentar el fundamento fenomenológico.

2.2.2. Época antigua y edad media (Siglo V-XV)

En la sección anterior se presentó la evolución del objeto Grupo y se identificaron unas etapas o periodos en su desarrollo: ahora se profundiza en los aportes más relevantes de cada época, los cuales permitieron la determinación de los significados parciales que fue tomando el objeto Grupo.

Período cero: Métodos empíricos de solución de ecuaciones algebraicas particulares de grado 1, 2, 3 y 4

El álgebra en las civilizaciones antiguas

En el siglo II a. C. los matemáticos chinos escribieron el libro: *El arte del cálculo matemático*, en el se planteaban diversos métodos para resolver ecuaciones de primer y segundo grado; gracias a su ábaco tenían la posibilidad de trabajar números positivos y negativos y se reconoce a Diofanto de Alejandría, como el precursor del álgebra moderna. Diofanto fue un matemático griego, que publicó la obra "Arítmètica" en la cual trataba en forma rigurosa no solo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo e introdujo un simbolismo algebraico elemental, designando la incógnita con un signo que corresponde a la primera sílaba de la palabra griega arithmos (número). Los problemas de álgebra que propuso, prepararon el terreno para lo que siglos más tarde sería la teoría de las ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002).

La matemática egipcia, babilónica y griega se clasifica de "tipo algebraico," cada una de distinta índole y se habla de una pre_álgebra ya que en ésta etapa no se tomó conciencia del álgebra como un área independiente de la aritmética y la geometría (en el caso de Egipto y Babilonia, se habló de un "álgebra aritmética" y en el caso de Grecia de un "álgebra geométrica"). En ambos casos se encuentran problemas algebraicos específicos, para los cuales existían métodos de solución para ciertos tipos de ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002, p. 5).

Varios de los pueblos que habitaron Mesopotamia resolvieron problemas concretos que involucraban ecuaciones algebraicas de primer, segundo y tercer grado; la matemática tenía un fin utilitario y no se desarrolló como ciencia autónoma como ocurrió en Grecia donde la Geometría y la Aritmética (Teoría de números) lograron un alto nivel de desarrollo respecto a las matemáticas de las civilizaciones que les precedieron. Con el declinar de la matemática griega (250_600 d. C.) se retomaron las antiguas tradiciones de los calculistas de Mesopotamia y aparece nuevamente el interés por solucionar ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002, p. 7).

El álgebra babilónica, fue de tipo verbal al igual que la egipcia y existen registros de alrededor del año 1600 a. C. donde se muestra que los problemas de ecuaciones lineales eran muy elementales para ellos y podían resolver problemas que involucraban *ecuaciones cuadráticas y cúbicas* usando fórmulas desarrolladas. De las tablillas, se establece que los babilónicos podían resolver ecuaciones cuadráticas con el método que corresponde a la fórmula para las ecuaciones de segundo grado: el método se resume como: encontrar dos números si se conoce su suma y su producto (Dávila, 2002, p.13).

La resolución de las ecuaciones de segundo grado entonces tiene dos orígenes distintos: uno aritmético, usado por los babilónicos y otro geométrico utilizado por los griegos. Uno de los problemas más significativos encontrados en textos antiguos corresponde a:

Obtén el lado de un cuadrado si su área menos su lado es igual a 870.

Para la solución de las ecuaciones, los babilónicos utilizaron procesos aritméticos de suma, resta y producto: ellos no conocían los números negativos. Varios siglos después, los griegos resolvieron este problema y otros similares mediante la utilización del método de aplicación del área. El matemático alemán Johann Widmann dEger, escribe por primera vez en 1489, los símbolos + y – para sustituir las letras *p* y *m* que eran las iniciales de las palabras plus (más) y minus (menos) y que hasta entonces se utilizaba para representar la suma y la resta respectivamente; se señala que los símbolos para la multiplicación × y para la división: fueron introducidos por William Oughtred en el año 1657 (Dávila, 2002).

Los egipcios, disponían de un método para resolver ecuaciones de primer grado, al que llamaban: "el método de la falsa posición". En el papiro Rhind, se encuentran una serie de problemas planteados donde inician utilizando unas primeras estrategias algebraicas y al número desconocido, el que se quiere obtener, lo llamaban *montón.* Entre los problemas más representativos y famosos de dicho papiro se encuentra el número 24 (Dávila, 2002, p.12): *Calcula el valor del montón, si el montón y un séptimo del montón es igual a 19.*

A partir de estos desarrollos, se observa que la ciencia tuvo su origen en la Grecia clásica y que su legado fue de gran importancia para la civilización occidental: todos los hombres por naturaleza, desean conocer: dice Aristóteles y estas palabras reflejan el espíritu aventurero griego (Dávila, 2002, p. 16): el deseo de conocer los llevó a Egipto y Babilonia en donde aprendieron la ciencia de éstas civilizaciones, la cual desarrollaron hasta crear su propia ciencia. Reconocieron su deuda con estas dos grandes civilizaciones; como dice Platón: "todo lo que nosotros los griegos recibimos lo mejoramos y perfeccionamos". Además, supieron reconocer en el uso de la razón una poderosa herramienta para entender la naturaleza; tenían el convencimiento de que ésta podía ser explicada en términos matemáticos (Dávila, 2002, p. 16).

Los griegos, dieron a la matemática el rango de ciencia deductiva por excelencia. Esto fue posible gracias a que entendieron la diferencia que existía entre manejar ideas abstractas y generales en lugar de las limitaciones que imponía la ciencia, orientada a resolver los problemas cotidianos: ellos distinguían que una recta, un triángulo, un círculo: eran conceptos abstractos que surgían cuando se idealizaban sus imperfectas realizaciones en la naturaleza o en las cosas que se usaban en la vida diaria: ellos, estaban convencidos que solo con el uso de la razón era posible conocer, ya que los sentidos daban imágenes imperfectas del mundo que los rodeaba. Esta fue la semilla que dio lugar a una real preocupación por la "formalización" es decir, por la justificación lógica de los razonamientos. Esto los llevó a reconocer que en todo razonamiento era preciso partir de ciertos principios básicos y evidentes por sí mismos y de los cuales se pudiera deducir, con el uso de la razón, resultados más profundos: tenían claro que no era posible basar sus principios básicos en otros todavía más elementales o demostrarlos mediante otros principios:

> **En cuanto a la demostración circular, su imposibilidad absoluta es patente, si es cierto que la demostración ha de partir siempre de cosas anteriores y más notorias. En efecto, es imposible que las mismas cosas sean respecto de unas mismas cosas anteriores y posteriores a la vez... Los partidarios de la demostración circular, no solo cometen la falta que aquí indicamos, sino que en el fondo se limitan a decir que una cosa existe si existe (Aristóteles, 1993: citado en Dávila, 2002, p.17).**

Los logros más grandes de los griegos fueron geométricos y el punto de vista pitagórico de que todo podía ser explicado en términos de los números naturales o sus razones (arithmos), pero esto no fue suficiente para detener el dominio de la geometría. No se sabe por qué la preferencia de los matemáticos griegos por la geometría, pero se cree que el descubrimiento de los números inconmensurables (los que no se pueden expresar como razones de enteros positivos) acabó con las bases de la fe pitagórica en los números (Dávila, 2002).

Al álgebra de tipo geométrico, se le puede llamar "álgebra geométrica" y fue la que prevaleció en la matemática griega y permaneció por muchos siglos; así, las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación, propias del álgebra, tales como la asociatividad de la suma o la propiedad distributiva resultaban obvias en el álgebra geométrica; también las identidades $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ y $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ se demostraban fácilmente en este contexto y por ejemplo la ecuación $x^2 = ab$ era fácil de resolver. Las fórmulas anteriores se demuestran en el segundo libro de los Elementos en términos geométricos; esto hace difícil el manejo de las ecuaciones de grado mayor que dos, por lo que raramente trabajaron ecuaciones cúbicas o bicuadráticas (Dávila, 2002).

El libro quinto de los "Elementos" es uno de los más admirados de los trece que componen la obra. En el se trata: la teoría de magnitudes, de la cual Bourbaki dice que es la creación más original de la matemática griega. Gran parte del material se le atribuye a Eudoxo ya que su teoría de proporciones se aborda en él mismo y en cierta forma esta fue una respuesta al problema de la inconmensurabilidad ya que desde que se descubrieron las proporciones no conmensurables, los griegos trataron de eliminar en lo posible el uso de las proporciones: Eudoxo establece una teoría de las proporciones que es independiente de la conmensurabilidad (Dávila, 2002, p. 18).

2.2.3. Edad Media (siglo V - siglo XV)

Periodo cero: Los Hindúes y la solución de las ecuaciones algebraicas

En este período se estudian los desarrollos del álgebra entre los años 650 y 1750. En este período surgieron las condiciones que le dieron al álgebra un lugar independiente dentro de las matemáticas y se desarrolla una notación adecuada, que prepara el camino para el álgebra simbólica y se propicia el desarrollo del álgebra moderna (Dávila, 2003a, p.27).

Con el declinar de la matemática griega, los nuevos centros de aprendizaje matemático se localizaron en la India y en el mundo árabe, que en el siglo VII estaba en plena expansión. Con el auge de la matemática griega, Alejandría fue el centro del saber y en el caso de las matemáticas árabes, Bagdad se convirtió en la ciudad cosmopolita donde llegaban los hombres de ciencia, sin interesar su origen étnico ni su religión (Dávila, 2002, p. 27). Sin embargo, las matemáticas en la India no se desarrollaron como en la cultura árabe: entre los aportes más importantes de los hindúes se encuentra, su sistema de numeración del cual proviene el que se usa actualmente y que fue importante para el surgimiento de un álgebra de tipo aritmético en la cultura hindú (Dávila, 2003a).

Sin embargo, los egipcios y los griegos usaron sistemas de numeración en base diez aunque no eran posicionales y los babilónicos usaban un sistema posicional base 60; además, en la matemática griega también se encontraban símbolos especiales para los diez primeros dígitos, pero fue en la India donde funcionaron los aspectos de: a) Base decimal; b) El principio de numeración posicional y c) El uso de un símbolo especial para cada los diez primeros dígitos (Dávila, 2003a).

Brahmagupta (598-670), proporciona una de las contribuciones más importantes de la matemática hindú al álgebra. Su obra más significativa, el "Brahmasphuta Siddh*a*nta" es un escrito de trigonometría, geometría y álgebra donde aparecen resultados correctos e incorrectos. En relación al álgebra, los aportes más importantes son las fórmulas para calcular áreas y las soluciones generales para ecuaciones cuadráticas donde considera el caso de las soluciones negativas (Dávila, 2003a, p. 29).

El matemático hindú Bhaskara (1114-1185) realizó contribuciones en álgebra; este matemático escribió seis textos matemáticos; dentro de los más conocidos se encuentran: "Vija–Ganita y Lilavati" que contienen problemas que involucran ecuaciones lineales y cuadráticas, cálculo de áreas, progresiones aritméticas y geométricas y ternas pitagóricas; algunos de los problemas provienen de textos hindúes anteriores tales como el Brahmasphuta Siddh*a*nta, que tenían algunos errores, pero que Bhaskara corrige. Además, este matemático es el primero en afirmar que el cociente de una cantidad positiva al ser dividida por cero es infinito. Con las palabras: "...no hay alteración aunque mucho sea agregado o extraído..." lleva directamente al problema del infinito, que solo lo resuelve George Cantor en el último cuarto del siglo XIX y que desde la época de los griegos había desafiado las mentes más brillantes(Dávila, 2003a, p. 32).

Bhaskara, estudió también la ecuación de Jhon Pell del año 1688, que corresponde a $px^2 + q = y^2$ que había sido trabajada por Brahmagupta para el caso $q = 1$ perfeccionando el método y considerando los casos $q = -4,-2,-1,1,2$ *y* 4. Los hindúes a diferencia de los griegos, consideraban verdaderos números a las raíces irracionales de números tales como $\sqrt{2}$ que tiene gran significado en álgebra (Dávila, 2003a).

Periodo cero: Los Árabes (476-1492) y la solución de ecuaciones algebraicas

La caída de Roma (476 D.C.) marca el inicio de la Edad Media; esto no significó el fin del imperio romano, ya que el centro de poder se encontraba en Constantinopla donde surgieron cambios especialmente religiosos; la adopción del cristianismo como religión oficial y el nacimiento del imperio Bizantino. Otro movimiento, que se gestó en el Medio Oriente, que tuvo repercusiones en esta etapa fue el Islam en el año 622, así, que fue la civilización árabe, la que dio un nuevo impulso al estudio de las ciencias, preservando y cultivando el legado de los griegos y otras civilizaciones como la hindú. Además, como los árabes habían conquistado gran parte de la península Ibérica; España se convirtió en un centro cultural importante al que acudían eruditos de toda Europa a nutrirse del conocimiento científico. Así, Euclides, Aristóteles, Platón, Arquímedes, Ptolomeo y otros pensadores griegos fueron conocidos por los escolares medievales por las traducciones al latín realizadas por los árabes.

Con el auge del comercio en Italia en los siglos XIII y XIV se llegó a adoptar los números indo–arábigos en occidente y junto con estos llegaron tratados científicos de los árabes, traducidos al latín por académicos europeos. Esta revolución comercial, fue la responsable de que se fundaran las *escuelas del ábaco* a finales del siglo XIII; pero a medida que se extendía el uso de los números indo–arábigos los *maestros algoristas* que dominaban estas técnicas de operación superaron por mucho a los maestros abacistas. De esta forma, los comerciantes adoptaron su uso y propagaron el nuevo sistema.

El álgebra de los árabes se orientaba a resolver problemas por métodos aritméticos que involucraban: ecuaciones lineales de primer grado y ecuaciones cuadráticas; estos problemas trataban sobre repartición de herencias, transacciones comerciales y medida de terrenos. Así, el álgebra fue una herramienta indispensable para los comerciantes y en el siglo XIV ya los maestros del ábaco se convierten en algebristas e hicieron contribuciones originales como: solución de ecuaciones cúbicas y bicuadráticas particulares relacionadas con problemas específicos.

En el álgebra árabe se tenían métodos generales para resolver ecuaciones cuadráticas que consistían en completar cuadrados: surge así, de manera natural, la búsqueda de métodos que funcionaran para cualquier tipo de ecuación cúbica o de cuarto grado. El álgebra de esta época presentó un carácter “retórico” es decir, verbal, ya que no se tenía la notación simbólica y además las soluciones de las ecuaciones solo podían ser positivas o cero ya que no se tenía idea de los números negativos, que fueron introducidos tiempo después (Dávila, 2002, p. 8).

Otro matemático árabe, poeta, filósofo y astrónomo fue Omar Khayyam (1050-1123), quien escribió un tratado en álgebra más avanzado que el de al-Juarismi ya que presentaba la teoría para resolver la ecuación de segundo grado y abordaba la solución de ecuaciones cúbicas por medio de construcciones geométricas. Las soluciones que obtiene en el caso de la cúbica están dadas como los puntos de intersección de curvas: por ejemplo, una hipérbola y un círculo o una hipérbola y una parábola. Este problema había sido abordado por Arquímides, pero Omar dio un tratamiento sistemático que incluía muchos casos según los coeficientes de la cúbica, ya que al no manejar los números negativos, se tenían distintos tipos para la ecuación, como cubos y cuadrados iguales a números ($ax^3+bx^2=c$) o cubos y raíces iguales a cuadrados ($ax^3+bx=cx^2$) (Dávila, 2003a).

En esta dirección, al matemático árabe Muhamed Abu'l–Wefa (940–998) se le atribuye un tratado de álgebra, la traducción de la Aritmética de Diofanto y una versión abreviada del Almagesto. también, Abu Bekr al–Kharki (953–1029) escribió un texto de álgebra, el "Al–Fakhri" donde se da la primera solución numérica a ecuaciones de la forma $ax^{2n}+bx^n=c$ y por tanto, se cree que es el primer matemático en liberar completamente al álgebra de las operaciones geométricas y reemplazarlas con operaciones de tipo aritmético (Dávila, 2003a).

No es claro, el interés de los árabes en el álgebra, pero se cree que se debe al complicado sistema de leyes de herencia, y a la repartición de las propiedades, que involucraba el tener que resolver ecuaciones algebraicas muy sofisticadas. Se pueden distinguir cuatro características de las matemáticas árabes: su sistema numérico y su aritmética que se derivan de fuentes indias, pero los árabes le agregaron su invención de las fracciones decimales. De otro lado, el álgebra, tenía raíces griegas, indias y babilónicas pero los árabes le dieron nuevas formas (Dávila, 2003a).

En los siglos V al XII en la India y en la cultura árabe se dieron grandes contribuciones a la ciencia en general y a las matemáticas en particular: en estos tiempos Europa vivía un procesos de inestabilidad y retroceso. En contraste, la España árabe de los siglos VIII a XII era un centro cultural importante al que concurrían los europeos interesados en aprender la ciencia árabe. Así, el siglo XII representa un punto de quiebre en la historia de la ciencia de Europa. En este siglo el sistema de enseñanza cambia con el nacimiento de las universidades y con la toma de una nueva actitud hacia las ciencias físicas y matemáticas (Dávila, 2003a).

Leonardo de Pisa (1175–1240) era conocido como Fibonacci; hijo de Guilielmo de la familia Bonnacci, representante de los mercaderes de Pisa (Italia) en el comercio que realizaban en el norte de Africa. Por este motivo, Leonardo estudió con un maestro árabe y viajó a Egipto, Siria y Grecia y aprendió álgebra y el sistema de numeración de los árabes: escribe el libro, “Liber Abaci” en 1202 que no es un libro sobre el uso del ábaco, sino un tratado en el que se incluyen problemas en los que se usa el sistema de numeración indo_árabigo de las nueve figuras significativas y el cero (zephirum). En este texto se explicaban las operaciones aritméticas y la extracción de raíces, problemas sobre transacciones comerciales y cálculos sobre conversión de diferentes tipos de monedas. Debido a la originalidad de sus trabajos, se considera a Fibonacci como el algebrista europeo más importante de la edad media (Dávila, 2003a).

En el siglo XV se presentaron varios factores que trajeron como consecuencia nuevas formas de organización política, social y económica en Europa. Se inventó la imprenta y la brújula; fue posible explorar y descubrir nuevos continentes; los libros alcanzaron a un mayor número de lectores y se favoreció una visión antropocéntrica del mundo, esto es, el hombre como el centro de todas las cosas y el fin absoluto de la naturaleza, terminando la edad media dando inicio al Renacimiento (Dávila, 2003a).

Tabla 2.1: Significado dado al objeto Grupo en las civilizaciones antiguas y al inicio de la edad media

	EDAD MEDIA	
PERIODO CERO	Nicolás Chuquet(1450-1500) Francés Leonardo de Pisa-Fibonacci (1175-1240)	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO
	Árabes: OmarKhayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998)	
	Hindúes: Bhaskara (1114-1185) Brahmagupta (598-670)	
	Civilizaciones antiguas: Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	

2.2.4. El renacimiento (siglo XV-XVI)

Periodo uno: Determinación de las relaciones entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado 2, 3 y 4 y el simbolismo algebraico

Un trabajo significativo a finales del siglo XV lo desarrolla Nicolás Chuquet (1445–1488), su principal obra *Triparty en la science des nombres,* apareció en forma manuscrita en 1484 y es el primer libro francés de álgebra. En el se percibe una clara evidencia italiana y se cree que es posible que Chuquet estuviera familiarizado con el *Liber Abaci* de Fibonacci. La tercera parte de esta obra, estaba dedicada a problemas de tipo algebraico y en el se desarrolla una notación propia; por ejemplo, $\cdot 5^1.$,$6^2.$ *y* $\cdot 10^3.$ representaban $5x$ $6x^2$ *y* $10x^3$ (Dávila, 2003a, p.43).

También escribe $\cdot 4^1.$ egaulx a $\bar{m}.$ $2^0.$ que representa la ecuación $4x = -2$ por esto, se cree que Chuquet es el primero en escribir una ecuación algebraica en la cual un término negativo aparece de forma aislada. Este trabajo, no tuvo gran influencia debido a la aparición en 1494 del primer libro impreso de álgebra: "Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportiolanita" del fraile Luca Pacioli (1445–1517) publicado en italiano, hecho que era inusual en ese tiempo. En el trabajo se presenta un compendio del conocimiento matemático general de la época y se trata de aritmética, álgebra, geometría euclidiana elemental y teneduría de libros (Dávila, 2003a, p.43).

Respecto al álgebra, en la obra "Summa" se presentan métodos de solución para las ecuaciones lineales y cuadráticas que eran bien conocidos. Para la ecuación cúbica intervienen: a) Número, cosa y cubo (n, x, x^3); b) Número, censo y cubo (n, x^2, x^3) y c) Número, cubo y censo de censo (n, x^3, x^4); Paciolo comenta en su obra que *no ha sido posible hasta ahora formar reglas generales* para resolverlas. Paciolo, era profesor de varias universidades italianas; amigo de Leonardo da Vinci de quien recibió gran influencia; entre las universidades se encuentra la de Bolonia donde enseñó de 1501-1502 y donde conoce a Scipione del Ferro que era profesor de matemáticas allí (Dávila, 2003a).

En los siglos XV y XVI en Italia se formaron los algebristas más importantes de Europa y se habla de la escuela italiana de álgebra. Pero en Alemania, en forma similar, se daban avances en esta disciplina y en 1524 aparece la obra: "Die Coss" de Adam Riese (1492-1559) donde se trabajaron problemas algebraicos y en especial problemas del al-jabr de al-Juarismi. Otros trabajos alemanes fueron "Coss" que se traduce como la cosa: la incógnita, de Cristoph Rudolff (1499-1545) publicado en 1525 donde se usa por primera vez la notación decimal para fracciones y el símbolo √ para raíz cuadrada; *v*√ para raíz cúbica y *vv*√ para raíz cuarta. En esta dirección, Michael Stiefel (1487-1567) publica su obra: "Arithmetica" en 1544, donde trabaja números negativos, radicales y potencias positivas y negativas; su trabajo sirvió para hacer extensivo el uso de los símbolos alemanes + y − que aparecieron impresos en 1489 en un trabajo de Johanes Widman (1462-1498), publicado en Alemania (Dávila, 2003a, p. 44).

Periodo uno: La escuela italiana en el renacimiento y la solución de ecuaciones algebraicas

A mediados del siglo XVI se publicaron simultáneamente tres obras que se consideran las aportaciones renacentistas más importantes a la ciencia: De revolutionibus orbium celestium- sobre las revoluciones de las esferas celestes, de Nicolás Copérnico (1473-1543) publicada en 1543; De humanis corporis fabrica-sobre la estructura del cuerpo humano, de Andreas Vesalius (1514-1564) publicada en 1543 y el Artis magnae sive de regulis algebraicis, de Girolamo Cardano (1501-1576) publicada en 1545. Las dos primeras obras cambiaron la idea medieval sobre el universo y el cuerpo humano y el Arte magno, fue un aporte importante para el posterior desarrollo del álgebra moderna donde se daban reglas generales para solucionar ecuaciones cúbicas y bicuadráticas (Dávila, 2003a).

Para la ecuación cuadrática las soluciones estaban dadas por una expresión que involucraba expresiones aritméticas elementales de los coeficientes de la ecuación: suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. A este proceso se le conoce como el *método de solución de la ecuación algebraica por radicales.* Para las cúbicas y bicuadráticas, se pretende el mismo proceso: este problema fue considerado en el mismo nivel que el problema griego de la cuadratura del círculo por Pacioli; se resuelve en forma correcta en la obra de Cardano y al mismo tiempo se genera una controversia por la autoría de los métodos de solución (Dávila, 2003a).

Como se mencionó, Scipione del Ferro (1465-1526) enseñaba matemáticas en la universidad de Bolonia y resolvió un caso especial de la ecuación cúbica: en este tiempo, no se acostumbraba a escribir la ecuación con coeficientes negativos y el álgebra era de tipo retórico; por ejemplo, el problema:

El cubo y la cosa igual a un número.

Se representa por la ecuación:

$$x^3 + px = q$$

Donde, p, q son enteros positivos y el método de solución se expresaba en forma verbal. Este logro del Ferro fue notable ya que el problema, en su forma general, había estado sin solución desde los tiempos de Arquimedes, quién pudo resolver ecuaciones cúbicas por métodos geométricos (Dávila, 2003a, p. 46). Del Ferro no publicó sus resultados, pero, antes de morir reveló el método a su yerno, Annibale della Nave y a su discípulo Antonio María Fior, quién de regreso a su tierra Venecia, pretendía formarse como matemático y para ello retó a una contienda matemática a Niccolo Fontana (1499-1557), profesor de matemática: este profesor era conocido como Tartaglia, que significa tartamudo. Cada uno proponía 30 problemas y se estableció la fecha de solución como el 13 de febrero de 1535. Tartaglia advirtió que todos los problemas eran lo mismo: resolver el problema del cubo y la cosa igual a un número. Tartaglia dio solución al problema y así, a todos los problemas propuestos por Fior, quién no pudo solucionar los problemas planteados por el contrincante (Dávila, 2003a).

En este tiempo, Cardano preparaba su libro: Practicae Arithmeticae Generalis y se enteró de la competencia entre Fior y Tartaglia y de los resultados de la misma. En 1539 Cardano contactó a Tartaglia para enterarse del método del cubo y la cosa y obtener el permiso para incluirlo en su libro. Obtuvo una respuesta negativa, pero en marzo de 1539 establece contacto de nuevo y le revela el método de solución de la cúbica, en una forma poco clara: en verso y bajo el juramento de no revelarlo. Cardano afirma en su obra del Ars Magna, que Tartaglia se quedó con la demostración por lo que tuvo que darse a la tarea de buscarla por sí mismo (Dávila, 2003a).

Período uno: El surgimiento del álgebra abstracta

Viéte, fue un conocedor de Diofanto y Cardano: establece las reglas para la extracción de raíces; da a la trigonometría su forma definitiva en Canon mathematicus (1570). Se le considera uno de los principales precursores del álgebra, puesto que se dedicó al estudio de los fundamentos del álgebra, con la publicación, en 1591, de *In artem analyticam isagoge,* en el cual introduce un sistema de notación que hace uso de letras en fórmulas algebraicas. También, se ocupó de diversas cuestiones geométricas, como la trigonometría plana y esférica (Dávila, 2003a).

Este abogado francés aficionado a las matemática, inició con el uso de vocales para representar variables y consonantes para representar constantes. Esto permitió a los matemáticos representar las ecuaciones cuadráticas como $A^2 + B\ A = C$ y llevar a la discusión de técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones. Viète, es quien interpreta la cúbica general como una ecuación en la que todos los casos que consideraba Cardano resultaban casos particulares. Además, Viète da un método de solución que se puede aplicar a todos los casos (Dávila, 2003a).

Viéte, describe su obra *In Artem Analyticam Isagoge* como el texto del análisis matemático restaurado. Esta obra, traza la línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y en ella se propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone desconocida o indeterminada y una constante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Esta distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita se considera un paso previo a la matemática moderna. Una de las consecuencias más importantes de la publicación del *Ars magna* de Cardano, fue que la solución de la ecuación cúbica condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de un nuevo tipo de número.

También, Ludovico Ferrari (1522-1565) contribuye a la solución de la ecuación de grado cuarto, apoyado en su maestro Jerónimo Cardano: Lodovico fue un matemático italiano, que nació en Bolonia, Italia, el 2 de febrero de 1522 y murió en la misma ciudad envenenado por su hermana el 5 de octubre de 1565. Fue un estudioso de las matemáticas y en unión de otros colaboradores, llegó a ser uno de los mayores representantes de la escuela de Bolonia. Se dedicó principalmente al estudio del álgebra, llegando al descubrimiento de la resolución algebraica de la ecuación general de cuarto grado y de tercer grado (Dávila, 2003a).

Periodo uno: El simbolismo algebraico

Una falla de Viète, fue que no considero los números negativos ni los imaginarios como solución de ecuaciones, por lo que en este aspecto no iguala a Cardano, quien trabajó cantidades negativas como raíces de ecuaciones y las llamó *soluciones falsas* a las que identificaba con débitos y a los números imaginarios con entidades *verdaderamente sofisticadas.* Este simbolismo de Viete, no estuvo completamente desarrollado ya que era una mezcla de álgebra abreviada con un estilo simbólico, pero sentó las bases de la *teoría moderna de ecuaciones*: él consideró ecuaciones generales y no casos particulares como Cardano y sus antecesores. Cardano ya había entendido la estrecha relación entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces, pero con el nuevo simbolismo quedaba clara esta relación para los matemáticos. Por tanto, Vieta, fue un analista (algebrista) que con su simbolismo pudo encontrar resultados para la solución de las ecuaciones algebraicas generales y aplicarlos a casos particulares (Dávila, 2003b).

En Inglaterra, las ideas de Viète, tuvieron gran impacto en los académicos Thomas Harriot (1560-1621) y William Oughtred (1574-1660), precursores de una escuela inglesa que favorece el estilo simbólico y establece las bases para el desarrollo del álgebra simbólica en la isla. La producción de Harriot se calcula entre siete mil y ocho mil páginas, pero su trabajo se conoció poco ya que nunca publicó sus investigaciones y en su testamento dio instrucciones para que solo su amigo y discípulo Nathaniel Torpoley, dispusiera de sus escritos y los publicara: este no pudo completar la compilación de los escritos y 10 años después de la muerte de Harriot, Walter Warnes otro discípulo, es el que edita y publica parte de los manuscritos algebraicos en 1631 con el título de *Artis Analyticae Praxis ad Aequations Algebraicas Resolvendas - Práctica del arte analítico para la resolución de ecuaciones algebraicas*, en el Harriot introduce una notación que va más allá de la propuesta por Viète (Dávila, 2003b, p. 39).

En esta dirección, William Outhtred, fue un matemático inglés influenciado por las ideas de Viète quien se dió a la tarea de difundir las ideas del francés en Inglaterra, trabajando el simbolismo de Viète y su Arte Analítico. Outhtred enseñaba los métodos del arte analítico, con muchos discípulos que hicieron grandes contribuciones en el siglo XVII, entre ellos John Wallis, Chistoper Wren y Richard Delamain. En 1631, año de la publicación de la *Praxis* de Harriot también se publicó el trabajo de Oughtred *Clavis Mathematicae* que influyó en los matemáticos de su tiempo y es considerada como una de las publicaciones más influyentes en la historia de las matemáticas de Gran Bretaña (Dávila, 2003b, p. 41).

La notación algebraica que se usa en la actualidad se debe en gran parte, a René Descartes (1596-1650) que en su obra: "La Géométrie", en uno de los tres apéndices, ejemplifica su método: ...para bien conducir la razón y buscar la verdad en las ciencias... que expone en su tratado: Discours de la Méthode, publicado en 1637. En su obra, se formaliza la teoría de ecuaciones y se establecen muchos símbolos y terminología del álgebra actual. Este trabajo influyó en el álgebra, ya que con el método de Descartes las curvas podían ser estudiadas a través de las ecuaciones y las ecuaciones a través de las curvas.

Al denotar las líneas por medio de símbolos algebraicos y al realizar operaciones geométricas que involucraban construcciones con regla y compás que correspondían a las cinco operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas, inició un camino en el cual el álgebra jugaba un papel importante al introducir una nueva notación: por a^2, b^3 y expresiones similares, hacia referencia a simples líneas, a las cuales, sin embargo, llamó cuadrados, cubos... de tal manera que podía hacer uso de los términos empleados en el álgebra...(citado en Dávila, 2003b, p. 42). Además, usó las primeras letras en este nuevo simbolismo algebraico para denotar las cantidades conocidas y las últimas letras para denotar las incógnitas; también dispone de una notación más compacta: x, x^2, x^3, *etc.* y define los conceptos de ecuación y raíz de una ecuación, aceptados casi de inmediato por los matemáticos de su tiempo.

Para Descartes, era claro que si a era raíz de una ecuación polinomial, $x - a$ era un factor de la ecuación; además estableció la *regla de los signos* para estimar el máximo número de raíces reales de una ecuación de acuerdo a los cambios de signo de los coeficientes de ésta, hecho que ilustró con varios ejemplos. Pero, Descartes fue más allá, al afirmar que: toda ecuación podía tener tantas raíces distintas como el número de la dimensión de la incógnita de la ecuación, hecho que constituye a una primera aproximación del "Teorema fundamental del álgebra (Dávila, 2003b, p. 43).

Descartes aceptaba y trabajaba con raíces negativas a las que llamaba "falsas" y trabajaba las raíces complejas; en el Libro III de La Géométrie, hace una afirmación que se acerca mucho al Teorema Fundamental del Álgebra: Un polinomio de grado n tiene n raíces, sean estas positivas, falsas reales o complejas. Así, para Descartes las raíces que no correspondían a cantidades eran solo producto de la imaginación y las llamó "imaginarias". Este reconocimiento de las raíces imaginarias, fue más allá de lo aceptado por sus colegas matemáticos legitimando su uso (Dávila, 2003b, p. 43).

En la misma dirección, Fermat (1601-1665), fue otro matemático francés, a quien se le atribuye la invención de la *Geometría Analítica* casi simultáneamente que Descartes y de forma independiente. A Fermat, se le debe el uso de las *coordenadas cartesianas* que introduce en la exposición de su método de geometría analítica y que desarrolla en su escrito *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge - Introducción a los lugares [geométricos] planos y sólidos,* escrito en 1643.

En la introducción de su obra, Fermat sigue la notación de Vieta y por ejemplo la ecuación del círculo la escribe como $Bq. + Aq. = Eq.$ con A,B incógnitas, E una constante y q por quadratum. También, clasifica las secciones cónicas de acuerdo con su ecuación y muestra que toda ecuación cuadrática en dos incógnitas representa una línea recta, o una cónica. Fermat, es el fundador de la teoría moderna de números, donde desarrolló una gran cantidad de resultados, pero sin dar demostración a muchos de sus teoremas, los cuales se ha probado que en su mayoría son correctos (Dávila, 2003b).

2.2.5. Edad moderna (finales del siglo XVII-XVIII)

Periodo uno: Los polinomios simétricos de Isaac Newton (1643-1727)

Newton (1642-1727) fue un matemático británico considerado como a uno de los más grandes científicos de la humanidad. Uno de los trabajos más conocidos corresponde a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica-Principios matemáticos de la filosofía natural,* publicado en 1687 donde establece las leyes del movimiento de los cuerpos y las leyes de la gravitación universal sobre bases geométricas; también hace contribuciones en óptica y se le considera como un físico-matemático; con grandes contribuciones al desarrollo del álgebra. En el período de 1664 a 1667 produce sus más revolucionaria ideas: el estilo de razonamiento lógico de Aristóteles, en su complicado sistema filosófico (Dávila, 2003b).

Newton había leído a Euclides, pero sus conocimientos en geometría no eran suficientemente sólidos y su interés por la astrología lo llevó a estudiar la trigonometría en 1663 al no entender varias de las demostraciones por falta de bases geométricas; por tanto, regresó al estudio de la geometría euclidiana, donde al releer el teorema de pitágoras, cambia de opinión ya que las demostraciones le parecían muy sencillas y vuelve a leer a Euclides: después lee la *Clave* de Oughtred con dificultades para entender. Cambia de lectura a la Geometría, de Descartes en la edición latina realizada por Frans Schooten publicada en 1649; esta edición es ampliamente comentada y con explicaciones muy valiosas sobre el trabajo de Descartes. Luego de varias lecturas, comprende a Descartes mejor que a Euclides. Continúa con la lectura de la Arithmetica Infinitorum de Wallis; *Euclides Elementorum* de Isaac Barrow, quien también fue su maestro y finalmente con: *La opera Mathematica*, de Viète (Dávila, 2003b).

Con la lectura de la Arithmetica, de Wallis, descubre su famoso teorema del Binomio de Newton, el cual ya se conocía desde mucho antes para exponentes enteros no negativos; lo generaliza para exponentes fraccionarios y negativos y lo publica por primera vez en el Tratado de Álgebra de Wallis, con el debido crédito a su descubridor. Newton, no da una prueba rigurosa del teorema, sino que llega a su formulación después de sus investigaciones en cálculo de áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^2$. En el texto: la Arithmetica ya había estudiado cómo calcular estas áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$ donde n es un entero positivo par. Este resultado fue importante ya que con el llegó a la formulación del cálculo diferencial e integral. (Dávila, 2003b, p. 46).

El trabajo con "polinomios simétricos" es otro de los resultados importantes de Newton: estos polinomios corresponden a aquellos polinomios donde al cambiar el orden de las variables en la ecuación polinomial no cambia su forma. Los polinomios simétricos elementales, para la ecuación de grado dos, en el caso de dos variables corresponden a:

$\sigma_1(u,v) = u + v$
$\sigma_2(u,v) = uv$

Y para la ecuación de grado dos $x^2 + ax + b = 0$ con a,b con números complejos, se tiene que:

$x^2 + ax + b = (x - u)(x - v) = x^2 - (u + v) + uv$

De donde, encuentra una relación entre los coeficientes de la ecuación y los polinomios simétricos elementales en sus raíces, así:

$u + v = -a$
$uv = b$

En forma similar, para la ecuación cúbica:

Sea $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes a,b,c complejos y con raíces u,v,w entonces, los polinomios simétricos elementales corresponden a:

$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - u)(x - v)(x - w) = x^3 - (u + v + w) + (uv + uw + vw) - uvw$

Entonces,

$u + v + w = -a = \sigma_1(u,v,w)$
$uv + uw + vw = b = \sigma_2(u,v,w)$
$uvw = -c = \sigma_3(u,v,w)$

Este hecho, evidencia que no es importante conocer las raíces, sino suponer su existencia. Cardano, ya había entendido esta relación al menos para la cúbica y con el nuevo esquema de Viète estas relaciones fueron más evidentes y él observó que esta era una regla que se cumple siempre para las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual que cinco (Dávila, 2003b).

En 1707, Newton publicó el libro: Arithmetica Universalis, cuando tenía gran fama y había cesado en parte su actividad científica, con resultados que habían sido descubiertos tiempo atrás; entre estos resultados, enuncia un teorema sobre la suma de potencias de las raíces de la ecuación polinomial de la forma $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}$ $+...+ a_n-_1x + a_n = 0$, el cual viene a ser muy importante en los desarrollos siguientes del álgebra (Dávila, 2003b).

Continuando con el desarrollo del álgebra, otro de los matemáticos que hace aportes importantes es Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), coinventor del cálculo diferencial e integral de manera independiente a Newton, con aportaciones importantes en álgebra aunque poco conocidas: generalizó el teorema del binomio a expresiones multinomiales tales como $(a+b+c)^n$, $(a+b+c+d)^n$ y fue el primero en introducir la noción de determinante al trabajar con sistemas de ecuaciones. Otra aportación la hace en los números complejos, cuyo estudio había sido relegado en ese tiempo. Leibniz probó en 1676 que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ y en 1702:

$$x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})\,(x + a\sqrt{\sqrt{-1}})\,(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}})\,(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})$$

Estos descubrimientos hicieron que Leibniz se sintiera impresionado por el potencial de los números complejos aunque no exploró la posibilidad de darles una representación geométrica y les dio un estatus que estaba a medio camino entre la existencia y la no existencia (Dávila, 2003b, p.48).

Periodo uno: Fórmulas de Girard-Newton

Para las raíces del polinomio se definieron las sumas de las potencias de las ráices del polinomio:

$$S_p(x_1,..., x_n) = \sum_{k=1} x_k^p$$

Y las relaciones entre estas S_p y los polinomios simétricos Π_n estan dadas por lo que se conoce como las fórmulas de Newton-Girard, que se generalizan:

$$(-1)^m \prod_m (x_1,..., x_n) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+m} S_k(x_1,..., x_n) \prod_{m-k}(x_1,..., x_n) = 0$$

Para cada $1 \leq m \leq n$ y para un número arbitrario de variables n. Las cinco primeras identidades corresponden a:

$S_1 - \Pi_1 = 0$

$S_2 - S_1\,\Pi_1 + 2\Pi_2 = 0$

$S_3 - S_2\,\Pi_1 + S_1\,\Pi_2 - 3\Pi_3 = 0$

$S_4 - S_3\,\Pi_1 + S_2\,\Pi_2 - S_1\,\Pi_3 + 4\Pi_4 = 0$

Estos desarrollos se conocen como las fórmulas de Newton para el polinomio de grado n, $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +...+ a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ a las relaciones:

$$0 = a_1 + S_1 a_0$$

$$0 = 2a_2 + S_1 a_1 + S_2 a_0$$

$$0 = 3a_3 + S_1 a_2 + S_2 a_1 + S_3 a_3$$

$$\vdots$$

$$0 = na_n + S_1 a_{n-1} + \ldots + S_n a_0$$

$$\vdots$$

$$0 = a_n S_i + \ldots + S_{n+i}\, a_0$$

$$\vdots$$

En la obra: *Arithmetica Universalis*, de Newton de 1707, aparece el teorema:

Cualquier polinomio simétrico en las raíces de una ecuación se puede expresar en términos de los coeficientes de la ecuación (Chavarría, 2014, p.78).

Periodo uno: El teorema fundamental del álgebra

Albert Girard (1595-1632) fue otro matemáticos francés, a quien se le reconoce como el primero en establecer en forma explícita que una ecuación polinomial de grado n debí tener n raíces. En 1629 en su tratado de álgebra: Invention Nouvelle en l'Algebra, trata ampliamente el tema de la relación entre los coeficientes de una ecuación y las funciones (polinomios) simétricas de sus raíces y presenta algunos ejemplos de ecuaciones de grado cuatro para las cuales establece que hay cuatro soluciones, no más ni menos. Descartes, ya había presentado este teorema en su obra: la Geométrié, con algunos ejemplos para ilustrarlo. También, deja claro que si t es una raíz de una ecuación polinomial, entonces $(x - t)$ es un factor de la misma. Newton y Colin Maclaurin (1698-1746) también dieron versiones parecidas de este teorema que recibiría el nombre del Teorema fundamental del álgebra-TFA (Dávila, 2003b).

D'Alambert (1717-1783) físico matemático francés; hizo el primer intento de demostración del TFA, pero su prueba no fue totalmente correcta, ya que usó el hecho de que una función continua en un conjunto compacto toma un valor mínimo; lo cual se probaría mucho tiempo después; sin embargo, sus ideas fueron de utilidad años más tarde. Por esa fecha, Leonhard Euler (1707-1783) matemático suizo; prueba que todo polinomio real de grado n con $n \leq 6$ tiene exactamente n raíces complejas y que si $a+b\sqrt{-1})$ es una raíz compleja de un polinomio, su conjugada $a - b\sqrt{-1})$ también era raíz del polinomio. En 1749 intenta la prueba general del teorema pero su prueba es incompleta y es Joseph Louis Lagrange (1736-1813) matemático francés, quien en una memoria presentada a la academia de Berlín en 1772, trató de completar la prueba de Euler, con un razonamiento no muy preciso, ya que Lagrange, al igual que Euler y otros matemáticos de la época, operaban libremente las raíces de las ecuaciones como si fueran números ordinarios, sin tener en cuenta que las raíces fueran números complejos (Dávila, 2003b).

Le corresponde a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) matemático Alemán, el mérito de haber sido el primero en dar una prueba convincente, aunque no completamente rigurosa del TFA en su tesis doctoral: Nueva demostración del teorema de que toda función algebraica en una variable puede ser factorizada en factores reales de primer o segundo grado, en 1799. En este trabajo hace la crítica a los trabajos de D'Alambert, Euler y Lagrange y aborda el TFA desde una perspectiva distinta, ya que Gauss no calcula las raíces del polinomio real, sino que demuestra su existencia por medio de un método original (Dávila, 2003b, p.50).

En 1814, Jean Robert Argand (1768-1822) matemático francés; presenta una prueba sencilla del TFA basado en las ideas de D'Alambert y en 1816 Gauss presenta la prueba basado en las ideas de Euler, con una demostración completa y correcta. En ese mismo año, presenta una tercera prueba del teorema desde una perspectiva geométrica, como en su primera demostración y en 1849 Gauss, prueba el TFA en forma general, esto es:

Teorema 2.1. *Un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas (Dávila, 2003b).*

En la terminología moderna este teorema equivale a decir que el campo de los números complejos es algebraicamente cerrado.

Tabla 2.2: Significados dados al objeto Grupo en las civilizaciones antiguas, en la edad media y en la edad moderna

	EDAD MODERNA	
PERIODO UNO		SIGNIFICADO ALGEBRAICO:
	Carl Friedrich Gauss (17771855) Alemán Jean Robert Argand (17681822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierre de Fermat (1606-1665) Francés	Conjunto Z_p Conjunto de permutaciones de las raíces. Conjunto de los enteros y la aritmética módulo *n*.
	RENACIMIENTO	

PERIODO UNO	Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574- 1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (funciones con las raíces de las ecuaciones). Aritmética módulo *n*.
	EDAD MEDIA	
PERIODO UNO	Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (14651526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (funciones de las raíces las ecuaciones).
	EDAD MEDIA	
PERIODO CERO	Nicolás Chuquet (1450- 1500) Francés Leonardo de Pisa - Fibonacci (1175-1240) Italiano Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940- 998) Hindúes: Bhaskara(1114-1185) Brahmagupta (598-670) CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO

2.2.6. Edad contemporánea (XIX a la actualidad)

Período dos: Búsqueda de métodos generales para la solución de la ecuación algebraica de grado *n*. Demostración de la imposibilidad solucionar por radicales las ecuaciones algebraicas generales de grado $n > 4$

Hacia la segunda mitad del siglo XVIII, uno de los problemas centrales era: encontrar las soluciones de la ecuación general de grado n por el método de radicales, esto es, haciendo operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces, con los coeficientes de la ecuación:

$$x{^\wedge}n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (2.1)$$

Los métodos para resolver las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas de los algebrista italianos del siglo XVI se generalizaron en los siglos posteriores; se retomó a Viète, Descartes, Euler y Bézout: por el éxito con el análisis algebraico en la solución de la ecuación (2.1), para los casos $n = 3$ y $n = 4$ así, muchos matemáticos de los siglos

XVII y XVIII trataron de encontrar un método de solución para la ecuación general de grado quinto; entre ellos Newton, Leibniz, Tschimhausen, D'Alambert y Euler. Se pensaba que el método debía existir y por esta razón, no se lograron avances significativos sino hasta 1770 con los trabajos de Vandermonde y Lagrange.

En 1770, Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) matemático Francés: presenta a la academia de Ciencias de París su trabajo: Mémoire sur la Résolution des Equations, en el cual enunciaba que toda ecuación de la forma:

$$x^p - 1 = 0$$

con p un número primo, es soluble por radicales.

Vandermonde, da un método similar para encontrar las raíces de la bicuadrática e incluso analiza algunos casos de ecuaciones particulares de grado superior; pero su trabajo se publicó en 1774 y sus razonamientos fueron opacados por el trabajo de Lagrange, con la "Teoría de ecuaciones algebraicas"; en 1771, se publica la memoria de Lagrange: *Réfléxions sur la Résolution Algébrique des Equations,* por la Academia Prusiana de Ciencias. En este tratado, se analizaban, desde diferentes puntos de vista varios de los métodos para resolver por radicales las ecuaciones de grado tres y cuatro; con base en este análisis, Lagrange presenta un método que resume los anteriores y logra encontrar la característica común de los métodos: los métodos funcionan porque es posible reducir cualquier cúbica o bicuadrática a una ecuación auxiliar cuya grado es menor en uno, respecto a la original: éstas ecuaciones son las que admiten una solución por radicales (Dávila, 2003b, p. 52).

Con respecto a la ecuación de grado quinto Lagrange escribió: "El problema de resolver [por radicales] las ecuaciones cuyo grado es mayor que el cuarto, es uno de esos problemas que no han sido resueltos, si bien nada prueba la imposibilidad de resolverlos" (Lagrange, 1867, p. 305 citado en Dávila, 2003b).

Más adelante en el texto, Lagrange afirma: "De nuestro razonamiento vemos que es muy dudoso que los métodos que hemos considerado puedan dar una completa solución a las ecuaciones de quinto grado" (Lagrange, 1867, p. 307 citado en Dávila, 2003b. p. 55).

Aunque Lagrange no tuvo éxito y a pesar de no obtener resultados concluyentes para las ecuaciones de grado mayor a cuatro, los resultados de su análisis sobre la resolución de ecuaciones algebraicas fueron una parte fundamental en el desarrollo del álgebra moderna, además de la gran influencia que pudo ejercer en la comunidad matemática de finales del siglo XVIII y del siglo XIX (Dávila, 2003b).

Antes de Lagrange, nadie había escrito sobre la posibilidad de la no existencia de métodos generales para resolver por radicales las ecuaciones de grado superior a cuatro. Incluso, algunos matemáticos creyeron haber resuelto la ecuación de grado quinto: en el siglo XVII, el algebrista Tschirnhausen (1661-1708) desarrolló un método que se basaba en transformar la ecuación dada en una más simple, proceso en el cual era necesario resolver una ecuación auxiliar. Este método funcionaba bien para las ecuaciones de grado dos, tres y cuatro; pero, después se probó que para la ecuación de grado quinto, la ecuación auxiliar que previamente se debía resolver resultaba de grado sexto. Así que fue necesario esperar hasta el siglo XIX para resolver el problema completamente (Dávila, 2003b, p. 56).

Paolo Ruffini (1765-1822), matemático italiano, discípulo y admirador de Lagrange, en su trabajo: *Teoría generale delle equazioni*, del año 1799, logró probar usando el método de Lagrange, que para las ecuaciones de grado superior a cuatro es imposible encontrar ecuaciones resolventes de grado menor que cinco. Publicó una segunda memoria sobre el mismo tema en las *Memorie di Matemática e Física della Societá Italiana delle Scienze*, en 1802; posteriormente publicó otro trabajo en 1813 titulado: *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*; versión más elaborada sobre sus trabajos anteriores y estudió con gran detalle las permutaciones de las raíces de una ecuación, con lo cual llegó a demostrar la imposibilidad de resolver algebraicamente las ecuaciones de grado superior a cuatro (Dávila, 2003b, p. 56).

El trabajo de Ruffini, fue analizado con escepticismo por los matemáticos de la época: Malfatti, Carnot y Legendre que expresaron sus dudas acerca de la validez de las demostraciones presentadas. La prueba dada por Ruffini, no fue del todo concluyente ya que en ella se asumía que si una ecuación era soluble por medio de radicales, entonces las expresiones para las raíces podían darse de tal forma que los radicales involucrados fueran funciones racionales de las raíces de la ecuación y de las raíces de la unidad (Kline, 1972, p. 605). Este resultado no fue probado y por tal motivo sus conclusiones no fueron definitivas, aunque esto era correcto (Dávila, 2003b, p. 56).

Aparece en este desarrollo el joven matemático noruego, Niels Henrik Abel (1802–1829) quien demuestra que es imposible resolver por radicales las ecuaciones de grado superior a cuatro. Abel estudió las obras de Euler, Lagrange y Gauss y creyó haber encontrado un método para resolver la ecuación general de quinto grado, pero pronto se dio cuenta de su error y continuó con sus investigaciones en el problema: finalmente, en 1824, demostró la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado mayor que cuatro. Publicó sus resultados en un panfleto titulado: *Mémoire sus les équations algébriques*, corriendo él mismo con los gastos de la publicación por su precaria situación económica. Luego, en 1826 publicó una versión más elaborada de su prueba, en el Journal “für die reine und angewandte Mathematik” - Revista de Matemáticas puras y aplicadas de Crelle, con el título de *Démostration de l’impossibilité de la résolution algébrique des équations générales* *qui passent le quatriéme degré*. Estos dos trabajos, tenían las mismas ideas solo que algunas partes eran mejor explicadas en el segundo artículo y otras simplificadas (Dávila, 2003b, p. 57).

Abel, conocía el trabajo de Ruffini y había expresado sus dudas sobre la validez de la demostración dada, respecto al problema de la no solubilidad de la ecuación general de grado *n*: "Su memoria es de tal manera complicada que es muy difícil juzgar sobre la justeza de sus razonamientos. Me parece que su razonamiento no es del todo satisfactorio" (Dávila, 2003b, p. 57).

Para probar este teorema hizo uso de otros resultados obtenidos por Lagrange, Ruffini y Cauchy en relación con el número de valores que una función de *n* variables puede tomar si éstas son permutadas. Así quedó resuelto un problema que por más de dos siglos y medio había resistido los embates de muchos matemáticos destacados. Como consecuencia de este resultado, se demostró que es imposible resolver por radicales la ecuación general de grado n para $n \geq 5$.

En 1829, dos meses antes de su muerte, en extrema pobreza Abel publicó otro trabajo en el Journal de Crelle con el título: *Mémoire sur une classe particuliére d'équations resoluble algébraiquement*, el cual trataba sobre el problema de la división de la lemniscata, que es la curva en forma de 8 (la división del círculo llevaba a ecuaciones llamadas "ciclotómicas". En el caso de dividir la lemniscata en arcos de igual longitud se obtenía una familia de ecuaciones algebraicas las cuales probó que eran solubles por radicales; a estas ecuaciones se les llama abelianas. Abel introduce otras nociones importantes en su estudio, como campo y polinomio irreducible: nociones centrales en el trabajo de Galois (Dávila, 2003b, p. 58).

Tabla 2.3: Significados dados al objeto Grupo en la edad contemporánea

	EDAD CONTEMPORÁNEA	
PERIODO DOS	Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) Francés Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano Alexandre Théophile Vandermonde (1735-796) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones. Grupo S_4 de permutaciones. Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).

El trabajo de Abel fue muy importante, pero le faltó dar respuesta a la pregunta:¿Cuándo una ecuación arbitraria es soluble por radicales? Se sabía de la imposibilidad de dar métodos generales, que permitieran resolver cualquier tipo de ecuación de grado superior a cuatro (Teorema de Abel); pero, existen familias particulares de ecuaciones de grado mayor que cuatro que son solubles por radicales.

Este hecho había sido demostrado por Karl Frederick Gauss, desde 1801, año en que se publicó su famoso libro: *Disquisitiones Aritmethicae*, el cual fue la fuente de inspiración para muchos matemáticos y fundamental en el desarrollo de la teoría de números y del álgebra(Dávila, 2003b).

Período tres: Determinación de las familias de ecuaciones algebraicas de grado n > 4 solubles por radicales y la Teoría de Galois

Evariste Galois (1811_1832) fue el matemático Francés, que dio respuesta definitiva al problema de la solubilidad de las ecuaciones algebraicas por medio de radicales y crea la teoría algebraica llamada hoy "Teoría de Galois" que corresponde a una de las más grandes creaciones en la historia de la matemática, tanto por las aportaciones a ésta, como por los desarrollos posteriores de la teoría, dando lugar a un área de investigación en las matemáticas contemporáneas (Dávila, 2003b, p. 59).

En 1829, el 25 de mayo, Galois presenta a la Academia de Ciencias de París los primeros resultados de sus investigaciones sobre la solubilidad de las ecuaciones de grado primo por intermediación de Cauchy, quien fue designado para revisar los trabajos; sin embargo, el día de dar el reporte, Cauchy se excusa y pide programar su presentación para otra sesión; en la siguiente sesión, presentó un trabajo suyo y no mencionó al trabajo de Galois. Se tiene la hipótesis de que Cauchy animo a Galois a unificar y extender sus investigaciones y presentar su memoria para el Grand Prix de Matemáticas, cuya convocatoria cerraba el primero de marzo. Así, en Febrero de 1830 Galois presentó una memoria en la cual se analizaban las condiciones para que una ecuación fuera soluble por radicales; esta memoria fue asignada a Fourier en calidad de secretario perpetuo de física y matemáticas de la Academia. Después de varios meses, Galois envía una carta a la Academia quejándose por el negligente trato con su trabajo; la respuesta que obtuvo fue: "...el asunto es muy simple, la memoria se perdió con la muerte de Cauchy, a quien se le había confiado la tarea de examinarla..." También, Fourier muere el 16 de mayo de ese año y no se encontró entre sus papeles, por lo que no participó en el concurso (Dávila, 2003b, p. 60).

Galois, publicó varios trabajos en el período de abril a junio de 1830 en el prestigioso Bulletin de sciences mathematiques, physiques et chimiques, dirigido por el Barón de Férussac; estos trabajos correspondían a un resumen de la memoria enviada al Grand Prix, *Analyse d'une mémoire sur la résolution algébrique des équations*, en la cual enunciaba sin demostrar los teoremas principales que ella contenía y un artículo titulado: *Notes sur la résolution des équations numériques*; además, un artículo muy importante titulado: Sur la théorie des nombres. Por invitación de Poisson, volvió a reescribir la memoria presentándola de nuevo a la Academia el 17 de enero de 1831, con el título de: *Mémoire sur les Conditions de Résolubilité des Équations par Radicaux*: los revisores designados fueron Lacroix y Poisson. En julio recibió la respuesta:

Estimado señor Galois:

Su artículo fue enviado al Sr. Poisson para su revisión. El lo ha regresado con su reporte, que ahora citamos:

Hemos hecho todo esfuerzo para entender las demostraciones del Sr. Galois. Su argumento no es lo suficientemente claro no lo suficientemente desarrollado de tal manera que nos permita juzgar su rigor; ni siquiera es posible para nosotros darnos una idea sobre este artículo.

El autor afirma que las proposiciones contenidas en el manuscrito son parte de una teoría general la cual tiene muchas aplicaciones. Con frecuencia, diferentes partes de una teoría se aclaran unas a otras y se pueden entender más fácilmente cuando son tomadas juntas en vez de aisladas. Por lo tanto, deberíamos mejor esperar para formarnos una opinión más definida, hasta que el autor publique una versión más completa de su trabajo.

Por esta razón, le estamos regresando el manuscrito esperando que encuentre útiles las observaciones del Sr. Poisson para su trabajo futuro.

Francois Arago, Secretario de la Academia (Dávila, 2003b, p. 61).

Galois lee la memoria en la noche anterior al duelo haciéndole algunas correcciones y anotaciones: "ha sido uno de los más grandes testamentos científicos en la historia de las matemáticas" (Dávila, 2003b, p. 61). Todas las proposiciones y teoremas enunciados son correctos. Algunas demostraciones, requerían de ciertos retoques ya que estaban solo esbozadas, al estilo de Galois; sin embargo, resultaba impresionante la claridad y la profundidad de las ideas, así como la seguridad de este, sobre la importancia de sus resultados (Dávila, 2003b, p. 61).

Galois, al igual que Abel, tenía claro el concepto de campo como el conjunto a donde pertenecían los coeficientes de la ecuación y además, que al adjuntar otras cantidades al campo, se iban construyendo extensiones del campo base y que éstas extensiones eran campos. Define polinomio reducible, como aquel que se puede factorizar en el campo base, de lo contrario se llama irreducible; una ecuación que es irreducible en el campo original, puede volverse reducible al adjuntarle al campo una cantidad (campo extensión). Otro de los conceptos fundamentales en este trabajo fue el de Grupo de permutaciones. Así, Galois es el primero en usar el término "Grupo" como una colección cerrada de permutaciones bajo la operación de composición: "si uno tiene en el mismo "grupo" las sustituciones S y T uno deberá tener la sustitución ST. " Estas sustituciones eran las permutaciones de las raíces de la ecuación (Dávila, 2003b, p. 62).

Los conceptos anteriores, fueron la base de una teoría general de la cual Galois tenía una idea completamente clara, lo cual se puede constatar con sus escritos; así, en la introducción de su memoria escribe: "me debo conformar con describir de una manera sintetizada los principios generales y una sola aplicación de mi teoría" (Dávila, 2003b, p. 62). La aplicación era la solubilidad de las ecuaciones por radicales;

ya que con ésta teoría, las principales propiedades de la ecuación se reflejan en ciertas propiedades del grupo asociado a la ecuación denominado en la actualidad: El grupo de Galois de la ecuación. La existencia del grupo y de sus propiedades fueron probadas por Galois en su memoria (Dávila, 2003b).

La memoria no fue entendida por los matemáticos de la Academia de Ciencias encargados de su revisión; tuvieron que pasar 14 años después de la muerte de Galois para que fuera publicada por Joseph Liouville (1809-1882) matemático Francés, en su Journal de Mathématiques Pures et Apliquées, en el año 1846. Aquí, Liouville hace algunos comentarios y cuenta el gran regocijo que sintió, después de llenar unas cuantas omisiones leves por parte de Galois y al verificar que los resultados propuestos eran totalmente correctos. Otra de los aportes de Galois al álgebra, en su memoria: *Sur la théorie de nombres*, fue el inicio de lo que hoy se llaman los campos de Galois, importantes en el álgebra contemporánea (Dávila, 2003b, p. 63).

Entre los primeros que estudiaron y continuaron los trabajos de Galois se encuentran: Liouville, Charles Hermite, Victor Puiseux y Joseph_Alfred Serret. Este último tomó algunos cursos con Liouville sobre la Teoría de Galois y publicó en 1854 un libro titulado: *Cours d'Algebre Supérieure*, cuya tercera edición de 1866 incluye un capítulo dedicado a exponer esta teoría. Las dos ediciones anteriores no la incluían, debido al anuncio hecho por Liouville de publicar las obras de Galois, lo cual no llevó a cabo. Sin embargo, el primero en hacer una exposición completa de esta teoría y presentar en forma detallada todas las demostraciones fue Enrico Betti en 1852. Después, Camille Jordan publicó en 1870 un tratado que tuvo mucha influencia en el desarrollo posterior de la teoría de Grupos y la Teoría de Galois (Dávila, 2003b).

Período tres: Los conjuntos de permutaciones

Una de las aportaciones fundamentales de Lagrange, fue el hecho de que sus métodos mostraron la importancia que tenía el estudio de las permutaciones de las raíces de la ecuación algebraica. Lagrange consideró que en este estudio residía la verdadera filosofía del problema (Dávila, 2003b, p. 65). De hecho, según Kleiner (1986): "... era la primera vez que se hacía una asociación entre las soluciones de una ecuación polinomial y las permutaciones de sus raíces..." Este punto de vista de Lagrange fue correcto como lo apreció Galois en su trabajo (Dávila, 2003b).

En la misma dirección, el matemático Francés, Augustin–Louis Cauchy (1789-1857) en 1815 realizó grandes aportes a la teoría de los grupos de permutaciones; a él se debe que esta teoría se haya desarrollado de manera autónoma, ya que antes de Cauchy solo se estudiaban las permutaciones en relación a la teoría de ecuaciones. En ese año, Cauchy publicó un importante resultado relacionado con los distintos valores que puede tomar una función racional no-simétrica en n variables. Ruffini había probado que para el caso de una variable el número de valores distintos no podía ser menor que 5, a menos que fuera 2; Cauchy generalizó este resultado para el caso de n variables y Abel usó el resultado para probar su famoso teorema (Dávila, 2003b).

En los años 1844 a 1846 Cauchy avanzó en su producción respecto a los grupos de permutaciones en varios artículos, en los que probó teoremas importantes de la teoría moderna de grupos. Además, Cauchy introduce una notación que es muy usada para las permutaciones: para el conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ define una permutación como una función biyectiva de X en sí mismo. Al conjunto de todas las permutaciones lo denota por S_4 y este conjunto con la operación de composición de funciones viene a ser el grupo denominado grupo de permutaciones de cuatro objetos que tiene 4! = 24 elementos; Cauchy denota una permutación como:

$$f = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix}$$

Y en notación cíclica como (1234), simbología que se usa hasta actualmente. Entre los resultados más importantes de Cauchy respecto a este grupo de permutaciones se tiene: a) Toda permutación es producto de 3−ciclos y b) Si un número primo p es divisor del número de elementos de un grupo, entonces el grupo contiene un subgrupo de orden p (Dávila, 2003b).

Un trabajo que unifica las ideas de Galois (grupos asociados a las ecuaciones) y de Cauchy (grupos de permutaciones en sí mismos) fue el trabajo de Camille Jordan (1838-1922). En su libro: Traité des substitutions et des équations algébriques, publicado en 1870, no solo aplicó el concepto de grupo a la teoría de ecuaciones, sino también a la geometría algebraica; las funciones trascendentes y la mecánica teórica (Dávila, 2003b). Entre las nociones que introduce Jordan en su tratado, se encontraban: el concepto de homomorfismo, isomorfismo y grupo soluble. También, define el concepto de serie de composición para un grupo (de permutaciones) y prueba parcialmente el famoso teorema de Jordan−Hölder, que establece que: "cualquiera dos series de composición para un grupo son equivalentes; por lo que todo grupo que tenga una serie de composición determina una lista única de grupos simples. Esto hace referencia a grupos de permutaciones que no tienen subgrupos normales no triviales. En este contexto, Jordan prueba que los grupos A_n son simples para $n \geq 5$ (Dávila, 2003b, p. 66).

Período tres: Grupos abelianos

Gauss (1777-1855) fue un matemático Alemán y en su obra *Disquisitiones,* inició con el estudio de los *grupos abelianos finitos*, obteniendo muchos resultados pero sin usar la terminología de la teoría de grupos. Los objetos, con los que trabajaba Gauss y que en la actualidad se dan como ejemplos importantes de grupos son: *el grupo aditivo de los enteros módulo n*, $\mathbb{Z}_n$*; el grupo multiplicativo de enteros que son primos relativos con n, módulo n; el grupo de clases de equivalencia de formas cuadráticas binarias* *y el grupo de las raíces n*–ésimas de la unidad. Además, prueba que el conjunto $Z_p^* = \{\bar{1}, ..., \overline{p-1}\}$ es un grupo multiplicativo cíclico, esto es, que todos sus elementos se generan como potencias de uno solo de ellos y usó argumentos propios de la teoría de grupos, para probar el pequeño teorema de Fermat:

Teorema 2.2. *Si p no divide al entero a, entonces* $a^{p-1} \cong 1$ *mod p.*

En los grupos la operación definida entre los elementos es conmutativa, por eso se llaman *grupos abelianos.*

Período cuatro: La Teoría Abstracta de Grupos en el siglo XIX

El tratado de Jordan sobre grupos de permutaciones, tuvo gran influencia en la evolución de la teoría general de grupos, por el estudio realizado a ciertos grupos de sustituciones lineales, que en la terminología moderna corresponden a grupos clásicos sobre el campo de Galois $GF(p)$, con p un número primo. El grupo lineal $GL(n, p)$ de matrices invertibles de orden n con entradas en el campo finito $GF(p)$ es uno de ellos, esto en notación moderna y Jordan logra probar que algunos de los grupos clásicos o sus subgrupos son simples.

Los grupos simples, con un número finito de elementos son importantes ya que con ellos se construye cualquier grupo finito. La clasificación de todos los grupos finitos simples, fue el trabajo de muchos matemáticos del siglo XIX. Así, Otto Hölder en 1889, es el primer matemático en estudiar de forma abstracta los grupos simples; según Hölder : "seria de gran interés si una lista de todos los grupos simples con un número finito de elementos se pudiera conocer" (citado en Dávila, 2003b, p. 73).

La importancia de los tratados de Jordan en teoría de Grupos es indiscutible; sin embargo, el concepto unificador de Jordan de *grupo de permutaciones,* quedó rebasado con los trabajos de dos matemáticos que fueron atraídos a París, por la fama de Jordan. Fueron estos matemáticos, Félix Klein y Sophus Lie, quienes permanecieron allí de abril a junio de 1870 justo cuando el libro de Jordan hacia su aparición. Klein y Lie se hicieron amigos en 1869 y sus investigaciones tenían puntos en común. Lie había sido introducido a la teoría de grupos por L. Sylow, matemático noruego. Klein y Lie viajaron a Francia, donde tuvieron contacto con Jordan y su estancia fue determinante para sus desarrollos posteriores (Dávila, 2003b).

La generalidad del concepto grupo, no como grupo de permutaciones de Jordan, Cauchy y Galois sino como "grupo de transformaciones", aparece en un artículo publicado en 1871 por Klein y Lie en Mathematische Annale. En este artículo se explora la idea de "grupo continuo dimensión uno" y se establece la conmutatividad de éstos. Luego de esto, los intereses de los dos matemáticos tomaron caminos separados aunque siempre ligados al estudio de grupos: Lie desarrolló su teoría de grupos continuos y la aplicó al estudio de las ecuaciones diferenciales; Klein, por su parte, aplicó la noción de grupo de transformaciones, al estudio de las geometrías y luego inició trabajos en "grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales" importantes en el estudio de las funciones automorfas (Dávila, 2003b).

Período cuatro: Los grupos de transformaciones y la clasificación de las geometrías

Klein, en la conferencia inaugural para su admisión como profesor de la Universidad

Tabla 2.4: Significados dados al objeto Grupo

PERIODO TRES	EDAD CONTEMPORÁNEA Camille Jordan (1838-1922) Francés Evariste Galois (1811-1832) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones. Grupos A_n de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Grupos simples. Grupos solubles. Grupo de Galois del polinomio o grupo asociado a la ecuación polinomial.
PERIODO DOS	EDAD CONTEMPORÁNEA Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) Francés Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones Grupo S_4 de permutaciones. Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).
PERIODO UNO	EDAD MODERNA Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán Jean Robert Argand (1768- 1822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierrede Fermat (1606-1665) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjunto de permutaciones. Aritmética módulo n.

PERIODO UNO	RENACIMIENTO Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574-1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (funciones con las raíces de las ecuaciones). Aritmética módulo *n*.
PERIODO UNO	EDAD MEDIA Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (14651526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (Funciones con las raíces de las ecuaciones).
PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés Leonardo de Pisa - Fibonacci (1175-1240) Italiano Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998) Hindúes: Bhaskara (1114-1185) Brahmagupta (598-670)	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO
	CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	

de Erlangen en 1872, marcó un cambio profundo en la *concepción de la noción grupo*. La conferencia tenía el título: *Resumen comparativo de investigaciones recientes en Geometría:* allí establece lo que sería llamado "el Programa de Erlangen" cuyo eje principal era la clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas), como el estudio de invariantes bajo varios grupos y sus geometrías asociadas, tales como: el grupo proyectivo, el grupo de movimientos rígidos, el grupo hiperbólico, creando una nueva concepción, tanto del concepto grupo como del de geometría.

Período cuatro: Los grupos continuos de transformaciones

En la misma dirección, Lie trabajó los grupos continuos de transformaciones, que iniciaron a tomar forma en 1870 y lo llevaron a formular lo que ahora se conoce como: "La teoría de Lie" (grupos de Lie y Álgebras de Lie,) la cual se convirtió en una rama independiente de las matemáticas: sus investigaciones se publicaron entre

1872 y 1879; sus ideas fueron de fecundidad extraordinaria ya que aún hoy se siguen demostrando resultados relacionados con los grupos y las álgebras de Lie (Dávila, 2003b).

Las ideas de Lie, se relacionaban con la integración de ecuaciones diferenciales parciales; sus investigaciones lo llevaron a considerar "grupos de transformaciones" que dejaban invariante una ecuación diferencial parcial (simetrías de ecuaciones diferenciales) y así pudo darse cuenta que los distintos métodos conocidos en la época para integrar ecuaciones diferenciales eran casos particulares de una teoría general en la que cada ecuación podía integrarse debido a que ésta quedaba invariante bajo la acción de un grupo continuo de transformaciones que, para estos casos, se podía calcular fácilmente. Así, la intención de Lie, era la de crear una teoría para resolver ecuaciones diferenciales similar a la de Galois con las ecuaciones algebraicas. De ésta forma, dada una ecuación diferencial, se debería encontrar un grupo de transformaciones que dejara invariante la ecuación y por medio del estudio de las propiedades del grupo y simplificar la ecuación para resolverla. Lie, no pudo dar una formulación completa como la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales, pero su trabajo fue fundamental en el desarrollo de la teoría de grupos (Dávila, 2003b, p. 74).

Período cuatro: La definición abstracta de Grupo por Cayley

Las investigaciones sobre los grupos continuos de transformaciones, prepararon el camino para la definición abstracta de grupo, ya que representaba una visión más amplia del concepto, dando ejemplos de grupos infinitos y además extiende el campo de aplicación de la noción de grupo, la cual estuvo presente en algunos desarrollos de la teoría de números, la geometría, ecuaciones diferenciales y la teoría de funciones.

El paso que definió la teoría de grupos de forma abstracta lo dio Arthur Cayley (18211895) matemático Británico, en 1854 en su artículo: *Sobre la teoría de grupos que dependen de la ecuación simbólica* $\theta^n = 1$ en el cual se encuentra la primera definición abstracta de un grupo:

Un conjunto de símbolos {1, α, β,...,} todos ellos diferentes y tal que el producto de cualesquiera dos de ellos (no importa en que orden) o el producto de cualquiera de ellos consigo mismo, pertenece al conjunto; se dice ser un grupo (Dávila, 2003b, p. 75).

Como parte de la definición, Cayley establece que el producto de esos símbolos, no tiene por que ser conmutativo, pero sí asociativo. Cayley presentó varios ejemplos, tales como: a) Los cuaternios con la suma; b) Las matrices invertibles con la multiplicación y c) Grupos de permutaciones con la operación compuesta. También demostró que cualquier grupo abstracto, era isomorfo a un grupo de permutaciones: resultado que hoy recibe el nombre del *Teorema de Cayley*. Además, introduce una tabla de multiplicación de un grupo y afirma que: " un *grupo abstracto* queda determinado por ésta" (Dávila, 2003, p. 75).

A pesar de que Cayley era un matemático reconocido de la época, su definición de grupo no llamó la atención de la comunidad y se tuvo que esperar a que pasaran muchos años para que el concepto abstracto de grupo, tomara forma en los matemáticos de finales del siglo XIX. Esta tarea la realizó Cayley, en una serie de artículos, donde llama la atención sobre el tema: Cayley estaba inmerso en un ambiente de abstracción. Otros matemáticos que dieron definiciones abstractas de grupo fueron: R. Dedekind (1831-1916), H. Weber (1842-1913) y W. Von Dyck (1856-1934) matemáticos alemanes.

Período cuatro: El álgebra moderna

Un concepto fundamental en el álgebra contemporánea, es el de "operación o ley de composición" que según Bourbaki, es uno de los conceptos matemáticos que se pueden considerar entre los más primitivos. Así, una vez que el hombre primitivo tuvo cierta familiaridad con el proceso de contar, el siguiente paso fue calcular. En todo cálculo intervienen dos componentes: los objetos con los que se opera (calcula) y las reglas de operación (las reglas del cálculo). Estas últimas son las que interesan, ya que de los objetos solo interesa que satisfagan las reglas de operación. Esta es, precisamente, la característica principal del álgebra contemporánea: su objeto de estudio son los sistemas algebraicos, entendidos como un conjunto de objetos que satisfacen ciertas reglas (axiomas) dadas de antemano y la "abstracción" entonces viene del hecho, de que no interesa la naturaleza de los elementos con los que se opera: lo que interesa es que cumplan los axiomas que definen las operaciones entre dichos elementos (Dávila, 2003b).

Período cuatro: Clasificación de los grupos finitos simples en el siglo XX

En el siglo XX se dio todo un movimiento de cambio en álgebra del cual surgieron nuevas estructuras y teorías algebraicas: la teoría de anillos, la teoría de campos, la teoría de módulos, la teoría de representaciones de grupos y de álgebras: el nombre de "álgebra moderna" se hizo popular con la publicación del trabajo de B. L. van der Waerden (1903-1996) matemático Holandés, en 1930 titulado: *Modern Algebra,* que fue el primer documento publicado, donde se hace una exposición de forma axiomática de las nuevas ideas y tendencias del álgebra de esa época (Dávila, 2003b, p. 77).

La axiomatización del álgebra, se da principalmente en la escuela alemana moderna donde se inicia con una unificación de las tendencias que se habían dado, entre las que se encuentran los trabajos de Dirichlet, Kummer, Kronecker, Weber, Sylvester, Clifford, Peirce, Dickson, Wedderburn, Weierstrass, Frobenius, Molien, Laguerre y Cartan, entre otros. Ésta síntesis fue iniciada por Dedekind y Hilbert en los últimos años del siglo XIX y fue continuada por E. Steinitz, E. Artin, E. Noether, Hassen, Krull, Schreier y culmina con los trabajos de van der Waerden en su tratado de 1930, donde se reúnen por primera vez estos trabajos en una exposición en conjunto, abriendo el camino y sirviendo de guía a las investigaciones posteriores en álgebra abstracta (Dávila, 2003b, p. 77).

Finalmente, en relación con el problema de la clasificación de los grupos finitos simples, en 1983 se consigue terminar una clasificación de éstos grupos, estableciéndose que existen cinco grandes familias y que cualquier grupo finito simple pertenece a una de esas cinco familias, con la excepción de 26 grupos que reciben el nombre de grupos esporádicos. El mayor de ellos es conocido como grupo monstruo (ver, figura 2.1). Así, todo grupo finito simple puede ser:

Un grupo cíclico de orden primo: se tratan de los únicos grupos finitos simples abelianos. El famoso teorema de Walter Feit y John G. Thompson, establece que todo grupo finito de orden impar es resoluble. Por tanto, todo grupo finito simple tiene, o bien orden impar y se trata de un grupo cíclico de orden primo, o bien orden par.

Un grupo no abeliano de orden par, que puede ser:

Un grupo alternado de grado al menos 5.
Un grupo de Lie simple incluyendo los grupos clásicos: Los grupos de las transformaciones proyectivo especial, unitarias, simplécticas u ortogonales sobre un cuerpo finito.
Un grupo de Lie excepcional o twisted incluyendo al grupo de $Tits_2F4(2)'$
Uno de los 26 grupos esporádicos incluyendo al grupo monstruo.

Hay quienes como John Conway consideran al grupo de Tits como un grupo esporádico (porque no es estrictamente un Grupo de Lie), en cuyo caso hay 27 grupos esporádicos. Los grupos esporádicos suelen ser de orden grande. El más pequeño es de orden 7.920. Los más grandes son el "baby monster group" de orden superior a 4×1033 y el "monstruo" de orden superior a 8 × 1053. Veinte de los 26 grupos esporádicos están incluidos en el grupo monstruo. A los seis restantes, $J1$, $J3$, $J4$, $O'N$, Ru, Ly se les llama "grupos parias"; cinco de los más pequeños fueron descubiertos por Mathieu en 1860 y el resto entre 1965 y 1975. Sin embargo varios fueron predichos antes de ser construidos ((s.f.). Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm).

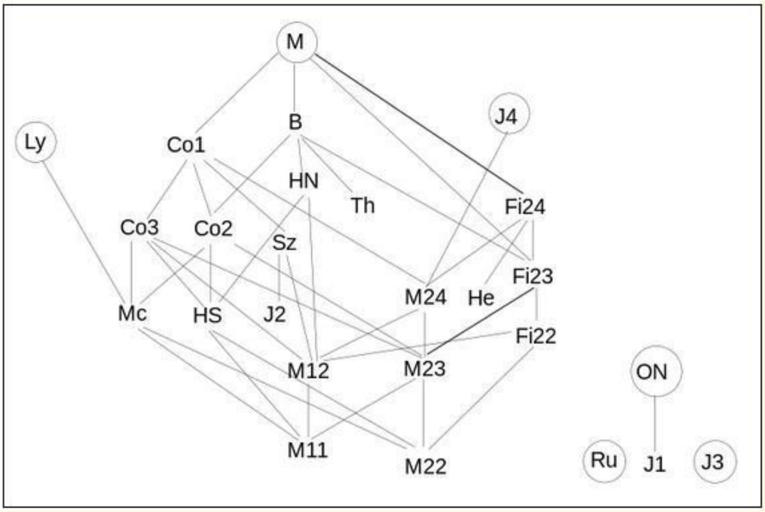

Figura 2.1: Clasificación de los grupos finitos simples (s.f.).
Recuperado de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm).

Período cuatro: Los grupos a partir del siglo XX

Según Rivero (1999), la simetría es una característica de la forma que no depende del movimiento y permanece constante bajo ciertos movimientos del plano y del espacio. El hecho de poder estudiar conceptos de tipo geométrico mediante el movimiento, abre una nueva línea de pensamiento en la matemática a mediados del siglo XIX. Dicha fusión nace de lo que se llama la *Geometría de las transformaciones*: un nuevo método de estudio de la geometría, donde se usan coordenadas, transformaciones lineales en el plano, álgebra lineal y teoría de Grupos. Una transformación en el plano, es una función uno a uno del plano en sí mismo: si P es un punto del plano el es enviado a un único punto P' del plano y se escribe $T(P) = P'$. Es posible que algunos puntos queden fijos, esto es, que $T(Q) = Q$. En este caso se dice que el punto Q permanece invariante bajo la transformación T.

En la misma dirección, una *isometría* se tiene cuando la transformación T no altera la distancia entre los puntos (cuando se habla de plano se hace referencia a su estructura afín. En este sentido, todas las transformaciones consideradas, incluyendo las isometrías, son transformaciones afines). Se prueba que un movimiento en el plano es una isometría, esto es, que todo movimiento preserva la forma de los objetos en el plano, aunque los puede mover. Y se tiene que el conjunto de movimientos con la operación compuesta es un grupo: el *Grupo de los movimientos del plano* $O(\mathbb{R}^2)$; entre sus elementos se encuentran: las traslaciones (la traslación es una isometría), rotaciones, reflexiones y la simetría de deslizamiento (Rivero, 1999).

Grupos ornamentales del plano

El concepto de simetría de una figura plana, se define con precisión al usar el grupo de movimientos del plano $O(\mathbb{R}^2)$. En general, si H es cualquier figura del plano, el conjunto de movimientos que fijan a H es un subgrupo de $O(\mathbb{R}^2)$ y se denota por G_H: se llama *grupo de simetrías de H*. Este grupo da información sobre los aspectos geométricos y en especial sobre las simetrías de la figura H.

Entre los grupos ornamentales se encuentran:

Los grupos de Leonardo, donde la figura se genera por la acción de un grupo de rotaciones (por ejemplo, un pétalo sobre un circulo), un ángulo determinado y donde se tiene que $G_H \supseteq \langle\sigma\rangle$ y σ es una rotación determinada. El grupo de simetrías de H que contiene también algunas reflexiones. *El grupo de Frisos*, contiene solo una traslación y corresponde a las decoraciones que se ven en los frisos de las fachadas de los templos o en las paredes de las casas coloniales. Se considera un friso H, como una figura que se extiende infinitamente a lo largo de una línea recta; donde H no tiene simetrías de tipo rotatorio y finalmente, cuando el grupo de traslaciones está generado por dos traslaciones no paralelas y la figura básica se repite en todo el plano inifinitamente, generando una celosía o papel tapiz, se tienen los "grupos cristalográficos planos (Rivero, 1999).

En 1981, el cristalógrafo E. S. Feodorov, demostró que solo existen 17 grupos cristalográficos, al hacer una clasificación exhaustiva de ellos. Más tarde, en 1897 Felix Klein y R. Fricke redescrubrieron este resultado; pero ya los árabes en la edad media, conocían los 17 grupos y los emplearon en la decoración de las mezquitas, castillos y fortalezas:

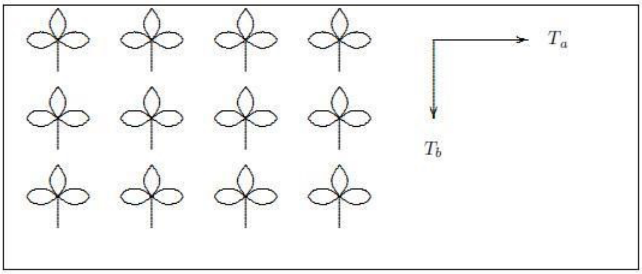

Figura 2.2: Grupo cristalográfico plano, (Rivero, 1999)

En la figura 2.2 se considera a H como una figura similar a un campo florido, que se extiende por todo el plano: H se ha generado a partir de una flor K la cual se ha trasladado en dos direcciones mediante un par de traslaciones independientes T_a, T_b. Luego el grupo G_H contiene al grupo $\langle T_a, T_b\rangle$ y además, G_H contiene infinitas reflexiones, unas con ejes verticales que pasan por los centros de las flores y otras con ejes equidistantes de dos flores. Se prueba que G_H se genera por T_a, T_b y una reflexión cualquiera de las anteriores (Rivero, 1999).

Período cuatro: Grupos cristalográficos planos

Un cristal se forma por millones de moléculas iguales que al colocarse unas al lado de otras en forma ordenada generan formas simétricas casi perfectas: la misma molécula se repite en forma ordenada y periódica en todas las dimensiones del espacio y es posible asignarle a cada compuesto cristalino un "grupo de simetrías" a fin de poderlos diferenciar bien, unos de otros. Existen millones de ellos en la naturaleza. La forma de hacer esta clasificación, consiste en partir de una figura básica o celda, formada por una cierta combinación de moléculas y entonces se va copiando la celda en el espacio, como una imagen reflejada, rotada o trasladada de la original. Para esto, se necesita considerar solo un cierto tipo de traslaciones que coloque las moléculas en el lugar que le corresponda en forma ordenada, sin que se solapen o se fundan unas con las otras: un grupo de traslaciones con éstas características, se llama un "Grupo discontinuo" (Rivero, 1999).

Un grupo G de movimientos en el plano es un grupo discontinuo si para cada punto P del plano existe un entorno, un disco abierto D con centro en P tal que la imagen $\sigma(P)$ no se encuentra en D, para todo σ en G diferente de la identidad. Es decir, los movimientos de G no triviales, mueven a P fuera del entorno D. Y un grupo G de movimientos en el plano es un "Grupo cristalográfico" si el subgrupo de G formado por las traslaciones es un grupo abeliano infinito y generado por dos elementos (Rivero, 1999).

Período cuatro: Grupos puntuales

En simetría molecular, se define como operación de simetría a una permutación de átomos que transforma una molécula o cristal en un estado que no es posible distinguirla del estado original. Asociada a cada operación de simetría se tiene un elemento de simetría, que corresponde a un punto, línea o plano respecto del cual se realiza la operación de simetría. Así, una molécula presenta simetría de tipo puntual, si todos sus elementos de simetría pasan por un único punto, en contraste con el cristal que presenta simetría de tipo espacial y los elementos de simetría que posee una molécula determinan el grupo puntual al que pertenece.

Por ejemplo, se tiene:

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	**Grupo puntual de simetría**
C_3	$E, 2C_3$	3	C_3
Operaciones de Simetría	Símbolo		
Identidad	E		

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	**Grupo puntual de simetría**
Rotación propia de $\frac{2\pi}{n}$	C_n^m		
Reflexión	σ		
Inversión	i		
Rotación impropia de $\frac{2\pi}{n}$	S_n^m		
Elementos de Simetría	Símbolo		
Eje de simetría de orden n (eje propio)	C_n		
Plano de simetría	σ		
Centro de inversión	i		
Eje impropio de orden n	S_n		

Se cumple que $S_1 = \sigma$ y $S_2 = i$; esta operación de identidad i, deja la molécula igual: es la operación que tiene cualquier molécula y no necesita ningún elemento de simetría. Se dice, que existe un eje propio de orden n cuando la molécula no cambia después de una rotación de $\frac{360}{n}$; el eje de mayor orden de una molécula se denomina eje principal y, por convención se define como el eje z. De igual forma, el eje impropio corresponde a una rotación impropia que resulta de la operación compuesta de una rotación convencional (propia) seguida de una reflexión entorno a un plano perpendicular al eje de rotación (Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://www3.uah.es/edejesus/resumenes/DECI/tema1.pdf).

Tabla 2.5: Significado del objeto Grupo

	EDAD CONTEMPORÁNEA	
PERIODO CUATRO	Arthur Cayle (1821-1895) Británico	SIGNIFICADO ABSTRACTO: El grupo de los cuaternios con la suma. El grupo de matrices invertibles con la multiplicación. Los grupos de permutaciones con la operación compuesta.
	Félix Klein (1849-1925) Alemán	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Grupo de transformaciones. Grupos de Transformaciones: Grupos continuos de transformaciones. Grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales. Grupo proyectivo. Grupos continuos de transformaciones.
	Sophus Lie (1842-1899) Noruego	Grupo de transformaciones que dejan invariante a la ecuación diferencial. Grupo de transformaciones.

	EDAD CONTEMPORÁNEA	
PERIODO TRES	Camille Jordan (1838-1922) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO:
	Evariste Galois (1811-1832) Francés	Grupos de permutaciones Grupos A_n de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Grupos simples. Grupos solubles. Grupo de Galois del polinomio o grupo asociado a la ecuación polinomial.
	EDAD CONTEMPORÁNEA	
PERIODO DOS	Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego	SIGNIFICADO ALGEBRAICO:
	Agustín-Louis Cauchy (1789- 1857) Francés	Grupos de permutaciones.
	Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano	Grupo S_4 de permutaciones.
	Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano	Conjunto de Permutaciones.
	Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés	Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).
	EDAD MODERNA	
PERIODO UNO	Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán	SIGNIFICADO ALGEBRAICO:
	Jean Robert Argand (1768-1822)	Conjunto de permutaciones.
	Joseph Louis Lagrange (1736-813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierrede Fermat (1606-1665) Francés	En Aritmética módulo n.

PERIODO UNO	RENACIMIENTO Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574-1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (funciones con las raíces de las ecuaciones) y en Aritmética módulo *n*.
PERIODO UNO	EDAD MEDIA Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (1465-1526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (Funciones con las raíces de las ecuaciones).
PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés LeonardodePisa-Fibonacci (1175-1240) Italiano	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO
	Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998)	
	Hindúes: Bhaskara (1114-1185) Brahmagupta (598-670)	
	CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	

2.3. Configuraciones socio–epistémicas en problemas relacionados con el objeto Grupo

Las etapas de evolución del pensamiento matemático, respecto al objeto grupo descritas por Piaget et. al. (2008), corresponden a la etapa inter, intra y trans-operacional: bajo este supuesto, se establece una etapa 0, donde se da solución por métodos empíricos a las ecuaciones algebraicas (civilizaciones antiguas); una etapa uno, denominada intra-operacional, en la cual se asocian las problemáticas de la época a la configuración epistémica CE1; de igual forma, para la CE2, la cual se relaciona con las problemáticas de la etapa inter-operacional y finalmente, la CE3, se relaciona con las problemáticas de la etapa trans-operacional, la cual se inicia con los problemas planteados y solucionados por Galois. Finalmente, se identificaron otras problemáticas relacionadas, en la emergencia del objeto grupo y corresponden a problemas relacionados con contextos intra- matemáticos y extra-matemáticos las cuales se agruparon en las configuraciones epistémicas CE4.1, CE4.2 y CE4.3 y finalmente, la configuración epistémica CE5, se relaciona con el significado global del objeto de investigación que corresponde a la definición abstracta del objeto de investigación y determina el significado abstracto del objeto de estudio. Las configuraciones surgen de las problemáticas identificadas tanto en la evolución del objeto, como en la aplicación en otros campos de las matemáticas y por tanto se describen con subíndices, como por ejemplo la CE1.1 que se relaciona con el período uno.

Se identificaron como problemáticas principales: (0) Problemas relacionados con Métodos empíricos para la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media (siglo V-XV); (1) Problemas relacionados con la determinación de la relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación algebraica de grado 2,3, 4 y el simbolismo algebraico en el renacimiento (siglo XV-XVI); (2) Problemas geométricos que involucran ecuaciones algebraicas de grado 4 (Descartes); (3) Problemas en Teoría de números en la edad moderna; (4) Problemas relacionados con la búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar por radicales la ecuación algebraica general de grado $n > 4$ en la edad moderna (siglo XVII-XVIII); (5) Problemas con las ecuaciones de grado $n > 4$ resolubles por radicales y la Teoría de Galois en la edad contemporánea (siglo XVIII-); (6) Problemas en Aritmética modular en la edad contemporánea (Gauss); (7) Problemas relacionados con el surgimiento de la teoría abstracta de Grupos; (8) Problemas con el conjunto de matrices (Cayley); (9) Problema de la clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas); (10) Problemas en ecuaciones diferenciales parciales; (11) Problema de la clasificación de los grupos finitos simples en el siglo XIX y (12) El problema de la definición abstracta del objeto grupo en el siglo XIX.

A partir de la determinación de estas configuraciones epistémicas y haciendo uso de las herramientas del EOS, se pasa a caracterizar cada una de estas configuraciones, identificando los objetos matemáticos primarios (lenguaje, situaciones problema, reglas: proposiciones–propiedades–teoremas, conceptos, argumentos, notaciones, procedimientos–técnicas) que conforman cada configuración junto con las relaciones entre los objetos que las componen, en términos de las problemáticas identificadas en cada época. Se presenta un ejemplo del análisis semiótico realizado uno de los problemas identificados en el período cero.

2.3.1. Problema 0.1: Solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 en la matemática egipcia

Problema: Hallar el valor del aha si el aha y una séptima parte del aha es 19 (Hallar el valor del montón si montón y una séptima parte de montón hacen 19)

La respuesta del escriba Ahmés fue $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 16$. Este problema es el número 24 del papiro Rhind y corresponde a problemas de ecuaciones resueltas por la regla de la falsa posición.

Solución:

La ecuación a resolver corresponde a $\frac{8}{7}x = 19$ y se utilizó la regla de la falsa posición que era conocida:

1) Se daba una solución al azar en este caso $x = 7$ (solución falsa)
2) Se reemplaza en la ecuación: $7 * \frac{8}{7} = 8$ (Resultado falso)
3) Debe dar 19 pero en este caso 8 $(2 + \frac{3}{8}) = (2 + \frac{3}{8})8$
4) Entonces 19 = $(2 + \frac{3}{8})8$ un número 8 veces
5) La respuesta correcta corresponde entonces $(2 + \frac{3}{8})7$ por la solución falsa
6) $= 14 + \frac{21}{8} = 16 + \frac{5}{8} = 16 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

$= 16 + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + \frac{1}{8}$

$= 16 + \frac{8}{16} + \frac{1}{8} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ que es la respuesta dada.

Una de las fuentes históricas sobre las matemáticas en egipto que se conserva, es el *papiro de Rhind y el papiro de Moscú.* El primero se conoce como papiro de Ahmés. En este papiro se daba solución a *problemas* sobre repartición de pan y cerveza, cálculo de áreas de terrenos con varias formas trigonométricas y cálculo de volúmenes, e incluso se encuentran rudimentos de trigonometría en algunos de ellos; entre estos *problemas* se encuentra el 24 que corresponde al presentado.

El problema se relaciona con la configuración_epistémica: "Ecuaciones lineales en la matemática egipcia" y se observa que el objeto matemático predominante, corresponde a los *procedimientos,* ya que para dar solución al problema se aplica un método concreto: el método o la regla de la falsa posición. En el papiro Rhind se utilizó una forma de aritmética o unos *procedimientos* que hacían uso de las fracciones unitarias, que eran precedidas a menudo por un número entero y se tomaban las fracciones de los números enteros y de la unidad juntas como una sola declaración, como cocientes y restos, o simplemente como aritmética del resto.

El papiro, se cree que pudo ser un documento con intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno. Para otros historiadores de la matemática, representa una guía de las matemáticas del antiguo Egipto y se considera como el mejor texto escrito en el que se revelan los conocimientos matemáticos. En el papiro aparecen algunos errores importantes en algunos casos, que pueden deberse al hecho de haber sido copiados de textos anteriores. Aunque en la resolución de los *problemas* aparecen métodos de cálculo basados en prueba y error, sin formulación y muchas veces tomados de las propias experiencias de los escribas; en general, representa una fuente valiosa de información.

En cuanto al *lenguaje y los términos* utilizados en la solución del problema, se considera que las fracciones constituían un sistema de representación (Rico, Castro & Romero, 1997), un lenguaje de comunicación de las cantidades no enteras y positivas y que como tal este sistema estaba sometido a unas normas sintácticas que pueden evaluarse sistemáticamente (Kaput, 1987 citado en Gairín, 2001). Se puede entender que este *sistema de representación* al igual que otros, surgió de la necesidad de comunicación de los resultados de las manipulaciones de objetos del mundo real y que estaba asociado con la cuantificación de cantidades de magnitudes que se obtenían al resolver problemas cotidianos.

Se afirma que la aparición de las fracciones tuvo lugar al hacer tareas diferentes a las de contar, ya que los resultados de contar se comunicaban con el sistema de numeración aditivo del que ellos disponían. Estas tareas como se mencionó correspondían a problemas de reparto, problemas que eran habituales en el quehacer de los escribas:

Los papiros de Rhind y de Moscú son manuales para los escribas, que dan ejemplos de cómo hacer las cosas que forman parte de sus tareas cotidianas (Fauvel & Gray, 1987 citado en Gairín, 2001, p. 657).

Los 110 problemas del Papiro Rhind y de Moscú tenían un origen práctico relacionado con repartos de pan y de cerveza, con mezclas de comida para ganado y aves domésticas y con el almacenamiento de grano (Eves, 1969 citado en Gairín, 2001, p.657).

Los desarrollos matemáticos egipcios corresponde a un tipo de *pre-álgebra* ya que en este período no se tenía conciencia del álgebra como un área independiente de la aritmética y de la geometría. En Egipto y Babilonia específicamente se tenía un álgebra aritmética. *Los problemas* fueron específicos y se pueden llamar de tipo-algebraico; para su solución se tenían métodos equivalentes a resolver ciertos tipos de ecuaciones algebraicas.

En cuanto a los *conceptos* que utilizaron los egipcios para la solución del problema, se tiene el de *fracciones unitarias,* que se interpretaban como la suma de los resultados parciales obtenidos al efectuar el reparto en fases sucesivas; se elaboraban dos posibles alternativas sobre el modo en que el escriba realizaría los cálculos numéricos asociados al reparto (Gairín, 2001). En los resultados del texto del escriba no se justificaban las fracciones que utilizaban y por la forma precisa e inequívoca en que se presentan los resultados se puede concluir que el escriba lo que hacía era comprobar que la descomposición estuviera bien hecha, pero no se considera que allí se plasme el modo por el cual se encontraba la solución (Gairín, 2001, p. 656).

2.3.2. Problema 0.2: Solución de ecuaciones: Distribución de un área en cuadrados - egipcios

Problema: Si se te dice que distribuyas 100 ells cuadrados [ell: unidad de área]sobre dos cuadrados de tal modo que el lado de uno sea $\frac{3}{4}$ del otro: por favor, dame cada una de las incógnitas

Este problema fue encontrado en Egipto y corresponde a un tiempo anterior al de la edad de oro de Grecia. En nuestro lenguaje el problema equivale a solucionar la ecuación cuadrática:

$x^2 + y^2 = 100$

$y = \frac{3}{4}x$

Solución:

Se supone que el lado de un cuadrado es 1 y el otro lado es $\frac{3}{4}$. La suma de las áreas es $\frac{25}{16}$ siendo $\frac{5}{4}$ una raíz de ésta. Como la raíz de 100 es 10, se tiene que 10 es al lado requerido como $\frac{5}{4}$ es a 1 por lo que un cuadrado es de lado 8 y el otro tiene lado 6.

En el problema la *situación-problema* corresponde a un reparto de áreas y se encuentra relacionado con un problema geométrico. Los papiros Ahmés y de Moscú, muestran que la matemática en Egipto permaneció en un mismo nivel durante varios milenios y además que no se desarrolló un sistema de numeración eficiente, que hubiese llevado sus matemáticas por otros senderos más productivos. Además, los *problemas* del papiro muestran que los egipcios podían resolver cierto tipo de ecuaciones de segundo grado, aunque aún desconocían un método general para la resolución (Dávila, 2002, p. 12).

El *procedimiento* utilizado en la solución, es el uso de proporciones para reducir el problema a una ecuación lineal o de grado uno que se solucionaba por el método de la regla falsa; además, utilizaron conocimientos geométricos para llegar a la solución del problema. En cuanto a los *conceptos* para dar solución al problema, utilizaron las fracciones unitarias, la solución de las ecuaciones de grado uno y algunos conocimientos geométricos.

2.3.3. Problema 0.3: Solución de ecuaciones algebraicas de grado 2 y 3 por los babilonios

Problema: Encontrar dos números si se conoce su suma y su producto

El método de los babilónicos para resolver esta ecuación, comprendía los siguientes pasos (Dávila, 2002, p. 13):

Solución:

a) Tomar la mitad de la suma $[\frac{s}{2}]$
b) Elevar al cuadrado el resultado obtenido $[(\frac{s}{2})^2]$
c) De lo anterior, restar el producto $[(\frac{s}{2})^2 - p]$
d) Tomar la raíz cuadrada de lo que resulta $[\sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}]$
e) Sumar al resultado la mitad de la suma $[x = \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p} + \frac{s}{2}]$
f) El resultado anterior es uno de los números que se buscan
g) El otro es la suma menos este último número $y = s - x$

Este *procedimiento* para resolver la ecuación de segundo grado es equivalente a resolver la cuadrática por fórmula (radicales), ya que:

La suma de los números es $s = x + y$

$sx = x$^2 $+ yx$ multiplicando por x

$x^2 + p = sx$ ya que $p = xy$

$x^2 - sx + p = 0$ realizando operaciones se tiene que x es solución de la ecuación;

$sy = xy + y^2$ multiplicando la suma por y

$y^2 - sy + p = 0$ esto es, y también es solución de la ecuación.

Ahora, al considerar la ecuación general de grado dos $ax^2 + bx + c = 0$ con a,b,c números racionales, con $a \neq 0$ se tiene la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
entonces, $x + y = s = -\frac{b}{a}$ y $xy = p = \frac{c}{a}$.

Los pasos del 1) al 5) de los babilónicos para resolver la forma normal, en notación simbólica llevan a:

$[x = \frac{s}{2} + \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}]$

$[y = \frac{s}{2} - \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}]$

Estas dos soluciones se pueden expresar como:

$[x, y = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}]$

$[x, y = \frac{\frac{-b}{a} \pm \sqrt{\frac{-b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}}{2}]$ reemplazando valores

$[x, y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}]$ simplificando valores.

Los *procedimientos*, para resolver la ecuación de grado dos, corresponden a la deducción y aplicación de la fórmula cuadrática o método de radicales para la ecuación de grado dos; además, consideraron las ecuaciones de la forma $x^2 + bx = c$ donde b,c no eran necesariamente enteros, pero $c \geq 0$. Utilizaron tablas de cuadrados en reversa para encontrar raíces cuadradas y siempre usaron la raíz positiva ya que esto tenía sentido al resolver problemas reales; *los problemas* incluían: encontrar las dimensiones de un rectángulo dada su área y la cantidad por la cual el largo excedía el ancho.

Se resalta que la fórmula para la solución de las ecuaciones de segundo grado, se conoce y se aplica desde hace más de 3700 años con uso hasta nuestros días (Dávila, 2002, p.14). En general, las *situaciones–problema,* estaban orientadas a resolver problemas cotidianos de cálculo de impuestos, cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. Pero a diferencia de las matemáticas egipcias, se tenía conciencia de algunas reglas generales que hacían que los métodos funcionaran en los casos particulares a los que cuales se les aplicaba; aunque no lograron dar el paso a lo general que es lo que distingue el pensamiento abstracto del común (Dávila, 2002, p. 13).

2.3.4. Problema 0.4: Solución de la ecuación algebraica de grado 2 por los griegos

Problema: Encontrar dos números x, y tal que $x + y = s$ y $x\,y = p$ para p, s dados.

Los pitagóricos, conocían el álgebra babilónica y por tanto, ella debía ajustarse a la geometría, así, la forma normal de las ecuaciones de segundo grado para encontrar dos números dada su suma y su producto, se debía interpretar geométricamente.

2.3.5. Problema 0.5: Solución de ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 por los hindúes

El hindú: Arybhata, escribió su tratado en verso *Aryabhatiya* en el año 499 y de su texto se obtuvo el siguiente problema:

Problema: En la regla de tres, multiplica la fruta por el deseo y divide por la medida. El resultado será la fruta del deseo.

Solución:

La traducción en el lenguaje actual corresponde a solucionar la ecuación $ax = bc$ donde a es la medida, b es la fruta y c es el deseo, entonces la fruta del deseo es x y el procedimiento establece que $x = \frac{bc}{a}$.

2.3.6. Problema 0.6: Solución de las ecuaciones de grado 2 por los árabes

Problema: He dividido diez en dos porciones: he multiplicado una de las porciones por la otra; después de esto, he multiplicado la una de las dos por sí misma y el producto de la multiplicación por sí misma es tanto como cuatro veces el de una de las porciones por la otra.

Solución:

Al-Juarismi resuelve el problema de la siguiente forma:

Llama *cosa* a una de las dos porciones; la otra es *diez menos la cosa.* Al multiplicar las dos obtiene *diez cosas menos un cuadrado (mal)* y siguiendo con el problema, le resulta la ecuación: *un cuadrado, el cual es igual a cuarenta cosas menos cuatro cuadrados.*

Si x es la cosa, entonces $10-x$ es diez menos la cosa. Se multiplica x consigo misma y se obtiene x^2 que debe ser igual a cuatro veces el producto de x por $10-x$. Es decir, resulta la ecuación $x^2 = 4x(10-x)$, por lo que $x^2 = 40x - 4x^2$. Aquí Al-Juarismi usa el *al-jabr* para restaurar el balance:

$x^2 + 4x^2 = 40x - 4x^2 + 4x^2$

luego aplica *al–muq ãbalah* para cancelar los opuestos:

$5x^2 = 40x$

de donde $x^2 = 8x$

y se obtiene $x = 8$

El *problema* se encuentra en el libro *al-jabr* escrito por al-Juarismi. El texto, se encuentra dividido en tres partes: en la primera, tiene los *procedimientos* que explican cómo resolver *problemas* que involucran *la cosa* y su *cuadrado* a los cuales Al-Juarismi llamó *shaî y mal* respectivamente: estos *problemas* de ecuaciones lineales y cuadráticas, los clasificó en 6 tipos diferentes y en particular el *problema* presentado correspondía al caso de *cuadrados iguales a raíces.* Todas las ecuaciones se consideraban diferentes y en este tiempo no se trabajaron los números negativos, razón por la cual era necesario separar los 6 casos: a) Cuadrados iguales a raíces; b) Cuadrados iguales a números; c) Raíces iguales a números; d) Cuadrados y raíces iguales a números; e) Cuadrados y números iguales a raíces y f) Raíces y números iguales a cuadrados (Dávila, 2002, p.10).

En general, los *métodos* del álgebra, fueron métodos aritméticos que daban solución a ecuaciones lineales (grado 1) y cuadráticas (grado dos) y los *problemas* planteados correspondían a repartición de herencias, transacciones comerciales, medida de terrenos: *lo que los hombres hacen constantemente requiere... en todos sus tratos entre ellos...* Y el *lenguaje* utilizado para el tratamiento de los problemas era de tipo verbal, como se muestra en el planteamiento del problema presentado.

2.3.7. Problema 0.7: Solución de las ecuaciones de grado 2 aplicando propiedades de los números cuadrados (Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo, Fibonacci)

Problema: Encontrar un número tal que su cuadrado sumado con cinco y su cuadrado menos cinco sean ambos cuadrados

Solución:

El problema se plantea dando solución al sistema:

$x^2 + 5 = a$ y $x^2 - 5 = b$

En el texto: "Liber Quadratorum-Libro de los números cuadrados" se presenta un análisis detallado de la solución del problema. Fibonacci descubrió que ningún número entero cumplía la condición, por tanto, el resultado debía ser una fracción. La solución dada corresponde a $x = 3\frac{5}{12}$ por lo que $x^2 + 5 = (4\frac{1}{12})^2$ y $x2 - 5 = (2\frac{7}{12})^2$.

2.3.8. Problema 0.8: Método de Fibonacci para la solución de ecuaciones algebraicas de grado 3

Problema: Encontrar un número tal que su cubo, dos cuadrados y diez raíces sean veinte

Solución:

Como:
$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ (1)
se tiene que:
$10(x + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2) = 20$ (2)
de donde:
$x + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 = 2$ (3)
Y en consecuencia $x < 2$.

Pero de (1) se tiene que $1 + 2 + 10 = 13 < 20$ por lo que $x > 1$
Además, x no puede ser una fracción, ya que si $x = \frac{a}{b}$ entonces de (3) se tiene que:
$\frac{a}{b} + \frac{a^3}{10b^3} + \frac{a^2}{5b^2}$ no puede ser un entero.

Por tanto, x debe ser un número irracional; pero tampoco puede ser un irracional de la forma $\sqrt{m}$ para un entero positivo m, pues de (1) se tiene que:
$x = \frac{20-2x^2}{10+x^2}$

Por lo que si $x = \sqrt{m}$ entonces:

$\sqrt{m} = \frac{20-2m}{10+m}$

Lo cual es absurdo al ser x un irracional. Pero x no puede ser alguna de las irracionalidades discutidas en el libro X de los Elementos de Euclides, tales como $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

Así, la solución es un número irracional x que cumple $1 < x < 2$ y se presenta la solución aproximada: $x = 1;22,7,42,33,4,40$, en notación sexagesimal: que corresponde a:

$x = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^{66}}$

Por lo que $x \approx 1{,}368808106$

y al sustituir el valor en la ecuación (1) se obtiene 19,99999995 por lo tanto $20-(x^3+2x^2+10x) = 0{,}00000005$ y la solución propuesta es notablemente precisa.

En la obra *Flos (1225)* de Fibonacci, se encuentra este problema y su solución, que también presenta en la obra de *Los números cuadrados*. En el *problema*, se establece que no es posible encontrar una solución exacta por *métodos algebraicos*, por lo que recurre a la solución por un *procedimiento* de *aproximaciones;* no es claro cómo logra realizar el proceso de resolución, sin embargo, en algunas fuentes (Boyer, 2001) se afirma que posiblemente utilizó el *método de Horner,* el cual se conocía en China desde mucho tiempo atrás (Chavarría, 2014, p.43).

Entre los *conceptos* que utiliza para la solución de los problemas, se encuentran precisamente el de los *números cuadrados* cuyo estudio inició a partir de los rudimentos de lo que se conocía desde la antigua Grecia y fue avanzando gradualmente y resolviendo proposiciones hasta dar solución al *problema del análisis indeterminado* que le había propuesto como desafío un matemático de la corte de Federico II (Teodoro) en el cual se le propone: Encontrar un cuadrado tal que si se le suma o resta el número cinco, da como resultado en ambos casos números cuadrados. Curiosamente, el año de publicación del libro también es un número cuadrado y la respuesta corresponde a la que se presenta para la solución del problema. Pasaron tres siglos para que Tartaglia y Cardano trabajaran el problema de la ecuación cúbica; sin embargo, Fibonacci en este segundo problema, encontró que la solución no era entera y pudo dar una buena aproximación.

2.3.9. Problema 0.9: Método de resolución para un caso especial de la ecuación cúbica (Scipione del Ferro)

La primera solución de una forma particular de la ecuación cúbica se debe a Del Ferro, profesor de matemáticas de la universidad de Bolonia.

Problema: El cubo y la cosa (incógnita) igual a un número

Solución:

El problema corresponde a la solución de la ecuación $x^3 + px = q$ con p, q números enteros positivos.

En este tiempo no se acostumbraba a escribir la ecuación con coeficientes negativos y el álgebra era de tipo retórico, por lo que la ecuación que se conocía era la que se enunciaba en el problema: el *método* de solución fue de tipo verbal. Este logro del Ferro fue notable ya que el problema en forma general había estado sin solución desde los tiempos de Arquímedes, quien resolvió ecuaciones cúbicas por métodos geométricos. Además, otros matemáticos habían resuelto casos particulares de esta ecuación. Del Ferro, nunca publicó sus resultados, pero antes de su muerte, reveló el método a su yerno Annibale della Nave y a su discípulo Antonio María Fior (Tartaglia) (Dávila, 2003b, p. 46) este método se explica en el siguiente problema.

2.3.10. Problema 0.10: Método de resolución de un caso de ecuación cúbica (Niccolo Fontana-Tartaglia)

La primera solución de una forma particular de la ecuación cúbica se debe a del Ferro, profesor de matemáticas de Bolonia.

Problema: $x^3 + px = q$

Solución

Quando chel cubo con le cose appresso	Cuando el cubo junto a la cosa
Se aggualia à qualche numero discreto	se iguala a cualquier número discreto
Trouan dui altri differenti in esso	encuentra dos números que difieran en eso
Dapoi terrari questo per consueto	despúes tendrás esto por costumbre:
Che'l lor produtto sempre sia eguale	que su producto siempre sea igual
Al terzo cubo delle cose neto,	al cubo del tercio de [el coeficiente de]la cosa
El residuo poi suo general	entonces su residuo general
Delli lor lati cubi ben sustratti	de sus lados cúbicos que han sido restados
Varra la tua cosa principale	te dará la cosa principal

El álgebra era de tipo retórico, ya que no se había desarrollado una notación adecuada; por lo que la solución dada es la que se presentó en la tabla anterior. El *procedimiento* correspondía a hallar dos números u, v tal que $u - v = q$ pero estos números debían satisfacer que $uv = \frac{1}{3}p^3$ para finalmente llegar a obtener que, $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Con la solución del problema, Tartaglia afirma que le había dado una explicación completa de su método a Cardano; pero en el libro del *Ars Magna* Cardano, explica que Tartaglia se quedó con la demostración, por lo que tuvo que buscarla (Dávila, 2003b, p. 48).

Las anteriores 10 problemáticas dieron origen a la configuración epistémica que se presenta de la tabla 6.16. Se presentan estos problemas de las civilizaciones antiguas y en la parte superior de la tabla se registran los problemas de la edad media.

Tabla 2.6: Configuración epistémica CE0

CE0. Métodos empíricos de solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media	
CE0.10	Método de resolución de un caso de ecuación cúbica (Niccolo Fontana-Tartaglia)
CE0.9	Método de resolución para un caso especial de la ecuación cúbica (Scipione del Ferro)
CE0.8	Método de Fibonacci para la solución de la ecuación de grado 3
CE0.7	Solución de ecuaciones algebraicas de grado 2 aplicando propiedades de los números cuadrados (Fibonacci)
CE0.6	Las ecuaciones algebraicas de grado 2 en la matemática árabe
CE0.5	Las ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 en la matemática hindú
CE0.4	Las ecuaciones algebraicas de grado 2 en la matemática griega
CE0.3	La solución de ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 por los babilonios
CE0.2	Ecuaciones relacionadas con la distribución de un área en cuadrados
CE0.1	Las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en la matemática egipcia

2.3.11. Problema 1.1: Solución de un caso especial de la ecuación cúbica (Gerolamo Cardano)

Problema: $x^3 + 6x = 20$

Solución:

Cardano procede de la siguiente forma (método para el problema de Tartaglia):

$\left(\frac{1}{3}6\right)^3 = 8$

$\frac{1}{2}20 = 10$ ahora $10^2 = 100$

Se suma $100 + 8 = 108$ luego se toma la raíz cuadrada $\sqrt{108}$

$(\sqrt{108} + 10)$ es el binomio

$(\sqrt{108} - 10)$ es la apotama

Se toma raíz cúbica $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$ y $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

Por lo tanto el valor de la cosa es:

$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

Así, si $u=\sqrt{108}+10$ y $v=\sqrt{108}-10$
entonces, $u-v=20$ como lo establece el método de Tartaglia y además $uv=2^3$
finalmente, la solución es de la forma $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$.

Cardano no dice nada de las otras raíces de la ecuación, ya que esta es la única verdadera porque no consideró las raíces negativas o complejas como tales. Pero, el verdadero mérito de Cardano fue que no solo solucionó este problema, sino que inició con el estudio de los otros casos de la cúbica con éxito. Así, para otro de los *problemas* que corresponde al caso del cubo igual a la cosa y un número, da la siguiente regla:

Caso $x^3=px+q$:

"Cuando el cubo de la tercera parte del coeficiente de la cosa no es más grande que el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, restas el primero de estos números de este último y agregas la raíz cuadrada de esta resta a la mitad de la constante de la ecuación y de nuevo, réstalo de la misma mitad y tendrás, como se dijo, un binomio y su apotama: la suma de las raíces cúbicas de los cuales constituyen el valor de la cosa" (Dávila, 2003b, p. 49.)

2.3.12. Problema 1.2: Solución por radicales de las ecuaciones algebraicas generales de grado 3 y 4 en la edad media

Problema de Gerolamo Cardano y la resolución general de la ecuación cúbica:

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{2.2}$$

Para la ecuación cúbica general $x^3+ax^2+bx+c=0$ con raíces x_1, x_2, x_3 y a, b, c números racionales, el *procedimiento* dado por Cardano, corresponde a:

$x^3+ax^2+bx+c=0=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0$
de donde, se describen los polinomios simétricos elementales en relación con los coeficientes de la ecuación:

$x_1+x_2+x_3=-a$
$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$
$x_1x_2x_3=-c$

Para solucionar la cúbica general procede con la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$ para llegar a una ecuación de la forma $y^3 + py + q = 0$ y toma como solución:
$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ luego como:

$$y^3 = (\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})^3 = u + v + 3(\sqrt[3]{u})^2 \sqrt[3]{v} + 3(\sqrt[3]{u})(\sqrt[3]{v})^2$$
$$= (u + v) + 3(\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v})(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})$$

se tiene la ecuación $y^3 - 3(\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v})y - (u + v) = 0$ que la compara con la ecuación $y^3 + py + q = 0$ y obtiene que:
$\sqrt[3]{u}\ \sqrt[3]{v} = \frac{-p}{3}$
$u + v = -q$ de donde:
$uv = -(\frac{p}{3})^3$

Se halla la ecuación cuadrática con u, v raíces y se reemplazan las fórmulas anteriores para obtener:

$$z^2 + qz - (\tfrac{p}{3})^3 = 0 = z^2 - (u + v)z + uv = 0$$

Soluciona la cuadrática en z y obtiene:

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Por lo que:

$$u = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$
$$v = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Y como se supuso la solución de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ se tiene que:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Y ésta es la solución de la cúbica general (2.2) que se conoce como la *fórmula de Cardano.*

En la configuración epistémica, correspondiente a la solución de la cúbica general de Cardano, se tiene que entre los objetos matemáticos, predominan los *procedimientos* ya que en este caso, se describe en forma completa un método de solución. Se observa que si se tiene una raíz, es fácil encontrar las otras dos y que las raíces de la cúbica general (2.2) se obtienen mediante la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$. Cardano descubrió con su alumno Ferrari que efectivamente el primero en descubrir el método para resolver el problema *del cubo y la cosa igual al número* había sido del Ferro cerca a 1515 (Dávila, 2003b, p. 53).

2.3.13. Problema 1.3: Solución general de la ecuación bicuadrática (Ludovico Ferrari)

Otra de las aportaciones del *Ars Magna* de Cardano, fue el *método* para resolver la ecuación de grado cuarto y el crédito del descubrimiento Cardano lo da a Ludovico Ferrari. Ludovico fue alumno de Cardano, y encontró un método para calcular las raíces de la ecuaciones de cuarto grado $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$.

Problema:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{2.3}$$

Solución:

Primero se elimina el término cúbico con la sustitución $x = y - k$

$(y-k)^4 + a(y-k)^3 + b(y-k)^2 + c(y-k) + d = 0$

Se hace el coeficiente del término cúbico $-4k + a = 0$ para obtener que $k = \frac{a}{4}$

Entonces se llega a la ecuación $y^4 + y^2(-\frac{3a^2}{8} + b) + y(\frac{a^3}{8} - \frac{ba}{2} + 1) + (-\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{a}{4} + d) = 0$

Que se representa como:

$y^4 + py^2 + qy + r = 0$

Ahora, se introduce un parámetro α y se expresa la ecuación en términos de p, q, r como:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 = 2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) \tag{2.4}$$

Luego, se toma el lado derecho de la igualdad de (2.4) y se factoriza:

$2\alpha\left(y^2 - \frac{q}{2\alpha}y + \left(\frac{\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}}{2\alpha}\right)\right)$

Ahora, para que la expresión sea un cuadrado perfecto se necesita que:

$\frac{q^2}{16\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}}{2\alpha}$

Para que esto suceda α debe ser la raíz de la ecuación cúbica auxiliar que actualmente se conoce como "la cúbica resolvente" de la ecuación cuartica:

$8\alpha^3 + 8p\alpha^2 + (2p^2 - 8r)\alpha - q^2 = 0$

la cual se resuelve usando la fórmula de Cardano (fórmula del Ferro).

Y se obtiene la raíz α_0 de la cúbica, luego la ecuación 2.4 se expresa como:

$$(y^2+\tfrac{p}{2}+\alpha_0)^2=2\alpha_0(y-\tfrac{q}{4\alpha_0})^2$$

Y se encuentra que,

$$(y^2+\tfrac{p}{2}+\alpha_0)=\pm\sqrt{2\alpha_0}(y-\tfrac{q}{4\alpha_0})$$

Estas son dos ecuaciones cuadráticas para y por lo que se obtienen las cuatro soluciones, las cuales se reemplazan en $x=y-\frac{a}{4}$ para obtener las raíces de (2.3).

En la configuración-epistémica predominan los *procedimientos* que presenta Cardano, para dar solución a la ecuación (2.3), este procedimiento es diferente al de los algebristas italianos del siglo XVI, pero los *métodos* son equivalentes (Dávila, 2003b, p. 54). La obra de Cardano del *Ars Magna,* marcó un punto en la historia del desarrollo del álgebra, por esto, a Cardano se le considera como una figura central en este proceso.

2.3.14. Problema 1.4: Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas (Cardano y Viète)

Problema: ¿Qué relación existe entre las raíces y los coeficientes de la ecuación algebraica?

Solución:

Para la ecuación de grado dos $ax^2+bx+c=0=(x-x_1)(x-x_2)$ se tiene que si x_1, x_2 son las raíces de la ecuación, entonces:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}$$

Para la ecuación algebraica general de grado n:
$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ se tiene entonces que:

$$a_{n-1}=-a_n(x_1+x_2+...+x_n)$$
$$a_{n-2}=a_n(x_1x_2+...+x_1x_n+x_2x_3+...+x_{n-1}x_n)$$
$$a_{n-3}=a_n(x_1x_2x_3+x_1x_2+x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$
$$\vdots$$
$$a_1=(-1)^{n-1}a_n(x_1x_2...x_{n-2}x_n+...+x_2...x_{n-1}x_n)$$
$$a_0=(-1)^na_n(x_1x_2...x_n)$$

La configuración epistémica asociada al *problema* hace referencia a la generalización de la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación algebraica de grado n y sus raíces. La configuración tiene como objeto primario matemático predominante a los *argumentos,* ya que se presentan fórmulas generales que establecen las relaciones entre los coeficientes y las raíces de la ecuación de grado *n*. Las relaciones se pueden definir como funciones de los polinomios simétricos elementales los cuales fueron descritos por Newton y otros matemáticos.

2.3.15. Problema 1.5: Solución general de las ecuaciones de grado 2 (Francois Viète)

Problema: a quadr + B2in A aequantur Z plano

Solución:

Para la solución de la ecuación $x^2+2ax=b$, Viéte inicia con la sustitución $x=u-v$:
$(u-v)^2+2a(u-v)=b$ y luego hace la sustitución $v=\frac{a}{2}$ para obtener:
$(u-\frac{a}{2})^2+2a(u-\frac{a}{2})=b$
así,
$u^2-au+(\frac{a}{2})^2+2au=a^2+b$
$(u+\frac{a}{2})^2=a^2+b$
entonces,
$u=\sqrt{a^2+b}-\frac{a}{2}$
así,
$x=u-\frac{a}{2}=(\sqrt{a^2+b}-\frac{a}{2})-\frac{a}{2}$
$x=\sqrt{a^2+b}-a$

En esta configuración, se verifica que el *procedimiento* descrito por Viéte, corresponde al desarrollo de la fórmula para las ecuaciones de segundo grado; pero la nueva *notación*, hace posible la discusión de las técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones.

2.3.16. Problema 1.6: Solución general de la ecuación algebraica de grado 3 (Francois Viète)v

Problema: $x^3+ax^2+bx+c=0$

Solución:

Primero hace la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$ para reducir la ecuación a una de la forma $y^3 + 3py = q$:

$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0$

De donde se obtiene:
$y^3 + 3(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9})\mathrm{y} + (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0$

Se hace $p = \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}$ y

$q = -(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c)$

Se llega a la ecuación $y^3 + 3py = q$ equivalente a $y^3 + py + q = 0$
que según los métodos de Cardano:

Se supone la solución de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.
Así, que:

$y^3 = (u + v) + 3(\sqrt[3]{u}\,\sqrt[3]{v})(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})$ y

$y^3 - 3(\sqrt[3]{u}\,\sqrt[3]{v})y - (u + v) = 0$

Ecuación que se compara con la ecuación $y^3 + py + q = 0$ para obtener:
$uv = -(\frac{p}{3})^3$
$u + v = -q$

En segundo lugar, si u, v son raíces de la cuadrática, se tiene:

$z^2 - (u + v)z + uv = 0 = z^2 + qz - (\frac{p}{3})^3 = 0 =$ cuyas soluciones son:

$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ entonces como:

$u = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ y

$v = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ y como la solución es de la forma:

$y = \sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{v}$ se tiene que:

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ de cuyas combinaciones salen 6 raíces

pero solo 3 raíces cumplen la condición que $uv = -(\frac{p}{3})^3$ así que:

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

En la configuración epistémica relacionada con la práctica matemática, los *términos* en el álgebra de Vieta, tenía algo de verbal, ya que no se adoptó el *símbolo* + hasta mucho tiempo después de éstos desarrollos; también se observa de la solución, que el objeto matemático predominante corresponde a *procedimientos*, ya que la solución presenta un método claro para solucionar las ecuaciones de grado tres (Dávila, 2003b, p. 39).

2.3.17. Problema 1.7: El simbolismo algebraico y la solución de la ecuación de grado 4 (Thomas Harriot)

$$\textbf{\textit{Problema:}}\ aaaa - 6aa + 136a = 1155$$

Solución:

La ecuación es $a^4 - 6a^2 + 136a = 1155$	
Parte de la ecuación equivalente $aaaa -$ $2aa + 1 = 4aa - 136a + 1156$	
Así que :	
$(aa - 1)^2 = (2a - 34)^2$	
$aa - 1 = 2a - 34$	$aa - 1 = 34 - 2a$
$33 = 2a - aa$	$aa + 2a = 35$
$aa - 2a = -33$	$aa + 2a + 1 = 1 + 35$
$aa - 2a + 1 = +1 - 33$	
$a - 1 = \sqrt{-32}$	$a + 1 = \sqrt{36}$
$1 - a = \sqrt{-32}$	$a = \sqrt{36} - 1 = 5$
$a = 1 + \sqrt{-32}$	$-a - 1 = \sqrt{36}$
$a = 1 - \sqrt{-32}$	$a = -\sqrt{36} - 1 = -7$

El *problema* en este caso corresponde a resolver la ecuación de grado cuarto (Dávila, 2003b, p. 40). En el *procedimiento* que desarrolla, se observa como completar cuadrados y la simplificación de algunos pasos elementales en el proceso de obtener las raíces de la ecuación; el conocimiento sobre la extracción de la raíz cuadrada cuyo resultado corresponde a dos valores; uno positivo y el otro negativo y el manejo de todas las raíces sean negativas, positivas, reales o complejas. En el *procedimiento* se hace evidente el manejo de la *notación* relacionada con un simbolismo algebraico que sirvió para influenciar a las dos siguientes generaciones de matemáticos ingleses: incluso a Lagrange en el siglo XVIII y a Silvester en el siglo XIX, los cuales se expresaron bien del trabajo de Harriot.

2.3.18. Problema 1.8: Solución de la ecuación algebraica de grado 4 (Euler)

$$\textbf{\textit{Problema:}}\ Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$$

Solución:

Para solucionar la ecuación $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ se inicia eliminando el término cúbico: para esto, se divide por A y propone la sustitución:
$y = x - \frac{B}{4A}$ lo cual lleva a una ecuación donde se ha eliminado el termino de grado tres:

$y^4 - ay^2 - by - c = 0 = x^4 - ax^2 - bx - c$

Euler, toma la solución para la ecuación de grado cuarto de la forma:

$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$

donde, p, q, r se calculan en función de las raíces a, b, c.

Elevando al cuadrado la solución, obtiene:

$x^2 - (p + q + r) = 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$

Elevando nuevamente al cuadrado se obtiene que:

$x^4 - 2(p + q + r)x^2 + (p + q + r)^2 = 4(pq + pr + qr) + 8\sqrt{pqrx}$

Se realizan las sustituciones:

$f = p + q + r$
$g = pq + pr + qr$
$h = pqr$

Y se establece la ecuación reducida de cuarto grado como:

$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{hx} - (4g - f^2) = x^4 - ax^2 - bx - c = 0$

Luego:

$f = \frac{a}{2}$

$h = \frac{b^2}{64}$

$g = \frac{4c + a^2}{16}$

Y se llega a la ecuación reducida:

$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$ donde se conoce P, Q, R

Ahora, pasa a construir la ecuación cúbica auxiliar con raíces p, q, r:

$(z - p)(z - q)(z - r) = z^3 - (p + q + r)z^2 + (pq + pr + qr)z - pqr = z^3 - fz^2 + gz - h = 0 = x^3 + ax^2 + bx + c$ de donde se conocen los coeficientes f, g, h utilizando el método de Cardano (utiliza la ecuación en x).

Para esto se hace la sustitución:

$x = z - \frac{a}{3}$ para eliminar el término cuadrático:

$z^3 + (b - \frac{a^2}{3})z + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$
$z^3 + pz + q = 0$
con $p = (b - \frac{a^2}{3})$
$q = (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c)$

Esta ecuación tiene como solución (método de Cardano):

$z = \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}\right)^{\frac{1}{3}}) - \frac{a}{3}$

$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$

Donde se tiene que si:

$\Delta = 0$ todas las raíces son reales y al menos dos de ellas iguales.
$\Delta > 0$ la ecuación tiene una raíz real y dos imaginarias.
$\Delta < 0$ la ecuación tiene tres raíces reales simples.

Ahora, la raíz Δ se escoge arbitrariamente y se fija; las raíces u, v se escogen de modo que cumplan la relación $p = -3uv$, es decir, se escoge una arbitrariamente y la otra se calcula mediante la relación dada y se tiene que:

$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ es una raíz cúbica arbitraria del radicando, se define la raíz v mediante la relación $p = -3uv$ para obtener:

$v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}}$

Con estas tres raíces llamadas p, q, r se obtienen cuatro raíces:

$x_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$
$x_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$
$x_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$
$x_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$

Finalmente, como se tenía que la solución a la ecuación de grado cuatro era de la forma $y_i = x_i - \frac{B}{4A}$ se reemplaza y se obtienen las cuatro soluciones de la ecuación de grado cuatro.

Cardano en su obra del "Ars Magna" establece que el primero en dar solución a la ecuación de grado cuarto fue Ludovico Ferrari; sin embargo, Leonhard Euler también interviene en la solución de las ecuaciones de grado cuarto, como lo muestra el *procedimiento* descrito para la solución; este *procedimiento* inicia con una sustitución adecuada que permite eliminar el término cúbico, de donde resulta una ecuación incompleta de grado cuatro; para ésta toma una solución apropiada de la forma $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ que eleva al cuadrado dos veces para obtener una ecuación incompleta de grado cuarto en p, q, r. Luego, construye la ecuación algebraica de grado tres con raíces p, q, r donde conoce los coeficientes de la ecuación y utiliza el método de Cardano para solucionar la ecuación de grado tres, iniciando con la eliminación del término cuadrático: mediante una sustitución, propone una solución para la cúbica de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ y construye la ecuación de grado dos con u,v raíces de la ecuación que resuelve por fórmula la ecuación de grado dos.

Este *procedimiento*, le permite obtener las soluciones para la ecuación de grado tres y llegar finalmente a la solución de la ecuación de grado cuatro. Se observa que en esta configuración epistémica, el objeto matemático primario predominante corresponde a los *procedimientos* y métodos particulares para encontrar la solución general de las ecuaciones de grado cuarto.

2.3.19. Problema 1.9: Planteamiento de problemas geométricos relacionados con ecuaciones algebraicas de grado 4 (René Descartes)

Problema: **x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0**

Solución:

Descartes, primero plantea un cambio de variable:

$z = x + \frac{b}{4}$ así que $x = z - \frac{b}{4}$ que se reemplaza para suprimir el término cúbico:

$z^4 + (c - \frac{3b^2}{8})z^2 + (d - \frac{bc}{2} + \frac{b^3}{8})z + (e - \frac{bd}{4} + \frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{216}) = 0$

llegando a la ecuación:

$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$

La idea de Descartes es factorizar la ecuación de la forma:

$(z^2 + \alpha z + \beta)(z^2 - \alpha z + \gamma) = 0$

De donde resulta:

$z^4 + (\gamma + \beta - \alpha^2)z^2 + \alpha(\gamma - \beta)z + \beta\gamma = 0$

Llegando a una ecuación de la forma $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$

Donde se obtiene que:

$\gamma + \beta - \alpha^2 = p$
$\alpha(\gamma - \beta) = q$
$\beta\gamma = r$

Con estas ecuaciones y haciendo operaciones se llega a la ecuación:

$\alpha^6 + 2p\alpha^4 + (p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2 = 0$

Ecuación de sexto grado, donde α tiene solo potencias pares.

Finalmente se hace la sustitución, $A = \alpha^2$ y se obtiene la ecuación cúbica:

$A^3 + 2pA^2 + (p^2 - 4r)A - q^2 = 0$

Ecuación que se resuelve nuevamente por el método de Cardano para hallar α, β, γ y reemplazarlas en las ecuaciones:

$(z^2 + \alpha z + \beta) = 0$
$(z^2 - \alpha z + \gamma) = 0$

Se obtienen así, las cuatro raíces para finalizar con la sustitución $x = z - \frac{b}{4}$ y obtener los valores de las raíces en la variable x.

En el problema, se observa que el objeto matemático primario predominante en la configuración epistémica, corresponde nuevamente a los *procedimientos;* ya que se da un método general para solucionar éstas ecuaciones de grado cuarto, diferente al de Euler. Entre los *conceptos* que se utilizan se encuentra la factorización de trinomios, que representan la idea genial de Descartes. En su obra *La Géométrie,* en uno de los apéndices ejemplifica su *método: para bien conducir la razón y buscar la verdad de las ciencias;* método que expone en su tratado *Discours de la Méthode* de 1637.

2.3.20. Problema 1.10: El problema de Pappus (Descartes)

Problema de Pappus descrito por Descartes: "Teniendo tres, cuatro o un número mayor de rectas, dadas en su posición, se intenta hallar en primer lugar un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazas desde el mismo punto, guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no hayan sino tres; o bien con el rectángulo de las otras dos si no hay más que cuatro; o bien, si hay cinco, que el paralelepípedo formado por tres guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por las otras tres; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde la proporción dada con el resultado de las otras tres y también de una línea dada; si hay ocho, que el resultado obtenido de la multiplicación de cuatro, guarde la proporción dadaconelresultadoobtenidodelasotrascuatro. Deestemodo,talcuestiónpuedehacerseextensiva a cualquier otro número de líneas" (Descartes, 1596).

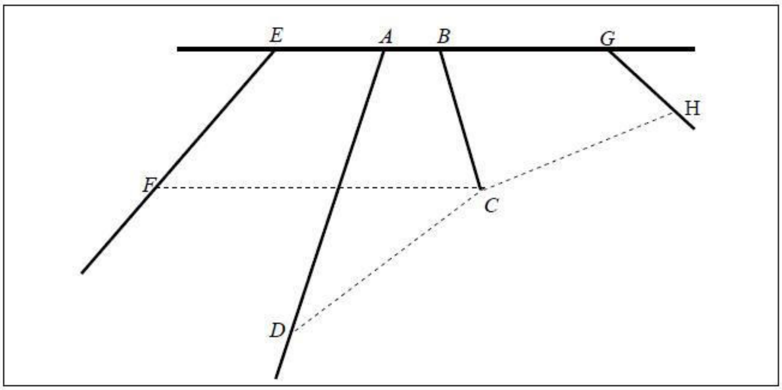

Figura 2.3: Caso particular para cuatro rectas (Chavarría, 2014, p. 69)

El problema en términos modernos, se traduce en: Dado un número par de rectas (2n rectas), encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a n de esas rectas se encuentre en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras n rectas.

2.3.21. Problema 1.11: Problemas en Teoría de números: Aritmética modular (Fermat)

Problema: pequeño teorema de Fermat: Si p es un número primo que no divide al entero a, entonces a^p−1≡ 1modp.

Demostración: Fermat no da demostración del teorema.

Problema: ¿Cuando un número n es expresable como la suma de dos cuadrados? (Fermat en 1636).

Demostración: Fermat no da demostración del teorema y es Euler el que da una primera demostración del teorema.

2.3.22. Problema 1.12: Problemas en Teoría de números: Aritmética modular (Euler)

Problema: Teorema de Fermat por Euler: Sea p un primo impar. Entonces p es suma de dos cuadrados si y solo si $p \equiv 1(mod4)$

En la configuración epistémica correspondiente a la demostración del teorema, realizada por Euler, se observan como objetos matemáticos predominantes los *conceptos* de congruencias y números primos, el *método* del descenso infinito de Fermat, los residuos cuadráticos, el principio del buen orden y conceptos de divisibilidad. En la prueba sobresalen los objetos matemáticos de los *argumentos deductivos* para obtener la prueba del teorema. En la configuración se utilizan numerosos conceptos que ahora hacen parte de la rama de la matemática conocida como Teoría de números y de igual forma de Matemática discreta.

Problema: Teorema de Euler-Fermat: Si a y n son primos relativos, entonces n divide al entero $a^{\varphi(n)}-1$ (Euler en 1736).

2.3.23. Problema 1.13: Las resolventes de Lagrange y el conjunto S_3

Joseph Louis Lagrange, fue un físico, matemático y astrónomo, italiano que hizo importantes contribuciones a la astronomía, la mecánica y las matemáticas en la línea de álgebra. En 1771, en su memoria *Réfléxions sur la Résolution Algébrique des Equations,* presentó un método que tenía su base en técnicas hasta el momento conocidas para solucionar ecuaciones algebraicas hasta el grado cuarto y por el método de radicales. Lagrange pensó que podía extender el método a la solución de ecuaciones de grado mayor o igual que cinco, sin llegar a lograrlo. Como se ha establecido, las ecuaciones de tercer y cuarto grado fueron resueltas por los matemáticos italianos en el siglo XVI, así que en la primera parte de su memoria, se encuentran los diferentes métodos conocidos para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Lagrange buscaba los principios básicos de estos métodos para usarlos y encontrar soluciones semejantes por el método de radicales para las ecuaciones de grado mayor a cuatro (Ruffini y Abel a inicios del siglo XIX basándose en estas ideas demostraron que esto era imposible).

El método de Lagrange, consistía en sustituir una ecuación por otra de menor grado: encontró que se trataba siempre de la *existencia de funciones resolventes* de las raíces y que las funciones mismas eran raíces de ecuaciones de grados menores. En su artículo presentó varios ejemplos, entre ellos:

Problema: Determinar las resolventes, para la ecuación de grado tres

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Solución:

El trabajo de Lagrange para la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se inicia con la sustitución $y = x + \frac{a}{3}$ para eliminar el término cuadrático y llegar a la ecuación cúbica $y^3 + py + q = 0$. El teorema fundamental del álgebra, que era conocido, garantizaba la existencia de las raíces x_1, x_2, x_3 de la ecuación. Por tanto define la función:

$$r = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$$

Donde μ_1, μ_2, μ_3 pertenecen a los números complejos y luego de permutar las tres raíces obtiene las siguientes seis combinaciones:

$r_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$
$r_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_2$
$r_3 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$
$r_4 = \mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$
$r_5 = \mu_1 x_3 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2$
$r_6 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3$

Con las funciones $r_1, \ldots, r_6$ Lagrange construye la ecuación de sexto grado (Chavarría, 2014):

$(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)\ldots(y-r_6)=0$

Luego toma de manera conveniente $\mu_1=1, \mu_2=\omega, \mu_3=\omega^2$ donde ω es una raíz cúbica distinta de la unidad, es decir, $\omega^3-1=0$ y se tiene que $\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)$ luego ω podría ser $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ o $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Y reemplazando, obtiene las funciones:

$$r_1=x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$$
$$r_2=x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2$$
$$r_3=x_2+\omega x_3+\omega^2 x_1$$
$$r_4=x_3+\omega x_2+\omega^2 x_1$$
$$r_5=x_3+\omega x_1+\omega^2 x_2$$
$$r_6=x_2+\omega x_1+\omega^2 x_3$$

Haciendo cálculos encuentra una relación entre $r_1, \ldots, r_6$; estas relaciones son diferentes cuando se establece un orden diferente para las permutaciones (Chavarría, 2014, p. 83):

$\omega r_1=\omega x_1+\omega^2 x_2+\omega^3 x_3$
$=x_3+\omega x_1+\omega^2 x_2=r_5$
$\omega^2 r_1=\omega^2 \mathrm{x}_1+\omega^3 x_2+\omega^4 x_3$
$=x_2+\omega x_3+\omega^2 x_1=r_3$
$\omega r_2=\omega x_1+\omega^2 x_3+\omega^3 x_2$
$=x_2+\omega x_1+\omega^3 x_3=r_6$
$\omega^2 r_2=\omega^2 x_1+\omega^3 x_3+\omega^4 x_2$
$=x_3+\omega x_2+\omega^2 x_1=r_4$

Al conjunto de permutaciones de las raíces $\{r_1, \ldots, r_6\}$ se le conoce actualmente como el conjunto S_3 de permutaciones de tres elementos y corresponde al grupo simétrico de orden 3. A este conjunto lo llama Lagrange inicialmente, la Resolvente de la ecuación de tercer grado y basándose en esta idea, encuentra la resolvente para la ecuación de cuarto grado. Esto fortaleció la idea equivocada de que dicho conjunto debería existir para la ecuación de quinto grado.

Con estos desarrollos en la ecuación se tiene que:

$$(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)(y-r_4)(y-r_5)(y-r_6)=0$$
$$=(y-r_1)(y-r_2)(y-\omega^2 r_1)(y-\omega^2 r_2)(y-\omega r_1)(y-\omega r_2)$$
$$=(y^2-(r_1+r_1\omega^2)y+\omega^2 r_1^2)(y-\omega r_1)$$
$$=y^3-(r_1+r_1\omega+r_1\omega^2)+(\omega^2 r_1^2+r_1^2\omega+r_1^2\omega^3)y-\omega^3 r_1$$
$$=y^3-r_1^3$$

Ahora,
$(y-r_2)(y-\omega^2 r_2)(y-\omega r_2)=(y^3-r_2^3)$

Luego,
$(y^3-r_1^3)(y^3-r_2^3)=(y^3)^2-(r_1^3+r_2^3)y^3+r_1^3 r_2^3$

Ahora toma $y^3 = t$ y obtiene una ecuación auxiliar de grado menor que la cúbica (Chavarría, 2014, p. 88):

$$t^2 - (r_1^3 + r_2^3)t + r_1^3 r_2^3 = 0 \qquad (2.5)$$

A partir de las permutaciones se pueden encontrar los valores para x_1, x_2, x_3 tomando:

$r_1 + r_2 = 2x_1 + \omega(x_2 + x_3) + \omega^2(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = 2x_1 + (\omega + \omega^2)(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = 2x_1 + (-1)(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = -x_1 + 3x_1 - x_2 - x_3$

Así,
$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + r_1 + r_2]$
$x_2 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega^2 r_1 + \omega r_2]$
$x_3 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega \mathrm{r}_1 + \omega^2 r_2]$

Como las soluciones quedaban expresadas en términos de r_1, r_2 faltaba determinar $(r_1^3 + r_2^3)$ y $r_1^3 r_2^3$ para reemplazarlas en la ecuación de grado dos en la variable t:

Luego para,

$r_1^3 = r_1 r_1 r_1$
$= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega \mathrm{x}_2 + \omega^2 x_3)$

Como $\omega^3 = 1$ se tiene que:

$r_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \omega(3x_1^2\mathrm{x}_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + \omega^2(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + 6x_1 x_2 x_3$
$r_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \omega(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + \omega^2(3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + 6x_1 x_2 x_3$
$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \omega(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2 + 3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + \omega^2(3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1 + 3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + 12x_1 x_2 x_3$

Sea hace $R = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2$ se tiene:

$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \omega(3R) + \omega^2(3R) + 12x_1 x_2 x_3$

Como $\omega + \omega^2 = -1$ se tiene que:

$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (-1)(3R) + 12x_1 x_2 x_3$

Para continuar con el calculo de $r_1^3 + r_2^3$ se utilizan las identidades de Girard que establecen la relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación, que para el caso de la ecuación cúbica $y^3 + py + q = 0$ corresponden a:
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ el término en x^2
$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p$
$x_1 x_2 x_3 = -q$

Y tomando,
$(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_2^2x_3+3x_3^2x_1+3x_1^2x_3+3x_2^2x_1+3x_3^2x_2+6x_1x_2x_3$
$(x_1+x_2+x_3)^3=x_1^3+x_2^3+x_3^3+(3R)+6x_1x_2x_3$

Utilizando las tres identidades, se tiene que:
$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-(3R)-6x_1x_2x_3$
Así, $r_1^3+r_2^3=2(-(3R)-6x_1x_2x_3)+(-3R)+12x_1x_2x_3$
$r_1^3+r_2^3=-9R$

Y se tiene que $R+3x_1x_2x_3=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

Por las relaciones de Girard, se tiene que $R=-3x_1x_2x_3$ y

$r_1^3+r_2^3=27x_1x_2x_3$
$r_1^3+r_2^3=-27q$

Falta calcular $(r_1r_2)^3=r_1^3r_2^3$
Entonces, $r_1r_2=(x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)(x_1+\omega x_3+\omega^2x_2)$
$r_1r_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+\omega(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+\omega^2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
De igual forma, como $\omega+\omega^2=-1$ se tiene que:
$r_1r_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
Ahora, $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=0$
Por las identidades de Girard se tiene que:
$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=0$
Reemplazando en:
$r_1r_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
$=-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$
$=-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=-3p$
Así, $(r_1r_2)^3=-27p^3$

Y reemplazando en la ecuación de segundo grado $t^2-(r_1^3+r_2^3)t+r_1^3r_2^3=0$ se tiene :
$t^2-(-27q)t-27p^3=0$
Como r_1 y r_2 son soluciones de la ecuación cuadrática, aplicando el método de radicales se tiene que :

$t=r_1^3=\frac{-27q}{2}+\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}$ y

$t=r_2^3=\frac{-27q}{2}-\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}$

Finalmente en la solución:
$x_1=\frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+r_1+r_2]$
Se escribe como:
$x_1=\frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+\sqrt[3]{r_1^3}+\sqrt[3]{r_2^3}]$
Y la solución es:

$x_1=\frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+\sqrt[3]{\frac{-27q}{2}+\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{-27q}{2}-\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}}]$

Por las identidades de Girard, se tiene que $x_1+x_2+x_3=0$ entonces,

$x_1=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}$

En esta ecuación, Lagrange llegó a la misma expresión que su antecesor Cardano, para la solución de la ecuación cúbica por medio de radicales, a través del proceso que hoy se conoce como: *La resolvente de Lagrange* (Chavarría, 2014, p. 93).
De igual forma se procede con:

$$x_2 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega^2 r_1 + \omega r_2]$$

$$x_3 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega r_1 + \omega^2 r_2]$$

A partir de estos desarrollos, se tiene que: $r_1,\ldots,r_6$ forman el grupo simétrico S_3 de permutaciones con tres elementos al cual Lagrange denominó inicialmente como: "La resolvente de la ecuación de tercer grado" y siguiendo las mismas ideas pasa a hallar la resolvente para la ecuación de cuarto grado.

2.3.24. Problema 1.14: El teorema de Lagrange

En el artículo de 1771 de Lagrange, aparece por primera vez, *El teorema de Lagrange,* en una forma limitada y difícil de reconocer; este artículo lo publicó en dos partes la academia de Berlín entre los años (1770-1771). En esta obra de 200 páginas no se mencionaban los grupos, sin embargo, fue una de las bases mas importantes para el desarrollo del álgebra moderna del siglo XIX. Los matemáticos que vinieron después, como Galois y Abel estudiaron esta obra para sus investigaciones. El tema de la obra se relacionaba con el problema de *buscar soluciones generales de las ecuaciones:* este era el problema del álgebra en la época, para buscar la solución general de las ecuaciones de grado mayor o igual que 5, por el método de radicales.

El *Teorema de Lagrange* en su forma primitiva se enunció en la siguiente forma:

Si $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es una función de n variables y si bajo las $n!$ posibles permutaciones de las variables, aparecen t funciones distintas, entonces t es un divisor de $n!$

Según esto, el teorema de Lagrange en su forma original equivale a decir que el índice del subgrupo H de S_n es un divisor del orden de S_n, donde H es e1 subgrupo de permutaciones que dejan fija a f. Así, el teorema que se llama teorema de Lagrange fue enunciado en forma restringida y en un *lenguaje* diferente al que se conoce en la actualidad.

La idea de *grupo de permutaciones* la formula más adelante Galois, 50 años después; pero las semillas del concepto las encontró en el trabajo de Lagrange. Sin embargo, sus construcciones o procedimientos en el proceso general para resolver una ecuación algebraica de cualquier grado en 1770 y 1771 fallaban en el método para las ecuaciones de orden superior a cuatro porque involucraban la solución de una ecuación de orden superior; pero con las soluciones de las ecuaciones de grado menor a cinco, Lagrange creyó poder extender su método sin lograrlo.

En este apartado se analizaron las configuraciones epistémicas que se muestran en las tablas 6.19, 6.20 y 6.21.

Tabla 2.9: Configuración epistémica CE1

CE1. Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado 2,3 y 4 y el problema del simbolismo algebraico	
CE1.14	El Teorema de Lagrange
CE1.13	Las resolventes de Lagrange y el conjunto S_3
CE1.8	Euler y la solución de la ecuación algebraica de grado 4
CE1.7	Harriot: el simbolismo algebraico y la solución de la ecuación de grado 4
CE1.6	Viéte y la solución general de la ecuación algebraica de grado 3
CE1.5	Viéte y la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 2
CE1.4	Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de Cardano y Viète
CE1.3	Ferrari y la solución general de la ecuación bicuadrática
CE1.2	Método de radicales para la solución de las ecuaciones algebraicas generales de grado 3 y 4 en la edad media
CE1.1	Cardano y la solución de un caso especial de la ecuación cúbica
CE1.1. La geometría y las ecuaciones algebraicas de grado 4	
CE1.10	Descartes y el problema de Pappus
CE1.9	Descartes y el planteamiento de problemas geométricos relacionados con ecuaciones algebraicas de grado 4
CE1.2. Las ecuaciones algebraicas y los problemas de teoría de números en aritmética modular	
CE1.12	Euler y los problemas en Teoría de números con Aritmética modular
CE1.11	Fermat y los problemas en Teoría de números con Aritmética modular

2.3.25. Problema 2.1: Imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado 5 (Paolo Ruffini)

Teorema 2.3. *Si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad.*

8.3 Schema della dimostrazione del 1813 [1]

Cerchiamo di capire come Ruffini intende procedere discutendo un esempio particolare. Una formula risolutiva algebrica per l'equazione

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + u = 0 \tag{8.1}$$

consiste nel trovare una funzione $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ delle radici di (8.1) che ne dipenda in modo simmetrico, in modo da poter essere espressa in termini dei coefficienti di (8.1): $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(a, b, c, \cdots u)$ e grazie alla quale sia possibile esprimere *tutte* le radici di (8.1). L'ambiguità in una tale formula, già evidenziata da Vandermonde, risiede in questo: se

$$x_1 = F^*(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

dove F^* indica una determinazione particolare della F, allora permutando in ambo i membri x_1 ed x_2, si deve anche avere

$$x_2 = F^*(x_2, x_1, \cdots, x_n).$$

Ad esempio questa situazione si presenta nella formula risolutiva delle equazioni di secondo grado che, detta $\alpha = \pm 1$ una radice quadrata dell'unità, si può scrivere come

$$x = \frac{-b + \alpha\sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

scelto $\alpha = +1$ e ricordando che $b = -(x_1 + x_2)$, $c = x_1 x_2$ e che il radicando va considerato in senso aritmetico, si ottiene

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}}{2} = F^*(x_1, x_2).$$

Figura 2.4: Demostración del teorema de Ruffini de 1813 (dimat.unipv.it/ rosso/ Ruffini-Abel)

Paolo Ruffini, matemático italiano, continuó con los desarrollos de Lagrange y presentó la demostración sobre la irresolubilidad de la ecuación de grado quinto por el método de radicales, pero, la notación que utilizó para representar las permutaciones hicieron que ésta fuera ignorada por los matemáticos de la época. Ruffini presentó la demostración en dos publicaciones: la primera en el artículo sobre *Teoría generale della equazion* y en *La reflessione intorno alla soluzione della equazioni algebriche generali* (1799). El *método* de Ruffini establecía que no existía una resolvente para las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco. Sin embargo, la afirmación no tuvo las justificaciones suficientes para la época y no pudo lograr la aceptación de los matemáticos; además, Ruffini utilizó una afirmación que en su momento no tenía la justificación suficiente pero que luego llegó a convertirse en el teorema que se conoce como el teorema de Abel-Ruffini (Muñoz, 2011, p. 6).

2.3.26. Problema 2.2: Generalización del Teorema de Rufinni (Agustín Louis Cauchy)

Uno de los primeros trabajos de Cauchy fue generalizar el teorema de Ruffini:

Si mediante las permutaciones de sus n - variables un polinomio toma más de dos valores, entonces él toma al menos p valores.

En el teorema p es el mayor primo en la factorización de n; así, en el lenguaje de la teoría de Grupos, no hay subgrupos del grupo simétrico de $n-$ permutaciones con un índice i tal que $2 < i < p$ (según algunos autores, aquí Cauchy crea la noción de Grupo de permutaciones al estudiar las permutaciones de las raíces).

El *método* que utilizó Cauchy dio origen al *cálculo de sustituciones, grupos de permutaciones:* su método comprendía una fundamentación de las matemáticas, especialmente de Análisis y se le considera como el fundador del rigor en matemáticas: la base de sus trabajos fueron los *conceptos* de teoría de grupos, tales como el orden de un elemento, la noción de subgrupo y la de conjugación.

En la misma dirección, el siguiente teorema de Cauchy fue fundamental para la teoría de grupos finitos:

Para cualquier primo *p* que divida al orden hay un elemento de orden *p*.

Este teorema fue notablemente mejorado por Sylow de la siguiente forma: "Si G es un grupo finito abeliano y p es un primo divisor del orden del grupo, existe al menos un elemento de orden p. Cauchy estudió ciertos *conceptos* en varios de sus artículos publicados en 1815 y 1844 entre ellos, las permutaciones de conjuntos finitos arbitrarios además, introduce la *notación* que se utiliza actualmente; define el producto de permutaciones, permutaciones cíclicas, transposiciones, conjunto de permutaciones generadas por productos de ciertas permutaciones dadas y en particular prueba que, los 3 ciclos generan todas las permutaciones pares. A Cauchy se le debe la notación y muchos resultados actuales; sus contemporáneos usaron sus resultados sobre permutaciones para realizar sus aportes en la teoría de las ecuaciones algebraicas, pero fue Galois quién utilizó el término *Grupo* asociado a una ecuación y que resultó en la terminología actual como el Grupo de Permutaciones.

2.3.27. Problema 2.3: Imposibilidad de resolver por radicales la ecuación algebraica general de grado 5 (Niels Henrik Abel)

Abel, fue un matemático Noruego, que proporcionó la demostración correcta y aceptada por los matemáticos de la época, sobre la imposibilidad de resolver por el método de radicales, la ecuación general de quinto grado.

Abel escribe sobre la demostración de Ruffini:

El primero y si no estoy equivocado, el único que antes que yo ha intentado demostrar la imposibilidad de la solución algebraica de una ecuación en general, ha sido el geómetra Ruffini. Pero su demostración es tan complicada que es muy difícil afirmar lo acertado de su razonamiento. Me parece que no son siempre satisfactorios (Henrik, 1881, p. 218).

El trabajo en el que resuelve por radicales la ecuación de quinto grado, lo presentó a su mentor Michael Holmboe (1795-1850) otro matemático noruego, pero ninguno de los matemáticos noruegos pudieron probar la veracidad del trabajo. Así, Holmboe lo envía a la Real Sociedad de Ciencias de Dinamarca, donde lo revisa el matemático danés Carl Ferdinand Degen (1766-1825) y sugiere presentar ejemplos numéricos; en este ejercicio Abel encuentra un error en su razonamiento lo que hace detener su trabajo en esta línea y se dedica entonces al estudio de las integrales elípticas que también eran su tema de trabajo.

Desde Lagrange, después de presentar un intento fallido en la solución por radicales de la ecuación de quinto grado el problema se plantea en otra dirección: en la búsqueda de un método desde la perspectiva geométrica y analítica y es desde este punto de vista que Abel logra demostrar la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación de quinto grado y de grados superiores. En su artículo *Mémoire sur les equations algébriques, oul'on demontres l'impossibilité de la resolution de l'equation générales du cinquiéne degré (1824)*, reconoce la importancia de su hallazgo al afirmar (Chavarría, 2014):

> **Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora, por eso, espero que acojan con agrado esta memoria, la cual está destinada a llenar el hueco existente en la teoría de las ecuaciones algebraicas (Abel, 1824, p. 3).**

En 1826 Abel presentó una nueva versión de la memoria; más clara y se publica en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik - Revista de matemáticas puras y aplicadas* fundado por August Leopold Crelle (1780-1855): matemático alemán, reconocido en el campo de las matemáticas por sus publicaciones en matemáticas aplicadas y escolares. Crelle se convirtió en amigo y benefactor de Abel. Pero Abel quería dar a conocer su trabajo a matemáticos prestigiosos, por este motivo se desplazó a Berlín para entrevistarse con Gauss a quién había enviado su memoria pero Gauss la ignoró por completo afirmando: He aquí otra de esas moustruosidades.

Abel, llegó a París donde presentó su memoria a la Academia de Ciencias de Francia para su publicación en la revista de la academia: el documento para ser evaluado fue revisado por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y Adrien Marie Legendre (1752-1857). Legendre le dejó la responsabilidad a Cauchy afirmando que era poco legible y Cauchy no se interesó por el trabajo al punto que fue extraviado. Abel regresó a Europa donde falleció debido a una tuberculosis pulmonar (Chavarría, 2014).

Legendre, después de la muerte de Abel afirmó:

¿Qué descubrimiento es ese de Abel? ... ¿Cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas? (Muñoz, 2011, p. 17).

Luego de la muerte de Abel, Cauchy y Legrendre intentaron publicar la memoria en la revista de la académia, pero ya se había publicado en el Journal de Crelle. En 1830 le concedieron el gran premio de matemáticas y esta demostración funda las bases del Álgebra abstracta.

En la configuración epistémica CE2, determinada por la *situación-problema* que se relaciona con la demostración del Teorema sobre la imposibilidad de resolver la ecuación algebraica de grado $n > 4$ por radicales dada por Abel, sobresalen los *procedimientos* que utiliza para determinar las raíces de las ecuaciones algebraicas. Abel hace uso de sustituciones apropiadas donde utiliza el *concepto* de función racional de las raíces, raíces de la unidad, permutaciones de las raíces de la ecuación, multiplicidad de una ráiz, valores de la función de las raíces. Además, utiliza *métodos* de solución de sistemas de ecuaciones lineales, lo cual le permiten llegar a una contradicción en lo cual se basaba el método de demostración.

Se presenta en la tabla 2.11, la configuración epistémica definida a partir de estas tres configuraciones epistémicas que se determinan en la edad moderna y en el perído dos.

Tabla 2.10: Configuración epistémica CE2

CE2. Búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar las ecuaciones de grado n > 4 por el método de radicales	
CE2.3	Abel y la demostración de la imposibilidad de resolver por radicales las ecuaciones algebraicas de grado $n > 4$
CE2.2	Cauchy y el conjunto de permutaciones de las raíces de las ecuaciones algebraicas
CE2.1	Ruffini y la demostración de la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado 5

2.3.28. Problema 3.1: Problemas en aritmética modular (Carl Friedrich Gauss)

Gauss inició sus investigaciones en *teoría de números* durante su estancia en el Collegium Carolinum en 1795, pero inicia la escritura de sus *Disquisitiones arithmeticae*, a lo largo de su estancia en la Universidad de Göttingen entre 1795 y 1798. En su diario científico, en 1796 aparecen dos de sus resultados más brillantes: la descomposición de todo número entero en tres triangulares y la construcción del hepta-decágono regular. Ambos recogidos en las Disquisitiones. A finales de 1798 Gauss entrega el manuscrito a un editor de Leipzig, pero dificultades económicas retrasan la publicación hasta el verano de 1801. Con las Disquisitiones, Gauss da una nueva orientación a la *Teoría de Números*, dejando de ser ésta una acumulación de resultados anecdóticos aislados para convertirse en una rama de las matemáticas tan importante como el análisis o la geometría (Pérez, s.f.).

Las *Disquisitiones* se encuentran organizadas en siete secciones: 1) Números congruentes en general; 2) Congruencias de primer grado; 3) Residuos de potencias; 4) Congruencias de segundo grado; 5) Formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado; 6) Aplicaciones de las nociones anteriores; 7) Ecuaciones de las secciones de un círculo.

Problema: Pequeño Teorema de Fermat (Art. 49 y 50): Si p es un número primo que no divide a a, $a^{p-1}-1$ ***es siempre divisible por*** p.

Problema: Teorema de Wilson (Art. 49 y 50): El producto de todos los números menores que un número primo dado, aumentado en una unidad es siempre divisible por dicho número.

Problema: Ley de reciprocidad cuadrática

Demostración:

En la sección (4) de su libro, Gauss proporciona la primera demostración de la *Ley de reciprocidad cuadrática*, a la que denomina Theorema aureum (Art. 131) y siguientes:

Si p es primo de la forma $4n + 1$, $+p$ será un residuo o un no-residuo de todo primo que tomado positivamente sea un residuo o un no residuo de p. Si p es de la forma $4n + 3$, $-p$ tiene la misma propiedad. Esto es, existe una reciprocidad entre el par de congruencias $x^2 \equiv q(mod p)$, $x^2 \equiv p(mod q)$ en la que tanto p como q son primos; ambas congruencias son posibles o ambas son imposibles, a no ser que tanto p como q dejen residuo 3 cuando se dividen por cuatro, en cuyo caso una de las congruencias es posible y la otra no. Gauss contaba con esta demostración desde 1796, a los 19 años. Euler y Legendre lo habían intentado sin éxito como comenta el propio Gauss en el art. 151. solo por esta demostración Gauss ya debería ser considerado como uno de los matemáticos más potentes de la época (Pérez, s.f.).

2.3.29. Problema 3.2: Solución de ecuaciones ciclotómicas (Carl Friedrich Gauss)

El problema de la solución de las ecuaciones de grado quinto por el método de radicales después de los hallazgos de Abel, se planteó en términos de la pregunta ¿cuándo una ecuación es resoluble por medio de radicales? En la época de Gauss se tenía que algunas familias particulares de ecuaciones de grado mayor a cuatro eran resolubles por radicales; así, el interés de los matemáticos se enfocó hacia la caracterización de manera general de las ecuaciones de grado quinto y mayores que eran resolubles por radicales; este problema fue resuelto finalmente, por Galois como se presenta más adelante. En 1801 Gauss retoma el planteamiento de Vandernomde (1735-1796) de su obra *Mémoire sur le Résolution des Equations- 1770* en la que afirmaba que:*todas las ecuaciones, a las que actualmente se les llama ciclotómicas* $x^p - 1 = 0$ *donde p es un número primo, son resolubles por el método de radicales.* Esta afirmación no pudo ser demostrada en general; Vandermonde logró probarla para $p \leq 11$ y logra probar el planteamiento; Gauss empleó la técnica basada en reducir el grado de la ecuación, que fue el método empleado por Lagrange.

Problema: Hallar las raíces de la ecuación $x^n - 1 = 0$ ***con n un número primo impar***

La ecuación se llama ciclotómica y salvo para $x = 1$, todas las raíces son imaginarias. La ecuación también se denomina *ecuación para la división del circulo* y esto se debe a que las raíces pueden escribirse como:

$x_k = cos\left(\frac{k2\pi\theta}{n}\right) + sen\left(\frac{k2\pi\theta}{n}\right)$ para $k = 1, 2,..., n$.

Gauss encontró que todas las raíces eran de la forma $r, r^2, r^3,..., r^{n-1}$ o $r^e, r^{2e}, r^{3e},..., r^{(n-1)e}$ para cualquier entero positivo o negativo e. Los métodos que desarrolló se relacionaban con los "grupos". Una consecuencia geométrica de este trabajo fue la demostración que se puede inscribir un polígono regular de 17 lados en un circulo usando regla y compás. Esto como consecuencia, de que las raíces complejas al dibujarlas geométricamente corresponden a los vértices del polígono regular de n lados sobre el circulo unitario.

2.3.30. Problema 3.3: Teorema Fundamental del Álgebra (Carl Friedrich Gauss)

Aunque no se había demostrado *El Teorema fundamental del álgebra;* (1798) ya se tenían suficientes ejemplos que una ecuación de grado n tiene n raíces. El Teorema fundamental del álgebra establece que toda ecuación polinomial de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas (Chavarría, p. 79). Descartes da una primera versión de este teorema y presenta ejemplos; sin embargo es Carl Friedrich Gauss quién presenta la primera demostración acabada de este teorema (ver, Salazar, 2009, p. 137-139).

La configuración epistémica, se relaciona con la demostración dada por Gauss del Teorema Fundamental del Álgebra: su primera demostración formal fue presentada en su tesis doctoral: Nueva demostración del teorema de que toda función algebraica en una variable puede ser factorizada en factores reales de primero o segundo grado (1799). Para su demostración, recurrió a *métodos* geométricos y la demostración resultó tan clara que fue aceptada por la comunidad matemática. Esta demostración representa una interacción entre los *procedimientos* geométrico y los algebraicos, junto con la *representación* gráfica de los números complejos que se habían descubierto en 1797 por Wessel (1745-1818). Gauss fue el primero en observar que en todas las demostraciones anteriores se suponía la existencia de las raíces y se deducían propiedades de ellas. Él mismo no afirmó tener la demostración, sino que una demostración rigurosa debía ir en esos términos. En el trabajo, Gauss hace una crítica a los intentos anteriores de D'Alembert, Euler y Lagrange y aborda el teorema desde una perspectiva diferente: Gauss no calcula las raíces de un polinomio real sino que demuestra la existencia de éstas por medio de un método muy original (Dávila, 2003b, p.50). Entre los *conceptos* que utiliza para su demostración se encuentran: factor cuadrático irreducible, propiedades de los números complejos y de identidades trigonométricas relacionadas con ellos, coordenadas polares, intersección de curvas algebraicas, cantidades infinitamente largas, funciones continuas, números complejos y rama de la curva.

En general la demostración de Gauss se basó en los siguientes *argumentos:* si se tiene el polinomio real $P(z)$ que tiene una raíz compleja de la forma $a + bi$ entonces $P(a + bi) = 0$ y además, esta función algebraica se puede representar como $P(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$. La gran originalidad de Gauss fue la de hacer corresponder cada raíz compleja $a + bi$ del polinomio con un punto (a,b) del plano cartesiano. Así, el punto (a,b) debía ser la intersección de las curvas $u = 0$ y $v = 0$ por lo que era necesario probar que estas dos curvas se cortaban. Gauss utilizó un argumento cualitativo para esta prueba y su razonamiento se basó en las gráficas de las curvas por lo que no fue completamente riguroso: sin embargo, su argumento fue convincente y la prueba que un polinomio real de grado n se factoriza como producto de factores lineales de primero y segundo grado (Davila, 2003b, p.82).

2.3.31. Problema 3.4: Ecuaciones solubles por radicales: el grupo de Galois asociado a la ecuación polinomial (Évariste Galois)

Galois fue un matemático francés, que siendo adolescente determinó la condición necesaria y suficiente para que un polinomio fuera soluble por radicales. Dio solución a un problema abierto mediante el nuevo concepto de *Grupo de Permutaciones.* La idea genial de la teoría de Galois es que se pueden representar ciertos conjunto asociados a la solución de ecuaciones algebraicas mediante grupos de simetrías. El 4 de julio de 1843, Liouville se dirige a la Academia de Ciencias de París con estas palabras:

Espero interesar a la Academia anunciando que entre los papeles de Evariste Galois he encontrado una solución tan precisa como profunda de este bello problema: ¿cuándo es una ecuación soluble por radicales?

Teorema 2.4. *Si $p(x) = 0$ es soluble por radicales, entonces el Grupo de Galois del polinomio es soluble.*

La idea de la prueba del Teorema de Galois consiste en suponer que si G es un grupo soluble, tenemos una cadena $G = G_0, G_1, \ldots, G_m$ de forma que G_i es normal en G_{i-1} y el cociente G_{i-1}/G_i tiene orden primo. Asociada a la cadena hay una cadena de subconjuntos de los números complejos $F_0 \subset F_1 \ldots \subset F_m$ tales que F_i es el conjunto de números complejos que quedan fijos bajo la acción de G_i (esto es $g(z) = z$ para todo elemento de G_i). El conjunto F_0 contiene a los coeficientes de $p(x)$, mientras que todas las raíces de $p(x) = 0$ están en F_m. El hecho que G_{i-1}/G_i tenga orden primo implica que los elementos de F_i se pueden construir por radicales a partir de los coeficientes del polinomio $p(x)$ (De la Peña, 2011).

Problema: Probar que el polinomio $x^5-6x+3 = 0$ ***no es soluble por radicales.***

Solución:

1) La ecuación $x^5 -6x +3 = 0$ tiene tres soluciones reales y dos complejas. La observación se sigue del hecho que el polinomio toma valores negativos en -2 y en 1, valores positivos en -1 y 2 y sabiendo que tiene un solo máximo local en $\sqrt[4]{\frac{6}{5}}$ y un solo mínimo local $\sqrt[4]{\frac{6}{5}}$.

2) El polinomio $x^5 - 6x + 3 = 0$ no puede escribirse como producto de dos polinomios con coeficientes enteros de grado menor que cinco:

Supongamos que este no fuera el caso y se tuviera que $p(x) = q(x)r(x)$ con $q(x)$, $r(x)$ de grado menor que cinco. Como el grado de $q(x)$ más el grado de $r(x)$ es 5, entonces se puede suponer que $q(x)$ tiene grado 1 o 2, mientras que $r(x)$ tiene grado 4 o 3.

Si $q(x)$ tiene grado 1, entonces $q(x) = nx + m$ y $r(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con m, n, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 números enteros. Así que $na_4 = 1$ lo que implica que $n = 1$ o $n = -1$ y además $\frac{m}{n} = -m$ es una solución de $p(x) = 0$. Pero por el punto 1) se sabe que que $p(x) = 0$ no tiene soluciones enteras.

Se pasa a suponer ahora que que $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ y $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros. Entonces, igualando los coeficientes de los polinomios $p(x) = q(x)r(x)$ se tiene que: $a0b0 = 3$ $a0b1 + a1b0 = -6a0b2 + a1b1 + a2b0 = 0$ $a1b2 + a2b1 + a3b0 = 0$ $a2b2 + a3b1 = 0$ $a3b2 = 1$

De la primera ecuación se concluye que uno y solo uno de a_0 o b_0 es divisible entre 3. De la segunda ecuación se obtiene que b_1 es también divisible por 3 y finalmente, de la tercera ecuación se tiene que b_2 es divisible por 3. Esto contradice la última ecuación.

3) Un polinomio de grado 5 que satisface las condiciones 1) y 2) tiene como grupo de Galois a S_5. El grupo de Galois G es un grupo de permutaciones de las cinco raíces complejas del polinomio $p(x)$ por el Teorema Fundamental de la Aritmética, luego G es un subgrupo de S_5. Un polinomio (con la propiedad 2) tiene siempre un elemento de orden 5 en el grupo de Galois, esto es, hay una permutación $g \in G$ tal que $g^5 = 1$ pero $g^i \neq 1$ para $1 \leq i \leq 4$. Por otra parte, como hay dos raíces no reales de $p(x)$ estás tienen la forma $s + ti$, $s - ti$ lo que produce un elemento de orden 2 en G : en efecto, la transformación de plano complejo g que consiste en enviar cualquier número complejo $x_1 = s + ti$ en su conjugado complejo $x_2 = s - ti$ tiene la propiedad: o bien x_1, x_2 son reales y ambas raíces quedan fijas, o bien envía la raíz x_1 en la segunda x_2 (esto sucede en caso que x_1, x_2 no sean reales). Esta transformación satisface también que $g^2(z) = z$ para todo número complejo z. Se puede así suponer que a G le pertenecen la transposición $(1, 2)$ y la rotación $(5, 4, 3, 2, 1)$. Estos elementos generan a S_5.

4) El grupo S_5 no es soluble. Esto es, no hay una cadena de subgrupos $S_5 = G_0, G_1,..., G_m$ de forma que cada G_i sea normal en G_i-_1 y el cociente G_i-_1/G_i tenga orden primo: en efecto, esto es así porque S_5 tiene como subgrupo normal a A_5 que no tiene subgrupos normales.

5) El teorema de Galois indica que: si $p(x) = 0$ es soluble por radicales, entonces el grupo de Galois del polinomio es soluble. Entonces como S_5 no es soluble se sigue que el polinomio $p(x) = x^5 -6x +3 = 0$ no es soluble por radicales (De la Peña, 2011).

Problema: Hallar el grupo de Galois de la ecuación $x^2+bx+c = 0$

Solución:

Se generaliza el grupo de Galois para un polinomio de grado 2.

1) Sean r_1, r_2 las raíces de la ecuación algebraica; los coeficientes de la ecuación b, c vienen dados por funciones polinómicas simétricas:

Como $x^2 +bx +c = 0 = (x -r_1)(x -r_2) = x^2 -(r_1 +r_2)x +r_1r_2$

Se tiene que:

$c = r_1r_2$

$b = -(r_1 +r_2)$

Y $b^2 -4c = (r_1 +r_2)^2 -4r_1r_2 = (r_1 -r_2)^2$ función simétrica

$\sqrt{b^2-4c} = \sqrt{(r_1+r_2)^2-4r_1r_2} = \sqrt{(r_1-r_2)^2} = \pm(r_1-r_2)$ función no simétrica

2) Se define el conjunto K_0 = {conjunto de todas las expresiones que se pueden obtener a partir de b, c haciendo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones}

Y $K_1 = K_0(\sqrt{b^2-4c})$ con $b, c \in K_0$, $r_1, r_2 \in K_1$ de forma que el paso de K_0 a K_1 representa resolver la ecuación. Como las funciones de K_0 son invariantes al permutar sus dos variables r_1, r_2 diremos que su grupo de simetrías es S_2, mientras que las funciones de K_1 no son en general simétricas de ningún modo y por tanto se le asigna el grupo trivial de simetrías $\{id\}$.

Así, se puede representar en el siguiente esquema:

$$\begin{pmatrix} K_0 & \sqrt{\ } & K_1 = K_0(\sqrt{b^2-4c}\,) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_2 = G_0 & \triangleright & G_1 = \{id\} \end{pmatrix}$$

3) Como el índice de G_1 respecto a G_2 es 2 se tiene que G_1 es normal respecto a G_2.

Entonces, si el polinomio tiene una sola raíz, el grupo de Galois del polinomio es el trivial, esto es, contiene solo la permutación identidad. Si el polinomio tiene dos raíces racionales el grupo de Galois es el trivial y finalmente si las dos raíces son irracionales entonces el grupo de Galois contiene dos permutaciones y es isomorfo al grupo de los enteros módulo 2.

Problema: Identificar el grupo de Galois de la ecuación $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

1) 1) Sean r_1, r_2, r_3 las raíces de la ecuación algebraica; los coeficientes de la ecuación b,c,d vienen dados por funciones polinómicas simétricas:

Como $x^3 + bx^2 + cx + d = 0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r2r3)$ $x - r_1r_2r_3$

Se tiene que:

$d = -r_1r_2r_3$
$b = -(r_1 + r_2 + r_3)$
$c = r1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$

2) Se toma:

a) $D = (9bc - 27^3 - 27d)^3 + 4(3c - b^2)^3$

b) $E = \frac{(9bc - 2b^3 - 27d) + \sqrt{D}}{2}$

c) $t = \sqrt[3]{E}$

d) La fórmula para resolver la ecuación:

$\frac{-b}{3} + \frac{t}{3} + \frac{b^2 - 3c}{3t}$

2) Se tiene que $D = -27(r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2$

$E = (r_1 + \varsigma r_2 + \varsigma^2 r_3)^3$

$\varsigma = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (raíz cúbica de la unidad)

3) Se observa la perdida de simetrías por medio de radicales: D es una función simétrica pero $\sqrt{D}$ no, aunque perduran algunas simetrías, así $\sqrt{D}$ es invariante al cambiar $(r_1,r_2,r_3) \longrightarrow (r_2,r_3,r_1)$. También E goza de las mismas simetrías que $\sqrt{D}$ pero al extraer las raíces cúbicas se pierden todas ellas.

4) Se tiene el siguiente esquema para la ecuación cúbica:

$$\begin{pmatrix} K_0 & \sqrt{} & K_1 = K_0(\sqrt{D}) & \sqrt[3]{} & K_2 = K_1(\sqrt[3]{E}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_3 = G_0 & \rhd & G_1 = A_3 & \rhd & G_2 = \{id\} \end{pmatrix}$$

5) La normalidad de A_3 se justifica ya que el índice respecto a S_3 es 2, también es evidente que $\{id\}$ es un subgrupo normal de A_3.

Entonces el grupo de Galois del polinomio corresponde a un subgrupo del grupo S_n según la naturaleza de las raíces.

Problema: Grupo de Galois de la ecuación $x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$

Solución:

Al aplicar el método descrito para las ecuaciones de grado 2,3 y 4 se verifica que no existe una cadena de subgrupos desde S_5 a $\{id\}$ donde cada uno sea subgrupo normal del anterior. Así no se puede escribir la expresión: $S5 \rhd A5 \rhd \ldots \rhd \{id\}$ Porque A_5 no tiene subgrupos normales propios (ningún A_n para $n \geq 5$). La cadena se corta y falta hacer los radicales $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[3]{}$,... por tanto, no existe una fórmula para resolver la ecuación de quinto grado usando solo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y radicales (Teorema de Abel). Lo mismo se aplica a la ecuación general de grado $n > 5$; pero hay casos particulares de ecuaciones que sí se pueden resolver por radicales (ciclotómicas) (Póveda, s.f.).

Se presentan en la tabla 2.12. las configuración epistémicas CE3, C3.1, relacionadas con los problemas presentados en este período, que corresponde a la última etapa en la emergencia del objeto Grupo.

Tabla 2.11: Configuración epistémica CE3

CE3. Clasificación de las ecuaciones algebraicas solubles por radicales	
CE3.4	Grupo de Galois asociado a la ecuación polinomial: ecuaciones solubles por radicales
CE3.3	Gauss y la demostración del Teorema Fundamental del lgebra
CE3.2	Gauss y la solución de ecuaciones ciclotómicas
CE3.1 Problemas en aritmética modular	
CE3.1	Gauss y problemas en aritmética modular

2.3.32. Problema 4.1: Propiedades generales de los grupos continuos de transformaciones (Sophus Lie)

Lie fue un matemático noruego, que creó gran parte de *La teoría de la simetría continua* y la aplicó al estudio de la geometría y de las ecuaciones diferenciales parciales; los grupos de Lie son importantes en el análisis matemático, la física y la geometría porque sirven para describir la simetría de las estructuras analíticas; fueron introducidos por Sophus Lie en 1870 para estudiar simetrías de ecuaciones diferenciales y se relacionan con temas de geometría diferencial. Lie escribe a Mayer en 1874: “Mis primeros trabajos estaban, por decirlo así, preparados por adelantado para servir de fundamento a la nueva teoría de los grupos de transformaciones (Campos, 2007)”. Lie propone considerar un nuevo elemento generador a la manera de Plücker: considerar no solo un punto sobre ella, sino un punto y la tangente en ese punto a la curva, es lo que llama un elemento lineal, ahora elemento de contacto de primer orden. Las transformaciones apropiadas son entonces aquellas que aplican curva sobre curva pero que no solamente hacen corresponder puntos sino elementos de contacto de primer orden; en cada punto la imagen del elemento de contacto en primer orden es la imagen del elemento de contacto en el punto de partida. Son las transformaciones de contacto (Campos, 2007).

La idea anterior, la generaliza a *n* dimensiones y esto le permite a Lie refinar la noción de variedad integral de un sistema diferencial hasta constituirla en la esencia de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, según Demidov citado en Campos (2007). Tal desarrollo fue el fruto de un denotado estudio por parte de Lie de las concepciones al respecto de Euler, Lagrange, Monge, Pfaff, Hamilton, Plücker y Jacobi. Las generalizaciones logradas por Lie mediante su concepción de los elementos de contacto le permitieron ligar las nociones de incidencia de elementos de contacto, formas de Pfaff, transformaciones de contacto, invariación de una ecuación diferencial mediante una transformación.

El gran mérito de Lie al dar solución de sistemas diferenciales, dependía finalmente de los grupos continuos finitos de transformaciones. Van der Waerden citado en Campos (2007) explicó que lo de continuo tenía que ver con la diferenciabilidad (como se tenía en 1870) y lo de finito con el número de parámetros: si hay infinitos parámetros, o mejor, una función arbitraria, se dice que el grupo es infinito: desde Hermann Weyl en 1934, se le dice grupo de Lie.

La condición de invariación conduce a un sistema diferencial cuya solución es la que provee los parámetros. Al nacimiento de los grupos de transformaciones dedican Lie y Engel grandes esfuerzos, materializados en tres gruesos volúmenes publicados entre 1888 y 1893: el primero, trataba de propiedades generales de los grupos de transformaciones; el segundo, trataba de transformaciones de contacto y el tercero, consta de seis partes, las cuatro primeras relacionadas con los grupos continuos finitos. La primera, trata de los de la recta y el plano. La segunda, de los del espacio tridimensional. La tercera, del grupo proyectivo del espacio tridimensional. La quinta parte estudia el problema de los fundamentos de la geometría. La sexta da consideraciones generales acerca de grupos continuos finitos: en particular, figuran allí tres célebres teoremas, llamados fundamentales, junto con sus recíprocos, que constituyeron la base de toda la teoría y han sido profundamente estudiados, desde el punto de vista local inicialmente y luego desde el punto de vista global (Campos, 2007).

2.3.33. Problema 4.2: La clasificación de las Geometrías (Felix Klein)

Klein, fue un matemático alemán, que demostró que las geometrías métricas, euclidianas y no euclidianas constituían casos particulares de la geometría proyectiva. En 1872 presentó una notable clasificación de la Geometría: *El programa Erlangen,* pone fin a la escisión entre geometría pura y geometría analítica. En esta clasificación el concepto de *Grupo,* desempeñó un papel fundamental, ya que el objeto de cada geometría se convierte en el estudio del grupo de transformaciones que la caracteriza.

Lie, Klein, Poincaré, Hilbert y Cartan demarcaron toda una época en la historia de la geometría, donde parte de su obra puede ser estudiada desde un mismo punto de vista: **"la construcción de la geometría sobre la noción de grupo"** (Campos, 2007). Klein vivió en la época de la consolidación Weierstrassiana del análisis y en la de la consolidación de las geometrías no euclidianas, a las cuales él mismo hizo una contribución esencial; demostrando que si la geometría proyectiva es consistente, también lo serán las geometrías esférica, euclidiana e hiperbólica. Klein estaba más cerca de la concepción estructural de Hilbert o Bourbaki: construye las geometrías elíptica e hiperbólica a partir de la euclidiana. Pero demuestra igualmente cómo construir la euclidiana a partir de la elíptica. El segundo estudio fundamental de Klein sobre la geometría fue el que se conoce como programa Erlangen: *Consideraciones comparativas de las nuevas investigaciones geométricas:* así, Klein escribe (Campos, 2007, p. 88):

> **"Siguiendo la analogía con las transformaciones del espacio, se habla de transformaciones de la variedad; estas también forman grupo". Para decir algo de lo abstracto, la variedad parte de lo concreto, el espacio. Hay transformaciones del espacio que no alteran las propiedades geométricas de las figuras. Llámese grupo principal de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones. Las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal. La recíproca es igualmente verdadera: las propiedades geométricas son caracterizadas por su invariación relativamente a las transformaciones del grupo principal.**

Esta fue la idea central del Programa Erlangen, que en términos actuales equivale a: "una geometría determina un grupo y Recíprocamente, un grupo determina una geometría". Por lo tanto, una geometría es una tripla (V,G, I), en la que V es un conjunto no vacío, el de los elementos de base de la geometría; G es un grupo de transformaciones; I son las propiedades de los elementos de V , invariantes respecto de G. Por ejemplo, si V es el plano euclidiano bidimensional, G puede ser el grupo de similitudes, es decir, de las transformaciones que no alteran los ángulos, pero sí las distancias; entre las propiedades I se encontrarán los teoremas de semejanza de triángulos. Un subgrupo, es el de las isometrías, las cuales conservan las distancias, a demás de los ángulos. Entre las propiedades I se encontrarán los teoremas clásicos de congruencia de triángulos. La geometría de la congruencia resulta subordinada a la de la semejanza (Campos, 2007, p. 88).

Problema:como generalización de la geometría de [Euclides], Klein pone la cuestión general: dados una variedad y un grupo de transformaciones de esta variedad, determinar las propiedades de sus elementos que no son alteradas por las transformaciones del grupo.

La geometría proyectiva no nació sino cuando se volvió costumbre considerar como enteramente idénticas a la figura primitiva y a todas aquellas que se obtienen de ella por proyección, y enunciar las propiedades proyectivas de tal manera que se ponga en evidencia su independencia respecto de las modificaciones causadas por la proyección; esto era lo mismo que tomar como base de consideraciones el *grupo de las transformaciones proyectivas. El grupo de las semejanzas* es subgrupo del proyectivo; así, la geometría de la semejanza resulta subordinada a la proyectiva. La subordinante es más general. Se llega a la idea de las geometrías equivalentes. Dos geometrías aparentemente disímiles pueden resultar equivalentes si es posible exhibir una correspondencia inyectiva entre los elementos de cada geometría. Los grupos serán isomorfos (Campos, 2007). En 1872, Klein en el Programa Erlangen, hizo una sistematización y jerarquización de las geometrías, mediante grupos y subgrupos, concibiendo como objeto de cada una el estudio de propiedades invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones y considerando cada geometría como subgeometría de otra. Así, clasificar geometrías es, clasificar grupos de transformaciones. En esta dirección, la Topología es la geometría de los homeomorfismos o aplicaciones bicontinuas, que constituyen un grupo de transformaciones que conservan la conexión (deformar sin cortar); en la geometría proyectiva, las transformaciones son proyectivas o proyectividades que constituyen un grupo que conserva la alineación; el grupo de transformaciones afines o afinidades conserva el paralelismo y caracteriza la geometría afín.

Dentro de ésta se encuentra incluida, la geometría de la semejanza. Así, la geometría euclídea es, la geometría de las congruencias, que consiste en el estudio de propiedades de las figuras, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones rígidas, generado por las traslaciones y rotaciones en el plano. Esto es equivalente al axioma no postulado de Euclides, de que las figuras no varían en sus propiedades cuando se las somete a movimientos en el plano. Por tanto, la geometría euclídea, desde el punto de vista de Klein, es solo un caso especial de la geometría afín, y ésta a su vez un caso especial de una geometría aún más general, la proyectiva (Gómez, García, Pina & Navarro, 2003).

2.3.34. Problema 4.3: La clasificación de los grupos finitos simples

En 1983 se logró terminar la clasificación de los grupos finitos simple, estableciéndose que existían cinco grandes familias y que cualquier grupo finito simple pertenece a una de esas cinco familias, con la excepción de 26 grupos que reciben el nombre de grupos esporádicos. El mayor de ellos es conocido como grupo monstruo (ver, figura 2.1).

Problema: Clasificar los grupos finitos simples.

Solución:

Todo grupo finito simple puede ser:

Un grupo cíclico de orden primo: se tratan de los únicos grupos finitos simples abelianos. El famoso teorema de Walter Feit y John G. Thompson, establece que todo grupo finito de orden impar es resoluble. Por tanto, todo grupo finito simple tiene, o bien orden impar y se trata de un grupo cíclico de orden primo, o bien orden par.

Un grupo no abeliano de orden par, que puede ser:

Un grupo alternado de grado al menos 5.

Un grupo de Lie simple incluyendo los grupos clásicos: Los grupos de las transformaciones proyectivo especial, unitarias, simplécticas u ortogonales sobre un cuerpo finito. Un grupo de Lie excepcional o twisted incluyendo al grupo de $Tits_2F4(2)'$

Uno de los 26 grupos esporádicos incluyendo al grupo monstruo. John Conway consideró al grupo de Tits como un grupo esporádico (porque no es estrictamente un Grupo de Lie), en cuyo caso hay 27 grupos esporádicos.

Los ordenes y nombres de los grupos corresponden a:

Los grupos esporádicos suelen ser de orden grande. El más pequeño es de orden 7.920. Los más grandes son el "baby monster group" de orden superior a 4 $_\times$ 1033 y el "monstruo" de orden superior a 8 $_\times$ 1053. Veinte de los 26 grupos esporádicos están incluidos en el grupo monstruo. A los seis restantes, $J1$, $J3$, $J4$,$O'N$,Ru,Ly se les llama "grupos parias"; cinco de los más pequeños fueron descubiertos por Mathieu en 1860 y el resto entre 1965 y 1975. Sin embargo varios fueron predichos antes de ser construidos (Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm).

2.3.35. Problema 4.4: La clasificación de los grupos cristalográficos

Se tiene que un grupo G de movimientos en el plano se denomina *grupo cristalográfico*, si el subgrupo de G formado por las traslaciones es un grupo abeliano infinito y generado por dos elementos. Así, por ejemplo, se tiene que es imposible llenar todo el plano con pentágonos regulares, sin cortarse unos con otros o dejar espacios libres. Esta limitación se llama *restricción cristalográfica* y proviene del hecho que los grupos de cristalografía no pueden tener simetrías rotatorias de orden 5; pero sí es posible tener grupos cristalográficos con rotaciones de orden 6 (Rivero, 1999).

En la misma dirección, se define un *grupo discontinuo,* como aquel grupo G de movimientos en el plano donde se cumple que para cada punto P del plano existe un entorno, disco abierto D con centro en P tal que la imagen $\sigma(P_)$ no se encuentra en D, para todo σ en G diferente de la identidad.

Problema 1: ¿Qué grupos discontinuos de traslaciones existen en el plano?

Todo grupo de traslaciones discontinuo G en el plano corresponde a uno de los siguientes:

1) G consiste solo de la identidad. $G = \langle I \rangle$

2) G está generado por una traslación. $G = \langle T_a \rangle$

3) G está generado por dos traslaciones. $G = \langle T_a, T_b \rangle$

Problema 2: ¿Cuáles son los generadores de un grupo cristalográfico?

Si G es un grupo cristalográfico de movimientos directos, entonces G está generado por traslaciones y una única rotación de orden n=1, 2, 3, 4, 6 (Rivero, 1999).

Problema 3: ¿Cuántos grupos cristalográficos planos existen?

Existen 17 grupos cristalográficos no isomorfos. Estos se clasifican de acuerdo al grupo de rotaciones:

1) Grupos sin rotación: $W_1, \quad W_1^1, \quad W_1^2, \quad W_1^3$

2) Grupos con rotación de orden 2: $W_2, \quad W_2^1, \quad W_2^2, \quad W_2^3, \quad W_2^4$

3) Grupos con rotación de orden 3: $W_3, \quad W_3^1, \quad W_3^2$

4) Grupos con rotación de orden 4: $W_4, \quad W_4^1, \quad W_4^2$

5) Grupos con rotación de orden 6: $W_6, \quad W_6^1$

La *notación*, W_i^j indica para el subíndice i el tipo de rotación que contiene el grupo, así el 1 indica una rotación de orden 1 (la identidad); el 2 una rotación de orden 2 o giro de 180 grados; el 3, una rotación de orden 3 o giro de 120 grados y así sucesivamente. El subíndice j se usa para diferenciar los posibles movimientos inversos, dentro de una familia con el mismo orden del grupo de rotaciones (Rivero, 1999).

2.3.36. Problema 4.5: La clasificación de los grupos puntuales

Una molécula presenta simetría de tipo puntual, si todos sus elementos de simetría pasan por un único punto. La existencia de uno o varios elementos de simetría obliga o impide la existencia de otros en la molécula. Así, solo son posibles algunos conjuntos de elementos de simetría.

Problema: ¿Cuál es el grupo puntual de la molécula?

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	Grupo puntual de simetría
C_3	$E, 2C_3$	3	C_3
$C_3, 3C_2$	$E, 2C_3, 3C_2$	6	D_3
$C_3, 3\sigma_v$	$E, 2C_3, 3\sigma_v$	6	C_{3v}
$C_3, 3\sigma_h$	$E, 2C_3, 3\sigma_h, 2S_3$	6	C_{3h}

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	Grupo puntual de simetría
$C_3, 3C_2, \sigma_h$ $S_3^*, 3\sigma_v^*$	$E, 2C_3, 3C_2, 3\sigma_h$ $2S_3, 3\sigma_v$	12	D_{3h}
$C_3, 3C_2, i$ $S_6^*, 3\sigma_d^*$	$E, 2C_3, 3C_2, \mathrm{i}$ $2S_6, 3\sigma_d$	12	D_{3d}

La (∗) significa que los elementos se encuentran implicados por los anteriores. Cada uno de los conjuntos de elementos de simetría forma un grupo puntual de simetría y los elementos de simetría que posee la molécula determinarán el grupo puntual al cual pertenece.

2.3.37. Problema 4.6: Los grupos en la Física

Por simetría de un sistema físico se entiende cuando las ecuaciones de movimiento permanecen invariables respecto a un cierto conjunto de transformaciones: si una ecuación es invariante respecto a las transformaciones A,B, entonces es también invariante respecto a la transformación C que resulta de la aplicación sucesiva de A y B. La transformación C se denomina producto de las transformaciones y así la operación de multiplicación es una operación interna en el conjunto de transformaciones de simetría de un sistema físico. Un conjunto de transformaciones con estas propiedades se denomina un *Grupo de transformaciones de simetría del sistema físico dado* (Pietrásheñ & Trífonov, 2000).

Problema: ¿Qué grupos utiliza la Física?

Algunos de los grupos que utiliza la física corresponden a:

1) Grupo de desplazamientos (traslaciones) en el espacio tridimensional: sus elementos son las transformaciones de traslación del origen de coordenadas en un vector arbitrario a, es decir, $r' = r + a$; este es un grupo continuo triparamétrico (el vector a tiene tres componentes).

2) Grupo de rotaciones $O^+(3)$: sus elementos son las transformaciones de rotación del espacio tridimensional o las matrices ortogonales correspondientes con determinante igual a la unidad. Este grupo es continuo y triparamétrico (los 9 elementos de una matriz ortogonal están relacionados entre sí mediante condiciones.) Tres parámetros independientes pueden ser escogidos, por ejemplo, $\{\phi, \theta, \psi\}$. Los ángulos polares $\{\phi,\theta\}$ determinan la posición del eje de rotación que pasa por el origen de las coordenadas. El ángulo $\{\psi\}$ describe la rotación respecto a este eje. La invariancia respecto al grupo $O^+(3)$ pone de manifiesto la propiedad de isotropía del espacio tridimensional (esto es, las tres direcciones son equivalentes, no existe una directiva privilegiada). Si al grupo de rotaciones se le añada la operación de inversión dada por $x = -x$, $y = -y$, $z = -z$ se obtiene el grupo ortogonal $O(3)$.

3) Los grupos de simetría de las moléculas (grupos puntuales) están compuestos por ciertas transformaciones ortogonales del espacio tridimensional. Por ejemplo, el grupo de simetría de una molécula con forma de tetraedro regular (como la molécula CH4) consta de 24 elementos: rotaciones y reflexiones que transforman uno en otro los vértices del tetraedro.

4) Los grupos de simetría de los cristales (o grupos espaciales) que están compuestos por un número finito de transformaciones ortogonales, de desplazamientos (traslaciones) discretos y de los productos de estas transformaciones. Tal simetría es invariante solo a un cristal infinito o bien a un modelo de cristal con las denominadas condiciones de contorno cíclicas.

5) Grupos de permutaciones de n objetos, por ejemplo, de las coordenadas de n partículas idénticas. Es un grupo de orden $n!$.

6) El grupo de Lorentz L^{+}, formado por las transformaciones que describen el paso de un sistema de referencia a otro que se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme respecto al primero. Este grupo contiene al grupo de rotaciones $O^{+}(3)$ y depende de 6 parámetros: los 3 ángulos que determinan la orientación relativa de los ejes coordenados espaciales y las tres componentes de la velocidad del movimiento relativo. El requisito de la invariancia de las ecuaciones de movimiento respecto al grupo de Lorentz es una consecuencia de los postulados de la teoría de la relatividad.

Los grupos anteriores no agotan, todos los ejemplos de los grupos que tienen aplicaciones en la Física y se puede decir, que la importancia de la Teoría de Grupos, son sus *métodos*, que proporcionan la posibilidad de *clasificar* los estados de un sistema físico a partir de sus propiedades de simetría, sin resolver las propias ecuaciones de movimiento (Pietráshеñ & Trífonov, 2000).

Se presenta en la tabla 2.13. y 2.14., las configuraciones epistémicas CE4.4, CE4.3, CE4.2 y CE4.1, relacionadas con los problemas del período cuatro y que corresponde a a la definición abstracta de grupo y luego a algunas de las aplicaciones del objeto Grupo en contextos extramatemáticos.

Tabla 2.12: Configuración epistémica CE4.4

CE4.4 Los grupos en los contextos extramatemáticos	
CE4.6	Grupos en física
CE4.5	Clasificación de los grupos puntuales
CE4.4	Clasificación de los grupos cristalográficos

Tabla 2.13: Configuración epistémica CE4.3

CE4.3 Clasificación de los grupos finitos simples
CE4.2 Clasificación de las geometrías
CE4.1 Los grupos continuos finitos de transformaciones y las ecuaciones diferenciales parciales

2.3.38. Problema 5: Primera definición abstracta de Grupo (Cayley)

Las investigaciones sobre los grupos continuos de transformaciones, prepararon el camino para la definición abstracta de Grupo, ya que representaban una visión más amplia del concepto, donde se daban ejemplos de grupos infinitos y por tanto se extiende el campo de aplicación de la noción grupo, la cual estuvo presente en desarrollos de Teoría de Números, Geometría, Ecuaciones diferenciales parciales y Teoría de Funciones.

Problema: ¿Qué es un grupo?

Arthur Cayley dio el paso definitivo para la definición abstracta de Grupo en su artículo, "Sobre la Teoría de Grupos que dependen de la ecuación cúbica $\theta^n = 1$", en la cual se encuentra la primera definición abstracta de grupo que corresponde a:

> **"Un conjunto de símbolos $\{1, \alpha, \beta, \ldots\}$ todos ellos diferentes y tal que el producto de cualquiera dos de ellos (no importa en que orden) o el producto de ellos consigo mismo, pertenecen al conjunto; se dice ser un grupo"**

Como parte de la definición Cayley establece que el producto de estos símbolos, no tiene porque ser conmutativo, pero sí asociativo. Cayley presenta varios ejemplos en su artículo como:

1) Los cuaterniones con la suma

2) Las matrices invertibles con la multiplicación

3) Grupos de permutaciones con la operación compuesta

También, Cayley muestra que cualquier Grupo abstracto, es isomorfo a un grupo de permutaciones: este resultado se conoce como el *Teorema de Cayley;* introduce además, la tabla de multiplicación para un grupo y afirma que: "un grupo abstracto, queda determinado por ésta". En 1878, escribe 4 artículos sobre el tema, uno de ellos llamado "The theory of groups." Esta definición no llamó la atención de la comunidad matemática y se tuvo que esperar muchos años para que el concepto abstracto de Grupo, iniciara a permear a los matemáticos del siglo XX. En la tabla 2.15 se presenta la configuración epistémica, correspondiente a ésta práctica matemática.

Tabla 2.14: Configuración epistémica CE5

CE5 Definición abstracta de Grupo	
CE5.1	Cayley y la primera definición abstracta de Grupo

2.4. Significado global del objeto Grupo

El estudio histórico, epistemológico y fenomenológico de la evolución del objeto Grupo permite la reconstrucción del significado global del objeto matemático, a partir de la identificación de doce sistemas de prácticas, las cuales llevan asociadas cada una, una configuración epistémica, la cual constituyen un significado parcial del objeto de investigación: las configuraciones asociadas a los sistemas de prácticas se han denominado: **CE0.** Métodos empíricos para la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media (siglo V-XV); **CE1.** Relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación algebraica de grado 2,3, 4 y el simbolismo algebraico en el renacimiento (siglo XV-XVI); **CE1.1.** La geometría y las ecuaciones algebraicas de grado 4 (Descartes); **CE1.2.** Las ecuaciones algebraicas y los problemas de teoría de números en aritmética modular (edad moderna); **CE2.** Búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar por radicales la ecuación algebraica general de grado $n > 4$ (edad moderna, siglo XVII-XVIII); **CE3.** Clasificación de las ecuaciones algebraicas solubles por radicales y la Teoría de Galois (edad contemporánea, siglo XVIII-); **CE3.1.** Problemas en aritmética modular; **CE4.1** Los grupos finitos de transformaciones y las ecuaciones diferenciales parciales; **CE4.2.** La clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas; **CE4.3.** Clasificación de los grupos finitos simples; **CE4.4.** Los grupos en los contextos extramatemáticos (CE4.4, CE4.5, CE4.6) y en el nivel superior se encuentra la configuración **CE5.** Definición abstracta de Grupo.

En esta dirección, desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático, se entiende el significado de un concepto desde una perspectiva pragmatista, es decir, en términos de los sistemas de prácticas en las que dicho objeto interviene (significado sistémico): estos sistemas de prácticas están ligados a situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir los distintos significados cuando se abordan problemas diferentes (Pino-Fan, 2013, p. 129). Estas doce configuraciones epistémicas descritas pesar de que se consideran distintas, guardan algunas similitudes, de tal forma que se pueden relacionan como se ilustra en la figura 6.14. Se consideraron cronológicamente según las etapas de evolución del objeto Grupo definidas en la obra de Piaget & García (2008). Estos sistemas de prácticas/ significados parciales, se pueden ver como "primarios" ya que, las configuraciones activadas en éstos sistemas (CE0, CE1, CE1.1, CE1.2, CE2, CE3, CE3.1, CE4.1, CE4.2, CE4.3, CE4.4 y CE5), tienen un carácter extensivo, es decir, resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas, con métodos y procedimientos particulares.

En un primer nivel, según la tabla 2.10, se encuentran las configuraciones epistémicas CE0.1,...,CE0.12 las cuales se generalizan por la configuración CE0, relacionada con los métodos empíricos de solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media. De igual forma, las configuraciones CE1.1,...,CE1.4 corresponden a situaciones-problemáticas que quedan generalizadas en la configuración CE1, que corresponde a la relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado 2,3 y 4 y el problema del simbolismo algebraico. En la misma dirección, las configuraciones CE2.1, CE2.2 y CE2.3, se generalizan con la configuración CE2, que corresponde a la búsqueda de los métodos generales para solucionar las ecuaciones algebraicas y el problema de la imposibilidad de solucionar por el método de radicales la ecuación de grado cinco. En la tercera etapa de evolución en la emergencia del objeto grupo se encuentran las configuraciones CE3.2, CE3.3 y CE3.4 que se pueden generalizar con la configuración CE3, que corresponde a la clasificación de las ecuaciones algebraicas que son solubles por radicales y la Teoría de Galois y en el mismo nivel de la CE3 se encuentra la configuración CE3.1, que se relaciona con los problemas en aritmética modular de Gauss. En la cuarta etapa, se encuentran las configuraciones CE4.4, CE4.5 Y CE4.6 que se generalizan, con la configuración CE4.4 que corresponde a la aplicación de los grupos en contextos extra-matemáticos como los grupos cristalográficos, los grupos puntuales de las moléculas y los grupos en Física; en el mismo nivel se encuentra la configuración CE4.3 que corresponde a la clasificación de los grupos finitos simples, la CE4.2, que corresponde a la clasificación de las geometrías y la CE4.1, que corresponde a los grupos finitos de transformaciones y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales y finalmente, en el nivel cinco se ubica la CE5, que corresponde a la definición abstracta o axiomática del objeto Grupo, que corresponde al significado de referencia dado al objeto Grupo y que es el significado que utilizan los libros de texto analizados y de igual forma, es el significado que pretenden los programas académicos de los estudiantes de formación matemática.

En la figura 2.6, se presenta el significado holístico del objeto Grupo.

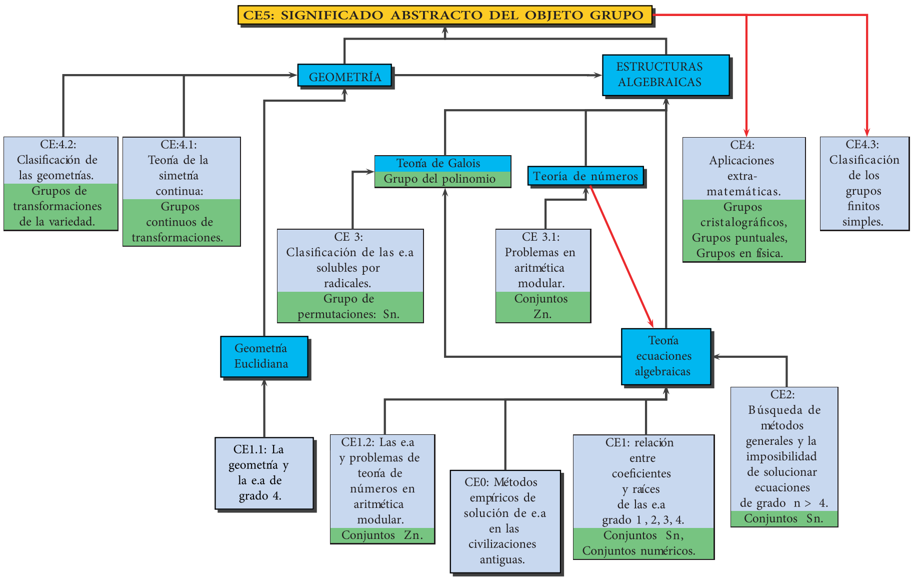

Figura 2.5: Significado global del objeto Grupo

2.5. Importancia del estudio fenomenológico sobre la estructura Grupo

Con el estudio de la emergencia del objeto grupo, se hace evidente en primer lugar la complejidad del objeto matemático y de igual forma, para la enseñanza del objeto Grupo, lo cual indica que se deben presentar situaciones-problemas de la matemática y fuera de la matemática, de modo que el estudiante logre el trabajo con conjuntos abstractos y pueda iniciar el estudio de los teoremas formales y de las aplicaciones propias de la Teoría de Grupos.

En esta dirección, algunos autores como Rivero (1999. p.15) establecen que, la geometría de los movimientos debe ocupar un lugar importante en el currículum de las Licenciaturas en Matemáticas (Matemáticas), ya que además de incentivar el interés por aspectos geométricos de la Matemática, es un punto de convergencia de varias ramas como la geometría euclidiana, el álgebra lineal y la teoría de grupos. Además, argumenta que, es deseable que los estudiantes de Educación Matemática (Licenciados) orientados a la docencia a nivel de bachillerato, tomen durante la carrera, un curso de este tipo. El autor hace referencia al estudio de los grupos cristalográficos, los grupos puntuales y los grupos en Física.

2.6. La estructura algebraica Grupo en los programas y libros de Texto

Se presenta el análisis a los programas de Teoría de Grupos, específicamente, el análisis de las unidades que se relacionan con el objeto Grupo, para determinar cuáles son los significados pretendidos por cada uno de los programas. De igual forma, se realiza el análisis de cuatro textos de teoría de Grupos, en las unidades relacionadas con el objeto para determinar el significado pretendido por cada uno de ellos. Así, el presente capítulo tiene el objetivo de presentar el tratamiento otorgado al objeto de investigación en el currículo y en libros de texto universitarios.

La información de esta sección, junto con los significados identificados para el objeto de investigación a partir de las prácticas matemáticas, en el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, permiten establecer el significado de referencia institucional del objeto Grupo y compararlo con el significado Global, del objeto. El estudio de los significados se convierte en un insumo para efectuar en la puesta en marcha del diseño, validación e implementación de un instrumento para evaluar el conocimiento didáctico-matemático potenciado en los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto matemático.

2.6.1. La Teoría de Grupos en el currículo nacional

La Teoría de Grupos, es una asignatura de los planes universitarios, para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y para los Matemáticos. En esta dirección, en la presente investigación se pretende relacionar el conocimiento del contenido (según Shulman, 1986, 1987) de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo y el conocimiento didáctico - matemático, que se ha potenciado o desarrollado en relación al objeto matemático, en su proceso de formación universitaria.

En la resolución 5443 del 30 de Junio de 2010, del Ministerio de Educación Nacional se definen las características específicas de los programas de formación profesional en Educación, en el marco de las condiciones de calidad y se dictan otras disposiciones.

Los egresados de los programas de Licenciatura según la resolución 02041 del 3 de febrero de 2016, se desempeñan como profesionales en Educación básica y media (secundaria) y el Ministerio de Educación Nacional define los estándares relacionados con la Matemática para cada grado de educación básica y media; sin embargo, en las universidades Colombianas, se pueden vincular estos egresados del programa de Licenciatura en Matemáticas, como docentes universitarios. La resolución define el perfil de los egresados y plantea un conocimiento de los objetos matemáticos en cuanto a las distintas representaciones y establece que deben aprender de manera "autónoma" para utilizar los conocimientos y prácticas propias de su disciplina, además de fortalecer sus competencias a través de su ejercicio profesional. Estas competencias le deben permitir desarrollar actividades de enseñanza y aprendizaje fundamentadas en la articulación de conocimientos, conceptos y procedimientos de los saberes de la disciplina, de la didáctica, la historia, la epistemología y la pedagogía.

En este punto, las exigencias para los egresados de los programas de Licenciatura en Matemáticas, se podrían relacionar con la búsqueda de una potenciación o desarrollo de conocimientos didácticos y matemáticos necesarios para la enseñanza y en esta dirección, es pertinente analizar los conocimientos de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y específicamente aquellos relacionados con la dimensión epistémica, es decir, con los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional para la enseñanza del objeto Grupo en la Educación Superior.

En la misma dirección, la resolución 2769 del 2003 del Ministerio de Educación Nacional, define las características específicas de calidad para los programas de pregrado en Ciencias Exactas y Naturales en el cual se ubica el programa de Matemáticas.

Se deduce de la normatividad, que a partir de la resolución 2769, el Ministerio de Educación Nacional ubica la Teoría de Grupos dentro del área disciplinar para los Matemáticos, fundamentada en la apropiación por parte del estudiante, de los contenidos y métodos de la disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la "epistemología" y en las prácticas científicas propias de su campo. En esta dirección, se realizó el estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo para identificar los significados que se fueron dando el objeto Grupo a lo largo de su desarrollo histórico; a partir de este estudio y del estudio de los significados pretendidos por los programas de Teoría de Grupos, se determinaran los significados pretendidos por la Institución (la universidad y los textos): estos estudios son necesarios para el diseño del instrumento que permite evaluar los conocimientos didácticos-matemáticos en relación con el objeto Grupo de los estudiantes de Formación Matemática.

2.6.2. La Teoría de Grupos en los programas de formación matemática

La asignatura de Teoría de Grupos se cursa en el quinto semestre (10 semestres) en el programa de Licenciatura en Matemáticas y pertenece al área disciplinar y de profundización; antes de cursar la asignatura, el estudiante ha tomado los cursos de: Fundamentos de Matemáticas, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Estadística Descriptiva, Geometría Euclídea, Teoría de Conjuntos, Álgebra Lineal, Cálculo Integral, Sistemas Numéricos, Teoría de Probabilidad, Cálculo Multivariable, Distribución de Probabilidad, Física I, Topología Métrica, Física II e Inferencia Estadística. Según los contenidos mínimos del programa de Teoría de Grupos para los Licenciados, en la unidad 1 se define que el "significado institucional o de referencia" pretendido para el objeto matemático, corresponde a la configuración de Grupo como Grupo Abstracto, y se relaciona con un conjunto donde se define una operación binaria, que puede cumple los axiomas de: clausura de la operación definida, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de un elemento inverso en el conjunto, para cada elemento del conjunto. Otro significado que se pretende y se infiere de la unidad 5 del programa curricular, corresponde a la configuración de Grupo como "Conjunto de Permutaciones": grupos alternantes como subgrupos de los grupos de permutaciones S_n: en especial, se presentan los grupos Diédricos D_n que se estudian como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo S_n de permutaciones en un conjunto finito de elementos.

Del programa de Teoría de Grupos de Matemáticas, se establece que los significados pretendidos para el objeto Grupo según los contenidos mínimos, corresponden a: Grupo, en el contexto de *Grupo Abstracto* y Grupo como *Conjunto de permutaciones* de elementos de un conjunto finito. Sin embargo, al retomar la resolución 2769 de 2003 dada por el Ministerio de Educación Nacional, para el programa de Matemáticas, se ubica la Teoría de Grupos en el área disciplinaria "fundamentada en la apropiación por parte del estudiante de los contenidos y métodos de su disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la "epistemología" y en las prácticas científicas propias de su campo": queda en evidencia la epistemología, como rama de la filosofía interesada en el conocimiento científico, que plantea cuestiones fundamentales a las cuales el Matemático deberá dar respuesta: entre otras preguntas se plantean: ¿Cuáles son los orígenes del conocimiento científico? (¿Empírico? ¿Racional?), ¿Cuáles son los criterios de validez del conocimiento científico?, (¿Capacidad de predecir sucesos?, ¿Consistencia lógica?), ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico?, (¿Acumulación y continuidad? ¿Períodos de ciencia normal, revoluciones científicas y discontinuidad?, ¿Desplazamiento y refinamiento de programas científicos? Estas cuestiones se hacen en términos generales o se pueden hacer más específicas con respecto a algún dominio particular del conocimiento científico como las matemáticas y aún más específico como para el caso del objeto Grupo: cuestiones tales como ¿Cuáles son las fuentes del significado del conocimiento? y finalmente ¿Cómo se constituye el significado del objeto matemático? (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 829). Así, queda en evidencia, que el estudiante de Matemáticas debe tener un conocimiento del objeto Grupo en los contextos de su uso.

Respecto a los programas de Teoría de Grupos, se concluye que el estudio del objeto Grupo no se aborda desde su evolución histórica: en las asignaturas, se estudian los grupos S_n con sus propiedades pero como un ejemplo particular, en el contexto general de Grupo Abstracto; de igual forma, no se estudian los polinomios simétricos, ni la relación que tienen los grupos de permutaciones con la solución por el método de radicales para las ecuaciones de grado 2, 3, 4 y 5. De igual forma, no se aborda el Grupo de Galois, que fue precisamente la idea de Galois, para llegar a consolidar el concepto de grupo como Grupo de Permutaciones. Por su parte, los grupos $\mathbf{Z}_n$ se presentan, como ejemplos particulares de Grupos en su contexto de Grupo Abstracto y en ninguna parte del programa se trabaja la solubilidad de las ecuaciones algebraicas que precisamente, corresponde al origen histórico del objeto matemático.

2.6.3. La Teoría de Grupos en los libros de texto

Se realiza un análisis semiótico de cuatro libros de texto y se identifican los significados pretendidos por ellos: se analizaron estos libros de textos, al tener presente que el libro representa un recurso potente para el profesor al momento de organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Remillard, 2000 citado en Vásquez, 2014). Por esta razón, se pretende dar respuesta a algunos de los siguientes interrogantes: ¿Cuáles son los objetos matemáticos vinculados con el objeto Grupo?, ¿Cómo se introduce su estudio?, ¿Se tiene en cuenta su desarrollo histórico: específicamente, se aborda el estudio desde los distintos significados dados hasta llegar a la construcción del objeto? Para esto, se analizan los textos, en las unidades relacionadas con el objeto Grupo: estos textos, son los recursos de mayor uso para el proceso de instrucción en los programas de formación matemática (ver, tabla 2.16).

Tabla 2.15: Libros de texto de Teoría de Grupos

Título	Autor	Editorial	Edición
Contemporary Abstract Algebra	Joseph A. Gallian	Houghton Mifflin Company	2a ed. 2006
Abstract Algebra	I.N. Herstein	John Wiley & Sons, INC.	3a ed. 1999
Cuadernos de Álgebra No. 1 Grupos	Oswaldo Lezama	Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá	2012
Teoría de Grupos	José F. Caicedo C.	Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá	2004

Se presenta el análisis de los objetos matemáticos presentes en los libros de texto: en primer lugar, se determinan los contenidos relacionados con el objeto Grupo y luego se realiza el estudio de los objetos matemáticos primarios, presentes en las unidades relacionadas con el objeto y sus significados. Para este estudio se utiliza la técnica del análisis semiótico de textos (Godino, 2002).

En la tablas 2.17. y 2.18. se presentan las entidades matemáticas (unidades elementales) presentes en la Parte 2 del texto de Gallian (2006) que corresponde a uno de los textos de mayor uso en los programas de Licenciatura en Matemática; el estudio se realiza en los capítulos 1-2 que son los que se relacionan con el estudio de los significados institucionales (texto) del objeto Grupo; para esto, se hace uso de la técnica analítica del análisis semiótico, propuesta desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.

Tabla 2.16: Entidades matemáticas (unidades elementales), capítulo 1, del texto Contemporary Abstract Algebra.

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Conjunto de Simetrías del cuadrado	Rotaciones, Reflexiones, identidad, inverso	
Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
Se considera la rotación de 90 grados y la de 450 como igual.	R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'	Si $A,B \in D_4$ entonces también AB.
	Rotación de 0 grados, de 90 grados	R_{90} y R_{270} son inversos cada uno del otro y H es su propio inverso.
Se puede pensar que la región cuadrada es transparente (un vidrio), con las esquinas marcadas: en un lado con color azul, negro, rosa y verde. Esto hace fácil distinguir entre movimientos que tienen diferentes efectos.		Si $A \in D_4$ entonces $AR_0 = R_0A$ y así combinando cada elemento. Un elemento R_0 con esta propiedad se llama una identidad y cada grupo debe tener una.
	H reflexión a través del eje horizontal, V reflexión a través del eje vertical, D reflexión por la diagonal principal, D' reflexión por la otra diagonal.	Vemos que para cada elemento $A \in D_4$ existe exactamente un elemento $B \in D_4$ tal que $AB = BA = R_0$. En este caso B se dice que es el inverso de A y viceversa.
	Tabla de operaciones para estos 8 elementos (p. 33)	$HD \neq DH$ pero $R90R180 = R180R90$
		Si se tiene que $AB = BA$ para todo A,B se dice que el grupo es conmutativo o abeliano de otro modo, se dice que el grupo no es abeliano.
		D_4 es un grupo.
		Argumentos
		Se quiere describir las posibles relaciones entre la posición inicial del cuadrado y su posición final, en términos de los movimientos.
		La clausura es un requerimiento para que un sistema matemático sea un grupo.

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
		En un grupo AB puede o no puede ser el mismo que BA.
		Se ha ilustrado que D_4 posee tres o cuatro condiciones que definen un grupo: clausura, existencia de una identidad y existencia de inversos.
		La condición restante requerida para un grupo es la asociatividad; esto es, $(ab)c = a(bc)$ para todo a,b,c del conjunto: se debería chequear las $8^3 = 512$ posibilidades para la elección de a,b,c en la práctica, esto rara vez se hace.
		Los 8 movimientos son funciones y la operación de composición de funciones es asociativa, así, no debemos revisar las ecuaciones.
Los grupos Dihedrales: el grupo D_n es el "grupo dihedral" de orden $2n$.	Grupo de simetrías, polígono regular, orden del grupo	El grupo dihedral de orden $2n$ es a menudo llamado el "grupo de simetrías del nágono regular ".
	Arte, naturaleza, Químicos, Mineralogistas, cálculos orbitales, niveles de energía, átomos, moléculas, vibración molecular, molécula piramidal	
		El término simetría, es de la palabra griega symetros, que significa de igual medida.
		El grupo de simetrías de una figura plana, es el conjunto de todas las simetrías de la figura. Simetrías en tres dimensiones se definen de manera análoga.
	Rotación, traslación	Una rotación de un plano alrededor de un punto en el plano es una simetría del plano.
		Una traslación de un plano o del espacio tridimensional es una simetría.
		Una reflexión a través de una línea L es que la función que deja a todos los puntos de L fijos y toma cualquier punto q que no está en L, hasta el punto q' de modo que L es la mediatriz del segmento que une q y q'.

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
		Una reflexión a través de un plano en tres dimensiones se define de manera análoga.
		La restricción de una rotación de 180 grados, alrededor de una línea L en tres dimensiones a un plano que contiene L es una reflexión, a través de L en el plano.
		En los grupos dihédricos, los movimientos que describimos como voltear sobre ejes de simetría en tres dimensiones (por ejemplo H, V, D, D') son reflexiones a través de lineas en dos dimensiones.
	Grupos cíclicos	Algunos objetos y figuras tienen simetría rotacional pero no simetría de reflexión. Un grupo de simetría, consiste de las simetrías de rotación 0_o, $360^o/n$, $2(360^o)/n, \ldots, (n-1)360^o/n$: si no hay otras simetrías, el grupo se llama un grupo de rotación cíclica de orden n y se denota por $\langle R_{360/n} \rangle$.
El grupo de simetría de una molécula piramidal tal como el amoníaco (NH_3) tiene como grupo de simetría a D_3.		
Mineralogístas, determinan la estructura interna de los cristales por el estudio 2dimensional de las radiografías de la composición atómica de los cristales.		
Es matemáticamente imposible para un cristal poseer un patrón de simetría D_n con $n = 5$ o $n > 6$		
En los ejercicios del capítulo (p. 37) se presentan 23 situaciones-problemas, entre ellas:		
Con pinturas y palabras describe cada simetría de D_3		

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Escriba una tabla Cayley completa de D_3		
¿Es D_3 un grupo abeliano?		
Describa con pinturas y palabras los elementos de D_5		
Para $n \geq 3$ describa los elementos de D_n		
	D_n	
		Argumentos
		El análisis realizado para un cuadrado, puede similarmente darse para un triángulo o un pentágono regular o ciertamente, cada n–ágono regular ($n \geq 3$).
		Los grupos dihedrales aparecen con frecuencia en el arte y en la naturaleza. Los logos corporativos son recursos ricos de grupos dihedrales de simetrías; los químicos clasifican moléculas de acuerdo a su simetría: más aún, consideraciones simétricas se aplican en cálculos orbitales, en la determinación de los niveles de energía de átomos y moléculas, y en el estudio de las vibraciones moleculares.

Tabla 2.17: Entidades matemáticas (unidades elementales), capítulo 2, texto Contemporary Abstract Algebra

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Dado un conjunto y una operación binaria, determinar si el conjunto define un Grupo	Conjunto, Operación binaria, Grupo, Función, par ordenado	SeaG un conjunto. Una operación binaria en *G* es una función que asigna a cada par ordenado de elementos de *G* un elemento de *G*.

	Conjuntos finitos, fórmula	Clausura
	Matrices con entradas en $\mathbf{Z}_n$	La operación binaria de adición módulo n y multiplicación módulo n en el conjunto $\{0,1,2,...,n-1\}$, que se denota por $\mathbf{Z}_n$ juega un papel extremadamente importante en álgebra abstracta.
Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
	Identidad, el inverso, propiedad asociativa	Sea G un conjunto no vacío, junto con una operación binaria (usualmente llamada multiplicación) que asigna a cada par ordenado (a,b) de elementos de G un elemento en G denotado por ab. Nosotros decimos que G es un grupo bajo esta operación si se satisfacen las siguientes propiedades: 1. Asociativa. La operación es asociativa; esto es, $(ab)c = a(bc)$ para todo $a,b,c \in G$. 2. Identidad. Existe un elemento e (llamado identidad) en G tal que $ae = ea = a$ para todo $a \in G$. 3. Inversos. Para cada elemento $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ (llamado un inverso de a) tal que $ab = ba = e$.
	Grupo Abeliano	Un grupo es no Abeliano si existe algún par de elementos a,b tal que $ab \neq ba$.

El conjunto $\{1, -1, i, -i\}$ de números complejos es un grupo bajo la multiplicación de complejos. Nótese que -1 es su propio inverso, mientras que el inverso de i es $-i$ y viceversa.	Inverso, números complejos, multiplicación de complejos	
El conjunto $\mathbf{Q}^{+}$ de racionales positivos es un grupo bajo la multiplicación ordinaria. El inverso de cada a es $\frac{1}{a}$	Racionales positivos, multiplicación ordinaria.	
El conjunto S de números irracionales positivos junto con el 1 bajo la multiplicación satisface las tres propiedades dadas en la definición de grupo pero no es grupo, ya que $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$ así, S no es cerrado bajo la multiplicación.	Números irracionales positivos, propiedades de la definición de grupo.	
El conjunto de todas las matrices 2×2 con entradas en los reales es un grupo bajo la adición componente a componente	Matrices con entradas reales	Un arreglo rectangular de la forma: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ se llama una matriz $2{\times}2$.
Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
El conjunto $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$ para $n \geq 1$ es un grupo bajo la adición módulo n. Para cada $j > 0$ en $\mathbf{Z}_n$ el inverso de j es $n - j$.	Adición módulo n	El grupo $\mathbf{Z}_n$ usualmente se denomina "el grupo de los enteros módulo n".
El conjunto $\mathbf{R}^{+}$ de números reales distintos del cero es un grupo bajo la multiplicación ordinaria. La identidad es 1. El inverso de a es $\frac{1}{a}$.	Números reales distintos de cero	
El conjunto de matrices con entradas reales y determinante no cero es un grupo no abeliano bajo la multiplicación de matrices		
$U(n)$ es un grupo bajo la multiplicación módulo n	$U(n)$, primos relativos	Se define $U(n)$ como el conjunto de enteros positivos menores que n y primos relativos con n

Para todo $n \geq 1$, el conjunto de raíces complejas de la unidad es grupo bajo la multiplicación	Raíces complejas de la unidad	
El conjunto $\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2,..., a_n) \mid a_1,a_2,...,a_n \in \mathbf{R}\}$ es grupo bajo la adición componente a componente		
$T_{a,b} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ es grupo bajo la composición de funciones. Los elementos de G se llaman traslaciones	Composición de funciones, traslaciones	Para un punto fijo $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ se define $T_{a,b} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ por $(x,y) \to (x+a, y+b)$.
El conjunto de matrices 2×2 con determinante 1, con entradas en $\mathbf{Q}$ (racionales), $\mathbf{R}$ (reales), $\mathbf{C}$ (complejos), o $\mathbf{Z}_p$ (p-primo) no son grupos Abelianos bajo la multiplicación de matrices	p-primo, Grupo lineal especial $SL(2,F)$	
El conjunto de matrices 2×2 con determinante $\neq 0$, con entradas en $\mathbf{Q}$ (racionales), $\mathbf{R}$ (reales), $\mathbf{C}$ (complejos), o $\mathbf{Z}_p$ (p-primo) es un grupo no Abeliano bajo la multiplicación de matrices		
Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*

El conjunto de todas las simetrías de un modelo ornamental infinito, en el que las puntas de las flechas están espaciadas uniformemente; una unidad de separación a lo largo de una línea es un grupo abeliano bajo la composición		
En los ejercicios del capítulo 2 (p. 53) se presentan 37 situaciones-problemas relacionados con las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser grupo; además, continua proponiendo 4 ejercicios para desarrollar computacionalmente.		
Se concluye el capítulo con una nota histórica, sobre la no conmutatividad de la multiplicación de matrices		
Asegúrese de verificar la clausura para probar que un conjunto es un grupo.	Note que si a es el inverso de b,entonces b es el inverso de a	Si el grupo tiene la propiedad que $ab = ba$ para cada par de elementos a,b decimos que el grupo es Abeliano.
La mejor manera de captar la carne de un teorema es ver lo que dice en casos específicos	$-a$ el inverso de a	El conjunto de los enteros bajo la multiplicación ordinaria no es grupo.
Para desarrollar un mejor entendimiento de los siguientes ejemplos, el lector debe suministrar los detalles que faltan.	$det\ A$, $U(n)$, $\mathbf{Z}_p$	El conjunto $\{0,1,\ldots,n-1\}$ es un grupo bajo la multiplicación módulo n si y solo si n es primo.
		En un grupo G, existe solo un elemento identidad
		En un grupo G, las leyes de cancelación a derecha y a izquierda se tienen; esto es, $ba = ca$ implica $b = c$ y $ab = ac$ implica $b = c$.
		Para cada elemento a en un grupo G, existe un único elemento b en G tal que $ab = ba = e$.
		El conjunto $\{0,1,2,3\}$ no es grupo bajo la multiplicación módulo 4

		Argumentos
		En otras palabras, entonces, un grupo es un conjunto con una operación asociativa tal que existe una identidad, cada elemento tiene un inverso y cada par de elementos puede ser combinado sin salirse del conjunto.
		Ahora que tenemos la definición formal de un grupo, nuestro primer trabajo es construir un buen número de ejemplos. Esos ejemplos serán usados a través del texto, para ilustrar los teoremas.
		El conjunto de los enteros bajo la multiplicación ordinaria no es grupo: como el número 1 es la identidad, la propiedad 3 falla, por ejemplo, no existe un entero b tal que $5b = 1$.
		Los números reales, las matrices 2×2 con entradas reales, y los enteros módulo n son todos grupos bajo la adición apropiada. ¿Y con la multiplicación? en cada caso, la existencia de algunos elementos que no tienen inverso hacen que el conjunto con la multiplicación usual no sea grupo.
		En su libro clásico "Lehrbuch der Algebra" publicado en 1899, Heinrich Weber, da un tratamiento extensivo de los grupos $U(n)$ y los describe como unos de los más importantes ejemplos de los grupos Abelianos finitos.
		El conjunto de los enteros bajo la sustracción, no es grupo ya que, la operación no es asociativa.

Como conclusión al análisis del texto de Gallian (2006) y dando respuesta a las preguntas planteadas para este análisis de textos, se presenta en la parte 1 del texto, Capítulo 0 o Preliminares, la lección denominada: *Aritmética modular* a partir de la cual, se introducen los conjuntos $\mathbf{Z}_n$ con la operación binaria de adición módulo n. Es decir, se introduce en primer lugar, el objeto Grupo como un conjunto especial, donde se ha definido una operación que cumple ciertas propiedades algebraicas. En esta lección se observa que uno de los significados dados al objeto matemático corresponde al contexto de uso en *Aritmética Modular*.

En el capítulo 1, la parte 2 se titula: *Introducción a los Grupos* y en él se define el objeto matemático, como un conjunto de movimientos denominados "simetrías del cuadrado" y posteriormente, se pasa al estudio de los grupos denominados: *Grupos dihedrales;* en este capítulo se trabaja el objeto Grupo en su *significado como Conjunto de Permutaciones.* Se continúa con el capítulo 2, denominado: Grupos: en este capítulo, se trabaja el objeto Grupo en su significado *global*, esto es, el significado de Grupo, como *Grupo Abstracto*: un conjunto donde se ha definido una operación binaria interna que cumple las propiedades o axiomas de: asociativa, existencia de un elemento identidad en el conjunto y existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto, en el conjunto. Continuando con el análisis, el capítulo 3 se denomina: Grupos finitos y Subgrupos. En este capítulo se presentan unos test para determinar cuando un subconjunto de un Grupo es el mismo Grupo. Se infiere de lo anterior, que el texto de igual forma introduce el objeto Grupo desde el estudio de los "Grupos de simetrías de los polígonos regulares" es decir, desde su significado como conjunto de permutaciones, que corresponde históricamente a uno de los primeros significados dados al objeto Grupo.

El capítulo 4 del texto de Gallian (2006), denominado: *Grupos cíclicos* presenta ciertas propiedades que tienen los grupos y el capítulo 5, denominado: *Grupos de permutaciones,* inicia con la definición del grupo de permutaciones, para continuar con las notaciones que se le pueden dar a una permutación y se trabajan algunas aplicaciones de estos grupos. Los grupos de permutaciones se trabajan como ejemplos particulares del objeto matemático: aquí, se estudian los grupos de simetrías D_n de los polígonos regulares. Finalmente, el texto sigue con el estudio de casos particulares de Grupos y de las relaciones que se definen entre ellos denominadas Homomorfismos e isomorfismos.

En la tabla 2.17., en el análisis del capítulo 1, se observa que de los seis objetos matemáticos presentes para el análisis del mismo, sobresalen las *propiedades* que se relacionan con el conjunto de simetrías del cuadrado, D_4, especialmente, la propiedad que tiene (D_4, o) con la operación de composición de funciones de ser grupo. De igual forma, sobresalen los *argumentos* relacionados con el grupo D_4 como por ejemplo, que en general, los elementos no cumplen la propiedad $AB = B\,A$. En este capítulo, se continua con el análisis de la *situación:* D_n es el grupo dihedral de orden n, y se observa que entre los objetos matemáticos, sobresalen los *conceptos* relacionados con el conjunto D_n como: la definición de rotación, traslación y reflexión; también, se hace una introducción a la propiedad del grupo de ser cíclico y se continua con el estudio del conjunto de rotaciones del grupo D_4. En este capítulo se presentan algunas *situaciones* extra-matemáticas que se relacionan con los grupos D_4 como: El grupo de simetrías de una molécula piramidal y el que determina la estructura interna de un cristal.

Como conclusión al tratamiento del objeto Grupo en el texto de Gallian (2006), se observa que al final del capítulo, se presentan suficientes *situaciones-problemáticas* intramatemáticas y extra-matemáticas, para contextualizar, reforzar y aplicar las propiedades, notaciones, conceptos, técnicas y argumentos en la búsqueda de una mejor comprensión del objeto Grupo.

En el capítulo 2, de la segunda parte y según la tabla 2.18., se observa que entre los objetos matemáticos presentes, sobresalen los *conceptos,* tales como: el de operación binaria, la adición módulo n y la definición abstracta del objeto Grupo. De igual forma, sobresalen las *situaciones-problemas* relacionadas con los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, complejos, irracionales); las matrices de tamaño 2×2 con entradas reales; las operaciones aritméticas módulo n que definen los conjuntos $\mathbf{Z}_n$; el conjunto de raíces de la unidad para $n = 4$; el conjunto de enteros primos relativos con n y menores que n denominado el conjunto$U(n)$; las matrices con determinante distinto de cero; de igual forma, matrices con determinante 1. Y se finaliza el capítulo con la situación extra-matemática del conjunto infinito de simetrías de un modelo ornamental. De igual forma, al terminar el capítulo se proponen un gran número de *situaciones-problemáticas* para contextualizar los contenidos matemáticos del capítulo.

En la misma dirección, del análisis a los objetos matemáticos presentes en el texto de **Herstein,** (1999) se da respuesta a las preguntas planteadas para el análisis de textos. Se observa que en el capítulo 1, se presentan las lecciones bajo el título de: Cosas familiares y menos familiares, a partir de las cuales se presentan *situaciones-problemas* orientadas a verificar propiedades de la operación definida en el conjunto dado. Se continúa, con la lección denominada: *Teoría de Conjuntos,* donde se presentan y definen las operaciones entre conjuntos y algunas de las propiedades de estas operaciones y al final de la lección, se proponen *situaciones-problemáticas* relacionadas con los conjuntos; estas situaciones, se presentan como problemas fáciles, problemas de nivel medio y problemas duros. El capítulo sigue con la lección: *Mapeos-funciones*; donde se definen funciones entre conjuntos, se define función 1-1, sobreyectiva y función biyectiva y se presentan propiedades relacionadas con las funciones donde se proponen *situaciones-problemáticas* para contextualizar la lección.

En la siguiente lección se presenta: el conjunto $A(S)$ de funciones 1-1 del conjunto S en el mismo, donde el conjunto S consta de un número finito de elementos. En la introducción de la lección, se *argumenta*, que el conjunto $A(S)$ tiene el nombre del "Grupo de simetrías de grado n" cuando el conjunto S tiene n elementos y a menudo se denota por S_n: a los elementos del conjunto o del grupo se les denomina *permutaciones* del conjunto S. Se argumenta que, estamos interesados en la estructura del grupo S_n: en la lección se dan las propiedades que cumplen las funciones con la operación compuesta, entre ellas se verifica la clausura, la asociatividad, la existencia del elemento identidad y la existencia del elemento inverso, para cada función. Se puede establecer, que se introduce el objeto grupo a partir del estudio del conjunto $A(S)$ con S un conjunto finito, que para el caso se nota como el grupo S_n o grupo de Simetrías de grado n.

Se continúa con la *lección: Los enteros,* donde se dan propiedades como: el principio del buen orden, el algoritmo de Euclides, la definición de divisibilidad y algunas de sus propiedades; definición de máximo común divisor y sus propiedades; definición de números primos relativos y algunas propiedades; número primo y propiedades. De igual forma, al final de cada lección se presentan *situaciones problemáticas* que permiten contextualizar los objetos matemáticos presentes en la lección. La siguiente lección se denomina *Inducción Matemática* y en ella se presenta la proposición del principio de inducción matemática; se dan algunos ejemplos de la aplicación del principio y se termina la lección con el planteamiento de situaciones problemáticas. El capítulo finaliza, con el estudio de los números complejos, donde se define la operación + de números complejos y se dan propiedades; finalmente, se presenta la proposición de la desigualdad triangular para finalizar la lección con situaciones-problemáticas.

El capítulo 2, del texto de Herstein (1999) se titula: *Grupos* e inicia con la *argumentación,* que el conjunto $A(S)$ de funciones 1-1 del conjunto S en sí mismo cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad, existencia de inverso; continúa, con el concepto o definición del objeto matemático, como *Grupo Abstracto;* es decir, como un conjunto donde se ha definido una operación binaria interna; operación que cumple las propiedades o axiomas de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento unidad en el conjunto y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto, en el conjunto. Se sigue, con el análisis, del capítulo 3, que se denomina: Grupos finitos; Subgrupos. En este capítulo se presentan tests para determinar cuando un subconjunto de un Grupo es el mismo Grupo.

Se determina que de los seis objetos matemáticos presentes en la unidad 1 del Capítulo 2, titulada: *Definiciones y ejemplos de Grupos*, sobresalen los *conceptos o definiciones* relacionados con el conjunto $A(S)$, especialmente, las propiedades que hacen que el conjunto, con la operación de composición de funciones sea un grupo en su *significado Global*. Estas funciones 1-1 en un conjunto finito definen un *grupo de permutaciones,* como se *argumenta* en el capítulo inicial. Se identifica el significado de grupo en este segundo capítulo, como *Conjunto de permutaciones,* con la *situación - problem*ática planteada: el conjunto $A(S)$ cumple cuatro propiedades algebraicas. La unidad 1, inicia con la lección 1: *Ejemplos de Grupos,* donde sobresalen como objetos matemáticos las *situaciones-problemáticas* tales como: el conjunto de los enteros con la operación adición que cumplen los cuatro axiomas de grupo; el conjunto de los racionales con la adición de números racionales es grupo; el conjunto de los racionales no cero con la operación multiplicación ordinaria de racionales forma un grupo con relación a ese producto; los reales positivos con el producto ordinario de números reales es grupo; el conjunto $E(n)$ de números complejos de la forma θ_n^i donde $i = 0, 1, 2, \ldots,\ n - 1$ y $\theta_n = cos\,(\frac{2\pi}{n}) + isin\,(\frac{2\pi}{n})$, denominado el conjunto de raíces de la unidad, es grupo bajo la multiplicación ordinaria de potencias de θ_n como número complejo; el conjunto de funciones de los reales en los reales $T_{a,b}$ con la operación compuesta es grupo; el plano S donde se define un conjunto especial con la operación compuesta de funciones.

La lección 2, del capítulo 2, se titula: *No ejemplos* y en ella sobresale el objeto matemático de las *situaciones - problemáticas* donde se presentan conjuntos, con operaciones que no determinan una estructura de grupo, tales como: el conjunto de los números enteros y el producto; el conjunto de los números reales y el producto $a * b = a^2b$ y se finaliza la lección, con la situación problemática del conjunto de los enteros positivos con el producto usual de enteros $a * b = ab$ que no define un grupo, ya que, no se cumple la propiedad de los inversos. De igual forma, en esta lección sobresalen los *argumentos* entre ellos: "que históricamente, al sujeto le tomó algún tiempo reconocer que las cuatro propiedades algebraicas jugaban un papel clave en la matemática" y de igual forma, se termina la lección con el planteamiento de un gran número de situaciones problemáticas.

El texto de Herstein (1999) continúa con la Unidad 2, denominada: *Algunas propiedades simples;* en esta unidad sobresalen las *propiedades* que se deducen de los axiomas de grupo y los argumentos relacionados con los conjuntos numéricos y algunas de las operaciones usuales que se definen en ellos; se termina la unidad de igual forma, con el planteamiento de un gran número de situaciones problemáticas propias de la matemática. La unidad 3 se denomina: *Subgrupos* y no se analiza, ya que, en ella se presentan propiedades de los subconjuntos de los conjuntos mencionados, que en algunos casos también son grupos pero, no es pertinente para el estudio de los significados del objeto matemático.

En la misma dirección, del análisis a los objetos matemáticos presentes en el texto de **Lezama,** (2012), y para dar respuesta a las preguntas planteadas para el análisis de textos, se tiene que: el Capítulo 1 se titula: *Grupos y subgrupos* e inicia con el *concepto* de operación binaria interna (ley de composición interna) en un conjunto G donde se presentan 4 *situaciones problemáticas* para contextualizar el concepto: se define la función suma en los números naturales, la función Δ en los naturales, la función de intersección en el conjunto de partes de un conjunto y la función $*$ en el conjunto de los números naturales, para finalizar con la función ∇ en el conjunto de los números enteros. Se continúa con el *concepto* de propiedad asociativa de una operación $*$ en un conjunto G y se dan *propiedades* de la potenciación para un elemento $a \in G$; se sigue, con el *concepto* de semigrupo (que corresponde a una estructura algebraica) y se presentan las *situaciones problemáticas*: el conjunto de los naturales con la operación adición; el conjunto $Apl(X)$ de aplicaciones (funciones) del conjunto X

en sí mismo, con el conjunto X no vacío y la operación compuesta; se sigue con el *concepto* de propiedad conmutativa y se presenta una proposición relacionada con esta propiedad. Se sigue, con el *concepto* de elemento identidad y se presenta la *situación problemática:* del conjunto de los enteros con la adición que constituyen un semigrupo; se pasa a dar la *proposición* de la unicidad del elemento identidad y se define una nueva estructura algebraica: "El Monoide" (semigrupo con elemento identidad) y la propiedad de ser invertible; se finaliza el capítulo, con la *proposición* de la unicidad del elemento inverso.

De lo anterior, se infiere que el texto de Lezama (2012), introduce el objeto Grupo, a partir de las *propiedades* que puede tener la operación definida en un conjunto; esto es, inicia con el estudio de la estructura de semigrupo (cuando la operación $*$ es asociativa) y al poseer la operación $*$ más propiedades, la *estructura* se va haciendo más rica (Lezama, 2012) y las posibilidades de operar en G se hacen mayores); así, si además, en el semigrupo existe un elemento identidad respecto a la operación $*$ entonces, el conjunto adquiere la estructura de Monoide y a partir del Monoide en la lección 2, se presenta el *concepto* de Grupo en su *significado de Grupo Abstracto*. También se observa que se introduce el objeto grupo a partir del conjunto de $Apl(X)$ con la operación compuesta como una *situación problemática* con estructura de semigrupo, de donde se establece que se introduce el significado de grupo, como *Grupo de Permutaciones* (funciones biyectivas).

La lección 2 del capítulo se denomina: *Grupos* y en ella predominan los *conceptos o definiciones*, entre ellos: el concepto de Grupo, grupo Abeliano y además, las *situacionesproblemáticas*: el conjunto de los enteros con la adición y con el 0 forman un grupo; de igual forma, el conjunto de los racionales, los reales y los complejos con la adición. En estos conjuntos numéricos se plantea nuevamente la *situación-problemática* para el caso de la operación multiplicación usual en cada conjunto y se pasa a dar contraejemplos de conjuntos y operaciones que no definen estructura de grupo. Se continúa con el planteamiento de la *situación problemática* de los elementos invertibles del monoide $(G,\cdot,1)$ que determinan precisamente el "grupo de elementos invertibles", dando las *notaciones* de estos nuevos grupos en los conjuntos numéricos. Sigue la lección, con la *definición* que establece que en el conjunto $Apl(X)$ de aplicaciones del conjunto X en sí mismo, existen inversos solo en el caso que las funciones sean biyectivas. Al conjunto de funciones biyectivas se les da el nombre de "Permutaciones"; se sigue con la *situación problemática* del conjunto de funciones de los naturales en los reales, que recibe el nombre del conjunto de "sucesiones reales" y definen de igual forma, una estructura de Grupo con la operación de composición de funciones. Finalmente, se introducen dos *situaciones problemáticas* de especial interés en matemáticas y familiares para los estudiantes que cursaron Álgebra Lineal: el conjunto de las matrices con la adición de matrices y el conjunto de polinomios con entradas reales y con la operación de adición: conjuntos que también tienen la estructura de Grupo. De igual forma, en el capítulo se presentan las *propiedades* de la unicidad del elemento identidad y del elemento inverso. Al final del capítulo se presentan situaciones-problemáticas (22) para contextualizar los objetos matemáticos presentados en el capítulo 1.

En el último texo, del análisis a los objetos matemáticos presentes en **Caicedo,** (2003) y para dar respuesta a las preguntas planteadas en el análisis, se tiene que el capítulo 1 se titula: *Grupos* e inicia con el *concepto* de "ley de composición interna" (operación binaria) en el conjunto E; a continuación, se presentan 5 *situaciones problemáticas* para contextualizar el concepto: se define la función suma en los números naturales, la función producto en los naturales, la función suma en los números enteros y la función producto en el conjunto de los números reales positivos, además, en cada una de estas situaciones planteadas, se identifica el elemento identidad en el conjunto con la operación definida en él, el elemento inverso y la propiedad asociativa sin enunciar cada propiedad formalmente. De igual forma, se introduce el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas del conjunto S en sí mismo, con el conjunto S no vacío y la operación compuesta para los elementos del conjunto y se *argumentan* las propiedades de clausura, asociatividad, elemento identidad y existencia de inversos sin enunciarlas formalmente.

De lo anterior, se infiere, que el texto de Caicedo (2003), introduce el objeto Grupo a partir de las *propiedades* que puede tener la operación definida en los conjuntos numéricos: especialmente, se estudia el conjunto de los enteros con la suma y el conjunto de los reales positivos con el producto, verificando las cuatro propiedades o axiomas de grupo. Aquí, se introduce el objeto Grupo en su *significado abstracto* como un conjunto con una operación que cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto. De igual forma, se puede establecer que se introduce el objeto Grupo desde su significado como *Conjunto de Permutaciones* al definir el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas con la operación compuesta de funciones. En esta lección 1 predominan las *proposiciones* que cumplen los conjuntos mencionados anteriormente.

La lección 2 del capítulo se denomina: *Definición de Grupo* y en ella predominan los *conceptos o definiciones*, entre ellos: el concepto de Grupo y grupo Abeliano. De igual forma, se presentan 8 *situaciones-problemáticas*: el conjunto de funciones biyectivas con la operación compuesta es un grupo; el conjunto partes de un conjunto con la operación de diferencia simétrica entre conjuntos es un grupo; el conjunto de los números reales sin el cero, con la operación de producto usual de números reales es un grupo; de igual forma, los números complejos sin el cero con el producto usual de complejos es un grupo; el conjunto de los números enteros con la adición usual de enteros es un grupo: el intervalo abierto de números reales $G = (-1,1)$ con la operación $*$ es un grupo; el conjunto $G = \{-1,1\}$ con la operación $\cdot$ es un grupo; el conjunto $G = \{-1,1,i,-1\}$ de números complejos con el producto usual de números complejos es un grupo; esta *situación-problemática* la identifica con el conjunto de raíces cuartas de la unidad y con la operación del producto de estas raíces que de igual forma determinan un grupo. En la siguiente *situación-problemática* define el conjunto de rectas que no son paralelas, con pendiente diferente de cero y con la operación compuesta de funciones y establece que ellas determinan un grupo, de igual forma, para esta situación define que cada recta se puede ver como la pareja (a,b) donde a es la pendiente distinta de cero y b es el corte con el eje y y define un producto entre parejas que determinan un grupo. Se sigue con la lección 3 denominada: *Primeros teoremas,* donde se presentan propiedades como: la unicidad del elemento neutro, la unicidad del inverso de un elemento, el cumplimiento de las leyes cancelativas a izquierda y a derecha y en general, propiedades que se cumplen en un grupo. De igual forma, en el texto, al final del capítulo presenta 13 problemas para contextualizar los objetos matemáticos dados en cada una de las lecciones. El capítulo 2 del texto se relaciona con los subgrupos del Grupo y no se toma como unidad de análisis en la determinación de los significados pretendidos por el texto para el objeto Grupo.