Capítulo 1

El Marco de la investigación

1.1. Introducción

En este apartado se presenta una síntesis de los estudios en el tema del Conocimiento Profesional del docente; investigación didáctica, en la línea de Formación de Profesores de Matemáticas. En las investigaciones se analiza la naturaleza, características y grado del conocimiento matemático que tienen y deben tener los profesores para desarrollar su labor docente (Cardeñoso, Flores & Azcárate, 2001; Godino, 2012 en Rojas, Flores & Carrillo, 2013). En esta dirección, se presentan las diversas perspectivas teóricas para abordar el tema de investigación centrado en el estudio de las componentes del Conocimiento del Profesor, para la enseñanza universitaria, y en el caso específico de Teoría de Grupos, hasta llegar a la perspectiva que se describe con más detalle en el marco teórico y corresponde al modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor: modelo desarrollado por Godino (2009) bajo el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Cognición Matemáticos (EOS). De igual forma se presentan las áreas problemáticas, la formulación del problema, los objetivos de la investigación, su justificación, el marco teórico y la metodología utilizada en el desarrollo del estudio.

1.2. Tema y delimitación del tema

1.2.1. Conocimiento del Profesor Universitario

Las investigaciones en el Conocimiento del Profesor, tienen sus orígenes en el paradigma del Pensamiento del Profesor, abordadas en sus inicios desde una perspectiva cognitiva (García, 1992); comprendía aspectos como el estudio de los procesos de razonamiento, juicio y toma de decisiones que contribuían al desarrollo de la conducta del docente. Esta línea de investigación tiene el objetivo de explorar la naturaleza, forma, organización y contenido del conocimiento de los profesores (Grossman, Wilson & Shulman, 1989); en ellas se usaron diferentes conceptos para referirse al conocimiento del profesor: Conocimiento del Oficio (Brown & McIntyre, 1986 citado en García, 1992); Conocimiento Práctico Personal(Clandinin, 1986), Paradigmas funcionales de los profesores (Crocket, 1983 citado en García, 1992), Conocimiento Práctico (Elbaz, 1983), Teorías Implícitas de los Profesores (Hunt, 1985 citado en García, 1992),Conocimiento Profesional y reflexión en la acción (Schön, 1983); Conocimiento Didáctico del Contenido(Shulman, 1986; 1987); Conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Hill & Bass, 2005) y Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Pino-Fan, 2013).

Elbanz (1983) en sus estudios, incluye cinco categorías del Conocimiento práctico del profesor: conocimiento de sí mismo, del contexto, del contenido, del currículo y de la enseñanza; Leinhard & Smith (1985, citado en García, 1992) categorizaron el conocimiento del profesor en: Conocimiento del contenido y Conocimiento de la estructura de la lección: en esta dirección, en el artículo: The Knowledge Growth in Teaching, de Shulman (1986) se definen tres categorías del conocimiento del profesor: Conocimiento del contenido, Conocimiento pedagógico y Conocimiento del currículo.

Posteriormente, Shulman (1987) en su artículo: knowledge and theaching: fundations of new reform, pasa a definir siete categorías como la Base de Conocimientos del Profesor: Conocimiento del contenido, Conocimiento didáctico general, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura; Conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente; Conocimiento didáctico del contenido: la amalgama entre materia y pedagogía que constituyen una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional; Conocimiento de los alumnos y de sus características; Conocimiento de los contextos educativos, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas y Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

En la misma dirección, Carter (1990, citado en García, 1992) categorizó la línea de investigación sobre el Conocimiento del Profesor en tres grupos: Estudios sobre el procesamiento de la información y comparación expertos-principiantes; Estudios sobre el Conocimiento Práctico; Investigaciones sobre el conocimiento didáctico del contenido; en este grupo se encuentran los estudios en los cuales se analiza específicamente el conocimiento que los profesores poseen respecto al contenido que enseñan, así como la forma en que los profesores trasladan ese conocimiento en un tipo de enseñanza que produce comprensión en los alumnos. Carter (1990) señala en el tercer grupo un cambio en el tipo de investigación sobre los conocimientos del profesor catalogada como del Pensamiento del profesor, hacia una investigación más comprometida con los contenidos que enseñan los profesores (García, 1992).

Elmore (1992), plantea que es probable que la enseñanza eficaz varíe considerablemente de disciplina a disciplina; a diferencia de la investigación sobre la enseñanza eficaz que intenta identificar destrezas genéricas de los docentes: se argumenta que la actual investigación se centraba en las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de disciplinas específicas y que la actual investigación sobre la enseñanza, se centra principalmente en los requisitos específicos para comprender una disciplina. Las investigaciones actuales, tratan de comprender la complejidad de la enseñanza de las diferentes disciplinas académicas que configuran los currículos (García, 1992).

Bajo esta visión, Ball, Hill & Bass (2005), proponen un modelo del Conocimiento del profesor, conocido como Conocimiento Matemático para la Enseñanza: Mathematical Knowledge for Teaching-MKT: nombre que surge de los estudios referentes a la práctica docente en el ámbito matemático y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores. Ball et at. (2001, 2005, 2008) estudian la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar y cómo este ayuda en el trabajo de la enseñanza, estableciendo una base práctica basada en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza: MKT, que definen como una clase de conocimiento profesional de las matemáticas. El MKT hace referencia al conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos (Hill, Ball & Schilling, 2008).

Este conocimiento MKT es específico de los profesores e implica analizar los errores de los alumnos, examinar las estrategias utilizadas para la resolución de una tarea matemática, explicar a los alumnos cuando no comprenden, saber responder a cuestiones matemáticas, evaluar las cualidades de los materiales de enseñanza, disponer de representaciones, de recursos para explicar un concepto y explicitar argumentos sólidos para evidenciar que un procedimiento funciona. De esta forma, las tareas del profesor exigirán no solo el conocimiento de la materia que enseña, sino también un conocimiento que es específico para desarrollar su labor docente (Rojas, Flores & Carrillo, 2013). El equipo de trabajo de Ball, caracterizó el MKT, basándose en los componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman (1987), distinguiendo dos categorías: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico (Pedagógico) del Contenido.

Bajo esta perspectiva, en la presente tesis doctoral se profundiza en los conocimientos que necesitan los profesores universitarios, de forma que la enseñanza se dirija a la comprensión, en el caso específico de la estructura algebraica Grupo por parte de los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos). Así , en el marco teórico se analiza el modelo que orienta la investigación: modelo teórico desarrollado en el EOS (Godino, Batanero & Font, 2007), denominado el Modelo del Conocimiento DidácticoMatemático del profesor: CDM (Godino, 2009). En este modelo se consideran seis categorías o componentes del Conocimiento del Profesor (del contenido didáctico y matemático): Epistémica, Cognitiva, Afectiva, Mediacional, Interaccional y Ecológica.

1.3. Áreas problemáticas

1.3.1. Problemática en la comprensión de nociones de Teoría de Grupos

En algunas universidades la asignatura de Teoría de Grupos, es el primer curso donde los estudiantes deben ir más allá de aprender patrones de comportamiento imitativos repitiendo la solución de un gran número de variaciones, en un pequeño número de problemas. En estos cursos, los estudiantes se enfrentan con conceptos abstractos, se trabajan principios matemáticos importantes y se aprende a escribir y a comprender las pruebas matemáticas. Aunque hay estudios formales,en esta dirección, muchos estudiantes afirman que después de tomar el curso, ellos tienden a desactivar las matemáticas abstractas y como un porcentaje significativo de estudiantes de Álgebra Abstracta: Teoría de Grupos, son profesores en formación, es importante desarrollar estrategias didácticas que permitan mejorar la actitud de los profesores de matemáticas en formación hacia la abstracción (Dubinsky, Leron, Deuterman & Zazkis, 1994).

En las universidades aparece el interrogante para los Formadores de Profesores de Matemáticas sobre ¿Cómo conseguir que el estudiante comprenda adecuadamente los conceptos de Teoría de Grupos? esto es, que los pueda aplicar en los diferentes contextos donde ellos aparecen. Esta pregunta, se relaciona con el cuestionamiento de Freudenthal (1983) sobre ¿Qué estrategias se necesitan para que los estudiantes logren la constitución de los objetos matemáticos? ¿Se pueden establecer criterios que determinen si un objeto matemático ha sido constituido o no por el estudiante de formación matemática? En torno a esta problemática de la comprensión y el tratamiento de los objetos algebraicos específicamente del objeto Grupo, existen estudios realizados por Dubinsky et al. (1994), junto con los estudios de Hazzan (1996) y los de Freudenthal (1983).

1.3.2. Problemática con el significado de los objetos matemáticos

Esta problemática se relaciona con el significado que le asignan los estudiantes de formación matemática al objeto Grupo; significado que según la propuesta de la Fenomenología de Freudenthal (1983) surge del conocimiento de los fenómenos (situaciones-problemas) que son organizados por los conceptos matemáticos.

Una dificultad que se presenta en la enseñanza de la estructura Grupo, la plantea en primer lugar Freudenthal (1983): para concebir un objeto matemático, se enseña o se intenta enseñar el concepto: para concebir grupo, espacio vectorial y relaciones, se tratan de inculcar los conceptos; es decir, se intentan materializar los conceptos: este hecho lleva a una falta de significado de los objetos matemáticos y por tanto, a una falta de comprensión de los mismos. Bajo esta visión, Freudenthal propone otra manera de afrontar la Educación Matemática desde la Fenomenología Didáctica: plantea que se debe preparar el enfoque contrario, es decir, se debe iniciar con los fenómenos (situaciones-problema, en términos del enfoque EOS) que van a ser organizados por el objeto y desde este punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Es decir, el profesor debe conocer aquellos fenómenos que sirven para organizar cada uno de los objetos matemáticos.

1.3.3. Problemáticas relacionadas con las propuestas didácticas de álgebra abstracta

Esta problemática se relaciona con la planeación de los procesos de enseñanza que en algunos casos se centra solo en el contenido matemático, descuidando otros componentes igualmente importantes, denominados por Rico (1997) como los Organizadores del Currículo: al futuro profesor se le da el conocimiento del contenido matemático, pero no el conocimiento didáctico respecto a ese contenido específico. Dentro de los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997), se encuentra la Fenomenología como parte del análisis de contenido que realiza el profesor para el diseño, evaluación e implementación de los procesos de instrucción.

De esta problemática surge el interrogante referente al análisis didáctico que realizan los formadores de profesores en el proceso de instrucción en cuanto a ¿Qué conocimiento didáctico-matemático del objeto Grupo, se debe potenciar en el estudiante de formación matemática, que le permita en el futuro, desarrollar eficazmente su práctica docente y así, facilitar el aprendizaje de sus estudiantes?

1.4. Formulación del problema de investigación

En las secciones anteriores, se establece la necesidad de realizar un estudio que permita en primer lugar, describir el significado global del objeto matemático Grupo: estudio sistemático de carácter fenomenológico, histórico y epistemológico, importante para la planificación de los procesos de instrucción. El estudio de los significados de la estructura grupo, corresponde a uno de los elementos necesarios para evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática al final de su proceso de formación. Esta exploración es importante; ya que, permite contrastar el conocimiento que debe adquirir el estudiante en su formación inicial con el conocimiento real que posee sobre el objeto matemático. En este sentido, la presente investigación presenta aportes importantes tanto para las administraciones educativas, como para los programas de formación matemática y especialmente, pretende la búsqueda de mejoras en la conformación de los planes de estudio de los estudiantes de formación matemática en cuanto al desempeño profesional para la enseñanza universitaria.

Los interrogantes planteados, se concretan en la pregunta:

¿Qué conocimiento matemático básico, necesitan los estudiantes de formación matemática, para una enseñanza idónea del objeto Grupo?

La pregunta, plantea la caracterización de la dimensión epistémica del Conocimiento Didáctico Matemático del futuro profesor, que involucra: un conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido, como bases para la potenciación del conocimiento especializado del futuro profesor: conocimientos que proporcionan las herramientas para la labor de la enseñanza idónea del objeto matemático. Estas componentes del Conocimiento del futuro profesor, se definen en el enfoque EOS e integran la componente epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Bajo estos supuestos, el presente estudio se centra en la caracterización de la dimensión epistémica, como una de las componentes del conocimiento del profesor: componente que le permitirá gestionar adecuadamente los conocimientos matemáticos y didácticos sobre el objeto Grupo en sus estudiantes.

La faceta epistémica en el modelo del CDM, hace referencia al conocimiento sobre el contenido matemático (Pino-Fan, 2013), es decir, al conocimiento de los significados parciales del objeto matemático de los cuales emerge el significado global de dicho objeto; un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas cada una de las cuales lleva asociado un significado parcial del objeto (Font & Godino, 2006). Estos significados parciales determinan el significado global del objeto matemático en diferentes grados de generalidad. Las configuraciones epistémicas se definen en el marco teórico y corresponden a las relaciones entre los objetos matemáticos primarios (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) que forman redes de objetos que son las que intervienen y emergen de cada uno de los sistemas de prácticas matemáticas.

La caracterización de la faceta epistémica del CDM del profesor para la enseñanza del objeto Grupo, tiene implicaciones en los programas de formación inicial de profesores, ya que ella permite explorar por una parte, los conocimientos didácticos y matemáticos que deben tener los estudiantes de formación matemática y además, confrontarlos con los conocimientos que efectivamente tienen (significados personales); ya que, lo ideal en la formación inicial de profesores, es la búsqueda de un acoplamiento entre los conocimientos que efectivamente tienen los estudiantes (significados personales) respecto a los conocimientos de referencia (significados institucionales) (Pino-Fan, 2013, p. 345) (ver, Figura 1.5).

Se describen a continuación, los objetivos que permitieron el estudio de cada una de las categorías del CDM de los estudiantes de formación matemática.

1.5. Objetivos

Se definen los objetivos específicos dando respuesta a preguntas concretas de investigación, resultado del análisis a las problemáticas presentadas. Estos objetivos describen el camino, para la consecución del objetivo general y permiten dar respuesta a la pregunta de investigación formulada.

1.5.1. Objetivo general

Evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática en su dimensión epistémica, para determinar si se ha generado un conocimiento común y un conocimiento ampliado que sean la base de un conocimiento especializado, necesario para la enseñanza idónea del objeto Grupo.

1.5.2. Objetivos específicos

Este objetivo general se descompone en los siguientes objetivos específicos que marcan la ruta para el logro del objetivo general propuesto y dan respuesta a preguntas concretas de investigación relacionadas con el objetivo general.

P1. ¿Cuál es el significado global del objeto matemático Grupo?

O1. Determinar los significados parciales del objeto Grupo.

O2. Reconstruir el significado global de referencia del objeto grupo.

P2. ¿Los significados del objeto Grupo, pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio son representativos del significado global de dicho objeto?

O3. Caracterizar el significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto sugeridos para los programas de la asignatura: Teoría de Grupos (4 libros).

O4. Caracterizar el significado de la noción Grupo, pretendido por los programas de la asignatura de Teoría de Grupos de los estudiantes de formación matemática.

P3. ¿Cómo diseñar un instrumento que permita evaluar la dimensión epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática, integrada por un conocimiento común, un conocimiento ampliado como bases de un conocimiento especializado necesario para una enseñanza idónea del objeto Grupo?

O5. Seleccionar las tareas que permitan evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado y el conocimiento especializado del estudiante de formación matemática.

O6. Diseñar e implementar un instrumento piloto que permita una primera exploración de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo.

O7. Implementar el cuestionario definitivo *CDM-Grupo* para evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado bases del conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática.

08. Analizar las categorías del CDM: conocimiento común, conocimiento ampliado y conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática.

Se presentan las razones que justifican la búsqueda de una respuesta a la pregunta de investigación y al desarrollo de los objetivos específicos.

1.6. Justificación

Desde hace aproximadamente treinta años, el estudio de los conocimientos que un profesor debe tener para dar una enseñanza idónea en tópicos concretos de la matemática, ha tomado cada vez mayor interés, tanto por la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática interesados en la formación de profesores, como por las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los estudiantes, dependen esencialmente de los conocimientos y habilidades de sus profesores (Pino-Fan, 2013). Una de las problemáticas que ha generado gran interés en esta línea de formación de profesores es la identificación del CDM requerido por los futuros profesores (estudiantes en formación inicial) para desarrollar eficientemente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Desde esta perspectiva, gran cantidad de investigaciones se dirigen a identificar los componentes del complejo de conocimientos que el profesor debe tener para desarrollar eficientemente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes: en esta línea de investigación se encuentran los trabajos de Shulman(1986, 1987); Fennema & Franke (1992) y Ball (2000), que presentan una visión multifacética sobre la construcción de los conocimientos requeridos para la enseñanza (Pino-Fan, 2013). Además, se encuentran las investigaciones de Ball, Lubienski & Mewborn (2001); Llinares & Krainer (2006); Ponte & Chapman (2006); Philipp (2007); Sowder (2007); Ball, Thames & Phelps (2008); Hill, Ball & Schilling (2008); Rowland, Huckstep & Thawaites (2008); Sullivan & Wood (2008) y Godino (2009).

Las investigaciones anteriores, evidencian que no existe un acuerdo sobre un marco teórico que permita describir los componentes del conocimiento de los profesores de matemática (Rowland & Ruthven, 2011). De igual forma, pocos estudios se orientan al diseño de instrumentos que permitan explorar y caracterizar el CDM del estudiante de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo y de aspectos tales como: el significado del objeto matemático como elemento necesario para explorar y caracterizar el CDM del profesor universitario; la determinación de criterios encaminados al diseño de metodologías didácticas para desarrollar y potenciar el conocimiento especializado sobre el objeto; la determinación de criterios para evaluar el conocimiento del profesor y el estudio de los programas de formación matemática: estudios que den respuesta a las preguntas ¿Cuál es el conocimiento real de los estudiantes de formación matemática sobre la estructura algebraica Grupo?¿Cuál es el conocimiento que deberían tener los estudiantes de formación matemática sobre la estructura matemática? ¿Qué significado de la estructura algebraica pretenden los libros de textos y programas académicos?

Respecto al modelo de Ball et al. (2000; 2008), se encuentran cuestiones abiertas como por ejemplo ¿cómo se evalúan o miden los diversos componentes del MKT?, ¿cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o a desarrollar los diferentes componentes del MKT?, ¿cómo se relacionan entre sí los diversos componentes del MKT? (Godino, 2009).

Según lo expuesto, en el presente estudio se da respuesta a algunos de los interrogantes planteados y se pretende avanzar en la determinación de los componentes del Conocimiento del Profesor para la enseñanza idónea del objeto Grupo, considerado como un objeto complejo y problemático en la enseñanza universitaria. El Álgebra Abstracta, específicamente, la Teoría de Grupos, presenta serios problemas educativos: facultades de matemáticas y estudiantes, consideran que esta es una de las asignaturas de pregrado que parece dar a los estudiantes una gran cantidad de dificultades en ambos sentidos: en cuanto al contenido y con el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas abstractas (Hart, 1994; Selden & Selden, 1987).

Bajo estos argumentos, se justifica el desarrollo de la presente investigación en parte, del análisis realizado a un gran número de investigaciones en el tema, que suscitó el interés por relacionar el estudio del objeto Grupo y el CDM del profesor universitario. Se tiene presente, que el estudio del CDM de los profesores en formación inicial, es una línea de investigación en Didáctica de la Matemática, que se ha ido incrementando como lo muestra el gran número de investigaciones en esta dirección. Por otro lado, existen investigaciones centradas en el objeto Grupo, pero, relacionadas con la comprensión por parte de los estudiantes; estas investigaciones proporcionan información respecto a las dificultades de los estudiantes con el objeto matemático; pero, en las investigaciones pocos son los estudios epistemológicos, históricos y fenomenológicos que se realizan sobre el objeto matemático. Así, la presente investigación surge del interés de relacionar estos dos campos al evidenciar la existencia de unos antecedentes a nivel internacional y nacional que justifican la importancia de realizar más investigaciones que permitan describir el complejo de componentes del Conocimiento del Profesor para el caso universitario, y específicamente investigaciones relacionadas con el objeto Grupo.

Se analiza el marco internacional y el local, para justificar la importancia y relevancia del presente estudio, centrado en la evaluación del CDM de los estudiantes de formación matemática relacionados con el objeto Grupo.

1.6.1. Contexto internacional

El objeto Grupo del Álgebra Abstracta ha sido investigado desde diferentes aproximaciones teóricas: a) Cuestiones de índole cognitiva: concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos, tipos de errores, dificultades (Kieran, 1992; Dubinsky & Leron, 1994; Nicholson, 1993; Dubinsky, Leron, Dauterman & Zazkis, 1994; Leron, Hazzan & Zazkis, 1995; Dubinsky & Leron, 1994; Hazzan & Leron, 1996; Asiala, Dubinsky et al., 1997; Dubinsky, 1997; Brown, De Vries et al., 1997; Hazzan, 1999) e b) Investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de nociones de Teoría de Grupos (Hoch, 2003; Novotná, Stehlíková & Hoch, 2006; Simpson & Stehlíková, 2006; Novotná & Hoch, 2008). Los anteriores estudios evidencian la existencia de una problemática a nivel internacional sobre dificultades tanto en el aprendizaje como en la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos: la enseñanza y el aprendizaje de objetos de la matemática específicamente del objeto Grupo han presentado dificultades a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, en varios aspectos, como se evidencia en los antecedentes y en las problemáticas presentadas.

La formación didáctica y matemática de los profesores en formación, es un campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas, hecho que se evidencia en estudios (Bishop et al., 2003; English et al., 2002; Llinares & Krainer, 2006; Hill et al., 2007; Franke et al., 2007; Sowder, 2007; Gómez, 2007) y en revistas como el Journal of Mathematics Teacher Education, de importancia para las administraciones educativas, los formadores de profesores y para los profesores en formación. Además, se encuentra un marco teórico de investigación didáctica el EOS, bajo el cual se han realizado estudios enfocados a explorar el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor en objetos matemáticos y estudios que implican Análisis Didácticos de procesos de instrucción y su valoración (Font, Planas & Godino, 2010; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Pino-Fan, Godino & Font, 2011; Pochulu & Font, 2011), pero hasta el momento el objeto Grupo no se ha estudiado en esta dirección y bajo el enfoque EOS.

1.6.2. Contexto nacional

A nivel nacional, se justifica el estudio del CDM del estudiante de formación matemática sobre el objeto Grupo, dada la existencia de los programas de formación matemática (Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas) donde los egresados pueden desempeñar la labor de la docencia universitaria. Existe el cuestionamiento acerca de ¿cuáles son los conocimientos sobre el objeto Grupo que poseen los estudiantes de formación matemática, para la labor docente? En esta dirección, a nivel nacional existe una normatividad en Educación Superior que establece que tanto los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, como los de Matemáticas pueden ser docentes universitarios; hecho que justifica el presente estudio enfocado en los conocimientos de los estudiantes en las áreas de su desempeño.

La normatividad para los programas de Licenciatura en Matemáticas, define que para el Licenciado en Matemáticas su área de desempeño es la Matemática y para los estudiantes de Matemáticas establece la Teoría de Grupos como uno de los contenidos mínimos del programa; así, de la normatividad nacional se tiene que el estudiante de formación matemática al final de su proceso de estudio debe tener unos conocimientos básicos sobre el objeto Grupo y de ahí se deriva el hecho de pretender explorar el conocimiento CDM, que se ha potenciado y/o desarrollado en su proceso de formación.

En esta dirección, los docentes de Teoría de Grupos de las universidades, se cuestionaron sobre ¿cómo conseguir que el estudiante de formación matemática comprenda adecuadamente los conceptos de Teoría de Grupos?

1.7. Marco teórico

Con el fin de explorar el conocimiento del estudiante de formación matemática sobre el contenido matemático, centrado en el objeto Grupo, se divide el apartado en tres secciones: una primera parte que hace referencia a los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado-PMA de los estudiantes. Una segunda parte, donde se presentan las nociones desarrolladas en la perspectiva teórica EOS las cuales sirven como herramientas teóricas para el desarrollo de la investigación centrada en la exploración de la dimensión epistémica del conocimiento Didáctico-Matemático del estudiante de formación matemática sobre el objeto Grupo y finalmente, se presentan los modelos que estudian el Conocimiento del profesor y que integran el modelo del CDM: modelo que se define en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática y que permite analizar la faceta epistémica de este CDM, a través de las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes cuando solucionan problemas relacionados con el objeto Grupo.

1.7.1. Pensamiento matemático avanzado

El grupo de trabajo en Pensamiento Matemático Avanzado, surge en 1985, en la sociedad Psychology of Mathematics Education con el objetivo de profundizar en los procesos cognitivos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1991; Tall 1991). Alrededor de los años 80, el interés en Didáctica de la Matemática se desplazó hacia la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos, reorientando la preocupación hacia las competencias y habilidades. Las investigaciones evolucionaron y empezaron a ocuparse también de tópicos que por su naturaleza y complejidad, se situaban dentro de la llamada matemática escolar superior. Entre estos tópicos, se encuentran: límite, derivada, integral y la estructura Grupo. Para trabajar con estos objetos se admitió que era necesario poner en juego procesos de abstracción y generalización, los cuales juegan un papel fundamental en el pensamiento matemático avanzado (Sánchez, 2012).

Para Dreyfus (1991), la abstracción es el proceso de construcción de objetos mentales a partir de objetos matemáticos y la generalización corresponde a derivar o inducir desde casos particulares para identificar generalidades y expandir los dominios de validez. Por su parte Tall (1991) a partir de los aspectos cognitivos que observó, distinguió diferentes procesos de generalización: (a) expansiva (generalización en la cual el estudiante extiende su estructura cognitiva pero sin producir cambios en las ideas corrientes); (b) reconstructiva (generalización en la cual se requiere una reconstrucción de la estructura cognitiva) y (c) disyuntiva (generalización en la que los estudiantes son capaces ahora de operar en un amplio rango de ejemplos y no parece ser muy duradera) (Sánchez, 2012).

Tall & Vinner (1981), proponen una teoría cognitiva sobre la forma en la que los alumnos aprenden los conceptos matemáticos. Para muchos estudiantes, una de las dificultades en la enseñanza de las matemáticas es su alto grado de abstracción. Aunque la abstracción y la generalización no pueden ser consideradas características exclusivas del pensamiento matemático avanzado, parece haber cierto acuerdo en que éstas, junto con la definición, la demostración y la formalización, adquieren mayor importancia en el pensamiento matemático avanzado (Sánchez, 2012).

El paso del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA) exige una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva con la cual se pasa de "describir" a "definir" y por otra parte, de "convencer" a "demostrar". Para Tall (1991) los alumnos que tienen entre 16 y 20 años están intelectualmente preparados para dicha transición. Tall (1991), también expone algunas diferencias entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado, pero advierte que no es fácil dar una explicación precisa o satisfactoria del paso del pensamiento matemático elemental al avanzado (Sánchez, 2012).

Se proponen diferencias entre el PME y el PMA: Robert & Schwarzenberger (1991), establecen que, en el pensamiento matemático avanzado: (a) los alumnos tienen que aprender más conceptos en menos tiempo y además, éstos son presentados de manera formal; (b) los conceptos enseñados llevan asociados procesos (generalización, abstracción y formalización) que pueden entrar en conflicto con el conocimiento anterior: el que se tenía sobre el concepto y finalmente, (c) los alumnos se enfrentan a una amplia gama de problemas que nacen de una variedad de contextos (Sánchez, 2012).

Existe, una distinción entre el PME y PMA, al considerar que el PMA es un pensamiento que requiere razonamiento deductivo y riguroso acerca de nociones matemáticas, que no es enteramente accesible a través de los cinco sentidos (p. 17-18): un concepto se considera como parte del pensamiento matemático avanzado según los aspectos que involucre. Por su parte, Edwards, Dubinsky & McDonald (2005), no creen que se pueda delimitar exactamente una línea divisoria entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado, consideran que el PMA forma parte de un proceso continuo de pensamiento que trasciende la experiencia procedimental o las intuiciones del pensamiento matemático elemental, sin ignorarlas ni abandonarlas. Se acepta que el clasificar un concepto como de PMA depende del contexto en el que se está trabajando (Sánchez, 2012).

Las formas de pensamiento se separan de las formas de comprensión; por un lado, los significados particulares que los estudiantes dan a un término, sentencia o texto, la resolución de un problema o la justificación que usan para validar o refutar una afirmación, son formas de comprensión. Y de otro lado, las teorías generales implícitas o explícitas que subyacen a tales acciones son formas de pensamiento (Harel & Sowder, 2005). Así, se define que un pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición para una forma de pensamiento por un individuo es determinado por la amplitud con la cual ha superado estos obstáculos (pp. 34-35).

Esta línea de investigación en Pensamiento Matemático Avanzado, surge en España, en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona (Azcárate, 1996) y se amplia luego a otras universidades; corresponde a una línea de investigación que tiene entre sus objetivos profundizar en el estudio de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas y adquiere una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, son procesos del PMA, que tienen una componente psicológica.

En general, el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) se relaciona con los procesos mentales propios de las Matemáticas Superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en el ámbito universitario: según Azcárate & Camacho (2003, p. 136141), este tipo de pensamiento por su naturaleza posee unos procesos característicos entre los que se destaca: el nivel de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de los conceptos y la demostración. En esta dirección, lo que diferencia a las Matemáticas elementales de las avanzadas es la complejidad de los contenidos y la forma de controlar esta complejidad: entre los procesos más potentes para esto, se encuentran los que permiten dicho control, en particular, la representación y la abstracción: Azcárate (1996) establecen que en las matemáticas elementales los objetos se describen mientras que en las avanzadas estos objetos matemáticos se definen (Aldana, 2011).

1.7.2. Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico, se constituye como una de las líneas de estudio e investigación en Didáctica de las Matemáticas, que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos. Se define el pensamiento algebraico, como aquel que aparece inmerso en muchos de los problemas del pensamiento matemático: la cognición es intrínsecamente contextual mientras que el lenguaje algebraico es intrínsecamente abstracto.

El pensamiento algebraico tiene presencia como contenido matemático en el sistema educativo, desde la secundaria hasta la universidad. En secundaria se ha investigado en las letras con significado algebraico, en las variables, en las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales. Las investigaciones en Pensamiento Algebraico, tienen enfoques desde la psicología cognitiva, el lenguaje, las calculadoras y computadores, la historia y la epistemología, la enseñanza y el desarrollo curricular y por último, desde la perspectiva de las situaciones didácticas (Godino, 2012).

La enseñanza del álgebra aparece en todo el currículo de las matemáticas, en educación media y básica (secundaria). Existe un espacio importante en el cual, los estudiantes desarrollan la capacidad de abstracción y generalización; procesos propios del álgebra, presentándose bajo este enfoque al álgebra como una herramienta útil en la resolución de problemas matemáticos, tanto del bachillerato como los que surgen en las asignaturas relacionadas con las matemáticas avanzadas de los programas universitarios.

En esta dirección, el razonamiento algebraico, se pone de manifiesto en las tareas relacionadas con aritmética, medida, geometría y análisis de datos y en diversos grados de algebrización. En la práctica algebraica intervienen entre otros procesos la generalización y la simbolización y existen objetos denominados algebraicos, que corresponden a: relaciones binarias, las operaciones que se efectúan con los elementos de un conjunto; las funciones entre conjuntos y las estructuras en el sentido de un conjunto y una operación binaria definida en él, que cumple ciertas propiedades. Así, un estudiante puede dar respuesta a un problema utilizando solo aritmética o utilizando álgebra y aritmética. La presencia de estos objetos y de los procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva. En general, el trabajo con actividades algebraicas busca el desarrollo del pensamiento algebraico, a través del trabajo con estructuras. Un enfoque basado en aspectos estructurales, necesita además de la descripción y fundamentación, la determinación de medios para abordar los problemas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje en relación con las tareas y competencias algebraicas; además de acciones en la formación de docentes (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

Las siguientes actividades matemáticas se consideran algebraicas; esto es, el Álgebra tiene los siguientes rasgos característicos:

- El proceso de Generalización, es decir, el paso de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos a las clases o tipos de tales objetos. Por ejemplo: llegar al concepto de Grupo a partir del análisis de conjuntos y de sus propiedades. Las generalizaciones empíricas en esta dirección se basan en el reconocimiento de características o cualidades comunes a los objetos o situaciones y las generalizaciones teóricas resultan de la identificación de invariantes. Para Dörfler, generalizar significa construir variables (1991, p. 84).

- Los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización como las de inde-terminación; esto es, el uso de incógnitas y ecuaciones que permiten modelizar situaciones.
- Las nociones de relación, función y estructura.
- El estudio de relaciones de equivalencia y sus propiedades.
- El estudio de operaciones entre los elementos de conjuntos numéricos o de otro tipo ylas propiedades de las estructuras que se generan de dichos conjuntos.

En relación con las actividades algebraicas, estas pueden ser de tipo Generacional, transformacional y Global o de meta nivel: las actividades de tipo Generacional, implican la formación de expresiones y ecuaciones que se consideran como objetos del álgebra; por ejemplo, las ecuaciones en una incógnita para representar una situación problema: expresiones de generalidad que surgen de patrones geométricos o secuencias numéricas; expresiones de reglas que gobiernan relaciones numéricas (Kieran, 2007).

Entre las actividades de tipo Transformacional que son las actividades basadas en reglas, se encuentran: agrupar términos semejantes, factorizar, desarrollar, sustituir una expresión por otra, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, simplificar expresiones, sustituir valores numéricos en expresiones, trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes. Estas actividades tienen como objetivo los cambios en la forma simbólica conservando la equivalencia, no implica esto que sean actividades rutinarias; ya que, su justificación se basa en axiomas y propiedades de las estructuras correspondientes.

La categoría Global o de meta nivel hace referencia al uso de procesos matemáticos más generales. Son actividades no exclusivas del álgebra donde ésta se usa como herramienta. Por ejemplo, se tiene la resolución de problemas, la modelización, el estudio de patrones generalizables, la justificación y la prueba, la formulación de predicciones y conjeturas, el estudio del cambio en situaciones funcionales y la búsqueda de relaciones o estructuras. Éstas son actividades que se pueden realizar sin usar expresiones simbólicoliterales (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

La caracterización del pensamiento algebraico no implica solo ver lo general en lo particular, se debe de expresar algebraicamente (Kieran, 2007). Esta expresión es una condición para la manipulación de las representaciones simbólicas que producen otras equivalentes y que permiten la resolución de problemas. Algunos investigadores proponen separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico debido a que se podría realizarse una manipulación de expresiones sin sentido y además, se debe tener presente que el objetivo que se busca es el trabajo con las estructuras, en lugar de procesos de cálculo numérico.

En esta dirección, el simbolismo algebraico viene a ser el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, es el lenguaje que permite expresar la generalidad (Mason, 1996). Sin embargo, hay estudiantes que pueden expresarse verbalmente con cierto grado de generalidad y no pueden expresar la notación algebraica con facilidad; la generalidad es esencial para el álgebra, pero no todas las actividades algebraicas involucran este proceso (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

El proceso por el cual se da la transición de la aritmética al álgebra cruza por una zona transicional en la que se admite que las tareas matemáticas pueden exhibir objetos y procesos algebraicos con una presencia gradual, pero creciente. La actividad algebraica tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas intervienen elementos de diversas naturalezas como los medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. Entonces la caracterización de una práctica y del pensamiento que la acompaña, como de la índole algebraica, se hace en términos de cierto tipo de objetos y de procesos que intervienen en dichas prácticas. Los objetos y los procesos involucrados en las prácticas se interrelacionan formando configuraciones (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

Bajo esta perspectiva, la práctica matemática, corresponde a toda actuación o expresión, verbal o gráfica, que realiza una persona o las personas de una institución para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Los objetos primarios que sirven para indagar sobre las prácticas algebraicas caracterizados en el enfoque EOS, corresponden a: el lenguaje, los argumentos, los procedimientos, los conceptos-definiciones, los problemas-tareas y las propiedades-proposiciones. Una práctica se considera algebraica si los siguientes objetos primarios algebraicos se hacen presentes:

- Relaciones binarias que pueden ser de equivalencia o de orden, junto con sus respectivas propiedades.

- Las operaciones y sus propiedades, realizadas en un conjunto de objetos; sin embargo,a la aplicación de propiedades tales como la asociativa, la conmutativa, la distributiva, la existencia de un elemento neutro y de los inversos se le denomina: cálculo algebraico, además, se encuentran los conceptos de: ecuación, transposición de términos, factorización, desarrollo de términos.

- Funciones, sus tipos, operaciones y propiedades; funciones proposicionales (verdade-ro/falso); variables, fórmulas, parámetros.

- Las estructuras y sus tipos como los semigrupos, monoides, semi-módulos, grupos, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial y las propias del álgebra superior o abstracta.

Estos objetos mencionados se expresan mediante diversos lenguajes (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012). En la escuela se usa el lenguaje ordinario o cotidiano, gráfico, tabular, incluso se puede considerar el gestual. Un tipo de actividad algebraica primaria es la traducción o transformación entre distintos lenguajes. Las prácticas algebraicas y los objetos que intervienen en las mismas, se pueden analizar desde diversos puntos de vista, relativos al contexto donde se definen, caracterizan y realizan: éstos puntos de vista, se pueden presentar a través de las siguientes dualidades:

- Extensivo-Intensivo; esto es, lo particular y lo general y los procesos de particularización-generalización. Por ejemplo, la función $y = 3x$ corresponde a una función particular; es decir, un objeto extensivo, pero esta función pertenece a la clase de funciones de la forma $y = mx$ que es un objeto intensivo.

- Unitario-Sistémico; esta dualidad describe los procesos mediante los cuales una entidad compuesta o sistémica; es decir, un intensivo pasa a ser visto como una entidad unitaria que puede participar en otros procesos de generalización dando lugar a otros intensivos de orden superior.

- Ostensivo-no Ostensivo; aporta una nueva comprensión de los procesos de generalización de los objetos intensivos resultantes: la ostensión (que se ve, se comprueba con facilidad, visible), hace referencia a los recursos perceptivos de expresión que pueden ser simbólicos o de otro tipo. Por lo general, los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones), se consideran ideales o mentales, es decir, no ostensivos, pero su comunicación se hace con objetos perceptibles (palabras, símbolos y gestos), esto es, con objetos ostensivos.

- Personal-Institucional: se relaciona con los significados personales e institucionales.

- Expresión-Contenido: un objeto matemático se usa como expresión en algunos casos, pero luego puede pasar a ser el contenido para otro objeto (significado - significante).

Los objetos y procesos aportan criterios para definir las siguientes Configuraciones Algebraicas, las cuales permiten distinguir diferentes tipos y niveles de algebrización de la actividad matemática (Godino et al., 2012):

- Configuración de tipo relacional, en las tareas matemáticas que ponen en juego; relaciones binarias; Configuración operacional para operaciones; Configuración funcional, para las tareas con funciones y Configuración estructural, en el trabajo con estructuras.

- Configuración transformacional, presente en las tareas que buscan la transformación entre diferentes modos de expresión; especialmente, entre el lenguaje natural, icónico y gestual al lenguaje alfanumérico.
- Se reconoce cierto nivel de abstracción o generalización en una práctica por la presencia de objetos intensivos.

Según los razonamientos expuestos, se establece que el álgebra tiene presencia en las matemáticas escolares; ya que, en actividades como el conteo de una colección de objetos, realizada por niños de preescolar, hay procesos de generalización y conceptualización. El razonamiento algebraico se inicia con las primeras actividades de cuantificación de cantidades mediante los procesos de simbolización numérica. Los símbolos numéricos se originan desde los primeros niveles, como un sistema formado por elementos relacionales mediante operaciones; estas operaciones que inicialmente hacen referencia a acciones sobre cantidades, pasan a ser operaciones sobre los propios símbolos, pero están relacionadas con un sistema de propiedades estructurales; por ejemplo, los números naturales con la suma, tienen la estructura de monoide. Se inicia el trabajo con estructuras, con un primer ejemplo de estructura algebraica: los semigrupos aditivos y multiplicativos de los números naturales.

Los niños como tal no conocen el nombre de las estructuras, pero en su actividad con las operaciones aritméticas que son funciones, se trabajan los conceptos y teoremas propios de las estructuras algebraicas mencionadas. El razonamiento algebraico surge entonces, de un primer proceso de generalización, cuando de una cantidad concreta por ejemplo, del número de lápices, se pasa al símbolo que representa la cantidad de una magnitud cualquiera, como cuadernos, personas, ovejas. Este sistema de símbolos emergentes de las prácticas de cuantificación se encuentra regulado por los axiomas de Peano y se convierte para el estudiante de primaria en un sistema numérico natural (Godino et al., 2012).

En esta dirección, la aritmética es la parte del álgebra que trabaja con ciertos ejemplos particulares y es el de los conjuntos numéricos que posteriormente, llegarán a ser ejemplos de otros ejemplos más generales. Un nivel más avanzado de Pensamiento Algebraico, se pone de manifiesto en las actividades que involucran las relaciones binarias y las funciones: primero, entre cantidades y luego entre símbolos estructurados. La igualdad es otro objeto emergente de las prácticas matemáticas que caracteriza al Pensamiento Algebraico; ya que, la igualdad es un primer ejemplo de relación de equivalencia entre números. A partir de esta relación de equivalencia aparecen las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes que son los objetos característicos del álgebra; además de las correspondencias o funciones que llevan a la identificación de isomorfismos entre estructuras (Godino et al., 2012).

Las variables que caracterizan el trabajo algebraico (Godino et al., 2012) y el uso del lenguaje alfanumérico, junto con objetos algebraicos de tipo relacional, operacional y estructural caracterizan los niveles más avanzados de algebrización. Cuando se reconoce la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática, en alguno de sus niveles de generalidad se tiene cierto grado de algebrización en dicha práctica, tanto si el intensivo se expresa de forma alfanumérica como si no. Si se expresa en forma alfanumérica se está ante una práctica algebraica y de lo contrario, la práctica se puede considerar como proto-algebraica (pre-algebraica). Hay una amplia zona donde los estudiantes comienzan a pensar algebraicamente aunque no hagan uso de signos alfanuméricos; esta zona es la zona de emergencia del Pensamiento Algebraico y es la zona donde el profesor debe presentar actividades en la búsqueda de una continuidad en el desarrollo del Pensamiento Algebraico, ya que este pensamiento se da en forma continua.

La diferencia entre el Pensamiento Aritmético y el Algebraico, es el trabajo con cantidades indeterminadas de forma analítica, es decir, se consideran cantidades indeterminadas como incógnitas o variables y se opera con ellas como se hace con los números. Se busca el desarrollo del pensamiento matemático a través de todos los niveles educativos, en especial, se plantea el conocimiento que debe tener el profesor, para ayudar a los estudiantes en la búsqueda del desarrollo del Pensamiento Algebraico, presente en la mayoría de actividades matemáticas (Godino et al., 2012).

El desarrollo del Pensamiento Algebraico, se presenta desde la educación primaria hasta la educación secundaria. Es de importancia el trabajo que se realiza con los sistemas numéricos; es decir, el trabajo desde la aritmética: en esta actividad se tienen objetos denominados algebraicos y por tanto, estas actividades se deben direccionar al trabajo con estructuras para lograr que el paso de la aritmética al trabajo con estructuras, no sea un conflicto para el estudiante al llegar en la educación media y la básica (secundaria) a la manipulación con otros objetos algebraicos, al igual que con el trabajo en las matemáticas universitarias (Godino et al., 2012)

Esta clarificación de la naturaleza de las prácticas matemáticas, en sus diversas áreas de contenido, junto con los objetos y procesos matemáticos, es de interés para la investigación en Didáctica de la Matemática al tener presente que la educación busca mejorar la enseñanza y el aprendizaje y que para esto se propone como un paso preliminar comprender en profundidad los conocimientos y compentencias que se deben desarrollar en los estudiantes.

Así, se considera el Álgebra como la rama de las matemáticas que sirve de herramienta a otros campos de la matemática: se constituye como área de investigación en sí misma y especialmente la investigación didáctica la reconoce como un área conflictiva para los estudiantes (Godino et al., 2012).

1.7.3. Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos - EOS

Se presenta la perspectiva Ontosemiótica que evidencia el desarrollo de un modelo epistemológico para las matemáticas, con bases antropológicas y socioculturales; un modelo cognitivo, con bases semióticas, de índole pragmatista y un modelo instruccional y se precisan las nociones teóricas desarrolladas en este enfoque: herramientas útiles para el desarrollo de la investigación; también, se presenta la técnica del análisis semiótico; la visión de la complejidad de los objetos matemáticos y la Fenomenología (Freudenthal, 1983) como otra de las herramientas coherentes con el enfoque y de gran importancia para el desarrollo de la investigación.

El EOS, surge del análisis a diversas teorías, al considerar que no hay una respuesta clara, satisfactoria y compartida entre ellas (Teoría de las Situaciones Didácticas-TSD, Teoría Antropológica de lo Didáctio-TAD, Dialéctica Instrumento - Objeto: DIO y Juego de Marcos JM, Teoría de los Campos Conceptuales - TCC) al problema epistemológico (en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática) sobre los fundamentos teóricos de la investigación en Didáctica de la Matemática. Este problema se formula como un PE (problema epistemológico): ¿qué es un objeto matemático? de manera equivalente, ¿cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, grupo) en un contexto o marco institucional determinado? El PE se refiere al objeto matemático, como entidad cultural o institucional, que se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el del objeto como entidad personal o psicológica: PC (problema cognitivo): ¿qué significa un objeto matemático, para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? Para dar respuesta a estas preguntas de naturaleza ontosemiótica: Godino & Batanero (1994) parten de la noción de objeto propuesta por Chevallard (1991), clarifican algunas nociones introducidas por la TAD y las hacen operativas; determinan semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente, tales como concepción y significado (Godino, 2012).

En la problemática inicialmente abordada, existía una cuestión epistemológica de base y era precisar y explicitar la naturaleza de los objetos matemáticos y su emergencia a partir de las prácticas matemáticas y un problema cognitivo, que era caracterizar el conocimiento desde el punto de vista subjetivo (Godino, 2012). Para abordar los análisis epistemológicos y cognitivos requeridos en la Didáctica de la Matemática, se conformaron las nociones claves de Sistema de Prácticas, Configuración de Objetos y Procesos (Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013). Estas herramientas teóricas permiten formular el problema epistémico, (conocimiento institucional, socio-cultural) y el cognitivo (conocimiento personal) en Didáctica de la Matemática.

Se presentan a las herramientas teóricas del EOS, que permitieron realizar análisis detallados en el estudio de los Conocimientos Didácticos-Matemáticos de los estudiantes de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo.

1.7.3.1. Sistemas de prácticas

En primer lugar, se tiene la noción de Práctica matemática y objeto matemático introducidas por Chevallard (1991; 1992), que se conectan en este enfoque, con las ideas centrales de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990). Una práctica matemática es una acción o manifestación (verbal o escrita) operativa y discursiva que puede ser de un sujeto personal, o puede ser compartida en una institución (profesor, textos), para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino et al., 1994). Esta noción se generaliza a los sistemas de prácticas matemáticas personales (estudiante) e institucionales (profesor) y juega un papel central desde el punto de vista epistemológico y didáctico. Con esta noción se asume y se hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas en el cual se basa el EOS. Estas prácticas matemáticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el interior de la institución, lo cual da lugar a las nociones de sistemas de prácticas personales y sistemas de prácticas institucionales las cuales se definen (Godino et al., 1994, p. 337) como:

> **El sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución. Los sistemas de prácticas personales asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas.**

Según Font, Godino & Gallardo (2013), las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas (p. 104). Los sistemas de prácticas dan respuesta a la pregunta de naturaleza semiótica ¿que significa un objeto matemático? y a la pregunta de naturaleza ontológica ¿qué es el objeto matemático? (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011).

1.7.3.2. Objeto matemático

Una noción importante en el enfoque EOS, es la de objeto matemático, y corresponde a una entidad emergente e interviniente en las prácticas matemáticas. Se entiende por objeto alguno de los elementos: lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación-problema. Cada uno de estos elementos (excepto la situación-problema) se entienden como emergentes de una práctica cuya finalidad es la resolución de una situación-problema (Godino et al., 1994; 1998). En el EOS, se adopta una visión pragmática, al considerar que los objetos matemáticos son emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino et al., 1994). Para Font et al. (2013) la propuesta ontológica, se deriva de las prácticas matemáticas, siendo éstas, el contexto básico en el que los individuos obtienen su experiencia y de las cuales emergen los objetos matemáticos; así, el objeto matemático adquiere un estatus derivado de las prácticas matemáticas que le proceden (p. 104).

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc), que se evocan al hacer matemáticas y que se representan en forma textual, oral, gráfica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas, emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Como los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales, entonces de igual forma, se considera a los objetos emergentes como objetos institucionales, si provienen de sistemas de prácticas compartidos en el interior de la institución, mientras que a los objetos emergentes de los sistemas de prácticas personales se les denominará objetos personales (Godino et al.,1994).

El EOS en consonancia con el interaccionismo simbólico, considera como objeto o entidad matemática, todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando se hace, se comunica o se aprende matemática. En la descripción de la actividad matemática se hace referencia a muchos y diversos objetos, los cuales se pueden agrupar según distintos criterios, formando categorías o tipos diversos (Godino, 2002). Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy (2011), señalan que los objetos matemáticos primarios se pueden analizar desde una perspectiva proceso - producto y para esto consideran los procesos duales: Institucionalización-Personalización; Generalización Particularización; Descomposición/análisis-Composición/reificación; Materialización Idealización; Representación- Significación (ver, Figura 1.1).

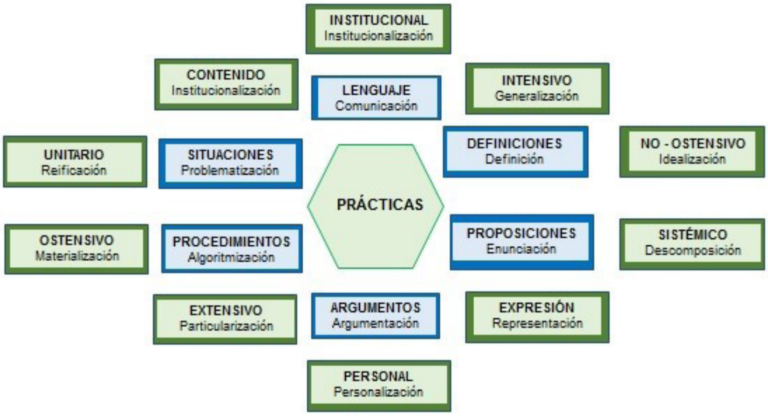


Figura 1.1: Objetos y procesos matemáticos (Godino et al., 1994)

1.7.3.3. Significados de los objetos matemáticos

Se concibe el significado de los objetos matemáticos (operación binaria, grupo) desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto, se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene. Así, el significado del objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas: Significado institucional y Significado personal, que se desarrollan y precisan en Godino et al. (1994; 1998) en términos de los sistemas de prácticas en las que un determinado objeto matemático es determinante para su realización, además, se relacionan con las nociones de conocimiento y comprensión. Desde supuestos pragmáticos-antropológicos, estas ideas centran el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, sin perder al sujeto individual al cual se dirige el esfuerzo educativo. Godino et al. (1994) definen estos significados:

El significado de un objeto institucional, es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto matemático en un momento dado (Godino et al., 1994, p. 340).

Esta noción de significado institucional permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica, el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución en el tiempo y la dependencia institucional. De igual forma, Godino et al. (1994), definen:

El significado personal de un objeto como el sistema de prácticas personales (de una persona) para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal, en un momento dado(Godino et al. (1994), p.341).

Algunos sistemas de prácticas se consideran como primarios, por su carácter extensivo (particular), esto hace referencia a que resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas con métodos y procedimientos particulares. Los sistemas de prácticas primarios se agrupan en sistemas más genéricos en los cuales se pueden abordar situaciones-problemas más generales. Este proceso continúa por niveles, hasta llegar a la formalización del objeto matemático. La consideración conjunta de los elementos y sus relaciones, conforman el Significado epistémico global del objeto matemático.

Bajo estos supuestos, reconstruir el significado global del objeto matemático significa identificar los sistemas de prácticas en las cuales se utiliza; los cuales llevan asociadas configuraciones epistémicas que constituyen un significado parcial del objeto matemático (Godino, 2009). El sentido en el EOS, se interpreta como un significado parcial del objeto matemático y se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinado. El uso del término sentido en la Teoría de Situaciones Didácticas, queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge y le da sentido (se describe como significado situacional). En el EOS esta correspondencia es crucial, ya que es la razón de ser del objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero, tienen en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre el objeto y los otros componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que se considera que proviene el objeto, entendido en términos cognitivos o en términos epistémicos (Godino, Contreras & Font, 2006).

La interpretación semiótica de las prácticas, lleva a hablar de tipología de significados personales (globales, declarados y logrados) y significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). Según Godino et al. (1994), los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificadas para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados (ver figura 1.2). Además, el profesor como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. En una institución concreta de enseñanza este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado Global u holístico, requiere realizar un estudio histórico, epistemológico y fenomenológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como el tener en cuenta la diversidad de contextos (sistemas de prácticas-fenómenos) de uso donde se pone en juego dicho objeto matemático (Pino-Fan, 2013).

Figura 1.2: Tipología de significados sistémicos (Pino-Fan, 2013)

El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global, también denominado holístico u holo-significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático y significado de referencia, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Para una institución de enseñanza el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.

La identificación de los significados parciales se hace mediante la descripción sistemática de los objetos primarios (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto matemático (Font & Godino, 2006; Pino-Fan et al., 2011). En el análisis de las configuraciones epistémicas, cada objeto interviniente en una práctica matemática, puede verse desde distintas facetas duales (ver, Figura 1.1). Para determinar los diferentes niveles de generalización entre las configuraciones, se trabajarán los aspectos intensivos-extensivos (generalparticular).

1.7.3.4. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos

Una Configuración epistémica, se compone de los objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en los diferentes contextos de su uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas, las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial diferente del objeto matemático (Godino et al., 2006). Las configuraciones epistémicas permiten reconstruir el significado global de referencia, definido a partir de las nociones de significado global-holístico-holosignificado que comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático (ver, figura 1.3).

El término configuración epistémica o cognitiva es útil, ya que, en la realización de una práctica matemática y específicamente, en la interpretación de su resultado como satisfactorio, se necesita poner en juego determinados conocimientos; así, entre los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permiten resolver una situación-problema, se encuentran: en primer lugar, el lenguaje (verbal, simbólico): estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica y ella en tanto a acción compuesta, es satisfactoria. En consecuencia, cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado de objetos, formados por situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se encuentran articulados en la configuración epistémica (ver, figura 1.3) (Font & Godino, 2006, p. 69)).

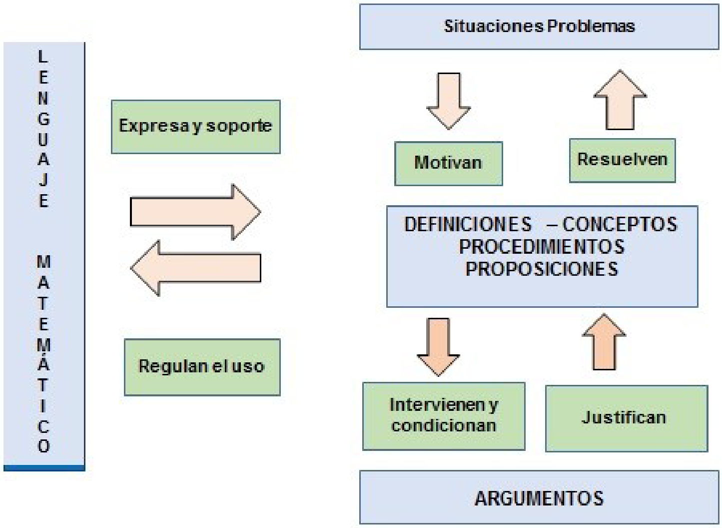


Figura 1.3: Configuración epistémica (Font & Godino, 2006)

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados, llevan asociados, respectivamente los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enumeración y argumentación (ver, figura 1.1) Otros procesos como la resolución de problemas y la modelización se ven en este enfoque como mega-procesos, e implican la intervención y la activación de los procesos mencionados. Las situaciones-problemas y las prácticas realizadas para resolverlas, tienen un papel central, así como su dependencia de los contextos institucionales en que tienen lugar.

1.7.3.5. Facetas y niveles del análisis didáctico

Las nociones teóricas del EOS son un conjunto de herramientas de análisis y reflexión de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se han elaborado varios sistemas de objetos y relaciones (categorías) que ayudan a analizar y comprender, de manera sistemática y con distintos niveles de profundidad, los diversos aspectos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este enfoque se proponen las siguientes facetas para el análisis de los procesos de instrucción matemática (Godino, 2009):

Epistémica: conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).

Cognitiva: conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes. *Afectiva*: estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Mediacional: recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

Interaccional: patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.

Ecológica: sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, etc. que soporta y condiciona el proceso de estudio.

En este modelo teórico se consideran claves las facetas epistémica y cognitiva y se postula para ellas un punto de vista antropológico y semiótico: la matemática como actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones-problema, específicos. Además, se concede relevancia a las demás facetas (afectiva, mediacional, interaccional y ecológica;) ya que, condicionan los aprendizajes y la enseñanza (Godino, 2009).

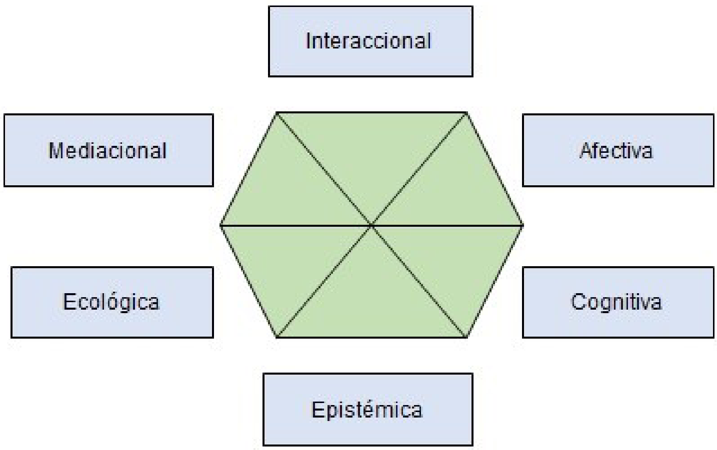


Figura 1.4: Facetas del Análisis Didáctico (Godino, 2009)

En los trabajos de investigación realizados en el marco del EOS (D'Amore, Font & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009) se proponen cinco niveles para el análisis del proceso de instrucción:

Nivel 1. *Identificación de prácticas matemáticas.* Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. Se parte del supuesto, que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y sobre todo, una *práctica discursiva* (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto. Desde esta perspectiva, se entiende el discurso del profesor como un componente de su práctica profesional. Dicha práctica tiene como objetivo generar en el estudiante, un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva sobre ella (práctica discursiva) que el profesor puede considerar como matemática. Así, se considera como práctica matemática a cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas con el fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994).

Nivel 2. *Identificación de objetos y procesos matemáticos y didácticos.* Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje. Se considera que cuando un agente realiza una práctica matemática tiene que activar un conglomerado formado por algunos de los objetos: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimiento y argumentos. Estos seis tipos se articulan formando la configuración de la figura 1.3. (Font & Godino, 2006).

En el EOS, se consideran relevantes dieciséis procesos en la actividad matemática: los procesos de generalización- particularización, institucionalización-materialización (asociados a las cinco dimensiones duales) y procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización (asociados a los objetos matemáticos identificados en el proceso de evaluación que se analiza). Existen otros procesos igualmente relevantes, como los procesos de comprensión, de modelización o de resolución de problemas, que pueden entenderse como mega procesos que incluyen algunos de los tipos anteriores (Font, Planas & Godino, 2010).

Nivel 3. *Descripción de conflictos semióticos.* Según Godino et al. (2007) se entiende por conflicto semiótico cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones. Cuando la disparidad se produce entre prácticas de un mismo sujeto se habla de conflicto semiótico de tipo cognitivo. El conflicto semiótico interaccional, surge entre las personas, pero se interpreta que estas personas proponen prácticas válidas en instituciones diferentes: mundo de la vida y aula de matemáticas y finalmente, si la disparidad se produce entre prácticas propias de instituciones diferentes, se habla de un conflicto semiótico de tipo epistémico.

Los tipos de conflictos semióticos no son excluyentes, puesto que un mismo conflicto puede ubicarse en un tipo u otro según la perspectiva que se adopte. Por ejemplo, un conflicto epistémico entre el profesor y el alumno, también se puede considerar como un conflicto de tipo interaccional y los conflictos cognitivos de una persona a menudo son el resultado de interacciones sociales generadoras del conflicto (Font, Planas & Godino, 2010).

Nivel 4. *Identificación del sistema de normas y meta normas*. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y que afectan a cada faceta y sus interacciones. La actividad matemática en el aula tiene una dimensión social; ya que, la clase se puede considerar como una micro-sociedad donde tiene lugar la difusión y construcción de conocimiento matemático a través de la interacción social entre alumnos y profesor. En consecuencia, el aprendizaje matemático está condicionado por meta conocimientos matemáticos y didácticos, tales como las normas socio-matemáticas (Planas & Setati, 2009; Yackel & Cobb, 1996) y las cláusulas del contrato didáctico (Brousseau, 1997).

Nivel 5. *Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción*, donde se identifican potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementan la idoneidad didáctica (Godino, 2009). La identificación de seis idoneidades parciales en un proceso de instrucción permiten considerarlo un proceso idóneo; estas son: la idoneidad epistémica, donde se valora si las matemáticas que se enseñan son unas buenas matemáticas; idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes y después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; idoneidad interaccional, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos; idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; idoneidad emocional, para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de instrucción y finalmente, idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las conclusiones del entorno social y profesional (Font, Planas & Godino, 2010).

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero & Font, 2007):

Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia y permite valorar la calidad del contenido matemático a enseñar, en términos de su grado de consistencia con los significados institucionales de referencia; la *idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos o implementados; la *idoneidad interaccional* hace referencia a que un proceso de enseñanza-aprendizaje tiene mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional, esto es, si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori) y por otra parte, permiten resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción: esta idoneidad, busca valorar si la interacción permite identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los que efectivamente se producen durante el proceso de instrucción.

La *idoneidad mediacional*, responde al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje: esta idoneidad, se encarga de la valoración del grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales involucrados en el proceso de instrucción; la *idoneidad afectiva*, corresponde al grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio y se relaciona tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. La idoneidad emocional, valora la situación afectiva de los estudiantes, la cual determina su grado de interés o motivación hacia el proceso de estudio; finalmente, la *idoneidad ecológica* representa el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y pretende valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo escolar, su pertinencia con el entorno, etc. (a priori y a posteriori).

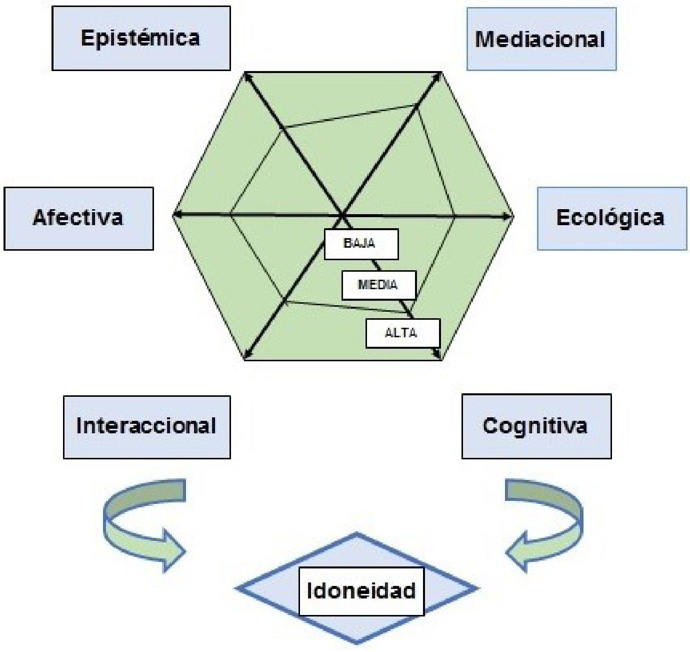


Figura 1.5: Idoneidad didáctica (Godino, 2011)

Estos niveles de análisis permiten el desarrollo de un análisis completo para describir, explicar y valorar los procesos de instrucción (Font, Planas & Godino, 2010). En un proceso de instrucción, la aplicación del nivel 1 permite describir la secuencia de las prácticas matemáticas. La realización de una práctica moviliza elementos distintos, a un saber, un agente (persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza. El agente realiza la práctica matemática orientada a la resolución de situaciones-problema, esto hace que sea necesario considerar otros aspectos, objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas. Esto se realiza en el nivel 2 del análisis. Este segundo nivel tiene como finalidad, describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos descritos en el enfoque EOS (Godino, 2012).

El *análisis didáctico* de un suceso de clase parte del planteamiento de una situación problema por parte del profesor; seguidamente, los estudiantes realizan prácticas matemáticas necesarias para la resolución de dicho problema. Existen las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, que hacen posible realizar estas prácticas matemáticas (nivel 2), de ahí se avanza al estudio de las interacciones entre el profesor y los alumnos presentes en el proceso de instrucción. Estas interacciones didácticas que suceden en un proceso de instrucción pueden ser muchas y se analizan en el nivel 3, en especial interesan, las interacciones en torno a los *conflictos de tipo semiótico* (Planas & Iranzo, 2009). En el nivel 4 del análisis didáctico se consideran las prácticas matemáticas e interacciones que están condicionadas y soportadas por una trama de normas y meta-normas que regulan las acciones (Godino, 2012).

Estos cuatro niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa; ya que, sirven para comprender y responder a la pregunta ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? Sin embargo, no evalúan la pertinencia del proceso de instrucción matemática ni determinan pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso. Para esto son necesarios criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y que permiten guiar la mejora de dichos procesos; de esto se ocupa el nivel 5 del modelo (Font, Planas & Godino, 2010).

Dentro del análisis didáctico, el estudio de los Conflictos Semióticos se enmarca dentro del estudio de errores y dificultades que tienen los estudiantes para abordar el objeto de estudio y se ubica también dentro del estudio de las concepciones de los estudiantes (Sepúlveda, 2014).

1.7.3.6. Análisis semiótico

El análisis semiótico de un texto matemático y en general, de la actividad matemática en el EOS, contempla el análisis de los siguientes elementos: a) Las notaciones y sus representaciones (lenguaje); b) Las situaciones-problemas; c) Las definiciones; d) Los procedimientos y las técnicas; e) Las proposiciones, propiedades y teoremas y f) Los argumentos. Estos elementos se articulan formando las configuraciones epistémicas descritas anteriormente; estas configuraciones son herramientas útiles para describir la complejidad de los objetos matemáticos y las prácticas de donde emergen los objetos matemáticos (Godino, 2002).

El lenguaje, según Godino (2002) se encuentra constituido por los términos, las expresiones, las notaciones, las gráficas. En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y matemático) se describen otros objetos lingüísticos.

Las situaciones, corresponden a los problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra matemáticas, ejercicios. Son las tareas que inducen la actividad matemática.

Los procedimientos, operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo. Son las acciones del sujeto ante las tareas matemáticas.

Los conceptos, son dados por las definiciones o descripciones; por ejemplo, número, punto, recta, función.

Las proposiciones, son las propiedades o los atributos de los objetos mencionados y suelen darse como enunciados.

Las argumentaciones, pueden ser deductivas o de otro tipo; se usan para validar y explicar las proposiciones.

Estos seis tipos de objetos se califican como matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática y son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, las teorías. Las entidades lingüísticas, tienen un papel representacional -se ponen en lugar de las restantes e instrumental; o sea, se ven como instrumentos de la actividad matemática. Las situaciones - problemas, son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática y junto con las acciones (procedimientos) constituyen el componente práctico de las matemáticas, la acción dirigida a un fin (Godino, 2002).

Se define el "análisis semiótico" de un texto matemático como su descomposición en unidades, que se llaman semióticas, junto con la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas (relaciones) que se establecen entre los mismos por parte de los diferentes sujetos. El criterio para definir las unidades de análisis es el cambio del elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerados, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, al empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones; es decir, se tiene presente en la delimitación de las unidades de análisis, los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis elementos introducidos en este enfoque teórico (Godino, 2002).

El análisis semiótico según Godino (2002) es la indagación sistemática de los significados puestos en juego a partir de la transcripción del proceso y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas, el análisis permite caracterizar los significados personales atribuidos de hecho por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, para formular hipótesis sobre los conflictos semióticos potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos.

El análisis semiótico ayuda a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. Se considera el análisis semiótico a priori como una etapa previa y crucial del análisis didáctico-matemático porque permite identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido matemático, los cuales requieren de procesos instruccionales específicos. Este análisis permite describir el significado institucional local del contenido estudiado y la distribución temporal de los distintos elementos. Para la valoración del carácter más o menos completo del significado local, se requiere disponer de un patrón de comparación que se denomina el significado institucional de referencia. La comparación entre significados institucionales se puede describir como la transposición didáctica localmente implementada en el proceso de estudio. El significado de referencia se elabora a partir del análisis de textos y de la práctica del análisis estadístico (Godino, 2002).

El análisis semiótico de texto, desde el punto de vista del estudiante tiene el carácter de análisis a priori (o potencial); ya que, se refiere a las interpretaciones (y a los conflictos semióticos) que pueden poner en juego los alumnos que estudian un objeto matemático en el sistema didáctico a considerar.

1.7.3.7. El conocimiento

Se describe de manera general como lo propone Chevallard (1992), esto es, como la relación de alguien (persona o institución) con un objeto. Esta noción abarca todos los constructos cognitivos usados en las diversas ciencias y tecnologías de la cognición humana (Varela, 1988), pero para hacerla operativa se modeliza adecuadamente el objeto de conocimiento, esto es, aquello con lo que se establece la relación y los tipos de relaciones posibles (Godino, 2012). En general, la relación de (X) (persona o institución) a un objeto (O) se traduce en las correspondencias que (X) puede establecer entre (O) y otros objetos: correspondencias que se interpretan como funciones semióticas (Godino, Batanero & Font, 2007). Si (O) es un término o expresión, el sujeto (X) puede atribuir a (O) otro objeto, su significado (S); si (O) es una tarea, (X) puede aplicar a (O) una técnica o varias técnicas de solución, así como aportar explicaciones y justificaciones, etc. El objeto (O) puede ser una organización matemática más o menos compleja y el sujeto puede tener distintas relaciones a cada uno de sus componentes.

En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, al igual que en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992; 1999), los objetos matemáticos se conciben en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, esto es, sistemas compuestos de praxis y logos. El sujeto puede tener una relación bien adaptada a la praxis, pero no al componente discursivo. En este caso, decimos que el sujeto conoce cómo hacer un tipo de tareas, tiene competencia o capacidad para hacerla, pero no comprende (o comprende parcialmente) el porqué de las técnicas que aplica (Godino, 2012).

Las expresiones del tipo, (X) es competente para realizar la tarea T, indican que el sujeto (X) domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica t que resuelve o permite hacer bien la tarea T. En esas circunstancias, se dice que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o también que: conoce cómo hacer la tarea. En cambio, la expresión (X) comprende la técnica t que permite realizar la tarea T, se aplica si (X) conoce porqué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas.

La competencia matemática, se entiende en el sentido restringido, como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas y se complementa con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego. En el EOS, se considera que la competencia y la comprensión en matemáticas son nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático y sus relaciones con el mundo empírico. Es necesaria una dialéctica competencia-comprensión, teniendo en cuenta que es imprescindible tener disponible cierta práctica instrumental (adquirida en contextos significativos que involucra la comprensión de la misma) para avanzar hacia otras problemáticas de comprensión más complejas (Barallobres, 2001).

El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático lleva a reconocer una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados dicotómicos, esto es, se tiene o no competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático. Se trata más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que además, deben ser valorados relativamente a los contextos institucionales correspondientes. El problema del logro del binomio (competencia, comprensión) está, por consiguiente, íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas (no ostensivas, generalizaciones) cuya naturaleza y origen se tienen que explicitar para poder elaborar un modelo útil y efectivo sobre qué se entiende por la comprensión de tales objetos (Godino, 2012).

1.7.3.8. La complejidad de los objetos matemáticos

Lo que en los planteamientos filosóficos de tipo platonista o empirista se consideraba como objeto matemático, con una existencia independiente de las personas, en el EOS, se explica como un objeto virtual o ficticio que emerge de las diferentes maneras de ver, hablar, operar; esto es, el objeto es el contenido al que se refiere o indica globalmente, explícitamente o implícitamente el par (Prácticas matemáticas, configuración epistémica que las activa). Este objeto virtual primero, considera la referencia global de una configuración epistémica y después, el conjunto de varias configuraciones epistémicas (Godino, 2002).

Font, Godino & Gallardo (2013) consideran que el proceso por el cual emergen los objetos matemáticos a partir de las prácticas es complejo y se deben distinguir, al menos dos niveles. En el primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, problemas y argumentos (objetos primarios) que se organizan en configuraciones epistémicas que permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos. En el segundo nivel, emerge una referencia global asociada a una o varias configuraciones epistémicas. La emergencia de este objeto virtual o ficticio se explica por la combinación de efectos de las diferentes dualidades consideradas para cada objeto.

En el EOS se considera que los objetos primarios matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas, según el juego del lenguaje en el que participan según Wittgenstein (1987) pueden ser considerados desde diferentes maneras de estar participando; estas formas se agrupan en las siguientes facetas o dimensiones duales: unitaria/sistémica; expresión/ contenido; ostensivo/no ostensivo; personal/ institucional; extensivo-intensivo (ver, figura 1.1)

1.7.3.9. Fenomenología

La realización de un análisis didáctico, establece unos organizadores del currículo dentro de los que se encuentra el estudio de los errores y dificultades de los estudiantes detectados en el aprendizaje de las matemáticas que se presentan para cada tópico, así como los problemas y obstáculos de aprendizaje que se detectan o se plantean para cada concepto. Se encuentran el análisis de las representaciones utilizadas para cada sistema conceptual, junto con algunas modelizaciones usuales de los correspondientes conceptos; y el estudio de la fenomenología de los conocimientos implicados, así como las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenidos. Se analiza el estudio de la diversidad de materiales de tipo manipulativo y los recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico y finalmente, la evolución histórica de cada campo e incluso de cada concepto.

Estas cinco perspectivas junto con los propios contenidos, no determinan todas las posibilidades para reflexionar sobre cada una de las unidades de un currículo de matemáticas desde un planteamiento didáctico. Este análisis hace parte del trabajo del profesor en el proceso de planificación de sus unidades o temas para el proceso de instrucción. El desarrollo de los componentes del análisis didáctico activa una serie de conocimientos que en conjunto se denomina: El conocimiento didáctico del profesor. Este conocimiento está compuesto de herramientas teóricas, denominadas los organizadores del currículo; estos organizadores corresponden a los conocimientos que le permiten al profesor articular el diseño, desarrollo y evaluación de las unidades del currículo (Segovia & Rico, 2001. p. 102) y se consideran elementos teóricos y metodológicos, mediadores, articuladores del análisis didáctico y de los sistemas de conocimiento que fundamentan los significados de los conocimientos matemáticos (Bedoya, 2002, p. 55).

El análisis didáctico tiene como objetivo facilitar la práctica del profesor de matemáticas, de una manera sistemática y profunda, tomando en consideración el máximo de dimensiones que influyen en su actuación, mediante cuatro tipos de análisis parciales: análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (Gómez, 2007). Se ha mencionado a la Fenomenología, las representaciones, el pensamiento matemático avanzado, las dificultades, obstáculos y errores de los estudiantes como organizadores del currículo (Rico, 1997).

El término fenomenología (Freudenthal, 1983) no hace referencia al sentido dado por Husserl, Hegel o Heidegger. El *noumenon* se refiere a lo que es pensado mediante la razón o lo inteligible y *phainomeno* también de origen griego significa lo que parece. Los fenómenos se consideran que son las apariencias o lo que se nos parece de las cosas. En la tradición filosófica realista, el mundo de los noúmenos era el que se calificaba de real. La contraposición entre fenómeno y noúmeno es una contraposición entre mundos, el de los fenómenos que es el de la apariencia, de la experiencia y el noumenon que es lo sensible, lo inteligible.

Identificar los conceptos matemáticos con noumenon, los sitúa fuera del campo de nuestra experiencia y esto contradice las ideas de Freudenthal al presentar el concepto matemático como medio de organización de fenómenos, que posteriormente, pasarán a formar parte de otro campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático, así, los conceptos no caen fuera de la experiencia ni están en un mundo diferente del mundo de los fenómenos que organiza: los fenómenos son objetos de la experiencia matemática y se establecen las cadenas (fenómenos, medio de organización 1), (medios de organización 1, medios de organización 2) y esta cadena continúa.

Hacer fenomenología es describir cada una de estas series o pares, es decir, es determinar cuáles son los fenómenos para los cuales el concepto es un medio de organización, teniendo en cuenta que la actividad matemática no permanece en el nivel inferior (fenómeno, medio de organización); el proceso de creación de los objetos matemáticos es un proceso por medio del cual los medios de organización se convierten en objetos que aparecen en el campo de los fenómenos. Así, los objetos matemáticos se incorporan a nuestra experiencia y entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos y este proceso continúa reiterativamente (Puig, 2001).

Se define la fenomenología como el método de análisis de los contenidos matemáticos y el análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático; corresponde a la descripción del objeto matemático. El análisis fenomenológico se hace con una intención didáctica; ya que, es un análisis previo a todo diseño o desarrollo curricular y se entiende en este contexto como un componente del análisis didáctico (Rico, 1997, p. 61), que tiene el objetivo de servir de base para organizar la enseñanza de las matemáticas y no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas (Freudenthal, 1983).

La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura o de una idea matemática, significa describir el noumenon (conceptos) en su relación con los phainomenon para los cuales es el medio de organización, indicando los fenómenos para cuya organización fue creado y a los cuales puede ser extendido, de qué manera actúa sobre ellos como medio de organización y que poder nos da sobre esos fenómenos. En la fenomenología didáctica se analiza el elemento didáctico en la relación entre noúmeno y phainomenon, esto es, cómo se adquiere la relación concepto, fenómenos en el proceso de enseñanza y aprendizaje: se tiene una fenomenología didáctica, donde intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza, se trata así, de los fenómenos que están organizados por el concepto en las matemáticas tomadas en el momento actual.

Si se analiza cómo se adquiere la relación concepto, fenómenos en la historia, se tiene una fenomenología histórica, es decir, se analizan los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extiende a otros fenómenos. El orden para los análisis fenomenológicos, corresponde a iniciar con una fenomenología pura, es decir, con el conocimiento de las matemáticas y sus aplicaciones. Se completa con la fenomenología histórica y se continúa con la fenomenología didáctica, para lo cual se necesita conocer el proceso de enseñanza y aprendizaje y finalmente, se realiza la fenomenología genética, en cuanto al crecimiento cognitivo de los alumnos (Freudenthal, 1983).

Una de las tareas de la fenomenología es indagar, analizando los conceptos matemáticos, sobre cuáles son los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos. Así, en el estudio de las configuraciones epistémicas que corresponde a la identificación de los diferentes significados de un objeto matemático, se realiza este estudio fenomenológico al determinar las situaciones - problemas, de donde emergen estos significados parciales del objeto matemático y se incluye así, la fenomenología dentro de las herramientas del EOS.

1.7.3.10. El Álgebra moderna y la Fenomenología

El Álgebra Moderna organiza fenómenos que tienen que ver con las propiedades estructurales de conjuntos de objetos arbitrarios en los que hay definidas operaciones. Esas propiedades y esos objetos provienen de la objetivación de medios de organización de otros fenómenos de nivel más bajo y son el producto de una larga historia con sucesivos ascensos de nivel.

Una manera de recorrer la historia consiste en situarse en el siglo IX, en el momento en que *al-Khwarizmi* escribe el Libro conciso de al-jabr y al-muqabala y se toma este acontecimiento como el nacimiento del "álgebra" en tanto disciplina claramente identificada entre las matemáticas. Lo que hace al-Khwarizmi, que lo separa de todos los trabajos que desde el suyo se verán como álgebra, es comenzar estableciendo todos los tipos de números que son necesarios para los cálculos: tesoros, raíces y simples números o dirhams, en su terminología, a continuación todas las combinaciones posibles de esos tipos, seis tipos: tesoros más raíces igual a números, etc. y luego, un algoritmo para resolver cada uno de los tipos; hallar su tesoro o su raíz. Cada uno de los tipos es una forma canónica a la que se puede reducir cualquier problema por intermedio de su traducción en términos de cosas, tesoros, raíces y dirhams. Lo que es nuevo en al-Khwarizmi no son los métodos de resolución, sino el establecimiento de un conjunto completo de formas canónicas, todas ellas resolubles y la organización posterior de la aplicación a los problemas cuyas soluciones se organizan por esas formas canónicas (Puig, 1997).

El siguiente salto de nivel lo dio Galois, al dejar de buscar nuevas soluciones para estudiar las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones; el resto de la historia hasta el álgebra moderna actual puede verse como sucesivos saltos de nivel por objetivación de los medios de organización de fenómenos del nivel anterior.

Las estructuras Matemáticas y la Fenomenología

Una estructura multiplicativa en un conjunto de cuatro elementos {e, a, b, c} se puede representar por una tabla de multiplicar para ser leída en la forma habitual. Este es el llamado "grupo V-4 de Klein". Sin embargo, no es usual definir estructuras tan explícitamente (tabla); muy a menudo se hace implícitamente, es decir, se introduce un conjunto con ciertas relaciones en él y se necesitan esas relaciones para observar ciertos postulados.

Tabla 1.1: Grupo V-4 de Klein

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	a
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Freudenthal (1983) define el anterior grupo, como un conjunto G con la relación $ab = c$ y coloca como postulados:

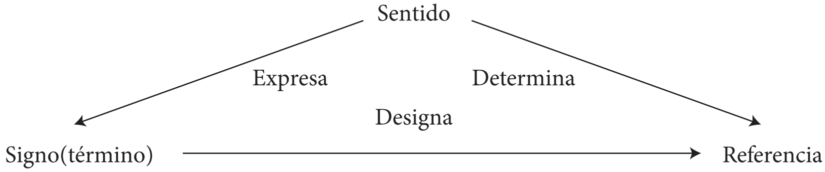
Asociatividad: $(ab)c = a(bc)$
Un elemento identidad, e tal que $ea = ae = a$
Para cada elemento un inverso, a^{-1}, tal que, $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Además, establece que esto no define un solo grupo, sino más bien el concepto de grupo, lo que se puede ejemplificarse por muchos (finitos o infinitos) modelos y para cada par de grupos se podría preguntar si ellos son isomorfos, es decir, si muestran la misma estructura.

1.7.4. La noción de significado de Frege

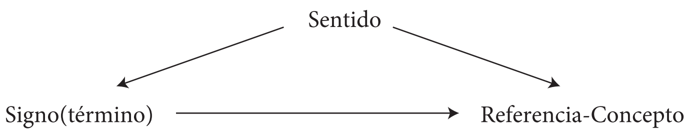
Frege (1998a; 1998b; 1998c) introduce la idea de triángulo semántico para abordar el significado de un término (ver, tabla 1.2). Al igual que la referencia de un nombre propio es el objeto que designa; un término conceptual se refiere a un concepto. En la noción de Frege para significado de un término conceptual, en el triángulo semántico viene dado por el signo o término con el que se expresa, por su referencia o concepto propiamente tal, y por su sentido o modo en que vienen dados los objetos (ver, tablas 1.2 y 1.3).

Tabla 1.2: Triángulo semántico (término) de Frege



El triángulo semántico propuesto por Frege (Gómez, s.f.) identifica los elementos constitutivos del significado de un término conceptual desde una perspectiva estrictamente lógica y formal. Dado que el interés por el significado de los conceptos matemáticos se centra en el ámbito de la matemática, se adaptan las ideas de Frege para considerar un sistema de relaciones amplio. Se interpretan las ideas de Frege, al enfatizar en el hecho de que los sentidos con los que se usa el término conceptual matemático implican, por un lado, los modos en los que establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos y por el otro, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar.

Tabla 1.3: Triángulo semántico (concepto) de Frege



Se adopta así, un punto de vista funcional, por el cual el sentido con el que se usa un término conceptual matemático también incluye los fenómenos que sustenta el concepto. En la matemática escolar, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también, mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto. Se aborda así, el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que se denominan: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología :

En la estructura conceptual es donde se incluyen las relaciones del concepto con otros conceptos atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.

En los sistemas de representación es donde se incluyen las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos. En la fenomenología, es donde se incluyen aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

Estas tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática se ponen en evidencia y organizan una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de la clase: la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares. Esta multiplicidad de significados implica que, para efectos de planificar una hora de clase o unidad didáctica, es deseable que el profesor conozca las tres dimensiones que caracterizan el significado de un concepto en la matemática escolar y sea capaz de adquirir la información necesaria que le permita identificar dichos significados y organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación; además, de seleccionar a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción y utilizar la información que surge de los diversos significados del concepto para el diseño de unidades didácticas.

En la siguiente sección, se continúa con el análisis de las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, relacionadas con el análisis del modelo CDM, del conocimiento didáctico-matemático del profesor: primero se presenta un análisis a los modelos que integran el modelo CDM y luego el análisis de las componentes del CDM.

1.7.5. Modelos para el estudio del Conocimiento del Profesor

La Didáctica estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje donde interviene un contenido, estudiantes, profesor y unos medios tecnológicos. Estos procesos se realizan en una institución educativa que condiciona y hace posible el proceso educativo; así, el estudio se relaciona con sistemas heterogéneos y complejos que necesitan de modelos teóricos específicos para cada uno de sus componentes: componentes que interactúan entre sí, para lo cual se hace necesario identificar y tener en cuenta las facetas que intervienen en estas interacciones. En este sentido, se detalla en esta sección el modelo del CDM: modelo para el cual se definen facetas o componentes del Conocimiento del Profesor, para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, 2009).

El término "Conocimiento del Profesor" en la investigación didáctica, corresponde a la integración cognitiva del conocimiento científico y conocimiento práctico, procedentes de los diferentes dominios científicos y prácticos. Este término tomó fuerza con los estudios sobre el Pensamiento del Profesor, cuyos supuestos básicos eran: el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional y los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan. Estos supuestos, dieron paso a una preocupación por el conocimiento del profesor (Pino-Fan, 2013).

Para el término "conocimiento" no se encuentra una definición en la literatura; lo que se observa es una aproximación extensional; es decir, se intentan especificar los componentes de dicho conocimiento, como lo proponen Ball y colaboradores. Así, la mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, consideran que está formado por los siguientes componentes (Llinares, 1997):

- Conocimiento de matemática (conceptos, procesos) y sobre la matemática (concepcio-nes sobre la naturaleza de la matemática escolar).
- Conocimiento del currículo matemático.
- Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizajede las nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos.
- Conocimiento pedagógico específico de la matemática: de representaciones instruccionales, análisis de tareas, etc.

- Conocimiento sobre la enseñanza: planificación, rutinas, interacción, organización dela enseñanza, evaluación.

Los modelos del conocimiento matemático para la enseñanza, elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales y disjuntas: el modelo de Ball y colaboradores (Hill, Ball & Schilling, 2008) denominado Mathematical Knowledge for Teaching - MKT (ver, tabla 1.4) supone avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que debe tener un profesor para enseñar matemáticas. Pero quedan cuestiones por responder: ¿cómo determinar el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores con modelos que incluyen categorías demasiado globales? (Godino, 2009). Específicamente, ¿de qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT?¿cómo se puede enseñar a los profesores a adquirir o desarrollar los diferentes componentes del MKT?

El conocimiento matemático para la enseñanza MKT, es un concepto importante en la comunidad de investigación en formación de profesores; sin embargo, hay una comprensión limitada, de cómo se puede reconocer y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores (Silverman & Thomson, 2008). Además, se observa que existe una desvinculación aparente entre los componentes del conocimiento del contenido (conocimiento común, especializado y en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conocimiento del contenido y la enseñanza, conocimiento del contenido y los estudiantes y conocimiento curricular) (Godino, 2009).

Este modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza-MKT (Ball et at., 2000; 2005; 2008) se basa en las componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman y se distinguen dos categorías: Conocimiento del contenido y Conocimiento didáctico del contenido. Cada una de estas categorías presenta una subdivisión. El Conocimiento del contenido, tiene las subcategorías: a) Conocimiento común del contenido-CCK, que corresponde al conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza (Ball, Thames & Phelps, 2008), e incluye el conocimiento que el profesor pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades; b) El Conocimiento especializado del contenido- SCK, hace referencia al conocimiento matemático y la habilidad exclusiva para la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 400-401) (ver, tabla 1.4.). El profesor para desarrollar las tareas de enseñanza, requiere de un conocimiento que le permita participar en tal actividad, incluyendo poder representar las ideas de manera clara a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, examinar o comprender métodos excepcionales de resolución de problemas, entre otras actividades (Ball et al., 2005).

Finalmente, c) El Conocimiento en el horizonte matemático-HCH, se define como el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los tópicos matemáticos incluidos en el currículo (Ball et al., 2008). Se considera como el conocimiento sobre las relaciones entre los diferentes temas matemáticos y la forma en que el aprendizaje de los temas evoluciona en los diferentes niveles escolares. Puede entenderse como aquellas relaciones que enlazan los conocimientos previos y los futuros, permitiendo estudiar propiedades de un concepto o procedimientos en situaciones nuevas o más complejas (Martínez, Giné, Figueiras & Deulofeu, 2011).

Continuando con la segunda componente: el Conocimiento Didáctico del Contenido: se describe como la composición de tres subdominios del conocimiento (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008): a) El conocimiento del contenido y los estudiantes-KCS, que se refiere al conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular (Hill et al., 2008); es el conocimiento que se utiliza en las tareas de enseñanza e implica atender a un contenido específico y aspectos particulares de los alumnos; además, incluye el conocimiento de los errores comunes y las dificultades más habituales de los estudiantes; b) El Conocimiento del contenido y la enseñanza-KCT, se relaciona con el conocimiento y combina: el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático (Ball et al., 2008) e incluye, saber construir a partir del razonamiento de los estudiantes y de las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas y c) El Conocimiento del currículo-KCC, se relaciona con el conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza y le permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes (ver, tabla 1.4).

Tabla 1.4: Conocimiento matemático para la enseñanza - MKT (Hill, Ball & Schilling, 2008)

Mathematical knowledge for teaching	
Subject Matter Knowledge	Pedagogical Content Knowledge
Common Content Knowledge-CCK	Knowledge of Content and Students-KCS
Knowledge at the mathematical horizon-SCK	Knowledge of Content and Teaching-SKT
Specialized Content Knowledge-SCK	Knowledge of Curriculum

El modelo del CDM, se define en el EOS y hace referencia a la fusión de los modelos MKT y PCK: El CDM del profesor se compone de la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios y los procesos de significación, que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones-problemas matemáticos, para implementar procesos de instrucción eficaces que faciliten el aprendizaje de los estudiantes (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). Esta forma de entender el

CDM, bajo el enfoque EOS verifica el hecho de poder formular preguntas como ¿qué debe conocer un profesor para que la enseñanza del objeto Grupo, tenga la mayor idoneidad didáctica posible? o bien preguntas relacionadas con competencias tales como ¿qué competencias debe desarrollar un profesor para que la enseñanza de un determinado contenido matemático, tenga la mayor idoneidad didáctica posible? Preguntas a las cuales se pretende dar respuesta con el desarrollo de la presente tesis doctoral.

En el modelo del conocimiento CDM, se distinguen seis categorías o facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y ecológica. En cada faceta se distinguen componentes y herramientas para su análisis (ver, figura 1.4 y 1.6) Cada una de estas facetas se encuentra involucrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los tópicos específicos de la matemática (Godino, 2009):

La Faceta Epistémica de un proceso de estudio, hace referencia a los significados institucionales puestos en juego (implementados) en cada una de las fases de dicho proceso (preliminar, diseño, implementación y evaluación.) Estos significados son interpretados en términos de los sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos.

La Faceta Cognitiva, que hace referencia a los conocimientos personales de los estudiantes y a la progresión de los aprendizajes (desarrollo de los significados personales).

La Faceta Afectiva, tiene en cuenta los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

En la Faceta Mediacional, se analizan los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

La Faceta Interaccional, tiene en cuenta los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.

La Faceta Ecológica, se refiere al sistema de relaciones con el entorno social, político, económico que soporta y condiciona el proceso de estudio (Godino, 2009).

Se hace énfasis en la Faceta epistémica del CDM: ella se relaciona con el conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto institucional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa. La primera referencia a esta faceta, se analizó en relación con el proceso de instrucción; se retoma en el modelo del CDM y se propone una división en tres categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático; categorías que son similares a las del modelo MKT pero que se reestructuraron en este enfoque y corresponden a (Pino-Fan et al., 2013):

- Conocimiento común del contenido
- Conocimiento ampliado del contenido
- Conocimiento especializado del contenido

La categoría del Conocimiento especializado, se subdivide en: conocimiento del contenido especializado; conocimiento del contenido en relación con los estudiantes; conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto en el que se desarrolla la práctica de enseñanza y aprendizaje. Se introduce este modelo y la tabla 1.5, que reestructura el modelo MKT con el fin de describir la relación e interacción entre cada una de las facetas o dimensiones incluidas en este modelo; además, se establecen pautas para la creación de otros ítems que permitan evaluar y analizar cada una de las facetas del CDM. Con la división del conocimiento especializado, se logró un avance respecto al modelo inicial del CDM, propuesto por Godino (2009), primero, porque atiende a la relatividad de los tópicos matemáticos y además, en cuanto a la exploración y descripción de la faceta epistémica del CDM en los aspectos teóricos que se tenían como base, unidos a los aspectos empíricos de los análisis de investigaciones (Pino-Fan, 2013; Vázquez, 2014).

El conocimiento especializado del contenido comprende el conocimiento y las habilidades matemáticas únicas para la enseñanza (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 400). Este conocimiento incluye: Cómo representar con precisión ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes y examinar y comprender los métodos poco usuales para la resolución de problemas (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 377-378); sin embargo, surge la pregunta sobre ¿qué criterios específicos permiten analizar y potenciar dicho conocimiento especializado? (ver, tabla 1.5).

Se redefine este Conocimiento Especializado del modelo del CDM y se proponen dos niveles para el conocimiento especializado. Un primer nivel, en el que los futuros profesores utilizan diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, así como el uso de los diversos significados del objeto matemático, para resolver las tareas pertinentes. El segundo nivel, se refiere a la competencia de los futuros profesores para identificar conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) puestos en juego en la resolución de una tarea (Pino-Fan, 2013); con estas características, es claro que el conocimiento especializado implica conocimiento común y parte del conocimiento ampliado.

Dadas las características de estos dos niveles del conocimiento especializado en el modelo MKT, este se encuentra íntimamente vinculado, dentro del modelo CDM, con las otras facetas del conocimiento de los profesores. Por un lado, el nivel uno de aplicación, se relaciona con las facetas interaccional y mediacional (Knowledge of content and teaching), puesto que un buen dominio de este nivel del conocimiento especializado sobre un tópico específico, proporcionará al profesor los medios para un desempeño idóneo en su práctica de enseñanza futura. Por su parte, el nivel dos de identificación, se vincula con las facetas cognitiva y afectiva (knowledge of content and students), puesto que faculta al profesor para detectar de manera previa, durante y posterior a la implementación de una actividad de enseñanza, conocimientos matemáticos involucrados, significados de los objetos matemáticos, así como conflictos y errores de los alumnos, gestionando así, los aprendizajes de éstos de una manera más eficaz. Se concluye entonces, que el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) propone una reestructuración de los componentes del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) y una vinculación e interacción entre las dimensiones del CDM (ver, figura 1.6).

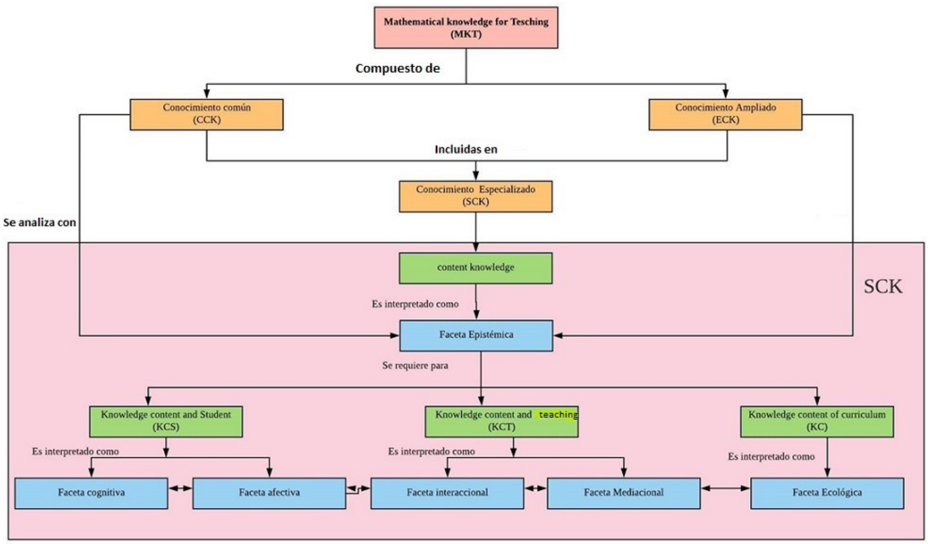


Figura 1.6: Relación entre los modelos: MKT y CDM (Pino-Fan, 2013)

Los Niveles de análisis en el EOS, para cada una de las facetas permiten el análisis del CDM del profesor, de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles corresponden a:

Nivel 1. Prácticas matemáticas y didácticas (operativas, discursivas y normativas.) Se considera como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994). La aplicación de este nivel corresponde a la descripción de la secuencia de las prácticas matemáticas en la solución de un problema. El EOS, asume una concepción pragmatista - antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta en este enfoque como elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Estos sistemas permiten describir las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También, se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes (Godino, 2009).

Nivel 2. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas en los diversos contextos de su uso. Corresponde al segundo nivel de análisis. Este nivel permite describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos y sus tipologías (Font, Planas & Godino, 2010). Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado, que articula de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos de trabajo matemáticos y de representación de los restantes objetos matemáticos. Permite describir los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos). La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje: también, permite la reconstrucción del significado global de referencia de un objeto matemático mediante la identificación de los significados parciales del objeto matemático (Font et al., 2010)

Nivel 3. Normas y metanormas. En este nivel se identifican las reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible un proceso de estudio y que afectan a cada faceta y sus interacciones (Godino, 2009).

Nivel 4. Idoneidad. En este nivel, se identifican las potenciales mejoras para el proceso, que puedan incrementar la idoneidad didáctica (Godino, 2009).

En la figura 1.1. se resumen las categorías de objetos y procesos, introducidos en el EOS que permiten realizar los análisis pormenorizados de la actividad matemática y por tanto, de los conocimientos que intervienen en una enseñanza idónea de las matemáticas. Este tipo de análisis realizado por los propios profesores, representa una de las competencias cuyo logro es deseable alcanzar (Godino, Rivas & Castro, 2008), ya que, permite profundizar en el Conocimiento del Contenido Matemático para la Enseñanza (Conocimiento Especializado y en el Horizonte Matemático, según Ball y colaboradores) (ver, tabla 1.5 y figura 1.6.). El modelo del CDM (Godino, 2009) propuesto desde el enfoque EOS, además de las facetas y niveles de análisis que refieren a categorías de análisis más finas de los conocimientos didácticos y matemáticos del profesor, propone una serie de pautas para la formulación de consignas (items de evaluación) que permiten evaluar este CDM de los profesores. Así, en el modelo se propone que la faceta epistémica del CDM, incluye y refina el Conocimiento del Contenido: Conocimiento Común, Especializado y en el Horizonte Matemático. La propuesta que se tiene se presenta en la tabla 1.5. (Godino, 2009, p. 25).

Tabla 1.5: Conocimiento común, especializado y ampliado del contenido matemático

FACETA EPISTÉMICA	CONSIGNAS
Conocimiento Común:	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puestos en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas: *Tipos de problemas:* Identifica las variables de las tareas, generaliza (particulariza) el enunciado. *Lenguajes*: Resuelve las tareas usando diferentes representaciones. *Procedimientos:* Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos, formales). *Conceptos-Propiedades:* Identifica los conceptos y propiedades puestos en juego en las soluciones. *Argumentos:* Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	*Conexiones:* Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Se describir en el siguiente apartado, siguiendo un orden de desarrollo lógico en el desarrollo del texto, la metodología, para el desarrollo de cada una de las fases de la investigación centrada en la evaluación del CDM del futuro profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo.

1.8. Metodología

El presente estudio tiene un enfoque mixto a nivel exploratorio y de carácter descriptivo. En las tres etapas de la investigación se analizó la variable cualitativa: *configuración epistémica activada en las prácticas matemáticas* y la variable cuantitativa: *grado de corrección de los ítems*, esta variable se analiza en la tercera fase de la investigación (ver, Tabla 1.6), donde además, se utilizan técnicas estadísticas para el análisis de la variable cuantitativa (tercera fase) y técnicas en investigación cualitativa (todas las fases) para determinar el tipo de configuración epistémica activada en las diferentes prácticas realizadas por los estudiantes de formación matemática, cuando responden el cuestionario diseñado con el objetivo de evaluar aspectos del conocimiento común y del conocimiento ampliado, como bases para la potenciación de un conocimiento especializado necesario para la labor en el desempeño del futuro profesor universitario y sobre el objeto de investigación.

Este enfoque metodológico corresponde a un enfoque de tipo mixto, al tener presente que la investigación mixta implica la mezcla de factores cuantitativos y métodos cualitativos o características de este paradigma (Onwuegbuzie & Johnson, 2004; Tashakkori & Teddlie, 1998, 2003) y de acuerdo con el principio fundamental de la investigación mixta, ella implica la combinación de métodos cuantitativos y cualitativos, los enfoques y conceptos que tienen fortalezas complementarias y debilidades que no se superponen (Brewer & Hunter, 1989; Johnson & Turner, 2003).

1.8.1. Componentes y fases de la investigación

Se detallan a continuación, los componentes y las fases de la investigación (ver, Tabla 1.6): La primera fase, corresponde al desarrollo del estudio: E1. Estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Grupo; esta fase se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, con un alcance descriptivo que permite determinar los significados parciales del objeto Grupo, buscando el porqué de ciertos fenómenos (Arias, 1999). A partir del análisis de diversas fuentes (libros de historia de la matemática, investigaciones), se identifican las diferentes configuraciones epistémicas y los significados parciales asociados a ellas; la forma como éstas se encuentran articuladas y la complejidad asociada al objeto Grupo. Esta articulación de significados parciales lleva a la emergencia del significado global del objeto de investigación.

La segunda fase de la investigación, corresponde al estudio E2. Análisis semiótico de textos de Teoría de Grupos, donde se utiliza la técnica del análisis semiótico de textos, propuesta en el EOS; en esta fase se buscaba dar respuesta a la pregunta ¿los significados de la noción Grupo, pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio son representativos del significado global del objeto Grupo? Ésta fase se realiza bajo un enfoque cualitativo de tipo explicativo y descriptivo que permite dar respuesta a la pregunta planteada donde se analiza la variable cualitativa de "configuración epistémica" a través de los objetos matemáticos primarios que la componen. El significado "Global" del objeto matemático, corresponde al conocimiento que realmente deberían tener los estudiantes de formación matemática sobre el objeto matemático y se contrasta con el significado(s) que se propone en los libros de texto y en los planes de estudio y que dan lugar al conocimiento que se pretende que adquieran los estudiantes de Formación Matemática.

La tercera fase de la investigación corresponde al E3. Diseño e implementación de un instrumento para evaluar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de Formación Matemática, en relación con el objeto Grupo. Esta fase tiene un enfoque mixto, a nivel exploratorio y en ella se hace uso de las herramientas teóricas desarrolladas en el EOS. Específicamente, en esta fase se toman las herramientas teóricas y metodológicas propuestas para el análisis del modelo del CDM y también, se hace uso del análisis de las dos fases anteriores de investigación para llegar al diseño e implementación del cuestionario *CDM-Grupo.* En primer lugar, se inicia con el diseño de una prueba piloto, la cual permitió llegar a la versión final del instrumento, con el cual se evalúan los conocimientos de los estudiantes de Formación Matemática en relación con el objeto de investigación.

Para el logro de cada uno de los objetivos específicos se plantearon las siguientes actividades: Primera Fase de la investigación: actividades para el objetivo específico 1:

1. Estudio para determinar y describir los objetos primarios (fenómenos-situaciones problema, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en los sistemas de prácticas, de los cuales emerge el objeto Grupo: estudio histórico, fenomenológico y epistemológico, que permite identificar los distintos significados parciales del objeto matemático.

Segunda Fase de la investigación: actividades para los objetivos específicos: 2, 3 y 4:

2. Reconstrucción del significado global de referencia del objeto grupo, mediante ladescripción de los significados parciales obtenidos de la caracterización (prácticas, configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas) (objetivo 2).

3. Estudio del tipo de configuraciones epistémico-didácticas que se proponen en la dupla(libros de texto, planes de estudio) para el objeto matemático grupo, (objetivo 3 y 4) y estudio de la representatividad del significado pretendido por los textos y los planes de estudio sobre el objeto de investigación.

Tercera Fase de la investigación: actividades para los objetivos específicos 5, 6 y 7:

4. Estudio empírico del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de Formación Matemática en relación con con el objeto grupo; se realiza mediante el diseño e implementación del cuestionario piloto, recogida de datos y el análisis de los mismos.

5. Análisis mediante triangulación del juicio de expertos junto con los resultados obtenidos en el punto anterior: en busca de una mejora al cuestionario *CDM-Grupo*.

6. Análisis del cuestionario piloto para evaluar la faceta epistémica del conocimientodidáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática relacionado con el objeto matemático Grupo.

7. Caracterización de las categorías: Conocimiento Común del Contenido y Conocimiento Ampliado del Contenido, de los estudiantes de Formación Matemática relacionadas con el objeto Grupo, bases del conocimiento especializado del contenido.

8. Implementación del cuestionario definitivo a muestras intencionales de estudiantes deFormación Matemática; análisis de los resultados y estudio sobre los conocimientos personales y los conocimientos de referencia.

9. Análisis de las implicaciones del estudio y sus resultados, en cuanto al aporte para elprograma de formación inicial de profesores y para el programa de Matemáticas.

Tabla 1.6: Fases de la investigación

FASES DE LA INVESTIGACIÓN	
1. ESTUDIO HISTÓRICO, EPISTEMOLÓGICO Y FENOMENOLÓGICO DEL OBJETO GRUPO: SIGNIFICADO GLOBAL DEL OBJETO GRUPO	2. ESTUDIO DEL SIGNIFICADO PRETENDIDO PARA EL OBJETOGRUPO, EN LOS PROGRAMAS Y LOS LIBROS DE TEXTO
3. EVALUACIÓN DEL CDM DE LOS ESTUDIANTES DE FORMACIÓN MATEMÁTICA	

1.8.2. Población

El estudio se desarrolló en una universidad Colombiana formadora de educadores (Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia), con los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y estudiantes de Matemáticas (estudiantes de formación matemática). Para el diseño del instrumento de evaluación, en primer lugar se aplicó la prueba piloto a los estudiantes en la asignatura de Teoría de Anillos de los dos programas. El diseño del cuestionario de evaluación, fue sometido a la revisión de expertos: Magister en ciencias Matemáticas en la línea de Álgebra Abstracta, doctores en la línea de Álgebra y doctores en Didáctica de la matemática en la línea de Álgebra abstracta y el cuestionario final se aplicó a los estudiantes que cursaban igualmente la asignatura de Teoría de anillos en los dos programas (Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas). Estos estudiantes, ya habían cursado asignaturas en la línea de Álgebra Abstracta, junto con asignaturas donde se trabajan grupos numéricos y por tanto, se espera que estos estudiantes posean un conocimiento del contenido matemático del objeto de investigación, en las categorías de Conocimiento Común y Conocimiento Ampliado, como bases de un conocimiento Especializado, necesario para la enseñanza del objeto Grupo.

1.8.3. Variables

En la tercera fase de la investigación relacionada con el diseño del instrumento para indagar el desarrollo y la potenciación del conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo de los estudiantes de formación matemática, se considera la variable cuantitativa: grado de corrección de los ítems, para el análisis del cuestionario y la variable cualitativa que corresponde al tipo de configuración epistémica activada en cada una de las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes al solucionar las situaciones problemáticas planteadas; esta variable se analiza en las tres fases de la investigación.

La variable cualitativa: configuración epistémica activada en las prácticas matemáticas, se identifica a partir del análisis documental en la primera fase del estudio y de igual forma, en el análisis de los libros de texto y en la evaluación del cuestionario. Esta variable se denomina configuración epistémica cognitiva si es del sujeto que realiza la práctica y se relaciona con las configuraciones epistémicas caracterizadas en la primera fase de la investigación.

1.8.4. Técnicas e instrumentos para la recolección y el procesamiento de datos

Para los estudios E1 y E2, se utiliza la técnica del análisis semiótico que permite caracterizar la variable cualitativa: configuración epistémica. Esta técnica permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática de los matemáticos en los dos primeros estudios, como la actividad realizada por los estudiantes de Formación Matemática al resolver los problemas planteados en el cuestionario, junto con los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos-definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos) y los procesos de significación que intervienen en las prácticas realizadas (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007) algunos de los cuales corresponden a procesos del PMA. La segunda variable tiene un carácter cuantitativo: grado de corrección de los ítems y se analiza con técnicas estadísticas.

Finalmente, en la tercera fase del estudio, se diseña el cuestionario que permite explorar por medio de prácticas matemáticas operativas y discursivas desarrolladas por los estudiantes, el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, relacionado con el objeto Grupo: se caracteriza a partir de las prácticas matemáticas y en las componentes del conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido, como bases del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza del objeto matemático.