El Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor Universitario

El Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor Universitario

Omaida Sepúlveda Delgado

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Tunja - Colombia
2018

El conocimiento didáctico matemático del profesor universitario/ Sepúlveda Delgado, Omaida. Tunja: Editorial UPTC, 2018. 368 p.

ISBN 978-958-660-306-5

1. Conocimiento didáctico. 2. Conocimiento matemático. 3. Epistemología. 4. Enseñanza universitaria. 4. Matemáticas.

(Dewey 378/21).

Primera Edición, 2018
Impreso/Digital
El conocimiento didáctico matemático del profesor universitario
ISBN 978-958-660-306-5

Colección de Investigación UPTC No. 109

Editorial UPTC
Edificio Administrativo – Piso 4
Avenida Central del Norte 39-115, Tunja, Boyacá
comite.editorial@uptc.edu.co
www.uptc.edu.co

Libro financiado por la Dirección de Investigaciones de la UPTC.

Libro resultado de investigación.

Citación: Sepúlveda, O. (2018). *El conocimiento didáctico matemático del profesor universitario.* Tunja: Editorial UPTC.

Dedicado a:

Daniel Camilo, Johan Sebastián,
Zagalo; a mis padres, hermanos,
sobrinos y a todas las personas que
forman parte de mi familia.

Como el camino está sembrado de espinas, Dios ha dado al hombre tres dones: la sonrisa, el sueño y la esperanza. Immanuel Kant (1724 - 1804)

Agradecimientos

Doy gracias:

A Dios, por darme la fuerza y voluntad para llegar al logro de esta gran meta y a todas las personas que me ayudaron a consolidar este gran proyecto.

Al doctor Eliécer Aldana, que con su ejemplo, dedicación y conocimiento, se convirtió en un maestro de sabios consejos.

Al doctor Viçent Font Moll, que con sus conocimientos supo en el momento oportuno, indicarme el camino para el desarrollo del trabajo de investigación.

A la doctora Aurora del Rio Cabeza por su colaboración, sugerencias y especialmente, por la dirección en los temas de Álgebra Abstracta y su didáctica. De igual forma, a los doctores del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que me ofrecieron su colaboración y me permitieron compartir sus trabajos.

Al doctor Luis Rico y a la doctora Encarnación Castro, que a través de sus cursos y textos hicieron posible el llegar a comprender algunos de los temas que hacen parte de esta tesis doctoral.

Al doctor Jorge Tomás Uribe, por su dedicación y paciencia; por su comprensión y apoyo incondicional.

Doy gracias al doctor Willian Alfonso Pacheco Serrano, por su gran colaboración; por sus extraordinarias ideas y por su paciencia.

Al doctor Pedro Javier Rojas Garzón, por su colaboración, dedicación, conocimientos y aportes, en la organización del trabajo final.

Al doctor Alfonso Jiménez, por sus consejos, ayuda y dirección y a todos los profesores del Doctorado en Educación por sus grandes conocimientos y su apoyo: Celina Trimiño, Aracely Forero, Martha Pardo, Carlos Londoño, Nubia Agudelo, Wilson Valenzuela, Diana Elvira Soto, Luisa Amezquita; Janeth Vargas.

A mis colegas de la Escuela de Matemáticas y Estadística y a mis compañeros del doctorado que me ofrecieron su ayuda, amistad y apoyo en todo momento.

A los docentes de Álgebra: Nelsy R. González, Misael González, Verónica Cifuentes, Wilmer M. Gómez, Cesar Espinosa, Julián Serna, Héctor Suárez, Pedro Nel Maluendas, de igual forma, al doctor Ismael Gutiérrez, por su colaboración, paciencia y aportes en la revisión de documentos importantes para el desarrollo de la investigación.

A los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos,) les doy las gracias por permitirme compartir sus experiencias para llegar a la consolidación de estos conocimientos.

A Zagalo Enrique, Daniel Camilo y Johan Sebastián, gracias por su apoyo y cariño en todo momento.

Índice

Introducción general........21
1. El Marco de la investigación........25
1.1. Introducción........25
1.2. Tema y delimitación del tema........25
1.2.2. Conocimiento del Profesor Universitario........25
1.3. Áreas problemáticas........28
1.3.1. Problemática en la comprensión de nociones de Teoría de Grupos........28
1.3.2. Problemática con el significado de los objetos matemáticos........28
1.3.3. Problemáticas relacionadas con las propuestas didácticas de álgebra abs-tracta........29
1.4. Formulación del problema de investigación........29
1.5. Objetivos........30
1.5.1. Objetivo general........31
1.5.2. Objetivos específicos........31
1.6 Justificación........32
1.6.1. Contexto internacional........33
1.6.2. Contexto nacional........34
1.7. Marco teórico........35
1.7.1 Pensamiento matemático avanzado........35
1.7.2. Pensamiento algebraico........37
1.7.3. Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos -EOS........43
1.7.3.1 Sistemas de prácticas........45
1.7.3.2. Objeto matemático........45
1.7.3.3. Significados de los objetos matemáticos........47
1.7.3.4. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos........49
1.7.3.5. Facetas y niveles del análisis didáctico........50
1.7.3.6. Análisis semiótico........55
1.7.3.7. El conocimiento........57
1.7.3.8. La complejidad de los objetos matemáticos........59
1.7.3.9. Fenomenología........59
1.7.3.10. El Álgebra moderna y la Fenomenología........62
1.7.4. La noción de significado de Frege........63
1.7.5. Modelos para el estudio del Conocimiento del Profesor........65
1.8. Metodología........72
1.8.1. Componentes y fases de la investigación........73
1.8.2. Población........75
1.8.3. Variables........75
1.8.4. Técnicas e instrumentos para la recolección y el procesamiento de datos........76

2. Primer resultado: Estudio epistemológico........77
2.1. Introducción........77
2.2. Estudio de los significados de la estructura algebraica........77
2.2.1 Génesis del álgebra........78
2.2.2. Época antigua y edad media (Siglo V-XV)........84

2.2.3. Edad Media (siglo V - siglo XV)....87
2.2.4. El renacimiento (siglo XV-XVI)....91
2.2.5. Edad moderna (finales del siglo XVII-XVIII)....97
2.2.6. Edad contemporánea (XIX a la actualidad....102
2.3. Configuraciones socio_epistémicas en problemas relacionados con el objeto Grupo....121
2.3.1. Problema 0.1: Solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 en lamatemática egipcia....123
2.3.2. Problema 0.2: Solución de ecuaciones: Distribución de un área en cuadrados - egipcios....125
2.3.3. Problema 0.3: Solución de ecuaciones algebraicas de grado 2 y 3 por losbabilonios....126
2.3.4. Problema 0.4: Solución de la ecuación algebraica de grado 2 por los griegos....127
2.3.5. Problema 0.5: Solución de ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 por loshindúes..127
2.3.6. Problema 0.6: Solución de las ecuaciones de grado 2 por los árabes....128
2.3.7. Problema 0.7: Solución de las ecuaciones de grado 2 aplicando propiedades de los números cuadrados (Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo, Fibonacci)....129
2.3.8. Problema 0.8: Método de Fibonacci para la solución de ecuaciones algebraicas de grado 3....129
2.3.9. Problema 0.9: Método de resolución para un caso especial de la ecuacióncúbica (Scipione del Ferro)....130
2.3.10. Problema 0.10: Método de resolución de un caso de ecuación cúbica (NiccoloFontana-Tartaglia)....131
2.3.11. Problema 1.1: Solución de un caso especial de la ecuación cúbica (GerolamoCardano)....132
2.3.12. Problema 1.2: Solución por radicales de las ecuaciones algebraicas generales de grado 3 y 4 en la edad media....133
2.3.13. Problema 1.3: Solución general de la ecuación bicuadrática (Ludovico Ferrari)....135
2.3.14. Problema 1.4: Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas (Cardano y Viète)....136
2.3.15. Problema 1.5: Solución general de las ecuaciones de grado 2 (Francois Viète)......139
2.3.16. Problema 1.6: Solución general de la ecuación algebraica de grado 3 (Francois Viète)....137
2.3.17. Problema 1.7: El simbolismo algebraico y la solución de la ecuación de grado 4 (Thomas Harriot)....139
2.3.18. Problema 1.8: Solución de la ecuación algebraica de grado 4 (Euler)....139
2.3.19. Problema 1.9: Planteamiento de problemas geométricos relacionados con ecuaciones algebraicas de grado 4 (René Descartes)....142
2.3.20. Problema 1.10: El problema de Pappus (Descartes)....143
2.3.21. Problema 1.11: Problemas en Teoría de números: Aritmética modular (Fermat)..144
2.3.22. Problema 1.12: Problemas en Teoría de números: Aritmética modular (Euler)...144
2.3.23. Problema 1.13: Las resolventes de Lagrange y el conjunto S_3....144
2.3.24. Problema 1.14: El teorema de Lagrange....149

2.3.25. Problema 2.1: Imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado 5 (Paolo Ruffini)....................150
2.3.26. Problema 2.2: Generalización del Teorema de Rufinni (Agustín Louis Cauchy)..151
2.3.27. Problema 2.3: Imposibilidad de resolver por radicales la ecuación algebraica general de grado 5 (Niels Henrik Abel)....................152
2.3.28. Problema 3.1: Problemas en aritmética modular (Carl Friedrich Gauss)...............154
2.3.29. Problema 3.2: Solución de ecuaciones ciclotómicas (Carl Friedrich Gauss)..........155
2.3.30. Problema 3.3: Teorema Fundamental del Álgebra (Carl Friedrich Gauss)............156
2.3.31. Problema 3.4: Ecuaciones solubles por radicales: el grupo de Galois asociado a la ecuación polinomial (Évariste Galois)....................157
2.3.32. Problema 4.1: Propiedades generales de los grupos continuos de transformaciones (Sophus Lie)....................161
2.3.33. Problema 4.2: La clasificación de las Geometrías (Felix Klein)..............................162
2.3.34. Problema 4.3: La clasificación de los grupos finitos simples..................................164
2.3.35. Problema 4.4: La clasificación de los grupos cristalográficos..................................165
2.3.36. Problema 4.5: La clasificación de los grupos puntuales...166
2.3.37. Problema 4.6: Los grupos en la Física....................167
2.3.38. Problema 5: Primera definición abstracta de Grupo (Cayley)................................169
2.4. Significado global del objeto Grupo....................170
2.5. Importancia del estudio fenomenológico sobre la estructura Grupo.....................172
2.6. La estructura algebraica Grupo en los programas y libros de Texto.......................172
2.6.1. La Teoría de Grupos en el currículo nacional....................173
2.6.2. La Teoría de Grupos en los programas de formación matemática.........................174
2.6.3. La Teoría de Grupos en los libros de texto....................175

3. Segundo Resultado: Diseño de un instrumento para evaluar el CDM............193
3.1. Introducción....................193
3.2. Objetivo del instrumento, *CDM - Grupo*....................194
3.3. Construcción del instrumento *CDM - Grupo*....................195
3.3.1. Criterios para la selección de tareas....................195
3.3.2. Selección de tareas para la versión piloto del cuestionario....................199
3.3.3. Revisión del instrumento mediante juicio de expertos....................202
3.3.3.1. Análisis del contenido de las tareas....................202
3.4. Prueba piloto del instrumento *CDM-Grupo*....................246
3.4.1. Análisis cuantitativo de la prueba piloto en el grupo de Licenciados en Matemáticas....................246
3.4.1.1. Análisis de la fiabilidad....................253
3.4.1.2 Análisis del índice de dificultad....................254
3.4.2. Análisis cuantitativo de la prueba piloto en el grupo de estudiantes de Matemáticas....................267
3.4.2.1 Análisis de la fiabilidad....................271
3.4.2.2 Análisis del índice de dificultad....................271
3.4.3. Análisis cualitativo de la prueba piloto....................283
3.5. Versión final del instrumento *CDM-Grupo*....................*293*

4. Tercer Resultado: Evaluación del Conocimiento Didáctico-Matemático........297
4.1. Introducción.....297
4.2. Método.....298
4.3. Población.....298
4.4. Material y procedimientos.....298
4.5. Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática para la enseñanza del objeto Grupo.....299
4.5.1. Análisis de la puntuación total del cuestionario *CDM-Grupo*.....299
4.5.2. Análisis del índice de dificultad a las preguntas del cuestionario.....306
4.5.3. El Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática.....321
4.5.3.1. Análisis del Conocimiento Común del Contenido.....326
4.5.3.2. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Común del Contenido.....332
4.5.3.3. Análisis del Conocimiento Ampliado del Contenido.....335
4.5.3.4. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido.....339
4.5.3.5. Análisis del Conocimiento Especializado del Contenido.....341
4.5.3.6. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Especializado del Contenido.....344

5. Conclusiones generales.....347
5.1. Introducción.....347
5.2. Primera fase de la investigación.....347
5.3. Segunda fase de la investigación.....347
5.3.1. Caracterización del significado del objeto grupo pretendido por los programas deestudio.....348
5.3.2. Significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto.....349
5.4. Tercera fase de la investigación.....351
5.4.1. Caracterización de la faceta epistémica del CDM.....351
5.4.2. Análisis de la dimensión epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática.....353

Referencias.....355

Índice de cuadros

1.1. Grupo V-4 de Klein....63
1.2. Triángulo semántico (término) de Frege....63
1.3. Triángulo semántico (concepto) de Frege....64
1.4. Conocimiento matemático para la enseñanza - MKT (Hill, Ball & Schilling, 2008)....67
1.5. Conocimiento común, especializado y ampliado del contenido matemático....72
1.6. Fases de la investigación....75
2.1. Significado dado al objeto Grupo en las civilizaciones antiguas y al inicio de la edad media....91
2.2. Significados dados al objeto Grupo en las civilizaciones antiguas, en la edad media y en la edad moderna....101
2.3. Significados dados al objeto Grupo en la edad contemporánea....105
2.4. Significados dados al objeto Grupo....111
2.5. Significado del objeto Grupo....119
2.6. Configuración epistémica CE0....132
2.9. Configuración epistémica CE1....150
2.10. Configuración epistémica CE2....154
2.11. Configuración epistémica CE3....161
2.12. Configuración epistémica CE4.4....168
2.13. Configuración epistémica CE4.3....169
2.14. Configuración epistémica CE5....170
2.15. Libros de texto de Teoría de Grupos....176
2.16. Entidades matemáticas (unidades elementales), capítulo 1, del texto Contemporary Abstract Algebra....177
2.17. Entidades matemáticas (unidades elementales), capítulo 2, texto Contemporary Abstract Algebra....180
3.1. Criterios para la selección de tareas....197
3.2. Significados del objeto Grupo....233
3.3. Contenidos curriculares para el estudio del objeto Grupo....234
3.4. Categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático....235
3.5. Tareas del cuestionario piloto *CDM-GRUPO*....236
3.6. Resultados de la prueba piloto - Licenciados en Matemáticas....249
3.7. Resultados en la prueba piloto de los Licenciados en Matemáticas....250
3.8. Distribución de frecuencias de la puntuación total en el grupo de Licenciadosen Matemáticas....251
3.9. Distribución de frecuencias de la puntuación total de los Licenciados en Matemáticas....252
3.10. Puntuación total en la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas....525
3.11. Índice de dificultad de la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas....255
3.12. Resultados de la prueba piloto - Matemáticos....268
3.13. Resultados de Matemáticos....268
3.14. Distribución de frecuencias para la puntuación total de los Matemáticos....269
3.15. Distribución de frecuencias para la puntuación total de los Matemáticos....270

3.16. Puntuación total en la prueba piloto de los Matemáticos....270
3.17. Índice de dificultad de la prueba piloto para los Matemáticos....272
3.18. Organización de tareas del cuestionario *CDM-Grupo*....293
4.1. Puntuación para el cuestionario *CDM-Grupo*....300
4.2. Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G1 de Licenciatura....300
4.3. Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G2 de Licenciatura....303
4.4. Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G3 de Matemáticos....305
4.5. Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G1....307
4.6. Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G1....308
4.7. Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G2....310
4.8. Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G2....312
4.9. Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Matemáticos-G3....314
4.10. Índice de dificultad de las preguntas delcuestionario *CDM-Grupo*: Matemáticos-G3....315
4.11. Índice de dificultad del cuestionario *CDM-Grupo*....*317*
4.12. Subítems de mayor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1 y G2 de Licenciatura....319
4.13. Subítems de mayor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1, G2, G3....320
4.14. Subítems de menor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1, G2, G3....320
4.15. Categorías del CDM....322
4.16. Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 1a)....328
4.17. Tipos de respuestas al subítem 1a)....329
4.18. Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 2d)....330
4.19. Tipos de respuestas subítem 2d) 331
4.20. Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática..336
4.21. Tipos de respuestas al subítem 5a)....337
4.22. Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática....338
4.23. Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática....343
4.24. Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática....344

Índice de figuras

1.1. Objetos y procesos matemáticos (Godino et al., 1994)....46
1.2. Tipología de significados sistémicos (Pino-Fan, 2013)....48
1.3. Configuración epistémica (Font & Godino, 2006)....50
1.4. Facetas del Análisis Didáctico (Godino, 2009)....51
1.5. Idoneidad didáctica (Godino, 2011)....54
1.6. Relación entre los modelos: MKT y CDM (Pino-Fan, 2013)....70
2.1. Clasificación de los grupos finitos simples ((s.f.). Recuperado de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm)....116
2.2. Grupo cristalográfico plano, (Rivero, 1999)....117
2.3. Caso particular para cuatro rectas (Chavarría, 2014, p. 69)....143
2.4. Demostración del teorema de Ruffini de 1813 (dimat.unipv.it/ rosso/Ruffini-Abel)..151
2.5. Significado global del objeto Grupo....172
3.1. Tareas según el significado del objeto Grupo y grado de relevancia....242
3.2. Tareas según el contenido curricular para el objeto Grupo y grado de relevancia. OB=Operación binaria; EA=Estructuras algebraicas; GEC=Grupo, ejemplos y contraejemplos; S=Subgrupo; OG=Orden del grupo; PG=Propiedades del grupo...243
3.3. Tareas de la subcategoría del CDM y grado de relevancia. CCC=Conocimiento común del contenido; CAC= Conocimiento ampliado del contenido; CEC=Conocimiento especializado del contenido....244
3.4. Sugerencia de expertos a la tarea 2....246
3.5. Resultados de la prueba piloto en el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas....252
3.6. Distribución de las puntuaciones y puntuación media en la prueba piloto de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas....256
3.7. Dificultad de los ítems en la prueba piloto - estudiantes de Licenciatura en Matemáticas....256
3.8. Respuesta a la pregunta 1 - estudiante L1....258
3.9. Respuesta a la pregunta 2 - estudiante L11....259
3.10. Respuesta a la pregunta 3 - estudiante L11....261
3.11. Respuesta a la pregunta 4 - estudiante L9....262
3.12. Respuesta a la pregunta 5 - estudiante L4....263
3.13. Respuesta a la pregunta 6 - estudiante L1....265
3.14. Respuesta a la pregunta 7 - estudiante L1....266
3.15. Resultados de la prueba piloto a los Matemáticos....269
3.16. Distribución de las puntuaciones y puntuación media en la prueba piloto de los Matemáticos....270
3.17. Preguntas e índice de dificultad - Estudiantes de Matemáticas....273
3.18. Respuesta a la pregunta 1 - estudiante M1....274
3.19. Respuesta a la pregunta 2 - estudiante M2....275
3.20. Respuesta a la pregunta 3 - estudiante M3....277
3.21. Respuesta a la pregunta 4 - estudiante M5....278
3.22. Respuesta a la pregunta 5 - estudiante M6....279
3.23. Respuesta a la pregunta 6 - estudiante M4....281

3.24. Respuesta a la pregunta 7 - estudiante M3 283
4.1. Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G1 de Licenciatura 301
4.2. Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G1 de Licenciatura 302
4.3. Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G2 deLicenciatura 303
4.4. Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G2 de Licenciados 304
4.5. Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G3 de Matemáticos 305
4.6. Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G3 de Matemáticos 306
4.7. Dificultad de los ítems: Estudiantes de Licenciatura - G1 309
4.8. Dificultad de los ítems: Estudiantes de Licenciatura - G2 313
4.9. Dificultad de los ítems: estudiantes de Matemáticas - G3 316
4.10. Subítems del Conocimiento Común del Contenido 327
4.11. Respuesta al subítem 1a -CCC- estudiante LM15 330
4.12. Respuesta al subítem 2d -CCC- estudiante LM32 332
4.13. Conocimiento Común del Contenido - respuestas correctas 334
4.14. Conocimiento Común del Contenido - respuestas parcialmente correctas 334
4.15. Subítems del Conocimiento Ampliado del Contenido 336
4.16. Respuesta al subítem 5a -CAC- estudiante LM29 338
4.17. Conocimiento Ampliado del Contenido - respuestas correctas 341
4.18. Conocimiento Ampliado del Contenido - respuestas parcialmente correctas 341
4.19. Subítems del Conocimiento Especializado del Contenido 342
4.20. Conocimiento Especializado del Contenido - respuestas correctas 344
4.21. Conocimiento Especializado del Contenido - respuestas parcialmente correctas 345

Resumen

Título: El conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario

Un problema de investigación en Didáctica de la Matemática en el campo de Formación de Profesores, corresponde a la identificación de las componentes del conocimiento del profesor, necesario para una enseñanza efectiva (idónea) de tópicos específicos de la Matemática en el ámbito universitario. Se han realizado investigaciones en torno a la identificación del complejo de conocimientos que el profesor necesita para que su práctica sea efectiva y así, se facilite el aprendizaje de sus estudiantes (Shulman, 1986; Ball, 2000; Hill, Ball & Schilling, 2008; Godino, 2009) pero, pocos estudios se han orientado a la caracterización del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)[1] de los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) respecto al objeto matemático Grupo, para la labor de la docencia universitaria.

En este sentido, este estudio pretende ser un aporte en el campo de formación inicial de profesores de matemáticas, al buscar dar respuesta a la pregunta ¿qué conocimiento matemático básico, necesitan los estudiantes de formación matemática para una enseñanza idónea del objeto Grupo? La pregunta se relaciona con la caracterización del Conocimiento Didáctico y Matemático, que debe tener el profesor universitario sobre el contenido matemático como objeto institucional, cuya enseñanza se planifica, implementa y evalúa (Pino-Fan, Godino & Font, 2013a, 2013b). Para dar respuesta a la pregunta, en primer lugar, se reconstruyen los significados del objeto Grupo a través de su evolución histórica; de estos significados emerge precisamente el significado global[2] del objeto matemático. A partir de este estudio, se pasa a analizar los significados del objeto de investigación, pretendidos por los libros de texto: cuatro libros de los cursos clásicos de Teoría de Grupos y los planes de estudio de los estudiantes de formación matemática. Finalmente, como otra de las fases de la investigación que hace uso de las anteriores, se diseña e implementa el instrumento que permite evaluar el conocimiento CDM de los estudiantes de

1 Modelo del Conocimiento del Profesor, desarrollado en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, 2009).

2 Significado Global o significado holístico de referencia que da cuenta de la complejidad del objeto de investigación. En el EOS, se entiende el significado de un objeto matemático desde una perspectiva pragmática es decir, en términos de los sistemas de prácticas en los que dicho objeto interviene.

formación matemática, sobre el objeto de investigación en la componente epistémica de este CDM (Godino, 2009).

La metodología para el estudio es de tipo mixta; ya que contempla tanto la parte cualitativa como la cuantitativa. La caracterización del significado Global del objeto Grupo, se desarrolló a partir de un estudio semiótico y documental de tipo histórico, epistemológico y fenomenológico, indagando en libros de Historia de la Matemática, biografías de autores e investigaciones realizadas en Didáctica del Álgebra. El análisis de los libros de texto se realizó también aplicando la técnica del análisis semiótico desarrollada en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) y finalmente, para el diseño e implementación del instrumento que permitió evaluar el CDM de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo, se utilizó la metodología para el diseño de instrumentos orientados a explorar aspectos del CDM - Modelo CDM - desarrollado en el marco del EOS (Godino, 2009; Pino-Fan, Godino & Font, 2013a, 2013b; Vázquez, 2014).

En esta dirección, se presenta el desarrollo del estudio dirigido a caracterizar el Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) de los estudiantes de formación matemática de una Universidad Colombiana, formadora de profesores de Matemáticas (UFPM), mediante el diseño e implementación de un instrumento para evaluar la componente epistémica del CDM de los estudiantes para la labor de la enseñanza universitaria.

Palabras claves: Formación inicial de Profesores universitarios, Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor, Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción Matemática (EOS), objeto matemático Grupo.

Abstract

TITLE: DIDATIC-MATHEMATICAL UNIVERSITY TEACHERS' KNOWLEDGE FOR THE TEACHING OF THE OBJECT GROUP

Topic: University teachers' knowledge

One of the researches problems in mathematic's Didactic taking into account the teacher's training is about the identification of knowledge components from teachers, which are necessaries for obtaining an effective teaching (suitable) about specifics issues in mathematics in the university. There are some researches about the identification of knowledge which the teacher needs for obtaining an effective practice and in the same way, the students' learning will be easy for them (Shulman, 1986; Ball, 2000; Hill, Ball & Schilling, 2008; Godino, 2009) but, Few researches have been aiming at the characterization of Didactic- Mathematical knowledge (CDM) [3] of the mathematical students (Mathematical graduates and mathematicians) taking into account the mathematical object "Group" for practicing the university teaching.

In this way, this research tries to be a contribution in the initial training field of mathematics teachers, when they look for one answer to the question: ¿what basic mathematical knowledge do the mathematical training's students need for obtaining a suitable teaching about the object "Group"? This question is related to the characterization of Didactic-Mathematical knowledge, which the university teacher has to have about mathematical content like institutional object whose teaching is planned, implemented and evaluated (Pino-Fan, Godino & Font, 2013). For answering the question, are followed some steps: first, there are reconstructed meanings from the object "Group" through its historical evolution; justly, from those meanings appear a global meaning[4] of the mathematical object. Starting from this research, the meanings of the research's object found in the textbooks were analyzed: four books from the classic courses about groups' theory and syllabuses for mathematical training's students. Finally, there was one phase which used the

3 Model of the knowledge of the teacher, developed in the Ontosemiotic approach of knowledge and the mathematical instruction (Godino, 2009).

4 Meaning or Global holistic reference which gives an account of the complexity of the subject of investigation. In the EOS, understood the meaning of a mathematical object from a pragmatic perspective, in terms of the systems of practices in which said object involved.

other previous phases; there was designed and implemented an instrument which allows evaluating the knowledge CDM of mathematical training's students about the research object in the epistemic component from this CDM (Godino, 2009).

The methodology in this research is mixed because it contemplates the qualitative part and the quantitative part too. The characterization of the global meaning of the object "group" was developed starting from a semiotic study and a historical, epistemological and phenomenological documentary; it was done, inquiring into books about mathematics history, biographies about authors and researches done in algebra's Didactic. The analysis of textbooks was done applying the semiotic analysis technique developed in the ontosemiotic approach of knowledge and mathematical instruction (EOS) and finally, for the design and implementation of the instrument which allowed to evaluate the CDM of the mathematical training's students about the object "Group"; there was used the methodology for the design of instruments which are aiming at exploring CDM aspects - CDM model - developed in the framework of the EOS (Godino, 2009; Pino-Fan, Godino & Font, 2013; Vázquez, 2014).

In this way, the development of the study is proposed; which is aimed at characterizing the Didactic Mathematical knowledge (CDM) of the mathematical training's students from a Colombian University, Math a teacher educator (UFPM), by means of the design and implementation of one instrument which allows to evaluate the epistemic component of this CDM of the mathematical training's students for teaching in the university.

Keywords: initial training of university teachers, Didactic Mathematical knowledge of the teacher, ontosemiotic approach of knowledge and mathematical instruction (EOS), mathematical object "group".

Introducción general

Este estudio se realizó desde una corriente de investigación didáctica en Formación de Educadores, y a través del marco conceptual del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática - EOS, los cuales permitieron dar una respuesta parcial a la pregunta ¿cómo es que los estudiantes de formación matemática, construyen los significados matemáticos, los transforman y los representan para la enseñanza universitaria de tópicos de Teoría de Grupos? En esta dirección, la presente investigación se centra en la caracterización de los conocimientos básicos, que necesitan los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas, Matemáticos), para la labor de la docencia universitaria en tópicos de Teoría de Grupos. Para esto, se parte del hecho concreto que los estudiantes de formación matemática tienen un conocimiento de la materia o del contenido sobre el objeto matemático, que hace posible la realización del análisis sobre la potenciación o desarrollo de los conocimientos matemáticos y didácticos necesarios para la enseñanza universitaria.

La investigación, se inscribe en la línea de: Historia y prospectiva de la Educación superior y Formación de Educadores en Iberoamérica. En esta dirección, para el presente estudio se realizó como primera fase de la investigación, un estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Grupo: objeto que se ubica en el estudio del desarrollo del Pensamiento Matemático Avanzado o universitario de los estudiantes. De igual forma, otra de las fases de investigación, se relaciona con el estudio de los conocimientos matemáticos y didácticos de los estudiantes de Formación Matemática para la labor de la enseñanza universitaria, como futuros profesionales: se puede establecer que el análisis de dichos conocimientos se puede ubicar en el campo de la Formación de Educadores (Jiménez, Leguizamón & Díaz, 2011; Uribe, 2010; Uribe & Soto, 2007). El estudio de los conocimientos de los futuros profesores -estudiantes en formación matemática- se viene desarrollando, no solo a nivel local y nacional, sino que el estudio de los conocimientos matemáticos y didácticos relacionados con el objeto Grupo, se realiza a nivel internacional, de aquí la importancia de la presente investigación.

En esta dirección, el estudio, se dirige a la caracterización de la dimensión epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo; esta dimensión corresponde a uno de los componentes fundamentales del conocimiento CDM, definido en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS)[5] y la *faceta epistémica del CDM* y se relaciona con el conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto institucional, cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa. En el modelo del CDM (Godino, 2009) esta faceta se encuentra dividida en tres categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático: conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido: estos conocimientos se consideran en la investigación como base para la potenciación o desarrollo de un conocimiento especializado, necesario para la labor de la enseñanza (Pino-Fan et al., 2013a, 2013b).

Bajo esta perspectiva, el estudio se divide en cinco capítulos, a través de los cuales se va avanzando para lograr el objetivo propuesto en la investigación. En el capítulo 1, se presenta el marco de la investigación, en el se analiza en el primer y segundo apartado, la evolución de la investigación en el tema del Conocimiento Profesional del docente: investigación didáctica, en la línea de Formación de Profesores de Matemáticas. Estas investigaciones pretendían analizar la naturaleza, características y el grado del conocimiento matemático que tienen y deben tener los profesores para desarrollar la labor docente (Cardeñoso, Flores & Azcárate, 2001; Godino, 2012, en Rojas, Flores & Carrillo, 2013); de igual forma se presentan las diversas perspectivas teóricas desde las cuales se puede abordar el estudio del conocimiento del profesor, para la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos, hasta llegar a la perspectiva que se describe con más detalle en el marco teórico de la investigación y corresponde al modelo del Conocimiento Didáctico - Matemático del profesor: modelo desarrollado por Godino (2009) en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática-EOS.

En la tercera sección, se presentan las áreas problemáticas que hacen referencia en primer lugar, a la comprensión del objeto Grupo y que se centran en el estudiante de Licenciatura en matemáticas en formación inicial; en segundo lugar, se analiza el proceso de abstracción como parte de los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado-PMA, necesarios para lograr esa comprensión del objeto de investigación; seguidamente, se presenta la problemática de la adquisición de significado de los objetos matemáticos: se describe la Fenomenología o el análisis fenomenológico, que pretende que el estudiante encuentre o le asigne un significado a los objetos matemáticos para llegar a la comprensión de los mismos. Finalmente, luego de establecer las problemáticas que muestran la complejidad del objeto Grupo para el estudiante de formación matemática se pasa a analizar al estudiante para su desempeño profesional, con unos conocimientos que va a utilizar en la enseñanza del tópico matemático y se describe entonces la problemática relacionada con la

5 Marco teórico desarrollado por (Godino, Contreras & Font, 2006; D'Amore, Font & Godino, 2007; Godino, Batanero & Font, 2007; Font & Contreras, 2008; Ramos & Font, 2008; Font, Planas & Godino, 2010, Pino-Fan, 2013)

determinación de los componentes del conocimiento que el profesor necesitaría para su desempeño idóneo como docente universitario.

En la siguiente sección del capítulo 1, se definen los objetivos específicos dando respuesta a preguntas concretas de investigación, resultado del análisis a las problemáticas y antecedentes presentados. Estos objetivos permiten describir el camino a seguir para llegar obtener el objetivo general propuesto y además, permiten dar respuesta a la pregunta de investigación. Seguidamente, se justifica el porqué del interés en relacionar el objeto Grupo y el CDM del profesor universitario: se tiene presente en este capítulo que la investigación sobre el CDM de los profesores en formación es una línea de investigación en didáctica de la matemática, que se ha ido incrementando como lo muestra el gran número de investigaciones existentes en esta dirección.

En el capítulo 1, en la sección séptima, se consolida el marco teórico de la investigación, en el cual se presentan las herramientas teóricas que permiten explorar el conocimiento del estudiante de formación matemática sobre el contenido matemático y respecto del objeto Grupo. Se describe de igual forma, la metodología de la investigación, la cual presenta un enfoque mixto a nivel exploratorio y con un carácter descriptivo; se presentan las etapas implementadas para el desarrollo del estudio: la primera fase, corresponde al estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo; la segunda fase, corresponde al análisis semiótico de textos de Teoría de Grupos y en la tercera fase de la investigación, se presenta el diseño e implementación del instrumento para evaluar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática sobre el objeto Grupo. Finalmente, se describe la población para el estudio, el cual se desarrolla en una Universidad Colombiana formadora de profesores de Matemática, con los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas (estudiantes de formación matemática).

En el capítulo 2, se presenta el primer resultado de la investigación que corresponde al estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo; este capítulo inicia con la argumentación sobre "el porqué del estudio de los significados del objeto matemático grupo" y avanza a la presentación del estudio histórico y fenomenológico, donde se presenta la emergencia del objeto de investigación a través de diferentes etapas, hasta llegar al surgimiento del significado global del objeto matemático. A partir de la descripción del proceso evolutivo del objeto Grupo, se realiza el análisis a las problemáticas que fueron dando forma al significado holístico del objeto Grupo: esto se realizó mediante la determinación de diferentes configuraciones socio-epistémicas y a partir de estas configuraciones, se pasó a describir las relaciones del significado del objeto de investigación.

En este capítulo, se analizan los programas de Teoría de Grupos, en las unidades relacionadas con la estructura algebraica, para determinar los significados pretendidos por cada programa y de igual forma, se realiza el análisis de cuatro textos de Teoría de Grupos, para determinar el significado (institucional) pretendido por cada uno de estos textos respecto al objeto de investigación. Así, este capítulo, tiene como objetivo presentar el tratamiento otorgado al objeto matemático en el currículo de los programas de formación matemática y en los libros de textos universitarios.

El capítulo 3, hace referencia al segundo resultado de la investigación y se denomina: Diseño e implementación del instrumento para evaluar el CDM de los estudiantes de formación matemática; se presenta en primer lugar el objetivo del instrumento, los criterios para la selección de tareas y el análisis de la prueba piloto. De igual forma se realiza un análisis de los resultados de la aplicación de la prueba, del juicio de expertos y de las tareas que se determinaron para el cuestionario final *CDM-Grupo*.

En el capítulo 4, se presenta el tercer gran resultado de la investigación y se denomina: Evaluación del Conocimiento Didáctico - Matemático de los estudiantes de formación matemática. En este apartado se analizan los resultados de la aplicación del cuestionario final *CDM-Grupo*. Se analizan las respuestas dadas por 36 estudiantes de formación matemática (16 estudiantes de Licenciatura en el grupo G1; 16 en el grupo G2 y 4 estudiantes de Matemáticas) a las situaciones problemáticas planteadas y se presenta el análisis de los conocimientos didácticos-matemáticos puestos en juego por los estudiante, para la resolución de estas situaciones problemáticas. Para el análisis, se divide el capítulo en tres secciones: la primera corresponde a la presentación del capítulo; en la segunda se describen algunos aspectos relacionados con la metodología y los sujetos participantes; los materiales y procedimientos empleados para la aplicación del cuestionario y finalmente, en la tercera sección se realiza un análisis de tipo cuantitativo-cualitativo (mixto) de los resultados de la aplicación del cuestionario junto con el análisis a la puntuación total del cuestionario y el análisis al índice de dificultad de los ítems. Finalmente, en el capítulo 5, se presentan las conclusiones generales respecto al desarrollo de las fases de investigación, conducentes al logro del objetivo general de la investigación.

En esta dirección, la investigación presenta un aporte en nuevos conocimientos, ya que en ella se caracterizan los conocimientos que tienen o deben tener los estudiantes de formación matemática en su formación inicial para la labor de la enseñanza universitaria sobre la estructura grupo, para una enseñanza idónea de los objetos algebraicos. Y como otro aporte importante, se presentan pautas, para el diseño de instrumentos y metodologías didácticas que permiten potenciar y desarrollar un conocimiento especializado del profesor universitario; conocimiento necesario para la labor de la enseñanza de la estructura algebraica Grupo.

Capítulo 1

El Marco de la investigación

1.1. Introducción

En este apartado se presenta una síntesis de los estudios en el tema del Conocimiento Profesional del docente; investigación didáctica, en la línea de Formación de Profesores de Matemáticas. En las investigaciones se analiza la naturaleza, características y grado del conocimiento matemático que tienen y deben tener los profesores para desarrollar su labor docente (Cardeñoso, Flores & Azcárate, 2001; Godino, 2012 en Rojas, Flores & Carrillo, 2013). En esta dirección, se presentan las diversas perspectivas teóricas para abordar el tema de investigación centrado en el estudio de las componentes del Conocimiento del Profesor, para la enseñanza universitaria, y en el caso específico de Teoría de Grupos, hasta llegar a la perspectiva que se describe con más detalle en el marco teórico y corresponde al modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor: modelo desarrollado por Godino (2009) bajo el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Cognición Matemáticos (EOS). De igual forma se presentan las áreas problemáticas, la formulación del problema, los objetivos de la investigación, su justificación, el marco teórico y la metodología utilizada en el desarrollo del estudio.

1.2. Tema y delimitación del tema

1.2.1. Conocimiento del Profesor Universitario

Las investigaciones en el Conocimiento del Profesor, tienen sus orígenes en el paradigma del Pensamiento del Profesor, abordadas en sus inicios desde una perspectiva cognitiva (García, 1992); comprendía aspectos como el estudio de los procesos de razonamiento, juicio y toma de decisiones que contribuían al desarrollo de la conducta del docente. Esta línea de investigación tiene el objetivo de explorar la naturaleza, forma, organización y contenido del conocimiento de los profesores (Grossman, Wilson & Shulman, 1989); en ellas se usaron diferentes conceptos para referirse al conocimiento del profesor: Conocimiento del Oficio (Brown & McIntyre, 1986 citado en García, 1992); Conocimiento Práctico Personal(Clandinin, 1986), Paradigmas funcionales de los profesores (Crocket, 1983 citado en García, 1992), Conocimiento Práctico (Elbaz, 1983), Teorías Implícitas de los Profesores (Hunt, 1985 citado en García, 1992),Conocimiento Profesional y reflexión en la acción (Schön, 1983); Conocimiento Didáctico del Contenido(Shulman, 1986; 1987); Conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Hill & Bass, 2005) y Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009; Pino-Fan, 2013).

Elbanz (1983) en sus estudios, incluye cinco categorías del Conocimiento práctico del profesor: conocimiento de sí mismo, del contexto, del contenido, del currículo y de la enseñanza; Leinhard & Smith (1985, citado en García, 1992) categorizaron el conocimiento del profesor en: Conocimiento del contenido y Conocimiento de la estructura de la lección: en esta dirección, en el artículo: The Knowledge Growth in Teaching, de Shulman (1986) se definen tres categorías del conocimiento del profesor: Conocimiento del contenido, Conocimiento pedagógico y Conocimiento del currículo.

Posteriormente, Shulman (1987) en su artículo: knowledge and theaching: fundations of new reform, pasa a definir siete categorías como la Base de Conocimientos del Profesor: Conocimiento del contenido, Conocimiento didáctico general, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trascienden el ámbito de la asignatura; Conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como "herramientas para el oficio" del docente; Conocimiento didáctico del contenido: la amalgama entre materia y pedagogía que constituyen una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional; Conocimiento de los alumnos y de sus características; Conocimiento de los contextos educativos, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas y Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos y de sus fundamentos filosóficos e históricos.

En la misma dirección, Carter (1990, citado en García, 1992) categorizó la línea de investigación sobre el Conocimiento del Profesor en tres grupos: Estudios sobre el procesamiento de la información y comparación expertos-principiantes; Estudios sobre el Conocimiento Práctico; Investigaciones sobre el conocimiento didáctico del contenido; en este grupo se encuentran los estudios en los cuales se analiza específicamente el conocimiento que los profesores poseen respecto al contenido que enseñan, así como la forma en que los profesores trasladan ese conocimiento en un tipo de enseñanza que produce comprensión en los alumnos. Carter (1990) señala en el tercer grupo un cambio en el tipo de investigación sobre los conocimientos del profesor catalogada como del Pensamiento del profesor, hacia una investigación más comprometida con los contenidos que enseñan los profesores (García, 1992).

Elmore (1992), plantea que es probable que la enseñanza eficaz varíe considerablemente de disciplina a disciplina; a diferencia de la investigación sobre la enseñanza eficaz que intenta identificar destrezas genéricas de los docentes: se argumenta que la actual investigación se centraba en las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje de disciplinas específicas y que la actual investigación sobre la enseñanza, se centra principalmente en los requisitos específicos para comprender una disciplina. Las investigaciones actuales, tratan de comprender la complejidad de la enseñanza de las diferentes disciplinas académicas que configuran los currículos (García, 1992).

Bajo esta visión, Ball, Hill & Bass (2005), proponen un modelo del Conocimiento del profesor, conocido como Conocimiento Matemático para la Enseñanza: Mathematical Knowledge for Teaching-MKT: nombre que surge de los estudios referentes a la práctica docente en el ámbito matemático y a la identificación de las tareas habituales que realizan los profesores. Ball et at. (2001, 2005, 2008) estudian la naturaleza del conocimiento matemático necesario para enseñar y cómo este ayuda en el trabajo de la enseñanza, estableciendo una base práctica basada en el Conocimiento Matemático para la Enseñanza: MKT, que definen como una clase de conocimiento profesional de las matemáticas. El MKT hace referencia al conocimiento matemático que los profesores utilizan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos (Hill, Ball & Schilling, 2008).

Este conocimiento MKT es específico de los profesores e implica analizar los errores de los alumnos, examinar las estrategias utilizadas para la resolución de una tarea matemática, explicar a los alumnos cuando no comprenden, saber responder a cuestiones matemáticas, evaluar las cualidades de los materiales de enseñanza, disponer de representaciones, de recursos para explicar un concepto y explicitar argumentos sólidos para evidenciar que un procedimiento funciona. De esta forma, las tareas del profesor exigirán no solo el conocimiento de la materia que enseña, sino también un conocimiento que es específico para desarrollar su labor docente (Rojas, Flores & Carrillo, 2013). El equipo de trabajo de Ball, caracterizó el MKT, basándose en los componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman (1987), distinguiendo dos categorías: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico (Pedagógico) del Contenido.

Bajo esta perspectiva, en la presente tesis doctoral se profundiza en los conocimientos que necesitan los profesores universitarios, de forma que la enseñanza se dirija a la comprensión, en el caso específico de la estructura algebraica Grupo por parte de los estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos). Así , en el marco teórico se analiza el modelo que orienta la investigación: modelo teórico desarrollado en el EOS (Godino, Batanero & Font, 2007), denominado el Modelo del Conocimiento DidácticoMatemático del profesor: CDM (Godino, 2009). En este modelo se consideran seis categorías o componentes del Conocimiento del Profesor (del contenido didáctico y matemático): Epistémica, Cognitiva, Afectiva, Mediacional, Interaccional y Ecológica.

1.3. Áreas problemáticas

1.3.1. Problemática en la comprensión de nociones de Teoría de Grupos

En algunas universidades la asignatura de Teoría de Grupos, es el primer curso donde los estudiantes deben ir más allá de aprender patrones de comportamiento imitativos repitiendo la solución de un gran número de variaciones, en un pequeño número de problemas. En estos cursos, los estudiantes se enfrentan con conceptos abstractos, se trabajan principios matemáticos importantes y se aprende a escribir y a comprender las pruebas matemáticas. Aunque hay estudios formales,en esta dirección, muchos estudiantes afirman que después de tomar el curso, ellos tienden a desactivar las matemáticas abstractas y como un porcentaje significativo de estudiantes de Álgebra Abstracta: Teoría de Grupos, son profesores en formación, es importante desarrollar estrategias didácticas que permitan mejorar la actitud de los profesores de matemáticas en formación hacia la abstracción (Dubinsky, Leron, Deuterman & Zazkis, 1994).

En las universidades aparece el interrogante para los Formadores de Profesores de Matemáticas sobre ¿Cómo conseguir que el estudiante comprenda adecuadamente los conceptos de Teoría de Grupos? esto es, que los pueda aplicar en los diferentes contextos donde ellos aparecen. Esta pregunta, se relaciona con el cuestionamiento de Freudenthal (1983) sobre ¿Qué estrategias se necesitan para que los estudiantes logren la constitución de los objetos matemáticos? ¿Se pueden establecer criterios que determinen si un objeto matemático ha sido constituido o no por el estudiante de formación matemática? En torno a esta problemática de la comprensión y el tratamiento de los objetos algebraicos específicamente del objeto Grupo, existen estudios realizados por Dubinsky et al. (1994), junto con los estudios de Hazzan (1996) y los de Freudenthal (1983).

1.3.2. Problemática con el significado de los objetos matemáticos

Esta problemática se relaciona con el significado que le asignan los estudiantes de formación matemática al objeto Grupo; significado que según la propuesta de la Fenomenología de Freudenthal (1983) surge del conocimiento de los fenómenos (situaciones-problemas) que son organizados por los conceptos matemáticos.

Una dificultad que se presenta en la enseñanza de la estructura Grupo, la plantea en primer lugar Freudenthal (1983): para concebir un objeto matemático, se enseña o se intenta enseñar el concepto: para concebir grupo, espacio vectorial y relaciones, se tratan de inculcar los conceptos; es decir, se intentan materializar los conceptos: este hecho lleva a una falta de significado de los objetos matemáticos y por tanto, a una falta de comprensión de los mismos. Bajo esta visión, Freudenthal propone otra manera de afrontar la Educación Matemática desde la Fenomenología Didáctica: plantea que se debe preparar el enfoque contrario, es decir, se debe iniciar con los fenómenos (situaciones-problema, en términos del enfoque EOS) que van a ser organizados por el objeto y desde este punto de partida, enseñar al estudiante a manipular esos medios de organización. Es decir, el profesor debe conocer aquellos fenómenos que sirven para organizar cada uno de los objetos matemáticos.

1.3.3. Problemáticas relacionadas con las propuestas didácticas de álgebra abstracta

Esta problemática se relaciona con la planeación de los procesos de enseñanza que en algunos casos se centra solo en el contenido matemático, descuidando otros componentes igualmente importantes, denominados por Rico (1997) como los Organizadores del Currículo: al futuro profesor se le da el conocimiento del contenido matemático, pero no el conocimiento didáctico respecto a ese contenido específico. Dentro de los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997), se encuentra la Fenomenología como parte del análisis de contenido que realiza el profesor para el diseño, evaluación e implementación de los procesos de instrucción.

De esta problemática surge el interrogante referente al análisis didáctico que realizan los formadores de profesores en el proceso de instrucción en cuanto a ¿Qué conocimiento didáctico-matemático del objeto Grupo, se debe potenciar en el estudiante de formación matemática, que le permita en el futuro, desarrollar eficazmente su práctica docente y así, facilitar el aprendizaje de sus estudiantes?

1.4. Formulación del problema de investigación

En las secciones anteriores, se establece la necesidad de realizar un estudio que permita en primer lugar, describir el significado global del objeto matemático Grupo: estudio sistemático de carácter fenomenológico, histórico y epistemológico, importante para la planificación de los procesos de instrucción. El estudio de los significados de la estructura grupo, corresponde a uno de los elementos necesarios para evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática al final de su proceso de formación. Esta exploración es importante; ya que, permite contrastar el conocimiento que debe adquirir el estudiante en su formación inicial con el conocimiento real que posee sobre el objeto matemático. En este sentido, la presente investigación presenta aportes importantes tanto para las administraciones educativas, como para los programas de formación matemática y especialmente, pretende la búsqueda de mejoras en la conformación de los planes de estudio de los estudiantes de formación matemática en cuanto al desempeño profesional para la enseñanza universitaria.

Los interrogantes planteados, se concretan en la pregunta:

¿Qué conocimiento matemático básico, necesitan los estudiantes de formación matemática, para una enseñanza idónea del objeto Grupo?

La pregunta, plantea la caracterización de la dimensión epistémica del Conocimiento Didáctico Matemático del futuro profesor, que involucra: un conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido, como bases para la potenciación del conocimiento especializado del futuro profesor: conocimientos que proporcionan las herramientas para la labor de la enseñanza idónea del objeto matemático. Estas componentes del Conocimiento del futuro profesor, se definen en el enfoque EOS e integran la componente epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM). Bajo estos supuestos, el presente estudio se centra en la caracterización de la dimensión epistémica, como una de las componentes del conocimiento del profesor: componente que le permitirá gestionar adecuadamente los conocimientos matemáticos y didácticos sobre el objeto Grupo en sus estudiantes.

La faceta epistémica en el modelo del CDM, hace referencia al conocimiento sobre el contenido matemático (Pino-Fan, 2013), es decir, al conocimiento de los significados parciales del objeto matemático de los cuales emerge el significado global de dicho objeto; un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas cada una de las cuales lleva asociado un significado parcial del objeto (Font & Godino, 2006). Estos significados parciales determinan el significado global del objeto matemático en diferentes grados de generalidad. Las configuraciones epistémicas se definen en el marco teórico y corresponden a las relaciones entre los objetos matemáticos primarios (situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) que forman redes de objetos que son las que intervienen y emergen de cada uno de los sistemas de prácticas matemáticas.

La caracterización de la faceta epistémica del CDM del profesor para la enseñanza del objeto Grupo, tiene implicaciones en los programas de formación inicial de profesores, ya que ella permite explorar por una parte, los conocimientos didácticos y matemáticos que deben tener los estudiantes de formación matemática y además, confrontarlos con los conocimientos que efectivamente tienen (significados personales); ya que, lo ideal en la formación inicial de profesores, es la búsqueda de un acoplamiento entre los conocimientos que efectivamente tienen los estudiantes (significados personales) respecto a los conocimientos de referencia (significados institucionales) (Pino-Fan, 2013, p. 345) (ver, Figura 1.5).

Se describen a continuación, los objetivos que permitieron el estudio de cada una de las categorías del CDM de los estudiantes de formación matemática.

1.5. Objetivos

Se definen los objetivos específicos dando respuesta a preguntas concretas de investigación, resultado del análisis a las problemáticas presentadas. Estos objetivos describen el camino, para la consecución del objetivo general y permiten dar respuesta a la pregunta de investigación formulada.

1.5.1. Objetivo general

Evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática en su dimensión epistémica, para determinar si se ha generado un conocimiento común y un conocimiento ampliado que sean la base de un conocimiento especializado, necesario para la enseñanza idónea del objeto Grupo.

1.5.2. Objetivos específicos

Este objetivo general se descompone en los siguientes objetivos específicos que marcan la ruta para el logro del objetivo general propuesto y dan respuesta a preguntas concretas de investigación relacionadas con el objetivo general.

P1. ¿Cuál es el significado global del objeto matemático Grupo?

O1. Determinar los significados parciales del objeto Grupo.

O2. Reconstruir el significado global de referencia del objeto grupo.

P2. ¿Los significados del objeto Grupo, pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio son representativos del significado global de dicho objeto?

O3. Caracterizar el significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto sugeridos para los programas de la asignatura: Teoría de Grupos (4 libros).

O4. Caracterizar el significado de la noción Grupo, pretendido por los programas de la asignatura de Teoría de Grupos de los estudiantes de formación matemática.

P3. ¿Cómo diseñar un instrumento que permita evaluar la dimensión epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática, integrada por un conocimiento común, un conocimiento ampliado como bases de un conocimiento especializado necesario para una enseñanza idónea del objeto Grupo?

O5. Seleccionar las tareas que permitan evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado y el conocimiento especializado del estudiante de formación matemática.

O6. Diseñar e implementar un instrumento piloto que permita una primera exploración de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo.

O7. Implementar el cuestionario definitivo *CDM-Grupo* para evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado bases del conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática.

08. Analizar las categorías del CDM: conocimiento común, conocimiento ampliado y conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática.

Se presentan las razones que justifican la búsqueda de una respuesta a la pregunta de investigación y al desarrollo de los objetivos específicos.

1.6. Justificación

Desde hace aproximadamente treinta años, el estudio de los conocimientos que un profesor debe tener para dar una enseñanza idónea en tópicos concretos de la matemática, ha tomado cada vez mayor interés, tanto por la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática interesados en la formación de profesores, como por las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los estudiantes, dependen esencialmente de los conocimientos y habilidades de sus profesores (Pino-Fan, 2013). Una de las problemáticas que ha generado gran interés en esta línea de formación de profesores es la identificación del CDM requerido por los futuros profesores (estudiantes en formación inicial) para desarrollar eficientemente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

Desde esta perspectiva, gran cantidad de investigaciones se dirigen a identificar los componentes del complejo de conocimientos que el profesor debe tener para desarrollar eficientemente su práctica y facilitar el aprendizaje de los estudiantes: en esta línea de investigación se encuentran los trabajos de Shulman(1986, 1987); Fennema & Franke (1992) y Ball (2000), que presentan una visión multifacética sobre la construcción de los conocimientos requeridos para la enseñanza (Pino-Fan, 2013). Además, se encuentran las investigaciones de Ball, Lubienski & Mewborn (2001); Llinares & Krainer (2006); Ponte & Chapman (2006); Philipp (2007); Sowder (2007); Ball, Thames & Phelps (2008); Hill, Ball & Schilling (2008); Rowland, Huckstep & Thawaites (2008); Sullivan & Wood (2008) y Godino (2009).

Las investigaciones anteriores, evidencian que no existe un acuerdo sobre un marco teórico que permita describir los componentes del conocimiento de los profesores de matemática (Rowland & Ruthven, 2011). De igual forma, pocos estudios se orientan al diseño de instrumentos que permitan explorar y caracterizar el CDM del estudiante de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo y de aspectos tales como: el significado del objeto matemático como elemento necesario para explorar y caracterizar el CDM del profesor universitario; la determinación de criterios encaminados al diseño de metodologías didácticas para desarrollar y potenciar el conocimiento especializado sobre el objeto; la determinación de criterios para evaluar el conocimiento del profesor y el estudio de los programas de formación matemática: estudios que den respuesta a las preguntas ¿Cuál es el conocimiento real de los estudiantes de formación matemática sobre la estructura algebraica Grupo?¿Cuál es el conocimiento que deberían tener los estudiantes de formación matemática sobre la estructura matemática? ¿Qué significado de la estructura algebraica pretenden los libros de textos y programas académicos?

Respecto al modelo de Ball et al. (2000; 2008), se encuentran cuestiones abiertas como por ejemplo ¿cómo se evalúan o miden los diversos componentes del MKT?, ¿cómo se puede ayudar a los profesores a adquirir o a desarrollar los diferentes componentes del MKT?, ¿cómo se relacionan entre sí los diversos componentes del MKT? (Godino, 2009).

Según lo expuesto, en el presente estudio se da respuesta a algunos de los interrogantes planteados y se pretende avanzar en la determinación de los componentes del Conocimiento del Profesor para la enseñanza idónea del objeto Grupo, considerado como un objeto complejo y problemático en la enseñanza universitaria. El Álgebra Abstracta, específicamente, la Teoría de Grupos, presenta serios problemas educativos: facultades de matemáticas y estudiantes, consideran que esta es una de las asignaturas de pregrado que parece dar a los estudiantes una gran cantidad de dificultades en ambos sentidos: en cuanto al contenido y con el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas abstractas (Hart, 1994; Selden & Selden, 1987).

Bajo estos argumentos, se justifica el desarrollo de la presente investigación en parte, del análisis realizado a un gran número de investigaciones en el tema, que suscitó el interés por relacionar el estudio del objeto Grupo y el CDM del profesor universitario. Se tiene presente, que el estudio del CDM de los profesores en formación inicial, es una línea de investigación en Didáctica de la Matemática, que se ha ido incrementando como lo muestra el gran número de investigaciones en esta dirección. Por otro lado, existen investigaciones centradas en el objeto Grupo, pero, relacionadas con la comprensión por parte de los estudiantes; estas investigaciones proporcionan información respecto a las dificultades de los estudiantes con el objeto matemático; pero, en las investigaciones pocos son los estudios epistemológicos, históricos y fenomenológicos que se realizan sobre el objeto matemático. Así, la presente investigación surge del interés de relacionar estos dos campos al evidenciar la existencia de unos antecedentes a nivel internacional y nacional que justifican la importancia de realizar más investigaciones que permitan describir el complejo de componentes del Conocimiento del Profesor para el caso universitario, y específicamente investigaciones relacionadas con el objeto Grupo.

Se analiza el marco internacional y el local, para justificar la importancia y relevancia del presente estudio, centrado en la evaluación del CDM de los estudiantes de formación matemática relacionados con el objeto Grupo.

1.6.1. Contexto internacional

El objeto Grupo del Álgebra Abstracta ha sido investigado desde diferentes aproximaciones teóricas: a) Cuestiones de índole cognitiva: concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos, tipos de errores, dificultades (Kieran, 1992; Dubinsky & Leron, 1994; Nicholson, 1993; Dubinsky, Leron, Dauterman & Zazkis, 1994; Leron, Hazzan & Zazkis, 1995; Dubinsky & Leron, 1994; Hazzan & Leron, 1996; Asiala, Dubinsky et al., 1997; Dubinsky, 1997; Brown, De Vries et al., 1997; Hazzan, 1999) e b) Investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de nociones de Teoría de Grupos (Hoch, 2003; Novotná, Stehlíková & Hoch, 2006; Simpson & Stehlíková, 2006; Novotná & Hoch, 2008). Los anteriores estudios evidencian la existencia de una problemática a nivel internacional sobre dificultades tanto en el aprendizaje como en la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos: la enseñanza y el aprendizaje de objetos de la matemática específicamente del objeto Grupo han presentado dificultades a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, en varios aspectos, como se evidencia en los antecedentes y en las problemáticas presentadas.

La formación didáctica y matemática de los profesores en formación, es un campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas, hecho que se evidencia en estudios (Bishop et al., 2003; English et al., 2002; Llinares & Krainer, 2006; Hill et al., 2007; Franke et al., 2007; Sowder, 2007; Gómez, 2007) y en revistas como el Journal of Mathematics Teacher Education, de importancia para las administraciones educativas, los formadores de profesores y para los profesores en formación. Además, se encuentra un marco teórico de investigación didáctica el EOS, bajo el cual se han realizado estudios enfocados a explorar el Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor en objetos matemáticos y estudios que implican Análisis Didácticos de procesos de instrucción y su valoración (Font, Planas & Godino, 2010; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Pino-Fan, Godino & Font, 2011; Pochulu & Font, 2011), pero hasta el momento el objeto Grupo no se ha estudiado en esta dirección y bajo el enfoque EOS.

1.6.2. Contexto nacional

A nivel nacional, se justifica el estudio del CDM del estudiante de formación matemática sobre el objeto Grupo, dada la existencia de los programas de formación matemática (Licenciatura en Matemáticas y Matemáticas) donde los egresados pueden desempeñar la labor de la docencia universitaria. Existe el cuestionamiento acerca de ¿cuáles son los conocimientos sobre el objeto Grupo que poseen los estudiantes de formación matemática, para la labor docente? En esta dirección, a nivel nacional existe una normatividad en Educación Superior que establece que tanto los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, como los de Matemáticas pueden ser docentes universitarios; hecho que justifica el presente estudio enfocado en los conocimientos de los estudiantes en las áreas de su desempeño.

La normatividad para los programas de Licenciatura en Matemáticas, define que para el Licenciado en Matemáticas su área de desempeño es la Matemática y para los estudiantes de Matemáticas establece la Teoría de Grupos como uno de los contenidos mínimos del programa; así, de la normatividad nacional se tiene que el estudiante de formación matemática al final de su proceso de estudio debe tener unos conocimientos básicos sobre el objeto Grupo y de ahí se deriva el hecho de pretender explorar el conocimiento CDM, que se ha potenciado y/o desarrollado en su proceso de formación.

En esta dirección, los docentes de Teoría de Grupos de las universidades, se cuestionaron sobre ¿cómo conseguir que el estudiante de formación matemática comprenda adecuadamente los conceptos de Teoría de Grupos?

1.7. Marco teórico

Con el fin de explorar el conocimiento del estudiante de formación matemática sobre el contenido matemático, centrado en el objeto Grupo, se divide el apartado en tres secciones: una primera parte que hace referencia a los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado-PMA de los estudiantes. Una segunda parte, donde se presentan las nociones desarrolladas en la perspectiva teórica EOS las cuales sirven como herramientas teóricas para el desarrollo de la investigación centrada en la exploración de la dimensión epistémica del conocimiento Didáctico-Matemático del estudiante de formación matemática sobre el objeto Grupo y finalmente, se presentan los modelos que estudian el Conocimiento del profesor y que integran el modelo del CDM: modelo que se define en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática y que permite analizar la faceta epistémica de este CDM, a través de las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes cuando solucionan problemas relacionados con el objeto Grupo.

1.7.1. Pensamiento matemático avanzado

El grupo de trabajo en Pensamiento Matemático Avanzado, surge en 1985, en la sociedad Psychology of Mathematics Education con el objetivo de profundizar en los procesos cognitivos de enseñanza y aprendizaje de temas relacionados con el cálculo infinitesimal (Dreyfus, 1991; Tall 1991). Alrededor de los años 80, el interés en Didáctica de la Matemática se desplazó hacia la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos, reorientando la preocupación hacia las competencias y habilidades. Las investigaciones evolucionaron y empezaron a ocuparse también de tópicos que por su naturaleza y complejidad, se situaban dentro de la llamada matemática escolar superior. Entre estos tópicos, se encuentran: límite, derivada, integral y la estructura Grupo. Para trabajar con estos objetos se admitió que era necesario poner en juego procesos de abstracción y generalización, los cuales juegan un papel fundamental en el pensamiento matemático avanzado (Sánchez, 2012).

Para Dreyfus (1991), la abstracción es el proceso de construcción de objetos mentales a partir de objetos matemáticos y la generalización corresponde a derivar o inducir desde casos particulares para identificar generalidades y expandir los dominios de validez. Por su parte Tall (1991) a partir de los aspectos cognitivos que observó, distinguió diferentes procesos de generalización: (a) expansiva (generalización en la cual el estudiante extiende su estructura cognitiva pero sin producir cambios en las ideas corrientes); (b) reconstructiva (generalización en la cual se requiere una reconstrucción de la estructura cognitiva) y (c) disyuntiva (generalización en la que los estudiantes son capaces ahora de operar en un amplio rango de ejemplos y no parece ser muy duradera) (Sánchez, 2012).

Tall & Vinner (1981), proponen una teoría cognitiva sobre la forma en la que los alumnos aprenden los conceptos matemáticos. Para muchos estudiantes, una de las dificultades en la enseñanza de las matemáticas es su alto grado de abstracción. Aunque la abstracción y la generalización no pueden ser consideradas características exclusivas del pensamiento matemático avanzado, parece haber cierto acuerdo en que éstas, junto con la definición, la demostración y la formalización, adquieren mayor importancia en el pensamiento matemático avanzado (Sánchez, 2012).

El paso del pensamiento matemático elemental (PME) al pensamiento matemático avanzado (PMA) exige una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva con la cual se pasa de "describir" a "definir" y por otra parte, de "convencer" a "demostrar". Para Tall (1991) los alumnos que tienen entre 16 y 20 años están intelectualmente preparados para dicha transición. Tall (1991), también expone algunas diferencias entre el pensamiento matemático elemental y el avanzado, pero advierte que no es fácil dar una explicación precisa o satisfactoria del paso del pensamiento matemático elemental al avanzado (Sánchez, 2012).

Se proponen diferencias entre el PME y el PMA: Robert & Schwarzenberger (1991), establecen que, en el pensamiento matemático avanzado: (a) los alumnos tienen que aprender más conceptos en menos tiempo y además, éstos son presentados de manera formal; (b) los conceptos enseñados llevan asociados procesos (generalización, abstracción y formalización) que pueden entrar en conflicto con el conocimiento anterior: el que se tenía sobre el concepto y finalmente, (c) los alumnos se enfrentan a una amplia gama de problemas que nacen de una variedad de contextos (Sánchez, 2012).

Existe, una distinción entre el PME y PMA, al considerar que el PMA es un pensamiento que requiere razonamiento deductivo y riguroso acerca de nociones matemáticas, que no es enteramente accesible a través de los cinco sentidos (p. 17-18): un concepto se considera como parte del pensamiento matemático avanzado según los aspectos que involucre. Por su parte, Edwards, Dubinsky & McDonald (2005), no creen que se pueda delimitar exactamente una línea divisoria entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado, consideran que el PMA forma parte de un proceso continuo de pensamiento que trasciende la experiencia procedimental o las intuiciones del pensamiento matemático elemental, sin ignorarlas ni abandonarlas. Se acepta que el clasificar un concepto como de PMA depende del contexto en el que se está trabajando (Sánchez, 2012).

Las formas de pensamiento se separan de las formas de comprensión; por un lado, los significados particulares que los estudiantes dan a un término, sentencia o texto, la resolución de un problema o la justificación que usan para validar o refutar una afirmación, son formas de comprensión. Y de otro lado, las teorías generales implícitas o explícitas que subyacen a tales acciones son formas de pensamiento (Harel & Sowder, 2005). Así, se define que un pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición para una forma de pensamiento por un individuo es determinado por la amplitud con la cual ha superado estos obstáculos (pp. 34-35).

Esta línea de investigación en Pensamiento Matemático Avanzado, surge en España, en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona (Azcárate, 1996) y se amplia luego a otras universidades; corresponde a una línea de investigación que tiene entre sus objetivos profundizar en el estudio de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje de las Matemáticas y adquiere una progresiva importancia en los cursos superiores: abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, representar, conceptualizar, inducir y visualizar, definir, demostrar, formalizar, generalizar y sintetizar, son procesos del PMA, que tienen una componente psicológica.

En general, el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA) se relaciona con los procesos mentales propios de las Matemáticas Superiores que se enseñan y se aprenden en los últimos años de bachillerato y en el ámbito universitario: según Azcárate & Camacho (2003, p. 136141), este tipo de pensamiento por su naturaleza posee unos procesos característicos entre los que se destaca: el nivel de abstracción, la formalización del conocimiento, la representación, la definición de los conceptos y la demostración. En esta dirección, lo que diferencia a las Matemáticas elementales de las avanzadas es la complejidad de los contenidos y la forma de controlar esta complejidad: entre los procesos más potentes para esto, se encuentran los que permiten dicho control, en particular, la representación y la abstracción: Azcárate (1996) establecen que en las matemáticas elementales los objetos se describen mientras que en las avanzadas estos objetos matemáticos se definen (Aldana, 2011).

1.7.2. Pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico, se constituye como una de las líneas de estudio e investigación en Didáctica de las Matemáticas, que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos. Se define el pensamiento algebraico, como aquel que aparece inmerso en muchos de los problemas del pensamiento matemático: la cognición es intrínsecamente contextual mientras que el lenguaje algebraico es intrínsecamente abstracto.

El pensamiento algebraico tiene presencia como contenido matemático en el sistema educativo, desde la secundaria hasta la universidad. En secundaria se ha investigado en las letras con significado algebraico, en las variables, en las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales. Las investigaciones en Pensamiento Algebraico, tienen enfoques desde la psicología cognitiva, el lenguaje, las calculadoras y computadores, la historia y la epistemología, la enseñanza y el desarrollo curricular y por último, desde la perspectiva de las situaciones didácticas (Godino, 2012).

La enseñanza del álgebra aparece en todo el currículo de las matemáticas, en educación media y básica (secundaria). Existe un espacio importante en el cual, los estudiantes desarrollan la capacidad de abstracción y generalización; procesos propios del álgebra, presentándose bajo este enfoque al álgebra como una herramienta útil en la resolución de problemas matemáticos, tanto del bachillerato como los que surgen en las asignaturas relacionadas con las matemáticas avanzadas de los programas universitarios.

En esta dirección, el razonamiento algebraico, se pone de manifiesto en las tareas relacionadas con aritmética, medida, geometría y análisis de datos y en diversos grados de algebrización. En la práctica algebraica intervienen entre otros procesos la generalización y la simbolización y existen objetos denominados algebraicos, que corresponden a: relaciones binarias, las operaciones que se efectúan con los elementos de un conjunto; las funciones entre conjuntos y las estructuras en el sentido de un conjunto y una operación binaria definida en él, que cumple ciertas propiedades. Así, un estudiante puede dar respuesta a un problema utilizando solo aritmética o utilizando álgebra y aritmética. La presencia de estos objetos y de los procesos reconocidos como algebraicos es gradual, sistemática y progresiva. En general, el trabajo con actividades algebraicas busca el desarrollo del pensamiento algebraico, a través del trabajo con estructuras. Un enfoque basado en aspectos estructurales, necesita además de la descripción y fundamentación, la determinación de medios para abordar los problemas tanto en la enseñanza como en el aprendizaje en relación con las tareas y competencias algebraicas; además de acciones en la formación de docentes (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

Las siguientes actividades matemáticas se consideran algebraicas; esto es, el Álgebra tiene los siguientes rasgos característicos:

- El proceso de Generalización, es decir, el paso de considerar casos particulares de situaciones, conceptos, procedimientos a las clases o tipos de tales objetos. Por ejemplo: llegar al concepto de Grupo a partir del análisis de conjuntos y de sus propiedades. Las generalizaciones empíricas en esta dirección se basan en el reconocimiento de características o cualidades comunes a los objetos o situaciones y las generalizaciones teóricas resultan de la identificación de invariantes. Para Dörfler, generalizar significa construir variables (1991, p. 84).

- Los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización como las de inde-terminación; esto es, el uso de incógnitas y ecuaciones que permiten modelizar situaciones.
- Las nociones de relación, función y estructura.
- El estudio de relaciones de equivalencia y sus propiedades.
- El estudio de operaciones entre los elementos de conjuntos numéricos o de otro tipo ylas propiedades de las estructuras que se generan de dichos conjuntos.

En relación con las actividades algebraicas, estas pueden ser de tipo Generacional, transformacional y Global o de meta nivel: las actividades de tipo Generacional, implican la formación de expresiones y ecuaciones que se consideran como objetos del álgebra; por ejemplo, las ecuaciones en una incógnita para representar una situación problema: expresiones de generalidad que surgen de patrones geométricos o secuencias numéricas; expresiones de reglas que gobiernan relaciones numéricas (Kieran, 2007).

Entre las actividades de tipo Transformacional que son las actividades basadas en reglas, se encuentran: agrupar términos semejantes, factorizar, desarrollar, sustituir una expresión por otra, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones e inecuaciones, simplificar expresiones, sustituir valores numéricos en expresiones, trabajar con ecuaciones y expresiones equivalentes. Estas actividades tienen como objetivo los cambios en la forma simbólica conservando la equivalencia, no implica esto que sean actividades rutinarias; ya que, su justificación se basa en axiomas y propiedades de las estructuras correspondientes.

La categoría Global o de meta nivel hace referencia al uso de procesos matemáticos más generales. Son actividades no exclusivas del álgebra donde ésta se usa como herramienta. Por ejemplo, se tiene la resolución de problemas, la modelización, el estudio de patrones generalizables, la justificación y la prueba, la formulación de predicciones y conjeturas, el estudio del cambio en situaciones funcionales y la búsqueda de relaciones o estructuras. Éstas son actividades que se pueden realizar sin usar expresiones simbólicoliterales (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

La caracterización del pensamiento algebraico no implica solo ver lo general en lo particular, se debe de expresar algebraicamente (Kieran, 2007). Esta expresión es una condición para la manipulación de las representaciones simbólicas que producen otras equivalentes y que permiten la resolución de problemas. Algunos investigadores proponen separar el simbolismo algebraico del pensamiento algebraico debido a que se podría realizarse una manipulación de expresiones sin sentido y además, se debe tener presente que el objetivo que se busca es el trabajo con las estructuras, en lugar de procesos de cálculo numérico.

En esta dirección, el simbolismo algebraico viene a ser el lenguaje que da voz al pensamiento algebraico, es el lenguaje que permite expresar la generalidad (Mason, 1996). Sin embargo, hay estudiantes que pueden expresarse verbalmente con cierto grado de generalidad y no pueden expresar la notación algebraica con facilidad; la generalidad es esencial para el álgebra, pero no todas las actividades algebraicas involucran este proceso (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

El proceso por el cual se da la transición de la aritmética al álgebra cruza por una zona transicional en la que se admite que las tareas matemáticas pueden exhibir objetos y procesos algebraicos con una presencia gradual, pero creciente. La actividad algebraica tiene lugar cuando una persona aborda la solución de cierto tipo de problemas o tareas, realizando determinadas prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas intervienen elementos de diversas naturalezas como los medios de expresión, reglas conceptuales, procedimentales, proposiciones y justificaciones. Entonces la caracterización de una práctica y del pensamiento que la acompaña, como de la índole algebraica, se hace en términos de cierto tipo de objetos y de procesos que intervienen en dichas prácticas. Los objetos y los procesos involucrados en las prácticas se interrelacionan formando configuraciones (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012).

Bajo esta perspectiva, la práctica matemática, corresponde a toda actuación o expresión, verbal o gráfica, que realiza una persona o las personas de una institución para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos o problemas (Godino & Batanero, 1994, p. 334). Los objetos primarios que sirven para indagar sobre las prácticas algebraicas caracterizados en el enfoque EOS, corresponden a: el lenguaje, los argumentos, los procedimientos, los conceptos-definiciones, los problemas-tareas y las propiedades-proposiciones. Una práctica se considera algebraica si los siguientes objetos primarios algebraicos se hacen presentes:

- Relaciones binarias que pueden ser de equivalencia o de orden, junto con sus respectivas propiedades.

- Las operaciones y sus propiedades, realizadas en un conjunto de objetos; sin embargo,a la aplicación de propiedades tales como la asociativa, la conmutativa, la distributiva, la existencia de un elemento neutro y de los inversos se le denomina: cálculo algebraico, además, se encuentran los conceptos de: ecuación, transposición de términos, factorización, desarrollo de términos.

- Funciones, sus tipos, operaciones y propiedades; funciones proposicionales (verdade-ro/falso); variables, fórmulas, parámetros.

- Las estructuras y sus tipos como los semigrupos, monoides, semi-módulos, grupos, módulo, anillo, cuerpo, espacio vectorial y las propias del álgebra superior o abstracta.

Estos objetos mencionados se expresan mediante diversos lenguajes (Godino, Castro, Aké & Wilhelmi, 2012). En la escuela se usa el lenguaje ordinario o cotidiano, gráfico, tabular, incluso se puede considerar el gestual. Un tipo de actividad algebraica primaria es la traducción o transformación entre distintos lenguajes. Las prácticas algebraicas y los objetos que intervienen en las mismas, se pueden analizar desde diversos puntos de vista, relativos al contexto donde se definen, caracterizan y realizan: éstos puntos de vista, se pueden presentar a través de las siguientes dualidades:

- Extensivo-Intensivo; esto es, lo particular y lo general y los procesos de particularización-generalización. Por ejemplo, la función $y = 3x$ corresponde a una función particular; es decir, un objeto extensivo, pero esta función pertenece a la clase de funciones de la forma $y = mx$ que es un objeto intensivo.

- Unitario-Sistémico; esta dualidad describe los procesos mediante los cuales una entidad compuesta o sistémica; es decir, un intensivo pasa a ser visto como una entidad unitaria que puede participar en otros procesos de generalización dando lugar a otros intensivos de orden superior.

- Ostensivo-no Ostensivo; aporta una nueva comprensión de los procesos de generalización de los objetos intensivos resultantes: la ostensión (que se ve, se comprueba con facilidad, visible), hace referencia a los recursos perceptivos de expresión que pueden ser simbólicos o de otro tipo. Por lo general, los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones), se consideran ideales o mentales, es decir, no ostensivos, pero su comunicación se hace con objetos perceptibles (palabras, símbolos y gestos), esto es, con objetos ostensivos.

- Personal-Institucional: se relaciona con los significados personales e institucionales.

- Expresión-Contenido: un objeto matemático se usa como expresión en algunos casos, pero luego puede pasar a ser el contenido para otro objeto (significado - significante).

Los objetos y procesos aportan criterios para definir las siguientes Configuraciones Algebraicas, las cuales permiten distinguir diferentes tipos y niveles de algebrización de la actividad matemática (Godino et al., 2012):

- Configuración de tipo relacional, en las tareas matemáticas que ponen en juego; relaciones binarias; Configuración operacional para operaciones; Configuración funcional, para las tareas con funciones y Configuración estructural, en el trabajo con estructuras.

- Configuración transformacional, presente en las tareas que buscan la transformación entre diferentes modos de expresión; especialmente, entre el lenguaje natural, icónico y gestual al lenguaje alfanumérico.
- Se reconoce cierto nivel de abstracción o generalización en una práctica por la presencia de objetos intensivos.

Según los razonamientos expuestos, se establece que el álgebra tiene presencia en las matemáticas escolares; ya que, en actividades como el conteo de una colección de objetos, realizada por niños de preescolar, hay procesos de generalización y conceptualización. El razonamiento algebraico se inicia con las primeras actividades de cuantificación de cantidades mediante los procesos de simbolización numérica. Los símbolos numéricos se originan desde los primeros niveles, como un sistema formado por elementos relacionales mediante operaciones; estas operaciones que inicialmente hacen referencia a acciones sobre cantidades, pasan a ser operaciones sobre los propios símbolos, pero están relacionadas con un sistema de propiedades estructurales; por ejemplo, los números naturales con la suma, tienen la estructura de monoide. Se inicia el trabajo con estructuras, con un primer ejemplo de estructura algebraica: los semigrupos aditivos y multiplicativos de los números naturales.

Los niños como tal no conocen el nombre de las estructuras, pero en su actividad con las operaciones aritméticas que son funciones, se trabajan los conceptos y teoremas propios de las estructuras algebraicas mencionadas. El razonamiento algebraico surge entonces, de un primer proceso de generalización, cuando de una cantidad concreta por ejemplo, del número de lápices, se pasa al símbolo que representa la cantidad de una magnitud cualquiera, como cuadernos, personas, ovejas. Este sistema de símbolos emergentes de las prácticas de cuantificación se encuentra regulado por los axiomas de Peano y se convierte para el estudiante de primaria en un sistema numérico natural (Godino et al., 2012).

En esta dirección, la aritmética es la parte del álgebra que trabaja con ciertos ejemplos particulares y es el de los conjuntos numéricos que posteriormente, llegarán a ser ejemplos de otros ejemplos más generales. Un nivel más avanzado de Pensamiento Algebraico, se pone de manifiesto en las actividades que involucran las relaciones binarias y las funciones: primero, entre cantidades y luego entre símbolos estructurados. La igualdad es otro objeto emergente de las prácticas matemáticas que caracteriza al Pensamiento Algebraico; ya que, la igualdad es un primer ejemplo de relación de equivalencia entre números. A partir de esta relación de equivalencia aparecen las clases de equivalencia y los conjuntos cocientes que son los objetos característicos del álgebra; además de las correspondencias o funciones que llevan a la identificación de isomorfismos entre estructuras (Godino et al., 2012).

Las variables que caracterizan el trabajo algebraico (Godino et al., 2012) y el uso del lenguaje alfanumérico, junto con objetos algebraicos de tipo relacional, operacional y estructural caracterizan los niveles más avanzados de algebrización. Cuando se reconoce la presencia de objetos intensivos en una práctica matemática, en alguno de sus niveles de generalidad se tiene cierto grado de algebrización en dicha práctica, tanto si el intensivo se expresa de forma alfanumérica como si no. Si se expresa en forma alfanumérica se está ante una práctica algebraica y de lo contrario, la práctica se puede considerar como proto-algebraica (pre-algebraica). Hay una amplia zona donde los estudiantes comienzan a pensar algebraicamente aunque no hagan uso de signos alfanuméricos; esta zona es la zona de emergencia del Pensamiento Algebraico y es la zona donde el profesor debe presentar actividades en la búsqueda de una continuidad en el desarrollo del Pensamiento Algebraico, ya que este pensamiento se da en forma continua.

La diferencia entre el Pensamiento Aritmético y el Algebraico, es el trabajo con cantidades indeterminadas de forma analítica, es decir, se consideran cantidades indeterminadas como incógnitas o variables y se opera con ellas como se hace con los números. Se busca el desarrollo del pensamiento matemático a través de todos los niveles educativos, en especial, se plantea el conocimiento que debe tener el profesor, para ayudar a los estudiantes en la búsqueda del desarrollo del Pensamiento Algebraico, presente en la mayoría de actividades matemáticas (Godino et al., 2012).

El desarrollo del Pensamiento Algebraico, se presenta desde la educación primaria hasta la educación secundaria. Es de importancia el trabajo que se realiza con los sistemas numéricos; es decir, el trabajo desde la aritmética: en esta actividad se tienen objetos denominados algebraicos y por tanto, estas actividades se deben direccionar al trabajo con estructuras para lograr que el paso de la aritmética al trabajo con estructuras, no sea un conflicto para el estudiante al llegar en la educación media y la básica (secundaria) a la manipulación con otros objetos algebraicos, al igual que con el trabajo en las matemáticas universitarias (Godino et al., 2012)

Esta clarificación de la naturaleza de las prácticas matemáticas, en sus diversas áreas de contenido, junto con los objetos y procesos matemáticos, es de interés para la investigación en Didáctica de la Matemática al tener presente que la educación busca mejorar la enseñanza y el aprendizaje y que para esto se propone como un paso preliminar comprender en profundidad los conocimientos y compentencias que se deben desarrollar en los estudiantes.

Así, se considera el Álgebra como la rama de las matemáticas que sirve de herramienta a otros campos de la matemática: se constituye como área de investigación en sí misma y especialmente la investigación didáctica la reconoce como un área conflictiva para los estudiantes (Godino et al., 2012).

1.7.3. Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos - EOS

Se presenta la perspectiva Ontosemiótica que evidencia el desarrollo de un modelo epistemológico para las matemáticas, con bases antropológicas y socioculturales; un modelo cognitivo, con bases semióticas, de índole pragmatista y un modelo instruccional y se precisan las nociones teóricas desarrolladas en este enfoque: herramientas útiles para el desarrollo de la investigación; también, se presenta la técnica del análisis semiótico; la visión de la complejidad de los objetos matemáticos y la Fenomenología (Freudenthal, 1983) como otra de las herramientas coherentes con el enfoque y de gran importancia para el desarrollo de la investigación.

El EOS, surge del análisis a diversas teorías, al considerar que no hay una respuesta clara, satisfactoria y compartida entre ellas (Teoría de las Situaciones Didácticas-TSD, Teoría Antropológica de lo Didáctio-TAD, Dialéctica Instrumento - Objeto: DIO y Juego de Marcos JM, Teoría de los Campos Conceptuales - TCC) al problema epistemológico (en Matemáticas y en Didáctica de la Matemática) sobre los fundamentos teóricos de la investigación en Didáctica de la Matemática. Este problema se formula como un PE (problema epistemológico): ¿qué es un objeto matemático? de manera equivalente, ¿cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, grupo) en un contexto o marco institucional determinado? El PE se refiere al objeto matemático, como entidad cultural o institucional, que se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el del objeto como entidad personal o psicológica: PC (problema cognitivo): ¿qué significa un objeto matemático, para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? Para dar respuesta a estas preguntas de naturaleza ontosemiótica: Godino & Batanero (1994) parten de la noción de objeto propuesta por Chevallard (1991), clarifican algunas nociones introducidas por la TAD y las hacen operativas; determinan semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales usadas ampliamente, tales como concepción y significado (Godino, 2012).

En la problemática inicialmente abordada, existía una cuestión epistemológica de base y era precisar y explicitar la naturaleza de los objetos matemáticos y su emergencia a partir de las prácticas matemáticas y un problema cognitivo, que era caracterizar el conocimiento desde el punto de vista subjetivo (Godino, 2012). Para abordar los análisis epistemológicos y cognitivos requeridos en la Didáctica de la Matemática, se conformaron las nociones claves de Sistema de Prácticas, Configuración de Objetos y Procesos (Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013). Estas herramientas teóricas permiten formular el problema epistémico, (conocimiento institucional, socio-cultural) y el cognitivo (conocimiento personal) en Didáctica de la Matemática.

Se presentan a las herramientas teóricas del EOS, que permitieron realizar análisis detallados en el estudio de los Conocimientos Didácticos-Matemáticos de los estudiantes de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo.

1.7.3.1. Sistemas de prácticas

En primer lugar, se tiene la noción de Práctica matemática y objeto matemático introducidas por Chevallard (1991; 1992), que se conectan en este enfoque, con las ideas centrales de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986) y la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990). Una práctica matemática es una acción o manifestación (verbal o escrita) operativa y discursiva que puede ser de un sujeto personal, o puede ser compartida en una institución (profesor, textos), para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas (Godino et al., 1994). Esta noción se generaliza a los sistemas de prácticas matemáticas personales (estudiante) e institucionales (profesor) y juega un papel central desde el punto de vista epistemológico y didáctico. Con esta noción se asume y se hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas en el cual se basa el EOS. Estas prácticas matemáticas pueden ser realizadas por una persona o compartidas en el interior de la institución, lo cual da lugar a las nociones de sistemas de prácticas personales y sistemas de prácticas institucionales las cuales se definen (Godino et al., 1994, p. 337) como:

> **El sistema de prácticas institucionales asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de una institución. Los sistemas de prácticas personales asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas.**

Según Font, Godino & Gallardo (2013), las prácticas matemáticas pueden ser conceptualizadas como la combinación de una práctica operativa, a través de la cual los textos matemáticos son leídos y producidos y una práctica discursiva, la cual permite la reflexión sobre las prácticas operativas (p. 104). Los sistemas de prácticas dan respuesta a la pregunta de naturaleza semiótica ¿que significa un objeto matemático? y a la pregunta de naturaleza ontológica ¿qué es el objeto matemático? (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011).

1.7.3.2. Objeto matemático

Una noción importante en el enfoque EOS, es la de objeto matemático, y corresponde a una entidad emergente e interviniente en las prácticas matemáticas. Se entiende por objeto alguno de los elementos: lenguaje, acción, argumentación, concepto, propiedades y situación-problema. Cada uno de estos elementos (excepto la situación-problema) se entienden como emergentes de una práctica cuya finalidad es la resolución de una situación-problema (Godino et al., 1994; 1998). En el EOS, se adopta una visión pragmática, al considerar que los objetos matemáticos son emergentes de los sistemas de prácticas realizadas para resolver un campo de problemas (Godino et al., 1994). Para Font et al. (2013) la propuesta ontológica, se deriva de las prácticas matemáticas, siendo éstas, el contexto básico en el que los individuos obtienen su experiencia y de las cuales emergen los objetos matemáticos; así, el objeto matemático adquiere un estatus derivado de las prácticas matemáticas que le proceden (p. 104).

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc), que se evocan al hacer matemáticas y que se representan en forma textual, oral, gráfica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas, emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Como los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales, entonces de igual forma, se considera a los objetos emergentes como objetos institucionales, si provienen de sistemas de prácticas compartidos en el interior de la institución, mientras que a los objetos emergentes de los sistemas de prácticas personales se les denominará objetos personales (Godino et al.,1994).

El EOS en consonancia con el interaccionismo simbólico, considera como objeto o entidad matemática, todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a lo cual puede hacerse referencia, cuando se hace, se comunica o se aprende matemática. En la descripción de la actividad matemática se hace referencia a muchos y diversos objetos, los cuales se pueden agrupar según distintos criterios, formando categorías o tipos diversos (Godino, 2002). Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy (2011), señalan que los objetos matemáticos primarios se pueden analizar desde una perspectiva proceso - producto y para esto consideran los procesos duales: Institucionalización-Personalización; Generalización Particularización; Descomposición/análisis-Composición/reificación; Materialización Idealización; Representación- Significación (ver, Figura 1.1).

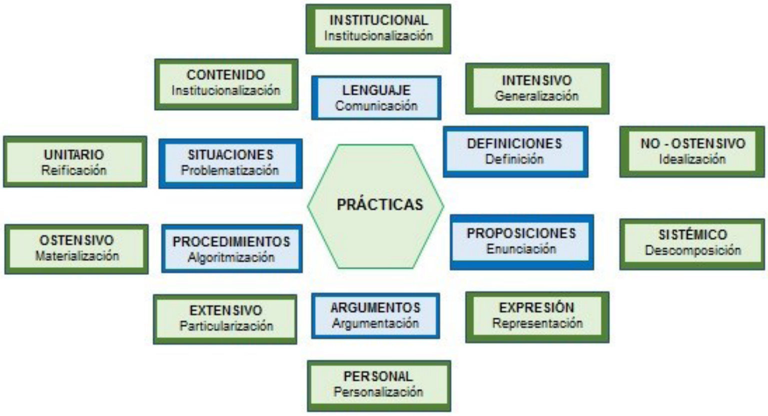


Figura 1.1: Objetos y procesos matemáticos (Godino et al., 1994)

1.7.3.3. Significados de los objetos matemáticos

Se concibe el significado de los objetos matemáticos (operación binaria, grupo) desde una perspectiva pragmático-antropológica. El significado de un objeto, se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene. Así, el significado del objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas: Significado institucional y Significado personal, que se desarrollan y precisan en Godino et al. (1994; 1998) en términos de los sistemas de prácticas en las que un determinado objeto matemático es determinante para su realización, además, se relacionan con las nociones de conocimiento y comprensión. Desde supuestos pragmáticos-antropológicos, estas ideas centran el interés de la investigación en los conocimientos matemáticos institucionalizados, sin perder al sujeto individual al cual se dirige el esfuerzo educativo. Godino et al. (1994) definen estos significados:

El significado de un objeto institucional, es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto matemático en un momento dado (Godino et al., 1994, p. 340).

Esta noción de significado institucional permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica, el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como su evolución en el tiempo y la dependencia institucional. De igual forma, Godino et al. (1994), definen:

El significado personal de un objeto como el sistema de prácticas personales (de una persona) para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal, en un momento dado(Godino et al. (1994), p.341).

Algunos sistemas de prácticas se consideran como primarios, por su carácter extensivo (particular), esto hace referencia a que resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas con métodos y procedimientos particulares. Los sistemas de prácticas primarios se agrupan en sistemas más genéricos en los cuales se pueden abordar situaciones-problemas más generales. Este proceso continúa por niveles, hasta llegar a la formalización del objeto matemático. La consideración conjunta de los elementos y sus relaciones, conforman el Significado epistémico global del objeto matemático.

Bajo estos supuestos, reconstruir el significado global del objeto matemático significa identificar los sistemas de prácticas en las cuales se utiliza; los cuales llevan asociadas configuraciones epistémicas que constituyen un significado parcial del objeto matemático (Godino, 2009). El sentido en el EOS, se interpreta como un significado parcial del objeto matemático y se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinado. El uso del término sentido en la Teoría de Situaciones Didácticas, queda restringido a la correspondencia entre un objeto matemático y la clase de situaciones de la cual emerge y le da sentido (se describe como significado situacional). En el EOS esta correspondencia es crucial, ya que es la razón de ser del objeto, su justificación u origen fenomenológico, pero, tienen en cuenta las correspondencias o funciones semióticas entre el objeto y los otros componentes operativos y discursivos del sistema de prácticas del que se considera que proviene el objeto, entendido en términos cognitivos o en términos epistémicos (Godino, Contreras & Font, 2006).

La interpretación semiótica de las prácticas, lleva a hablar de tipología de significados personales (globales, declarados y logrados) y significados institucionales (implementados, evaluados, pretendidos, referenciales) (Godino, Font, Wilhelmi & Lurduy, 2011). Según Godino et al. (1994), los significados logrados por los estudiantes dependen fundamentalmente de los significados institucionales, concretamente, de los significados pretendidos asociados a los sistemas de prácticas planificadas para un proceso particular de instrucción, así como de los significados efectivamente implementados en dicha instrucción y de los evaluados (ver figura 1.2). Además, el profesor como parte de la institución escolar, debe recurrir, para la elección de los significados pretendidos, a los significados de referencia. En una institución concreta de enseñanza este significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado Global u holístico, requiere realizar un estudio histórico, epistemológico y fenomenológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como el tener en cuenta la diversidad de contextos (sistemas de prácticas-fenómenos) de uso donde se pone en juego dicho objeto matemático (Pino-Fan, 2013).

Figura 1.2: Tipología de significados sistémicos (Pino-Fan, 2013)

El significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global, también denominado holístico u holo-significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático y significado de referencia, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Para una institución de enseñanza el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.

La identificación de los significados parciales se hace mediante la descripción sistemática de los objetos primarios (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto matemático (Font & Godino, 2006; Pino-Fan et al., 2011). En el análisis de las configuraciones epistémicas, cada objeto interviniente en una práctica matemática, puede verse desde distintas facetas duales (ver, Figura 1.1). Para determinar los diferentes niveles de generalización entre las configuraciones, se trabajarán los aspectos intensivos-extensivos (generalparticular).

1.7.3.4. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos

Una Configuración epistémica, se compone de los objetos que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas en los diferentes contextos de su uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas, las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial diferente del objeto matemático (Godino et al., 2006). Las configuraciones epistémicas permiten reconstruir el significado global de referencia, definido a partir de las nociones de significado global-holístico-holosignificado que comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático (ver, figura 1.3).

El término configuración epistémica o cognitiva es útil, ya que, en la realización de una práctica matemática y específicamente, en la interpretación de su resultado como satisfactorio, se necesita poner en juego determinados conocimientos; así, entre los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permiten resolver una situación-problema, se encuentran: en primer lugar, el lenguaje (verbal, simbólico): estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica y ella en tanto a acción compuesta, es satisfactoria. En consecuencia, cuando un sujeto realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado de objetos, formados por situaciones-problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, que se encuentran articulados en la configuración epistémica (ver, figura 1.3) (Font & Godino, 2006, p. 69)).

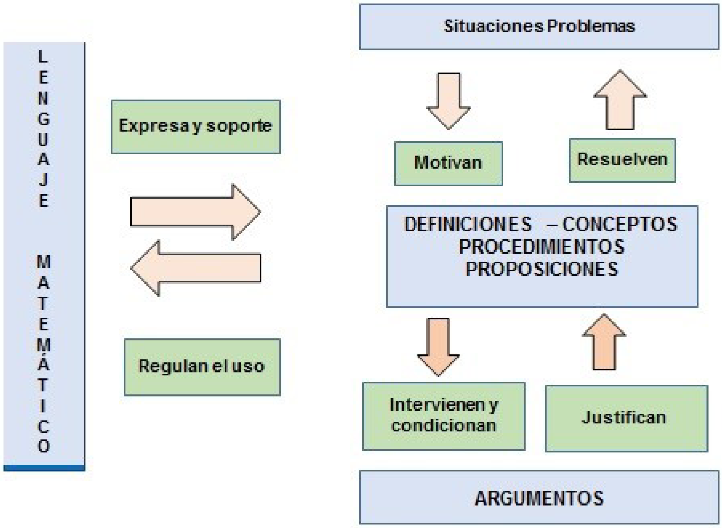


Figura 1.3: Configuración epistémica (Font & Godino, 2006)

La emergencia de los objetos matemáticos primarios considerados, llevan asociados, respectivamente los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enumeración y argumentación (ver, figura 1.1) Otros procesos como la resolución de problemas y la modelización se ven en este enfoque como mega-procesos, e implican la intervención y la activación de los procesos mencionados. Las situaciones-problemas y las prácticas realizadas para resolverlas, tienen un papel central, así como su dependencia de los contextos institucionales en que tienen lugar.

1.7.3.5. Facetas y niveles del análisis didáctico

Las nociones teóricas del EOS son un conjunto de herramientas de análisis y reflexión de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Se han elaborado varios sistemas de objetos y relaciones (categorías) que ayudan a analizar y comprender, de manera sistemática y con distintos niveles de profundidad, los diversos aspectos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En este enfoque se proponen las siguientes facetas para el análisis de los procesos de instrucción matemática (Godino, 2009):

Epistémica: conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).

Cognitiva: conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes. *Afectiva*: estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Mediacional: recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

Interaccional: patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.

Ecológica: sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, etc. que soporta y condiciona el proceso de estudio.

En este modelo teórico se consideran claves las facetas epistémica y cognitiva y se postula para ellas un punto de vista antropológico y semiótico: la matemática como actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones-problema, específicos. Además, se concede relevancia a las demás facetas (afectiva, mediacional, interaccional y ecológica;) ya que, condicionan los aprendizajes y la enseñanza (Godino, 2009).

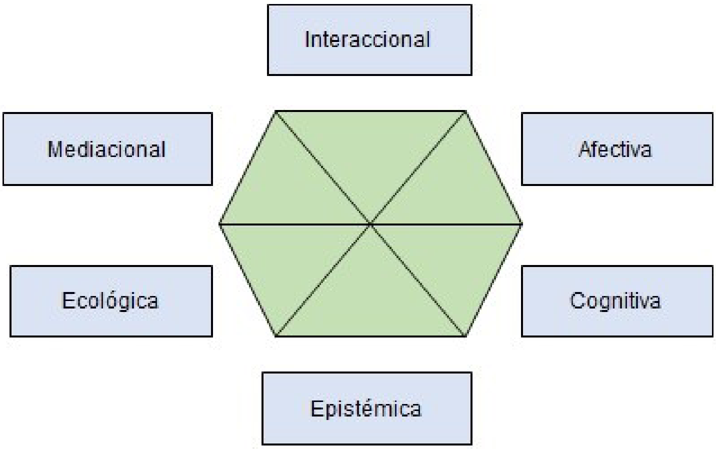


Figura 1.4: Facetas del Análisis Didáctico (Godino, 2009)

En los trabajos de investigación realizados en el marco del EOS (D'Amore, Font & Godino, 2007; Font & Contreras, 2008; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2009) se proponen cinco niveles para el análisis del proceso de instrucción:

Nivel 1. *Identificación de prácticas matemáticas.* Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. Se parte del supuesto, que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender a realizar una práctica operativa (de lectura y producción de textos) y sobre todo, una *práctica discursiva* (de reflexión sobre la práctica operativa) que puede ser reconocida como matemática por un interlocutor experto. Desde esta perspectiva, se entiende el discurso del profesor como un componente de su práctica profesional. Dicha práctica tiene como objetivo generar en el estudiante, un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva sobre ella (práctica discursiva) que el profesor puede considerar como matemática. Así, se considera como práctica matemática a cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) llevada a cabo en la resolución de problemas matemáticos y en la comunicación de soluciones a otras personas con el fin de validarlas y generalizarlas a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994).

Nivel 2. *Identificación de objetos y procesos matemáticos y didácticos.* Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje. Se considera que cuando un agente realiza una práctica matemática tiene que activar un conglomerado formado por algunos de los objetos: situaciones-problemas, lenguajes, conceptos-definiciones, proposiciones, procedimiento y argumentos. Estos seis tipos se articulan formando la configuración de la figura 1.3. (Font & Godino, 2006).

En el EOS, se consideran relevantes dieciséis procesos en la actividad matemática: los procesos de generalización- particularización, institucionalización-materialización (asociados a las cinco dimensiones duales) y procesos de comunicación, definición, enunciación, argumentación, algoritmización y problematización (asociados a los objetos matemáticos identificados en el proceso de evaluación que se analiza). Existen otros procesos igualmente relevantes, como los procesos de comprensión, de modelización o de resolución de problemas, que pueden entenderse como mega procesos que incluyen algunos de los tipos anteriores (Font, Planas & Godino, 2010).

Nivel 3. *Descripción de conflictos semióticos*. Según Godino et al. (2007) se entiende por conflicto semiótico cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones. Cuando la disparidad se produce entre prácticas de un mismo sujeto se habla de conflicto semiótico de tipo cognitivo. El conflicto semiótico interaccional, surge entre las personas, pero se interpreta que estas personas proponen prácticas válidas en instituciones diferentes: mundo de la vida y aula de matemáticas y finalmente, si la disparidad se produce entre prácticas propias de instituciones diferentes, se habla de un conflicto semiótico de tipo epistémico.

Los tipos de conflictos semióticos no son excluyentes, puesto que un mismo conflicto puede ubicarse en un tipo u otro según la perspectiva que se adopte. Por ejemplo, un conflicto epistémico entre el profesor y el alumno, también se puede considerar como un conflicto de tipo interaccional y los conflictos cognitivos de una persona a menudo son el resultado de interacciones sociales generadoras del conflicto (Font, Planas & Godino, 2010).

Nivel 4. *Identificación del sistema de normas y meta normas*. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y que afectan a cada faceta y sus interacciones. La actividad matemática en el aula tiene una dimensión social; ya que, la clase se puede considerar como una micro-sociedad donde tiene lugar la difusión y construcción de conocimiento matemático a través de la interacción social entre alumnos y profesor. En consecuencia, el aprendizaje matemático está condicionado por meta conocimientos matemáticos y didácticos, tales como las normas socio-matemáticas (Planas & Setati, 2009; Yackel & Cobb, 1996) y las cláusulas del contrato didáctico (Brousseau, 1997).

Nivel 5. *Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción*, donde se identifican potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementan la idoneidad didáctica (Godino, 2009). La identificación de seis idoneidades parciales en un proceso de instrucción permiten considerarlo un proceso idóneo; estas son: la idoneidad epistémica, donde se valora si las matemáticas que se enseñan son unas buenas matemáticas; idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes y después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar; idoneidad interaccional, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos; idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción; idoneidad emocional, para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de instrucción y finalmente, idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las conclusiones del entorno social y profesional (Font, Planas & Godino, 2010).

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las seis componentes siguientes (Godino, Batanero & Font, 2007):

Idoneidad epistémica, se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia y permite valorar la calidad del contenido matemático a enseñar, en términos de su grado de consistencia con los significados institucionales de referencia; la *idoneidad cognitiva*, expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos o implementados; la *idoneidad interaccional* hace referencia a que un proceso de enseñanza-aprendizaje tiene mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional, esto es, si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori) y por otra parte, permiten resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción: esta idoneidad, busca valorar si la interacción permite identificar conflictos semióticos potenciales y resolver los que efectivamente se producen durante el proceso de instrucción.

La *idoneidad mediacional*, responde al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje: esta idoneidad, se encarga de la valoración del grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales involucrados en el proceso de instrucción; la *idoneidad afectiva*, corresponde al grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio y se relaciona tanto con factores que dependen de la institución como con factores que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa. La idoneidad emocional, valora la situación afectiva de los estudiantes, la cual determina su grado de interés o motivación hacia el proceso de estudio; finalmente, la *idoneidad ecológica* representa el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla y pretende valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo escolar, su pertinencia con el entorno, etc. (a priori y a posteriori).

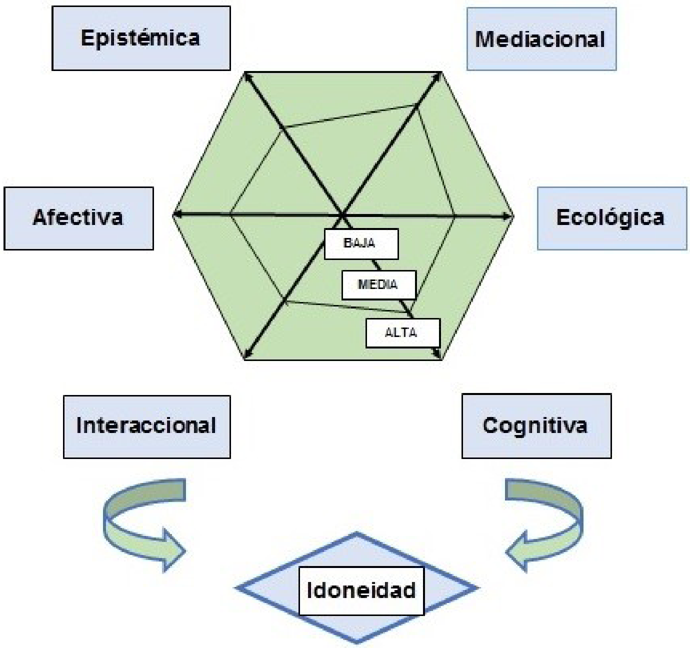


Figura 1.5: Idoneidad didáctica (Godino, 2011)

Estos niveles de análisis permiten el desarrollo de un análisis completo para describir, explicar y valorar los procesos de instrucción (Font, Planas & Godino, 2010). En un proceso de instrucción, la aplicación del nivel 1 permite describir la secuencia de las prácticas matemáticas. La realización de una práctica moviliza elementos distintos, a un saber, un agente (persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza. El agente realiza la práctica matemática orientada a la resolución de situaciones-problema, esto hace que sea necesario considerar otros aspectos, objetos y procesos matemáticos que posibilitan dichas prácticas. Esto se realiza en el nivel 2 del análisis. Este segundo nivel tiene como finalidad, describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos descritos en el enfoque EOS (Godino, 2012).

El *análisis didáctico* de un suceso de clase parte del planteamiento de una situación problema por parte del profesor; seguidamente, los estudiantes realizan prácticas matemáticas necesarias para la resolución de dicho problema. Existen las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, que hacen posible realizar estas prácticas matemáticas (nivel 2), de ahí se avanza al estudio de las interacciones entre el profesor y los alumnos presentes en el proceso de instrucción. Estas interacciones didácticas que suceden en un proceso de instrucción pueden ser muchas y se analizan en el nivel 3, en especial interesan, las interacciones en torno a los *conflictos de tipo semiótico* (Planas & Iranzo, 2009). En el nivel 4 del análisis didáctico se consideran las prácticas matemáticas e interacciones que están condicionadas y soportadas por una trama de normas y meta-normas que regulan las acciones (Godino, 2012).

Estos cuatro niveles de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa; ya que, sirven para comprender y responder a la pregunta ¿qué ha ocurrido aquí y por qué? Sin embargo, no evalúan la pertinencia del proceso de instrucción matemática ni determinan pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso. Para esto son necesarios criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y que permiten guiar la mejora de dichos procesos; de esto se ocupa el nivel 5 del modelo (Font, Planas & Godino, 2010).

Dentro del análisis didáctico, el estudio de los Conflictos Semióticos se enmarca dentro del estudio de errores y dificultades que tienen los estudiantes para abordar el objeto de estudio y se ubica también dentro del estudio de las concepciones de los estudiantes (Sepúlveda, 2014).

1.7.3.6. Análisis semiótico

El análisis semiótico de un texto matemático y en general, de la actividad matemática en el EOS, contempla el análisis de los siguientes elementos: a) Las notaciones y sus representaciones (lenguaje); b) Las situaciones-problemas; c) Las definiciones; d) Los procedimientos y las técnicas; e) Las proposiciones, propiedades y teoremas y f) Los argumentos. Estos elementos se articulan formando las configuraciones epistémicas descritas anteriormente; estas configuraciones son herramientas útiles para describir la complejidad de los objetos matemáticos y las prácticas de donde emergen los objetos matemáticos (Godino, 2002).

El lenguaje, según Godino (2002) se encuentra constituido por los términos, las expresiones, las notaciones, las gráficas. En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y matemático) se describen otros objetos lingüísticos.

Las situaciones, corresponden a los problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra matemáticas, ejercicios. Son las tareas que inducen la actividad matemática.

Los procedimientos, operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo. Son las acciones del sujeto ante las tareas matemáticas.

Los conceptos, son dados por las definiciones o descripciones; por ejemplo, número, punto, recta, función.

Las proposiciones, son las propiedades o los atributos de los objetos mencionados y suelen darse como enunciados.

Las argumentaciones, pueden ser deductivas o de otro tipo; se usan para validar y explicar las proposiciones.

Estos seis tipos de objetos se califican como matemáticos porque se ponen en juego en la actividad matemática y son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, las teorías. Las entidades lingüísticas, tienen un papel representacional -se ponen en lugar de las restantes e instrumental; o sea, se ven como instrumentos de la actividad matemática. Las situaciones - problemas, son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática y junto con las acciones (procedimientos) constituyen el componente práctico de las matemáticas, la acción dirigida a un fin (Godino, 2002).

Se define el "análisis semiótico" de un texto matemático como su descomposición en unidades, que se llaman semióticas, junto con la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas (relaciones) que se establecen entre los mismos por parte de los diferentes sujetos. El criterio para definir las unidades de análisis es el cambio del elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerados, se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, al empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones; es decir, se tiene presente en la delimitación de las unidades de análisis, los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis elementos introducidos en este enfoque teórico (Godino, 2002).

El análisis semiótico según Godino (2002) es la indagación sistemática de los significados puestos en juego a partir de la transcripción del proceso y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto, para un interpretante potencial (análisis a priori). Cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas, el análisis permite caracterizar los significados personales atribuidos de hecho por los emisores de las expresiones (análisis a posteriori). En ambos casos se pueden confrontar con los significados institucionales de referencia, para formular hipótesis sobre los conflictos semióticos potenciales y contrastarlos con los efectivamente ocurridos.

El análisis semiótico ayuda a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio. Se considera el análisis semiótico a priori como una etapa previa y crucial del análisis didáctico-matemático porque permite identificar el sistema de entidades que se ponen en juego en el estudio de un contenido matemático, los cuales requieren de procesos instruccionales específicos. Este análisis permite describir el significado institucional local del contenido estudiado y la distribución temporal de los distintos elementos. Para la valoración del carácter más o menos completo del significado local, se requiere disponer de un patrón de comparación que se denomina el significado institucional de referencia. La comparación entre significados institucionales se puede describir como la transposición didáctica localmente implementada en el proceso de estudio. El significado de referencia se elabora a partir del análisis de textos y de la práctica del análisis estadístico (Godino, 2002).

El análisis semiótico de texto, desde el punto de vista del estudiante tiene el carácter de análisis a priori (o potencial); ya que, se refiere a las interpretaciones (y a los conflictos semióticos) que pueden poner en juego los alumnos que estudian un objeto matemático en el sistema didáctico a considerar.

1.7.3.7. El conocimiento

Se describe de manera general como lo propone Chevallard (1992), esto es, como la relación de alguien (persona o institución) con un objeto. Esta noción abarca todos los constructos cognitivos usados en las diversas ciencias y tecnologías de la cognición humana (Varela, 1988), pero para hacerla operativa se modeliza adecuadamente el objeto de conocimiento, esto es, aquello con lo que se establece la relación y los tipos de relaciones posibles (Godino, 2012). En general, la relación de (X) (persona o institución) a un objeto (O) se traduce en las correspondencias que (X) puede establecer entre (O) y otros objetos: correspondencias que se interpretan como funciones semióticas (Godino, Batanero & Font, 2007). Si (O) es un término o expresión, el sujeto (X) puede atribuir a (O) otro objeto, su significado (S); si (O) es una tarea, (X) puede aplicar a (O) una técnica o varias técnicas de solución, así como aportar explicaciones y justificaciones, etc. El objeto (O) puede ser una organización matemática más o menos compleja y el sujeto puede tener distintas relaciones a cada uno de sus componentes.

En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, al igual que en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992; 1999), los objetos matemáticos se conciben en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, esto es, sistemas compuestos de praxis y logos. El sujeto puede tener una relación bien adaptada a la praxis, pero no al componente discursivo. En este caso, decimos que el sujeto conoce cómo hacer un tipo de tareas, tiene competencia o capacidad para hacerla, pero no comprende (o comprende parcialmente) el porqué de las técnicas que aplica (Godino, 2012).

Las expresiones del tipo, (X) es competente para realizar la tarea T , indican que el sujeto (X) domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica t que resuelve o permite hacer bien la tarea T . En esas circunstancias, se dice que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o también que: conoce cómo hacer la tarea. En cambio, la expresión (X) comprende la técnica t que permite realizar la tarea T , se aplica si (X) conoce porqué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas.

La competencia matemática, se entiende en el sentido restringido, como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas y se complementa con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego. En el EOS, se considera que la competencia y la comprensión en matemáticas son nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático y sus relaciones con el mundo empírico. Es necesaria una dialéctica competencia-comprensión, teniendo en cuenta que es imprescindible tener disponible cierta práctica instrumental (adquirida en contextos significativos que involucra la comprensión de la misma) para avanzar hacia otras problemáticas de comprensión más complejas (Barallobres, 2001).

El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático lleva a reconocer una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados dicotómicos, esto es, se tiene o no competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático. Se trata más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que además, deben ser valorados relativamente a los contextos institucionales correspondientes. El problema del logro del binomio (competencia, comprensión) está, por consiguiente, íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas (no ostensivas, generalizaciones) cuya naturaleza y origen se tienen que explicitar para poder elaborar un modelo útil y efectivo sobre qué se entiende por la comprensión de tales objetos (Godino, 2012).

1.7.3.8. La complejidad de los objetos matemáticos

Lo que en los planteamientos filosóficos de tipo platonista o empirista se consideraba como objeto matemático, con una existencia independiente de las personas, en el EOS, se explica como un objeto virtual o ficticio que emerge de las diferentes maneras de ver, hablar, operar; esto es, el objeto es el contenido al que se refiere o indica globalmente, explícitamente o implícitamente el par (Prácticas matemáticas, configuración epistémica que las activa). Este objeto virtual primero, considera la referencia global de una configuración epistémica y después, el conjunto de varias configuraciones epistémicas (Godino, 2002).

Font, Godino & Gallardo (2013) consideran que el proceso por el cual emergen los objetos matemáticos a partir de las prácticas es complejo y se deben distinguir, al menos dos niveles. En el primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, problemas y argumentos (objetos primarios) que se organizan en configuraciones epistémicas que permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos. En el segundo nivel, emerge una referencia global asociada a una o varias configuraciones epistémicas. La emergencia de este objeto virtual o ficticio se explica por la combinación de efectos de las diferentes dualidades consideradas para cada objeto.

En el EOS se considera que los objetos primarios matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas, según el juego del lenguaje en el que participan según Wittgenstein (1987) pueden ser considerados desde diferentes maneras de estar participando; estas formas se agrupan en las siguientes facetas o dimensiones duales: unitaria/sistémica; expresión/ contenido; ostensivo/no ostensivo; personal/ institucional; extensivo-intensivo (ver, figura 1.1)

1.7.3.9. Fenomenología

La realización de un análisis didáctico, establece unos organizadores del currículo dentro de los que se encuentra el estudio de los errores y dificultades de los estudiantes detectados en el aprendizaje de las matemáticas que se presentan para cada tópico, así como los problemas y obstáculos de aprendizaje que se detectan o se plantean para cada concepto. Se encuentran el análisis de las representaciones utilizadas para cada sistema conceptual, junto con algunas modelizaciones usuales de los correspondientes conceptos; y el estudio de la fenomenología de los conocimientos implicados, así como las aplicaciones prácticas de cada bloque de contenidos. Se analiza el estudio de la diversidad de materiales de tipo manipulativo y los recursos que pueden emplearse en la enseñanza de cada tópico y finalmente, la evolución histórica de cada campo e incluso de cada concepto.

Estas cinco perspectivas junto con los propios contenidos, no determinan todas las posibilidades para reflexionar sobre cada una de las unidades de un currículo de matemáticas desde un planteamiento didáctico. Este análisis hace parte del trabajo del profesor en el proceso de planificación de sus unidades o temas para el proceso de instrucción. El desarrollo de los componentes del análisis didáctico activa una serie de conocimientos que en conjunto se denomina: El conocimiento didáctico del profesor. Este conocimiento está compuesto de herramientas teóricas, denominadas los organizadores del currículo; estos organizadores corresponden a los conocimientos que le permiten al profesor articular el diseño, desarrollo y evaluación de las unidades del currículo (Segovia & Rico, 2001. p. 102) y se consideran elementos teóricos y metodológicos, mediadores, articuladores del análisis didáctico y de los sistemas de conocimiento que fundamentan los significados de los conocimientos matemáticos (Bedoya, 2002, p. 55).

El análisis didáctico tiene como objetivo facilitar la práctica del profesor de matemáticas, de una manera sistemática y profunda, tomando en consideración el máximo de dimensiones que influyen en su actuación, mediante cuatro tipos de análisis parciales: análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación (Gómez, 2007). Se ha mencionado a la Fenomenología, las representaciones, el pensamiento matemático avanzado, las dificultades, obstáculos y errores de los estudiantes como organizadores del currículo (Rico, 1997).

El término fenomenología (Freudenthal, 1983) no hace referencia al sentido dado por Husserl, Hegel o Heidegger. El *noumenon* se refiere a lo que es pensado mediante la razón o lo inteligible y *phainomeno* también de origen griego significa lo que parece. Los fenómenos se consideran que son las apariencias o lo que se nos parece de las cosas. En la tradición filosófica realista, el mundo de los noúmenos era el que se calificaba de real. La contraposición entre fenómeno y noúmeno es una contraposición entre mundos, el de los fenómenos que es el de la apariencia, de la experiencia y el noumenon que es lo sensible, lo inteligible.

Identificar los conceptos matemáticos con noumenon, los sitúa fuera del campo de nuestra experiencia y esto contradice las ideas de Freudenthal al presentar el concepto matemático como medio de organización de fenómenos, que posteriormente, pasarán a formar parte de otro campo de fenómenos que son organizados por un nuevo concepto matemático, así, los conceptos no caen fuera de la experiencia ni están en un mundo diferente del mundo de los fenómenos que organiza: los fenómenos son objetos de la experiencia matemática y se establecen las cadenas (fenómenos, medio de organización 1), (medios de organización 1, medios de organización 2) y esta cadena continúa.

Hacer fenomenología es describir cada una de estas series o pares, es decir, es determinar cuáles son los fenómenos para los cuales el concepto es un medio de organización, teniendo en cuenta que la actividad matemática no permanece en el nivel inferior (fenómeno, medio de organización); el proceso de creación de los objetos matemáticos es un proceso por medio del cual los medios de organización se convierten en objetos que aparecen en el campo de los fenómenos. Así, los objetos matemáticos se incorporan a nuestra experiencia y entran como fenómenos en una nueva relación fenómenos/medios de organización en la que se crean nuevos conceptos matemáticos y este proceso continúa reiterativamente (Puig, 2001).

Se define la fenomenología como el método de análisis de los contenidos matemáticos y el análisis fenomenológico del concepto u objeto matemático; corresponde a la descripción del objeto matemático. El análisis fenomenológico se hace con una intención didáctica; ya que, es un análisis previo a todo diseño o desarrollo curricular y se entiende en este contexto como un componente del análisis didáctico (Rico, 1997, p. 61), que tiene el objetivo de servir de base para organizar la enseñanza de las matemáticas y no pretende elaborar una explicación de la naturaleza de las matemáticas (Freudenthal, 1983).

La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura o de una idea matemática, significa describir el noumenon (conceptos) en su relación con los phainomenon para los cuales es el medio de organización, indicando los fenómenos para cuya organización fue creado y a los cuales puede ser extendido, de qué manera actúa sobre ellos como medio de organización y que poder nos da sobre esos fenómenos. En la fenomenología didáctica se analiza el elemento didáctico en la relación entre noúmeno y phainomenon, esto es, cómo se adquiere la relación concepto, fenómenos en el proceso de enseñanza y aprendizaje: se tiene una fenomenología didáctica, donde intervienen los fenómenos presentes en el mundo de los alumnos y los que se proponen en las secuencias de enseñanza, se trata así, de los fenómenos que están organizados por el concepto en las matemáticas tomadas en el momento actual.

Si se analiza cómo se adquiere la relación concepto, fenómenos en la historia, se tiene una fenomenología histórica, es decir, se analizan los fenómenos para cuya organización se creó el concepto en cuestión y cómo se extiende a otros fenómenos. El orden para los análisis fenomenológicos, corresponde a iniciar con una fenomenología pura, es decir, con el conocimiento de las matemáticas y sus aplicaciones. Se completa con la fenomenología histórica y se continúa con la fenomenología didáctica, para lo cual se necesita conocer el proceso de enseñanza y aprendizaje y finalmente, se realiza la fenomenología genética, en cuanto al crecimiento cognitivo de los alumnos (Freudenthal, 1983).

Una de las tareas de la fenomenología es indagar, analizando los conceptos matemáticos, sobre cuáles son los fenómenos que organizan los conceptos matemáticos. Así, en el estudio de las configuraciones epistémicas que corresponde a la identificación de los diferentes significados de un objeto matemático, se realiza este estudio fenomenológico al determinar las situaciones - problemas, de donde emergen estos significados parciales del objeto matemático y se incluye así, la fenomenología dentro de las herramientas del EOS.

1.7.3.10. El Álgebra moderna y la Fenomenología

El Álgebra Moderna organiza fenómenos que tienen que ver con las propiedades estructurales de conjuntos de objetos arbitrarios en los que hay definidas operaciones. Esas propiedades y esos objetos provienen de la objetivación de medios de organización de otros fenómenos de nivel más bajo y son el producto de una larga historia con sucesivos ascensos de nivel.

Una manera de recorrer la historia consiste en situarse en el siglo IX, en el momento en que *al-Khwarizmi* escribe el Libro conciso de al-jabr y al-muqabala y se toma este acontecimiento como el nacimiento del "álgebra" en tanto disciplina claramente identificada entre las matemáticas. Lo que hace al-Khwarizmi, que lo separa de todos los trabajos que desde el suyo se verán como álgebra, es comenzar estableciendo todos los tipos de números que son necesarios para los cálculos: tesoros, raíces y simples números o dirhams, en su terminología, a continuación todas las combinaciones posibles de esos tipos, seis tipos: tesoros más raíces igual a números, etc. y luego, un algoritmo para resolver cada uno de los tipos; hallar su tesoro o su raíz. Cada uno de los tipos es una forma canónica a la que se puede reducir cualquier problema por intermedio de su traducción en términos de cosas, tesoros, raíces y dirhams. Lo que es nuevo en al-Khwarizmi no son los métodos de resolución, sino el establecimiento de un conjunto completo de formas canónicas, todas ellas resolubles y la organización posterior de la aplicación a los problemas cuyas soluciones se organizan por esas formas canónicas (Puig, 1997).

El siguiente salto de nivel lo dio Galois, al dejar de buscar nuevas soluciones para estudiar las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones; el resto de la historia hasta el álgebra moderna actual puede verse como sucesivos saltos de nivel por objetivación de los medios de organización de fenómenos del nivel anterior.

Las estructuras Matemáticas y la Fenomenología

Una estructura multiplicativa en un conjunto de cuatro elementos {e, a, b, c} se puede representar por una tabla de multiplicar para ser leída en la forma habitual. Este es el llamado "grupo V-4 de Klein". Sin embargo, no es usual definir estructuras tan explícitamente (tabla); muy a menudo se hace implícitamente, es decir, se introduce un conjunto con ciertas relaciones en él y se necesitan esas relaciones para observar ciertos postulados.

Tabla 1.1: Grupo V-4 de Klein

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	a
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Freudenthal (1983) define el anterior grupo, como un conjunto G con la relación $ab = c$ y coloca como postulados:

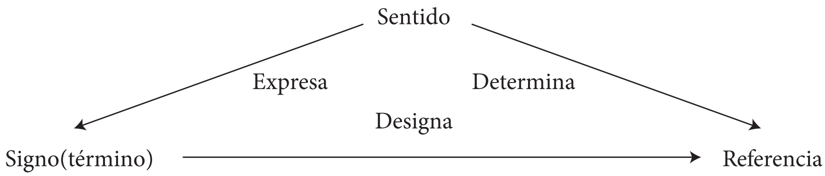
Asociatividad: $(ab)c = a(bc)$
Un elemento identidad, e tal que $ea = ae = a$
Para cada elemento un inverso, a^{-1}, tal que, $aa^{-1} = a^{-1}a = e$

Además, establece que esto no define un solo grupo, sino más bien el concepto de grupo, lo que se puede ejemplificarse por muchos (finitos o infinitos) modelos y para cada par de grupos se podría preguntar si ellos son isomorfos, es decir, si muestran la misma estructura.

1.7.4. La noción de significado de Frege

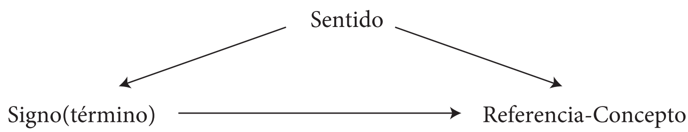
Frege (1998a; 1998b; 1998c) introduce la idea de triángulo semántico para abordar el significado de un término (ver, tabla 1.2). Al igual que la referencia de un nombre propio es el objeto que designa; un término conceptual se refiere a un concepto. En la noción de Frege para significado de un término conceptual, en el triángulo semántico viene dado por el signo o término con el que se expresa, por su referencia o concepto propiamente tal, y por su sentido o modo en que vienen dados los objetos (ver, tablas 1.2 y 1.3).

Tabla 1.2: Triángulo semántico (término) de Frege



El triángulo semántico propuesto por Frege (Gómez, s.f.) identifica los elementos constitutivos del significado de un término conceptual desde una perspectiva estrictamente lógica y formal. Dado que el interés por el significado de los conceptos matemáticos se centra en el ámbito de la matemática, se adaptan las ideas de Frege para considerar un sistema de relaciones amplio. Se interpretan las ideas de Frege, al enfatizar en el hecho de que los sentidos con los que se usa el término conceptual matemático implican, por un lado, los modos en los que establecen relaciones con otros términos conceptuales matemáticos y por el otro, las diferentes formas en las que el término conceptual y estas relaciones se pueden representar.

Tabla 1.3: Triángulo semántico (concepto) de Frege



Se adopta así, un punto de vista funcional, por el cual el sentido con el que se usa un término conceptual matemático también incluye los fenómenos que sustenta el concepto. En la matemática escolar, los fenómenos se presentan mediante un contexto o situación en que el concepto toma sentido, o también, mediante un problema que se aborda y da sentido al concepto. Se aborda así, el significado de un concepto matemático atendiendo a tres dimensiones que se denominan: la estructura conceptual, los sistemas de representación y la fenomenología :

En la estructura conceptual es donde se incluyen las relaciones del concepto con otros conceptos atendiendo tanto a la estructura matemática de la que el concepto forma parte, como a la estructura matemática que dicho concepto configura.

En los sistemas de representación es donde se incluyen las diferentes maneras en las que se puede representar el concepto y sus relaciones con otros conceptos. En la fenomenología, es donde se incluyen aquellos fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido al concepto.

Estas tres dimensiones del significado de un concepto en la matemática se ponen en evidencia y organizan una de las cuestiones centrales de la problemática de la planificación de la clase: la multiplicidad de significados de un concepto en las matemáticas escolares. Esta multiplicidad de significados implica que, para efectos de planificar una hora de clase o unidad didáctica, es deseable que el profesor conozca las tres dimensiones que caracterizan el significado de un concepto en la matemática escolar y sea capaz de adquirir la información necesaria que le permita identificar dichos significados y organizar esta información de tal forma que sea útil para la planificación; además, de seleccionar a partir de esta información, aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción y utilizar la información que surge de los diversos significados del concepto para el diseño de unidades didácticas.

En la siguiente sección, se continúa con el análisis de las herramientas teóricas y metodológicas del EOS, relacionadas con el análisis del modelo CDM, del conocimiento didáctico-matemático del profesor: primero se presenta un análisis a los modelos que integran el modelo CDM y luego el análisis de las componentes del CDM.

1.7.5. Modelos para el estudio del Conocimiento del Profesor

La Didáctica estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje donde interviene un contenido, estudiantes, profesor y unos medios tecnológicos. Estos procesos se realizan en una institución educativa que condiciona y hace posible el proceso educativo; así, el estudio se relaciona con sistemas heterogéneos y complejos que necesitan de modelos teóricos específicos para cada uno de sus componentes: componentes que interactúan entre sí, para lo cual se hace necesario identificar y tener en cuenta las facetas que intervienen en estas interacciones. En este sentido, se detalla en esta sección el modelo del CDM: modelo para el cual se definen facetas o componentes del Conocimiento del Profesor, para una enseñanza idónea de las matemáticas (Godino, 2009).

El término "Conocimiento del Profesor" en la investigación didáctica, corresponde a la integración cognitiva del conocimiento científico y conocimiento práctico, procedentes de los diferentes dominios científicos y prácticos. Este término tomó fuerza con los estudios sobre el Pensamiento del Profesor, cuyos supuestos básicos eran: el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional y los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan. Estos supuestos, dieron paso a una preocupación por el conocimiento del profesor (Pino-Fan, 2013).

Para el término "conocimiento" no se encuentra una definición en la literatura; lo que se observa es una aproximación extensional; es decir, se intentan especificar los componentes de dicho conocimiento, como lo proponen Ball y colaboradores. Así, la mayoría de las investigaciones sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, consideran que está formado por los siguientes componentes (Llinares, 1997):

- Conocimiento de matemática (conceptos, procesos) y sobre la matemática (concepcio-nes sobre la naturaleza de la matemática escolar).
- Conocimiento del currículo matemático.
- Conocimiento sobre las cogniciones de los aprendices: características del aprendizajede las nociones matemáticas específicas, dificultades, errores y obstáculos.
- Conocimiento pedagógico específico de la matemática: de representaciones instruccionales, análisis de tareas, etc.

- Conocimiento sobre la enseñanza: planificación, rutinas, interacción, organización dela enseñanza, evaluación.

Los modelos del conocimiento matemático para la enseñanza, elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales y disjuntas: el modelo de Ball y colaboradores (Hill, Ball & Schilling, 2008) denominado Mathematical Knowledge for Teaching - MKT (ver, tabla 1.4) supone avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que debe tener un profesor para enseñar matemáticas. Pero quedan cuestiones por responder: ¿cómo determinar el conocimiento matemático para la enseñanza de los profesores con modelos que incluyen categorías demasiado globales? (Godino, 2009). Específicamente, ¿de qué forma o bajo qué criterios se puede evaluar o medir el MKT?¿cómo se puede enseñar a los profesores a adquirir o desarrollar los diferentes componentes del MKT?

El conocimiento matemático para la enseñanza MKT, es un concepto importante en la comunidad de investigación en formación de profesores; sin embargo, hay una comprensión limitada, de cómo se puede reconocer y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores (Silverman & Thomson, 2008). Además, se observa que existe una desvinculación aparente entre los componentes del conocimiento del contenido (conocimiento común, especializado y en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conocimiento del contenido y la enseñanza, conocimiento del contenido y los estudiantes y conocimiento curricular) (Godino, 2009).

Este modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza-MKT (Ball et at., 2000; 2005; 2008) se basa en las componentes del conocimiento profesional propuesto por Shulman y se distinguen dos categorías: Conocimiento del contenido y Conocimiento didáctico del contenido. Cada una de estas categorías presenta una subdivisión. El Conocimiento del contenido, tiene las subcategorías: a) Conocimiento común del contenido-CCK, que corresponde al conocimiento matemático y habilidades que se emplean en situaciones que no son exclusivas de la enseñanza (Ball, Thames & Phelps, 2008), e incluye el conocimiento que el profesor pone en juego para resolver problemas matemáticos, operar correctamente y aplicar definiciones y propiedades; b) El Conocimiento especializado del contenido- SCK, hace referencia al conocimiento matemático y la habilidad exclusiva para la enseñanza (Ball et al., 2008, p. 400-401) (ver, tabla 1.4.). El profesor para desarrollar las tareas de enseñanza, requiere de un conocimiento que le permita participar en tal actividad, incluyendo poder representar las ideas de manera clara a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas precisas y adecuadas, examinar o comprender métodos excepcionales de resolución de problemas, entre otras actividades (Ball et al., 2005).

Finalmente, c) El Conocimiento en el horizonte matemático-HCH, se define como el conocimiento que tiene el docente de cómo están relacionados los tópicos matemáticos incluidos en el currículo (Ball et al., 2008). Se considera como el conocimiento sobre las relaciones entre los diferentes temas matemáticos y la forma en que el aprendizaje de los temas evoluciona en los diferentes niveles escolares. Puede entenderse como aquellas relaciones que enlazan los conocimientos previos y los futuros, permitiendo estudiar propiedades de un concepto o procedimientos en situaciones nuevas o más complejas (Martínez, Giné, Figueiras & Deulofeu, 2011).

Continuando con la segunda componente: el Conocimiento Didáctico del Contenido: se describe como la composición de tres subdominios del conocimiento (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008): a) El conocimiento del contenido y los estudiantes-KCS, que se refiere al conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben o aprenden un contenido particular (Hill et al., 2008); es el conocimiento que se utiliza en las tareas de enseñanza e implica atender a un contenido específico y aspectos particulares de los alumnos; además, incluye el conocimiento de los errores comunes y las dificultades más habituales de los estudiantes; b) El Conocimiento del contenido y la enseñanza-KCT, se relaciona con el conocimiento y combina: el conocimiento sobre la enseñanza con el matemático (Ball et al., 2008) e incluye, saber construir a partir del razonamiento de los estudiantes y de las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas y c) El Conocimiento del currículo-KCC, se relaciona con el conocimiento de los objetivos, contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza y le permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes (ver, tabla 1.4).

Tabla 1.4: Conocimiento matemático para la enseñanza - MKT (Hill, Ball & Schilling, 2008)

Mathematical knowledge for teaching	
Subject Matter Knowledge	Pedagogical Content Knowledge
Common Content Knowledge-CCK	Knowledge of Content and Students-KCS
Knowledge at the mathematical horizon-SCK	Knowledge of Content and Teaching-SKT
Specialized Content Knowledge-SCK	Knowledge of Curriculum

El modelo del CDM, se define en el EOS y hace referencia a la fusión de los modelos MKT y PCK: El CDM del profesor se compone de la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios y los procesos de significación, que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones-problemas matemáticos, para implementar procesos de instrucción eficaces que faciliten el aprendizaje de los estudiantes (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209). Esta forma de entender el

CDM, bajo el enfoque EOS verifica el hecho de poder formular preguntas como ¿qué debe conocer un profesor para que la enseñanza del objeto Grupo, tenga la mayor idoneidad didáctica posible? o bien preguntas relacionadas con competencias tales como ¿qué competencias debe desarrollar un profesor para que la enseñanza de un determinado contenido matemático, tenga la mayor idoneidad didáctica posible? Preguntas a las cuales se pretende dar respuesta con el desarrollo de la presente tesis doctoral.

En el modelo del conocimiento CDM, se distinguen seis categorías o facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y ecológica. En cada faceta se distinguen componentes y herramientas para su análisis (ver, figura 1.4 y 1.6) Cada una de estas facetas se encuentra involucrada en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los tópicos específicos de la matemática (Godino, 2009):

La Faceta Epistémica de un proceso de estudio, hace referencia a los significados institucionales puestos en juego (implementados) en cada una de las fases de dicho proceso (preliminar, diseño, implementación y evaluación.) Estos significados son interpretados en términos de los sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos.

La Faceta Cognitiva, que hace referencia a los conocimientos personales de los estudiantes y a la progresión de los aprendizajes (desarrollo de los significados personales).

La Faceta Afectiva, tiene en cuenta los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

En la Faceta Mediacional, se analizan los recursos tecnológicos y la asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

La Faceta Interaccional, tiene en cuenta los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.

La Faceta Ecológica, se refiere al sistema de relaciones con el entorno social, político, económico que soporta y condiciona el proceso de estudio (Godino, 2009).

Se hace énfasis en la Faceta epistémica del CDM: ella se relaciona con el conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto institucional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa. La primera referencia a esta faceta, se analizó en relación con el proceso de instrucción; se retoma en el modelo del CDM y se propone una división en tres categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático; categorías que son similares a las del modelo MKT pero que se reestructuraron en este enfoque y corresponden a (Pino-Fan et al., 2013):

- Conocimiento común del contenido
- Conocimiento ampliado del contenido
- Conocimiento especializado del contenido

La categoría del Conocimiento especializado, se subdivide en: conocimiento del contenido especializado; conocimiento del contenido en relación con los estudiantes; conocimiento del contenido en relación con la enseñanza y conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto en el que se desarrolla la práctica de enseñanza y aprendizaje. Se introduce este modelo y la tabla 1.5, que reestructura el modelo MKT con el fin de describir la relación e interacción entre cada una de las facetas o dimensiones incluidas en este modelo; además, se establecen pautas para la creación de otros ítems que permitan evaluar y analizar cada una de las facetas del CDM. Con la división del conocimiento especializado, se logró un avance respecto al modelo inicial del CDM, propuesto por Godino (2009), primero, porque atiende a la relatividad de los tópicos matemáticos y además, en cuanto a la exploración y descripción de la faceta epistémica del CDM en los aspectos teóricos que se tenían como base, unidos a los aspectos empíricos de los análisis de investigaciones (Pino-Fan, 2013; Vázquez, 2014).

El conocimiento especializado del contenido comprende el conocimiento y las habilidades matemáticas únicas para la enseñanza (Ball, Thames & Phelps, 2008, p. 400). Este conocimiento incluye: Cómo representar con precisión ideas matemáticas, proporcionar explicaciones matemáticas de reglas y procedimientos comunes y examinar y comprender los métodos poco usuales para la resolución de problemas (Hill, Ball & Schilling, 2008, p. 377-378); sin embargo, surge la pregunta sobre ¿qué criterios específicos permiten analizar y potenciar dicho conocimiento especializado? (ver, tabla 1.5).

Se redefine este Conocimiento Especializado del modelo del CDM y se proponen dos niveles para el conocimiento especializado. Un primer nivel, en el que los futuros profesores utilizan diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, así como el uso de los diversos significados del objeto matemático, para resolver las tareas pertinentes. El segundo nivel, se refiere a la competencia de los futuros profesores para identificar conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) puestos en juego en la resolución de una tarea (Pino-Fan, 2013); con estas características, es claro que el conocimiento especializado implica conocimiento común y parte del conocimiento ampliado.

Dadas las características de estos dos niveles del conocimiento especializado en el modelo MKT, este se encuentra íntimamente vinculado, dentro del modelo CDM, con las otras facetas del conocimiento de los profesores. Por un lado, el nivel uno de aplicación, se relaciona con las facetas interaccional y mediacional (Knowledge of content and teaching), puesto que un buen dominio de este nivel del conocimiento especializado sobre un tópico específico, proporcionará al profesor los medios para un desempeño idóneo en su práctica de enseñanza futura. Por su parte, el nivel dos de identificación, se vincula con las facetas cognitiva y afectiva (knowledge of content and students), puesto que faculta al profesor para detectar de manera previa, durante y posterior a la implementación de una actividad de enseñanza, conocimientos matemáticos involucrados, significados de los objetos matemáticos, así como conflictos y errores de los alumnos, gestionando así, los aprendizajes de éstos de una manera más eficaz. Se concluye entonces, que el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) propone una reestructuración de los componentes del modelo Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) y una vinculación e interacción entre las dimensiones del CDM (ver, figura 1.6).

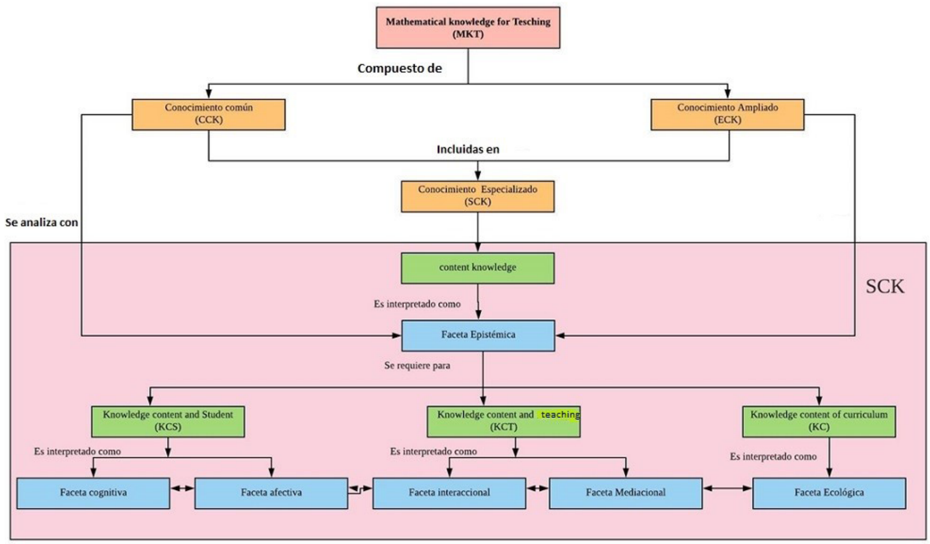


Figura 1.6: Relación entre los modelos: MKT y CDM (Pino-Fan, 2013)

Los Niveles de análisis en el EOS, para cada una de las facetas permiten el análisis del CDM del profesor, de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles corresponden a:

Nivel 1. Prácticas matemáticas y didácticas (operativas, discursivas y normativas.) Se considera como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino & Batanero, 1994). La aplicación de este nivel corresponde a la descripción de la secuencia de las prácticas matemáticas en la solución de un problema. El EOS, asume una concepción pragmatista - antropológica de las matemáticas, tanto desde el punto de vista institucional (sociocultural) como personal (psicológico). La actividad de resolución de problemas se adopta en este enfoque como elemento central en la construcción del conocimiento matemático. Estos sistemas permiten describir las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También, se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes (Godino, 2009).

Nivel 2. Configuraciones de objetos y procesos matemáticos emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas en los diversos contextos de su uso. Corresponde al segundo nivel de análisis. Este nivel permite describir la complejidad de las prácticas matemáticas tomando en consideración la diversidad de objetos y procesos y sus tipologías (Font, Planas & Godino, 2010). Se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado, que articula de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. Los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos de trabajo matemáticos y de representación de los restantes objetos matemáticos. Permite describir los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos). La finalidad de este nivel es describir la complejidad de los objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje: también, permite la reconstrucción del significado global de referencia de un objeto matemático mediante la identificación de los significados parciales del objeto matemático (Font et al., 2010)

Nivel 3. Normas y metanormas. En este nivel se identifican las reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible un proceso de estudio y que afectan a cada faceta y sus interacciones (Godino, 2009).

Nivel 4. Idoneidad. En este nivel, se identifican las potenciales mejoras para el proceso, que puedan incrementar la idoneidad didáctica (Godino, 2009).

En la figura 1.1. se resumen las categorías de objetos y procesos, introducidos en el EOS que permiten realizar los análisis pormenorizados de la actividad matemática y por tanto, de los conocimientos que intervienen en una enseñanza idónea de las matemáticas. Este tipo de análisis realizado por los propios profesores, representa una de las competencias cuyo logro es deseable alcanzar (Godino, Rivas & Castro, 2008), ya que, permite profundizar en el Conocimiento del Contenido Matemático para la Enseñanza (Conocimiento Especializado y en el Horizonte Matemático, según Ball y colaboradores) (ver, tabla 1.5 y figura 1.6.). El modelo del CDM (Godino, 2009) propuesto desde el enfoque EOS, además de las facetas y niveles de análisis que refieren a categorías de análisis más finas de los conocimientos didácticos y matemáticos del profesor, propone una serie de pautas para la formulación de consignas (items de evaluación) que permiten evaluar este CDM de los profesores. Así, en el modelo se propone que la faceta epistémica del CDM, incluye y refina el Conocimiento del Contenido: Conocimiento Común, Especializado y en el Horizonte Matemático. La propuesta que se tiene se presenta en la tabla 1.5. (Godino, 2009, p. 25).

Tabla 1.5: Conocimiento común, especializado y ampliado del contenido matemático

FACETA EPISTÉMICA	CONSIGNAS
Conocimiento Común:	Resuelve la tarea
Conocimiento especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puestos en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas: *Tipos de problemas:* Identifica las variables de las tareas, generaliza (particulariza) el enunciado. *Lenguajes*: Resuelve las tareas usando diferentes representaciones. *Procedimientos:* Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos, formales). *Conceptos-Propiedades:* Identifica los conceptos y propiedades puestos en juego en las soluciones. *Argumentos:* Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado:	*Conexiones:* Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Se describir en el siguiente apartado, siguiendo un orden de desarrollo lógico en el desarrollo del texto, la metodología, para el desarrollo de cada una de las fases de la investigación centrada en la evaluación del CDM del futuro profesor universitario para la enseñanza del objeto Grupo.

1.8. Metodología

El presente estudio tiene un enfoque mixto a nivel exploratorio y de carácter descriptivo. En las tres etapas de la investigación se analizó la variable cualitativa: *configuración epistémica activada en las prácticas matemáticas* y la variable cuantitativa: *grado de corrección de los ítems*, esta variable se analiza en la tercera fase de la investigación (ver, Tabla 1.6), donde además, se utilizan técnicas estadísticas para el análisis de la variable cuantitativa (tercera fase) y técnicas en investigación cualitativa (todas las fases) para determinar el tipo de configuración epistémica activada en las diferentes prácticas realizadas por los estudiantes de formación matemática, cuando responden el cuestionario diseñado con el objetivo de evaluar aspectos del conocimiento común y del conocimiento ampliado, como bases para la potenciación de un conocimiento especializado necesario para la labor en el desempeño del futuro profesor universitario y sobre el objeto de investigación.

Este enfoque metodológico corresponde a un enfoque de tipo mixto, al tener presente que la investigación mixta implica la mezcla de factores cuantitativos y métodos cualitativos o características de este paradigma (Onwuegbuzie & Johnson, 2004; Tashakkori & Teddlie, 1998, 2003) y de acuerdo con el principio fundamental de la investigación mixta, ella implica la combinación de métodos cuantitativos y cualitativos, los enfoques y conceptos que tienen fortalezas complementarias y debilidades que no se superponen (Brewer & Hunter, 1989; Johnson & Turner, 2003).

1.8.1. Componentes y fases de la investigación

Se detallan a continuación, los componentes y las fases de la investigación (ver, Tabla 1.6): La primera fase, corresponde al desarrollo del estudio: E1. Estudio histórico, epistemológico y fenomenológico del objeto Grupo; esta fase se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, con un alcance descriptivo que permite determinar los significados parciales del objeto Grupo, buscando el porqué de ciertos fenómenos (Arias, 1999). A partir del análisis de diversas fuentes (libros de historia de la matemática, investigaciones), se identifican las diferentes configuraciones epistémicas y los significados parciales asociados a ellas; la forma como éstas se encuentran articuladas y la complejidad asociada al objeto Grupo. Esta articulación de significados parciales lleva a la emergencia del significado global del objeto de investigación.

La segunda fase de la investigación, corresponde al estudio E2. Análisis semiótico de textos de Teoría de Grupos, donde se utiliza la técnica del análisis semiótico de textos, propuesta en el EOS; en esta fase se buscaba dar respuesta a la pregunta ¿los significados de la noción Grupo, pretendidos por los libros de texto y los planes de estudio son representativos del significado global del objeto Grupo? Ésta fase se realiza bajo un enfoque cualitativo de tipo explicativo y descriptivo que permite dar respuesta a la pregunta planteada donde se analiza la variable cualitativa de "configuración epistémica" a través de los objetos matemáticos primarios que la componen. El significado "Global" del objeto matemático, corresponde al conocimiento que realmente deberían tener los estudiantes de formación matemática sobre el objeto matemático y se contrasta con el significado(s) que se propone en los libros de texto y en los planes de estudio y que dan lugar al conocimiento que se pretende que adquieran los estudiantes de Formación Matemática.

La tercera fase de la investigación corresponde al E3. Diseño e implementación de un instrumento para evaluar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de Formación Matemática, en relación con el objeto Grupo. Esta fase tiene un enfoque mixto, a nivel exploratorio y en ella se hace uso de las herramientas teóricas desarrolladas en el EOS. Específicamente, en esta fase se toman las herramientas teóricas y metodológicas propuestas para el análisis del modelo del CDM y también, se hace uso del análisis de las dos fases anteriores de investigación para llegar al diseño e implementación del cuestionario *CDM-Grupo.* En primer lugar, se inicia con el diseño de una prueba piloto, la cual permitió llegar a la versión final del instrumento, con el cual se evalúan los conocimientos de los estudiantes de Formación Matemática en relación con el objeto de investigación.

Para el logro de cada uno de los objetivos específicos se plantearon las siguientes actividades: Primera Fase de la investigación: actividades para el objetivo específico 1:

1. Estudio para determinar y describir los objetos primarios (fenómenos-situaciones problema, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) que intervienen en los sistemas de prácticas, de los cuales emerge el objeto Grupo: estudio histórico, fenomenológico y epistemológico, que permite identificar los distintos significados parciales del objeto matemático.

Segunda Fase de la investigación: actividades para los objetivos específicos: 2, 3 y 4:

2. Reconstrucción del significado global de referencia del objeto grupo, mediante ladescripción de los significados parciales obtenidos de la caracterización (prácticas, configuración de objetos y procesos activados en dichas prácticas) (objetivo 2).

3. Estudio del tipo de configuraciones epistémico-didácticas que se proponen en la dupla(libros de texto, planes de estudio) para el objeto matemático grupo, (objetivo 3 y 4) y estudio de la representatividad del significado pretendido por los textos y los planes de estudio sobre el objeto de investigación.

Tercera Fase de la investigación: actividades para los objetivos específicos 5, 6 y 7:

4. Estudio empírico del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de Formación Matemática en relación con con el objeto grupo; se realiza mediante el diseño e implementación del cuestionario piloto, recogida de datos y el análisis de los mismos.

5. Análisis mediante triangulación del juicio de expertos junto con los resultados obtenidos en el punto anterior: en busca de una mejora al cuestionario *CDM-Grupo*.

6. Análisis del cuestionario piloto para evaluar la faceta epistémica del conocimientodidáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática relacionado con el objeto matemático Grupo.

7. Caracterización de las categorías: Conocimiento Común del Contenido y Conocimiento Ampliado del Contenido, de los estudiantes de Formación Matemática relacionadas con el objeto Grupo, bases del conocimiento especializado del contenido.

8. Implementación del cuestionario definitivo a muestras intencionales de estudiantes deFormación Matemática; análisis de los resultados y estudio sobre los conocimientos personales y los conocimientos de referencia.

9. Análisis de las implicaciones del estudio y sus resultados, en cuanto al aporte para elprograma de formación inicial de profesores y para el programa de Matemáticas.

Tabla 1.6: Fases de la investigación

FASES DE LA INVESTIGACIÓN	
1. ESTUDIO HISTÓRICO, EPISTEMOLÓGICO Y FENOMENOLÓGICO DEL OBJETO GRUPO: SIGNIFICADO GLOBAL DEL OBJETO GRUPO	2. ESTUDIO DEL SIGNIFICADO PRETENDIDO PARA EL OBJETOGRUPO, EN LOS PROGRAMAS Y LOS LIBROS DE TEXTO
3. EVALUACIÓN DEL CDM DE LOS ESTUDIANTES DE FORMACIÓN MATEMÁTICA	

1.8.2. Población

El estudio se desarrolló en una universidad Colombiana formadora de educadores (Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia), con los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y estudiantes de Matemáticas (estudiantes de formación matemática). Para el diseño del instrumento de evaluación, en primer lugar se aplicó la prueba piloto a los estudiantes en la asignatura de Teoría de Anillos de los dos programas. El diseño del cuestionario de evaluación, fue sometido a la revisión de expertos: Magister en ciencias Matemáticas en la línea de Álgebra Abstracta, doctores en la línea de Álgebra y doctores en Didáctica de la matemática en la línea de Álgebra abstracta y el cuestionario final se aplicó a los estudiantes que cursaban igualmente la asignatura de Teoría de anillos en los dos programas (Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas). Estos estudiantes, ya habían cursado asignaturas en la línea de Álgebra Abstracta, junto con asignaturas donde se trabajan grupos numéricos y por tanto, se espera que estos estudiantes posean un conocimiento del contenido matemático del objeto de investigación, en las categorías de Conocimiento Común y Conocimiento Ampliado, como bases de un conocimiento Especializado, necesario para la enseñanza del objeto Grupo.

1.8.3. Variables

En la tercera fase de la investigación relacionada con el diseño del instrumento para indagar el desarrollo y la potenciación del conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo de los estudiantes de formación matemática, se considera la variable cuantitativa: grado de corrección de los ítems, para el análisis del cuestionario y la variable cualitativa que corresponde al tipo de configuración epistémica activada en cada una de las prácticas matemáticas desarrolladas por los estudiantes al solucionar las situaciones problemáticas planteadas; esta variable se analiza en las tres fases de la investigación.

La variable cualitativa: configuración epistémica activada en las prácticas matemáticas, se identifica a partir del análisis documental en la primera fase del estudio y de igual forma, en el análisis de los libros de texto y en la evaluación del cuestionario. Esta variable se denomina configuración epistémica cognitiva si es del sujeto que realiza la práctica y se relaciona con las configuraciones epistémicas caracterizadas en la primera fase de la investigación.

1.8.4. Técnicaseinstrumentosparalarecolecciónyelprocesamientodedatos

Para los estudios E1 y E2, se utiliza la técnica del análisis semiótico que permite caracterizar la variable cualitativa: configuración epistémica. Esta técnica permite describir de manera sistemática tanto la actividad matemática de los matemáticos en los dos primeros estudios, como la actividad realizada por los estudiantes de Formación Matemática al resolver los problemas planteados en el cuestionario, junto con los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos-definiciones, proposiciones-propiedades, procedimientos y argumentos) y los procesos de significación que intervienen en las prácticas realizadas (Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007) algunos de los cuales corresponden a procesos del PMA. La segunda variable tiene un carácter cuantitativo: grado de corrección de los ítems y se analiza con técnicas estadísticas.

Finalmente, en la tercera fase del estudio, se diseña el cuestionario que permite explorar por medio de prácticas matemáticas operativas y discursivas desarrolladas por los estudiantes, el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, relacionado con el objeto Grupo: se caracteriza a partir de las prácticas matemáticas y en las componentes del conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido, como bases del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza del objeto matemático.

Capítulo 2

Primer Resultado: Estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo

2.1. Introducción

En este capítulo se inicia con la argumentación de la importancia del estudio de los significados del objeto matemático grupo para continuar con el desarrollo del análisis epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto de investigación; para esto se retoma la obra de Piaget & García (2008), para la realización de un primer análisis sobre la génesis del álgebra abstracta. Para Piaget & García (2008) "la epistemología explica cómo el pensamiento real del hombre, puede producir la ciencia en tanto sistema coherente de conocimiento objetivo" (pp.134-155); desde este punto de vista, los autores presentan en su obra consideraciones importantes sobre la evolución del pensamiento científico desde la antigüedad griega, hasta la evolución newtoniana, para el objeto matemático Grupo: en la obra se describen unos mecanismo de un progreso evolutivo que resultaban evidentes para los autores, los cuales consideraron que el conocimiento se produce por la interacción del individuo con su medio y de acuerdo con del desarrollo de unas estructuras que poseen los individuos.

A partir de la descripción del proceso evolutivo del objeto matemático, se realiza un análisis de las principales problemáticas que fueron dando forma al significado global del objeto Grupo: esto se realiza mediante la identificación y análisis de las configuraciones socio-epistémicas y a partir de ellas se describe la emergencia del significado global del objeto de investigación.

2.2. Estudio de los significados de la estructura algebraica

En el estudio de los antecedentes de la investigación surgieron preguntas importantes para la investigación, como: ¿qué es el objeto Grupo? ¿cuáles son los significados del objeto matemático? Estas preguntas llevaron a enfocar la investigación al análisis de la relación entre la evolución del objeto Grupo y la exploración del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de los estudiantes de formación matemática sobre dicho objeto: este conocimiento CDM, se explora ya que él se pone en juego en la labor de la enseñanza universitaria. Para dar respuesta a las preguntas formuladas, fue necesario comprender ampliamente qué debían conocer los estudiantes de formación matemática, futuros profesores, sobre el objeto de investigación; para llegar así, en una siguiente fase de investigación y bajo estos supuestos a explorar y evaluar su conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor: es decir, es necesario en primer lugar dar respuesta a la pregunta ¿cuál es el significado global del objeto Grupo? y en especial cuáles son los distintos significados dados al objeto matemático, en su desarrollo histórico.

Bajo esta perspectiva, el estudio de los significados del objeto de investigación, es de gran importancia, ya que a partir del significado global del objeto matemático, el profesor como representante de una institución educativa, determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, los efectivamente implementados y los evaluados en el proceso de instrucción del tópico matemático (Pino-Fan, 2013).

2.2.1. Génesis del álgebra

El uso de la palabra "álgebra" para designar una de las ramas de las matemática tiene su origen en el libro *Hisãb al–jabr w'al–muqãbalah* del matemático Muhammed ibn Musa, al–Khowarizmi (al–Juarismi). Esta obra corresponde al año 825 y una traducción del título corresponde a: La solución de ecuaciones por medio de restitución y reducción.

Así, la palabra *al–jabr* y *w'al–muqãbalah* significaban: restauración y oposición, por lo que en el contexto hacían referencia a resolver la ecuación agregando o quitando las mismas cantidades en cada lado de la ecuación, lo cual restaura el balance de la misma (esto es al–jabr) y simplifica la ecuación por medio de la cancelación de los términos opuestos (al–muqãbalah).

En Piaget & García (2008) se presenta un estudio basado en una *epistemología genética* sustentada en el método histórico-crítico, el cual se apoyaba en el método psicogenético para tratar de extraer los procesos inherentes a toda construcción de conocimiento: para este estudio, se retoma el capítulo de la obra orientado a la emergencia del objeto Grupo y en general al desarrollo del álgebra donde estos autores, subordinan la psicogénesis y la historia de la ciencia a la verificación de la hipótesis de una epistemología constructivista: la visión de la génesis del conocimiento del niño se refina y profundiza en este estudio histórico relacionado con la evolución del pensamiento científico (p. 134).

Algunos historiadores de la matemática, hacen remontar los orígenes del álgebra a diversos pueblos de la antigüedad: asirios, babilonios y egipcios; otros, ubican el punto de partida, en la escuela de Alejandría. Se tiene a *Diophanto* como la figura que representa al formulador de los problemas de aritmética en términos simbólicos:

el que introduce los valores determinados, representados no por números sino por letras para expresar de manera general las cantidades específicas que aparecen como incógnitas en las ecuaciones que conducen a la solución de los problemas propuestos. Para Piaget & García (2008) esta interpretación fue insatisfactoria, ya que resultaba claro por una parte, que las dificultades que encontraron los griegos en la solución de numerosos problemas geométricos, se explicaba por la carencia de un álgebra que les permitiera formularlos en términos de operaciones. Por otra parte, resultaba difícil explicar el estancamiento total de una ciencia que solo vuelve a dar resultados en el siglo XVI.

En la interpretación de los autores, aparece Viète (Vieti-Vieta) como un renacentista, al cual el estudio de los griegos, le permite retomar la ciencia de Diophanto y perferccionarla para convertirla en el punto de partida del álgebra en la época moderna. Para los autores, no era claro el papel que desempeñaron los árabes, fuera de introducir una notación más adecuada para las operaciones aritméticas, de haber aportado el concepto de cero como número (que ellos importaron de la India) y del uso generalizado de las *letras* para representar cantidades indeterminadas. En este contexto, la obra de*Viète* se toma como la de un erudito y un sistematizador, más como la de un creador y un revolucionario en el campo científico.

El panorama cambia para los autores, con la obra de Klein, publicada en Alemania en 1934, con el título *Die grieschische Logistik und die Entstehung der Algebra,* y un mayor impactó se da con la publicación de la versión inglesa en 1968, de Greek mathematical thought and the origin of algebra. En ella, Jacob Klein presenta un análisis a las obras de Diophanto y Viète sobre la base de un estudio del pensamiento griego y del significado de la nueva ciencia desarrollada en los siglos XVI y XVII (Piaget & García, 2008, p.136).

Piaget & García (2008) citan el estudio de Klein, para ubicar los orígenes del álgebra dentro de un esquema general de unos mecanismos que se encontraron en el desarrollo de otros campos de la matemática y la física, así, como de las etapas más avanzadas del álgebra misma. El capítulo de la obra de Klein, *On the difference between ancient and modern conceptualization* les da los elementos para la interpretación de unos mecanismos puestos en juego, siendo coherente y sólidamente fundados. El eje de distinción entre Diophanto y Viète, pasa por una diferenciación que se establece sobre el uso de los símbolos matemáticos. El carácter algebraico atribuido a la Aritmética de Diophanto, se basaba en la utilización de diversos signos y abreviaturas, con referencia a las incógnitas de las ecuaciones, a las cuales se las ha interpretado como la expresión de un simbolismo algebraico: pero para estos autores, la simple utilización de letras para representar números o entes geométricos no le confiere el carácter simbólico al tratamiento de un problema (p.136).

A partir del siglo XVI el uso de letras inició a tener un carácter simbólico. Según los autores, cuando se le atribuye a Diophanto, la invención del álgebra, se toma partido, explícita o implícitamente, sobre el carácter simbólico de sus métodos de solución. Por lo cual se argumenta, que el hecho de que Diophanto hablara de problemas generales y de una solución general, podría sustentar la interpretación clásica. Sin embargo, la interpretación de Klein ponía en tela de juicio el carácter simbólico -en el sentido algebraico del término- que pudiera atribuirse a estas expresiones. A este respecto, su distinción entre "generalidad del método" y "generalidad del objeto de investigación" era fundamental: La matemática antigua se caracterizó por una tensión entre método y objeto (Piaget & García, 2008, p.137).

Viète, retomó una metodología característica del pensamiento griego, pero le da una extensión y una profundidad que le permiten reorganizar la obra de Diophanto en un nivel muy diferente. Para los autores, el mérito de la obra de Klein, se encuentra en mostrar, en qué se basaba dicha reorganización y por qué Viète debía ser considerado como el verdadero fundador del álgebra (Piaget & García, p.138).

Respecto al análisis, Viète retoma una distinción, hecha por los griegos, en dos géneros: el análisis zetético o teórico y el análisis porístico o problemático. Pero agrega un tercer género al que llama rético o exegético. Hay por consiguiente -según Viète- un arte zetético por el cual se encuentra la ecuación o la proporción entre la magnitud que se busca y aquella que es dada; un arte porístico por el cual, a partir de la ecuación o de la proporción, se busca verificar el teorema establecido y un arte exegético por el cual, a partir de la ecuación establecida o de la proporción, se descubre la magnitud que se busca.

El hecho esencial en la formulación de Viète fue el término "magnitud" el cual se utilizó en su sentido más general: la magnitud buscada era, o bien un número determinado, o una magnitud geométrica específica medible (Piaget & García, 2008, p. 138).

Klein citado en Piaget & García (2008) establece en su obra (1972):

> **De allí deriva el doble nombre de la tercera forma de análisis cuyo objetivo es, tanto el cálculo de las magnitudes aritméticas, como la construcción de las magnitudes geométricas partiendo de las ecuaciones canónicas ordenadas; ella es llamada rética con respecto a los números a los cuales conduce y que pueden ser expresados por los nombres comunes de los números de nuestro lenguaje; ella es llamada exegética con respecto a las *magnitudes geométricas* que considera como directamente presentes a nuestra vista (p. 138).**

Para Klein, convergen allí dos líneas independientes: el análisis geométrico de Pappo y los métodos aritméticos de Diophanto. La nueva álgebra de Viète era a la vez geométrica y aritmética. Para lograrlo, fue necesario llegar a un nivel de generalización más elevado que lo que estuvo al alcance de los antiguos. En la obra de Viète se introduce una nueva distinción aclaratoria:

> **Las consideraciones numéricas (logistice numerosa) operan con números; las consideraciones por especies (logistice speciosa) operan con especies o formas de las cosas como por ejemplo, con las letras del alfabeto (citado en Piaget & García, 2008, p. 139).**

La distinción crucial hecha por Viète que le permitió dar un gran paso adelante y constituir el álgebra, como una nueva disciplina, fue el pasaje del concepto de "arithmos" al concepto de "símbolos generales". El arithmos hace referencia inmediatamente a las cosas o a las unidades, mientras que los símbolos (letras) utilizados por Viète hacían referencia directamente a la propiedad de ser un número, propiedad que pertenece a cada uno de los números e indirectamente a las cosas o a las unidades cuya numerosidad está representada por un número. En otros términos, las letras remiten al concepto de número en general (Piaget & García, 2008).

A partir de Viète y hasta mediados del siglo XIX, el estudio del álgebra se limitó al estudio de las ecuaciones algebraicas. El método de resolución de la ecuación de segundo grado fue descubierto por los hindúes, aun cuando los babilonios habían encontrado anteriormente soluciones de ecuaciones particulares de este grado. Las ecuaciones de tercero y cuarto grado fueron resueltas hacia finales del siglo XVII y se conoce la disputa entre Tartaglia y Cardano, sobre quién era el verdadero descubridor de la fórmula que permitía resolver las ecuaciones de tercer grado (Piaget & García, 2008, p.141).

Durante largo tiempo tuvieron lugar numerosas tentativas para encontrar fórmulas para resolver ecuaciones de grado superior a cuatro por el método de radicales: pero los únicos logros de este período se refieren a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En la misma época se encuentran también soluciones algebraicas para ciertos problemas particulares provenientes de la geometría o de la mecánica. Sin embargo, cada problema necesitaba de un método de resolución propio. Este es un período que se caracteriza como de "intra-operacional" (Piaget & García, 2008).

La ausencia de progreso en este campo durante el siglo XVII y primera mitad del siglo XVIII se debe a que la atención de los matemáticos se concentró, durante ese largo intervalo de tiempo, en el nuevo instrumento creado por Leibniz y por Newton: el cálculo infinitesimal. Esta herramienta, en manos de matemáticos como: Euler, Lagrange, Gauss, Cauchy, conducen el álgebra -durante la segunda mitad del siglo XVIII- a un nuevo nivel de desarrollo. En ese momento se llegan a formular, en el interior del álgebra, problemas de una gran generalidad, tal como el que conduce al "Teorema Fundamental del Álgebra" donde se llega haciendo uso de las propiedades de las funciones continuas y sus transformaciones, tomadas del cálculo infinitesimal. Este período se cataloga como a una etapa inter-operacional. Durante largo tiempo, las "transformaciones" dominaron el álgebra, hasta el surgimiento de la primera estructura algebraica: Grupo, donde se da inicio a la etapa "trans-operacional" (Piaget& García, 2008, p.141).

La figura clave en la transición entre la etapa intra-operacional y la etapa interoperacional es *Lagrange*. Las tentativas empíricas para resolver ecuaciones de diversos grados (propias de la etapa intra operacional) fueron sustituidas por Lagrange, por una cuestión de alcance mucho más general; Lagrange se cuestionó sobre **¿cuál es exactamente la naturaleza de los métodos de resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado y cuál ha sido la razón de su éxito?** Lagrange pensó obtener de ésta forma, ideas que le permitieran abordar las ecuaciones de grado superior. En su análisis llegó a mostrar que todos los métodos consistían en introducir funciones que transformaran la ecuación de la cual se partía y que permitieran llegar a una ecuación reducida. El problema así formulado se reducía a encontrar la relación entre las soluciones de la ecuación reducida y las soluciones de la ecuación original (Piaget & García, 2008, p.142).

Lagrange, utilizó las ideas que conducirán a la teoría de grupos: "el número de valores diferentes que toma un polinomio cuando se permutan las variables de todas las formas posibles". Para esto, analizó ciertas funciones de las raíces de la ecuación y demostró que el número de valores que puede tomar una función en las raíces $x_1,x_2,...,x_n$ cuando se permutan las x_j de todas las formas posibles es un divisor de n!: el número de permutaciones posibles de las raíces (Piaget& García, 2008, p.142).

Para una ecuación de cuarto grado, con raíces x_1,x_2,x_3,x_4 la función $y = x_1x_2 + x_3x_4$ toma tres valores diferentes cuando se permutan las raíces de las 24 formas posibles. Lagrange demuestra que el número de dichos valores diferentes determinaba el grado de la ecuación reducida que permitía resolver la ecuación original (Piaget & García, 2008).

Seguidamente, *Ruffini* retoma las ideas de Lagrange e intenta demostrar la imposibilidad de encontrar una solución por radicales de la ecuación de quinto grado. Su demostración quedo incompleta, pero el marco conceptual en el interior de su trabajo lo sitúan en un lugar excepcional dentro de este período inter-operacional del álgebra, muy próximo a la etapa siguiente que Galois inaugura (Piaget & García, 2008, p.143).

Para Ruffini, las permutaciones estaban ligadas a los valores de las raíces. La clase de las permutaciones que no cambiaban el valor de la función, no tenían para él estructura: él concibe la transformación implicada en el pasaje de una permutación a otra, pero no concibe la estructura matemática dentro de la cual esta transformación está a su vez implicada (Piaget & García, 2008, p.143).

Por su parte, *Cauchy* consideró las funciones con un grado mayor de generalidad: se trataba de funciones de cantidades, pero dichas cantidades no eran consideradas como raíces de las ecuaciones: eran solamente letras que representaban cantidades indeterminadas. Cauchy, llama “permutación” al orden de las letras. La transición de una permutación A_1 a otra A_2 la llamó *sustitución* y la representó en la notación:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

En la misma dirección, Cauchy define la multiplicación de sustituciones y la sustitución idéntica, llegando a la introducción de la sustitución inversa:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ A_1 \end{pmatrix}$$

A partir de estos desarrollos se demuestran algunos teoremas que se consideran como los antecesores inmediatos de los teoremas generales sobre los grupos de sustituciones. Pero no hay en Cauchy una idea de estructura ya tematizada (interiorizada), sino de cierto modo explícitada (Piaget & García, 2008, p.143).

Continuando con esta emergencia de significados, las investigaciones aritméticas de *Gauss* ocupan un lugar singular hacia el final de este período. En particular en su obra, en la sección quinta que tenía el título: "De las formas y de las ecuaciones de segundo grado" Gauss, estudia las formas cuadráticas en relación con la solución de las ecuaciones cuadráticas indeterminadas: realiza un análisis minucioso de las formas cuadráticas binarias y ternarias, lo cual se convierte en su tema principal.

Para Piaget & García (2008), Gauss, llegó a uno de los puntos más originales en su obra, que introduce en los siguientes términos: vamos a pasar a otro tema muy importante y del cual nadie se ha ocupado hasta ahora, a la composición de formas (p. 241). La definición de composición de formas dada por Gauss constituye la primera operación introducida en un dominio no numérico, cuyas propiedades no podían ser deducidas directamente de las operaciones entre números.

Algunos historiadores de la matemática, mostraron su asombro ante la ausencia de respuesta a la pregunta ¿por qué estos matemáticos, habiendo llegado tan cerca de los conceptos de la teoría de grupos, no pudieron dar el pequeño salto que hacía falta para constituirla? Para Piaget & García (2008), hay una respuesta a esta cuestión, el pequeño salto solo lo era, en apariencia. Gauss constituye, junto con Lagrange, Ruffini, Cauchy y otros matemáticos, la culminación del período "inter-operacional" en el desarrollo del álgebra y más particularmente, en la historia de la teoría de las ecuaciones algebraicas. Sus métodos consistieron esencialmente en transformar funciones y encontrar las relaciones que permanecían estables. Las propiedades que ellos dedujeron corresponden a: "los invariantes de sistemas de transformaciones" (Piaget & García, 2008, p. 146).

El tipo de desarrollo encontrado tanto en la historia de las ciencias como en la psicogénesis, evidenció que hay un largo camino por recorrer antes de poder pasar de un sistema dado de transformaciones a una estructura total dentro de la cual aquéllas resultaban variaciones intrínsecas. Pero en eso consistía, el pasaje de las conexiones inter-operacionales a las conexiones trans-operacionales. A nivel psicogenético, la etapa "trans-operacional" se alcanza cuando el sujeto puede efectuar operaciones sobre operaciones (Piaget & García, 2008, p.146).

A este respecto, se señala que *Galois* es quien introduce la noción de grupo a partir de la acción de agrupar. Las definiciones siguientes constituyen su punto de partida (Piaget & García, 2008, p.146):

> **La permutación de la cual se parte para indicar las sustituciones es totalmente arbitraria cuando se trata de funciones; puesto que no existe ninguna razón para que en una función de varias letras, una ocupe un rango más que otra. Sin embargo, como apenas se puede formar la idea de una sustitución sin la de permutación, haremos en el lenguaje un empleo frecuente de las permutaciones y no consideraremos las sustituciones sino como el pasaje de una permutación a otra.**
>
> **Cuando deseemos agrupar sustituciones, las haremos provenir todas de una misma permutación. Como se trate siempre de cuestiones donde la disposición primitiva de las letras no influye en nada, en los grupos que consideraremos, se deberán tener las mismas sustituciones cualquiera que sea la permutación de donde se haya partido. Por consiguiente, si en un grupo tal, se tienen las sustituciones S y T, se está seguro de tener la sustitución ST (Piaget & García, 2008, p. 146).**

Más adelante, dice explícitamente: "Se llama grupo a un sistema de permutaciones tal que [...] representaremos este conjunto por G" (Piaget & García, 2008, p. 146).

Aquí, se encuentran las fuentes de la primera noción de estructura en la historia del álgebra, se encuentra el punto que permite comprender el pasaje del periodo inter al periodo trans: exactamente como en el caso de la psicogénesis, esta transición supone el pasaje de las operaciones sobre elementos, a las operaciones sobre operaciones (Piaget & García, 2008).

Luego de la presentación de la visión general en la emergencia del objeto Grupo, se pasa a analizar en forma más detallada cada una de las etapas en la evolución, para presentar el fundamento fenomenológico.

2.2.2. Época antigua y edad media (Siglo V-XV)

En la sección anterior se presentó la evolución del objeto Grupo y se identificaron unas etapas o periodos en su desarrollo: ahora se profundiza en los aportes más relevantes de cada época, los cuales permitieron la determinación de los significados parciales que fue tomando el objeto Grupo.

Período cero: Métodos empíricos de solución de ecuaciones algebraicas particulares de grado 1, 2, 3 y 4

El álgebra en las civilizaciones antiguas

En el siglo II a. C. los matemáticos chinos escribieron el libro: *El arte del cálculo matemático*, en el se planteaban diversos métodos para resolver ecuaciones de primer y segundo grado; gracias a su ábaco tenían la posibilidad de trabajar números positivos y negativos y se reconoce a Diofanto de Alejandría, como el precursor del álgebra moderna. Diofanto fue un matemático griego, que publicó la obra "Arítmètica" en la cual trataba en forma rigurosa no solo las ecuaciones de primer grado, sino también las de segundo e introdujo un simbolismo algebraico elemental, designando la incógnita con un signo que corresponde a la primera sílaba de la palabra griega arithmos (número). Los problemas de álgebra que propuso, prepararon el terreno para lo que siglos más tarde sería la teoría de las ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002).

La matemática egipcia, babilónica y griega se clasifica de "tipo algebraico," cada una de distinta índole y se habla de una pre_álgebra ya que en ésta etapa no se tomó conciencia del álgebra como un área independiente de la aritmética y la geometría (en el caso de Egipto y Babilonia, se habló de un "álgebra aritmética" y en el caso de Grecia de un "álgebra geométrica"). En ambos casos se encuentran problemas algebraicos específicos, para los cuales existían métodos de solución para ciertos tipos de ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002, p. 5).

Varios de los pueblos que habitaron Mesopotamia resolvieron problemas concretos que involucraban ecuaciones algebraicas de primer, segundo y tercer grado; la matemática tenía un fin utilitario y no se desarrolló como ciencia autónoma como ocurrió en Grecia donde la Geometría y la Aritmética (Teoría de números) lograron un alto nivel de desarrollo respecto a las matemáticas de las civilizaciones que les precedieron. Con el declinar de la matemática griega (250_600 d. C.) se retomaron las antiguas tradiciones de los calculistas de Mesopotamia y aparece nuevamente el interés por solucionar ecuaciones algebraicas (Dávila, 2002, p. 7).

El álgebra babilónica, fue de tipo verbal al igual que la egipcia y existen registros de alrededor del año 1600 a. C. donde se muestra que los problemas de ecuaciones lineales eran muy elementales para ellos y podían resolver problemas que involucraban *ecuaciones cuadráticas y cúbicas* usando fórmulas desarrolladas. De las tablillas, se establece que los babilónicos podían resolver ecuaciones cuadráticas con el método que corresponde a la fórmula para las ecuaciones de segundo grado: el método se resume como: encontrar dos números si se conoce su suma y su producto (Dávila, 2002, p.13).

La resolución de las ecuaciones de segundo grado entonces tiene dos orígenes distintos: uno aritmético, usado por los babilónicos y otro geométrico utilizado por los griegos. Uno de los problemas más significativos encontrados en textos antiguos corresponde a:

Obtén el lado de un cuadrado si su área menos su lado es igual a 870.

Para la solución de las ecuaciones, los babilónicos utilizaron procesos aritméticos de suma, resta y producto: ellos no conocían los números negativos. Varios siglos después, los griegos resolvieron este problema y otros similares mediante la utilización del método de aplicación del área. El matemático alemán Johann Widmann dEger, escribe por primera vez en 1489, los símbolos + y – para sustituir las letras *p* y *m* que eran las iniciales de las palabras plus (más) y minus (menos) y que hasta entonces se utilizaba para representar la suma y la resta respectivamente; se señala que los símbolos para la multiplicación × y para la división: fueron introducidos por William Oughtred en el año 1657 (Dávila, 2002).

Los egipcios, disponían de un método para resolver ecuaciones de primer grado, al que llamaban: "el método de la falsa posición". En el papiro Rhind, se encuentran una serie de problemas planteados donde inician utilizando unas primeras estrategias algebraicas y al número desconocido, el que se quiere obtener, lo llamaban *montón.* Entre los problemas más representativos y famosos de dicho papiro se encuentra el número 24 (Dávila, 2002, p.12): *Calcula el valor del montón, si el montón y un séptimo del montón es igual a 19.*

A partir de estos desarrollos, se observa que la ciencia tuvo su origen en la Grecia clásica y que su legado fue de gran importancia para la civilización occidental: todos los hombres por naturaleza, desean conocer: dice Aristóteles y estas palabras reflejan el espíritu aventurero griego (Dávila, 2002, p. 16): el deseo de conocer los llevó a Egipto y Babilonia en donde aprendieron la ciencia de éstas civilizaciones, la cual desarrollaron hasta crear su propia ciencia. Reconocieron su deuda con estas dos grandes civilizaciones; como dice Platón: "todo lo que nosotros los griegos recibimos lo mejoramos y perfeccionamos". Además, supieron reconocer en el uso de la razón una poderosa herramienta para entender la naturaleza; tenían el convencimiento de que ésta podía ser explicada en términos matemáticos (Dávila, 2002, p. 16).

Los griegos, dieron a la matemática el rango de ciencia deductiva por excelencia. Esto fue posible gracias a que entendieron la diferencia que existía entre manejar ideas abstractas y generales en lugar de las limitaciones que imponía la ciencia, orientada a resolver los problemas cotidianos: ellos distinguían que una recta, un triángulo, un círculo: eran conceptos abstractos que surgían cuando se idealizaban sus imperfectas realizaciones en la naturaleza o en las cosas que se usaban en la vida diaria: ellos, estaban convencidos que solo con el uso de la razón era posible conocer, ya que los sentidos daban imágenes imperfectas del mundo que los rodeaba. Esta fue la semilla que dio lugar a una real preocupación por la "formalización" es decir, por la justificación lógica de los razonamientos. Esto los llevó a reconocer que en todo razonamiento era preciso partir de ciertos principios básicos y evidentes por sí mismos y de los cuales se pudiera deducir, con el uso de la razón, resultados más profundos: tenían claro que no era posible basar sus principios básicos en otros todavía más elementales o demostrarlos mediante otros principios:

> **En cuanto a la demostración circular, su imposibilidad absoluta es patente, si es cierto que la demostración ha de partir siempre de cosas anteriores y más notorias. En efecto, es imposible que las mismas cosas sean respecto de unas mismas cosas anteriores y posteriores a la vez... Los partidarios de la demostración circular, no solo cometen la falta que aquí indicamos, sino que en el fondo se limitan a decir que una cosa existe si existe (Aristóteles, 1993: citado en Dávila, 2002, p.17).**

Los logros más grandes de los griegos fueron geométricos y el punto de vista pitagórico de que todo podía ser explicado en términos de los números naturales o sus razones (arithmos), pero esto no fue suficiente para detener el dominio de la geometría. No se sabe por qué la preferencia de los matemáticos griegos por la geometría, pero se cree que el descubrimiento de los números inconmensurables (los que no se pueden expresar como razones de enteros positivos) acabó con las bases de la fe pitagórica en los números (Dávila, 2002).

Al álgebra de tipo geométrico, se le puede llamar "álgebra geométrica" y fue la que prevaleció en la matemática griega y permaneció por muchos siglos; así, las propiedades de las operaciones de suma y multiplicación, propias del álgebra, tales como la asociatividad de la suma o la propiedad distributiva resultaban obvias en el álgebra geométrica; también las identidades $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ y $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ se demostraban fácilmente en este contexto y por ejemplo la ecuación $x^2 = ab$ era fácil de resolver. Las fórmulas anteriores se demuestran en el segundo libro de los Elementos en términos geométricos; esto hace difícil el manejo de las ecuaciones de grado mayor que dos, por lo que raramente trabajaron ecuaciones cúbicas o bicuadráticas (Dávila, 2002).

El libro quinto de los "Elementos" es uno de los más admirados de los trece que componen la obra. En el se trata: la teoría de magnitudes, de la cual Bourbaki dice que es la creación más original de la matemática griega. Gran parte del material se le atribuye a Eudoxo ya que su teoría de proporciones se aborda en él mismo y en cierta forma esta fue una respuesta al problema de la inconmensurabilidad ya que desde que se descubrieron las proporciones no conmensurables, los griegos trataron de eliminar en lo posible el uso de las proporciones: Eudoxo establece una teoría de las proporciones que es independiente de la conmensurabilidad (Dávila, 2002, p. 18).

2.2.3. Edad Media (siglo V - siglo XV)

Periodo cero: Los Hindúes y la solución de las ecuaciones algebraicas

En este período se estudian los desarrollos del álgebra entre los años 650 y 1750. En este período surgieron las condiciones que le dieron al álgebra un lugar independiente dentro de las matemáticas y se desarrolla una notación adecuada, que prepara el camino para el álgebra simbólica y se propicia el desarrollo del álgebra moderna (Dávila, 2003a, p.27).

Con el declinar de la matemática griega, los nuevos centros de aprendizaje matemático se localizaron en la India y en el mundo árabe, que en el siglo VII estaba en plena expansión. Con el auge de la matemática griega, Alejandría fue el centro del saber y en el caso de las matemáticas árabes, Bagdad se convirtió en la ciudad cosmopolita donde llegaban los hombres de ciencia, sin interesar su origen étnico ni su religión (Dávila, 2002, p. 27). Sin embargo, las matemáticas en la India no se desarrollaron como en la cultura árabe: entre los aportes más importantes de los hindúes se encuentra, su sistema de numeración del cual proviene el que se usa actualmente y que fue importante para el surgimiento de un álgebra de tipo aritmético en la cultura hindú (Dávila, 2003a).

Sin embargo, los egipcios y los griegos usaron sistemas de numeración en base diez aunque no eran posicionales y los babilónicos usaban un sistema posicional base 60; además, en la matemática griega también se encontraban símbolos especiales para los diez primeros dígitos, pero fue en la India donde funcionaron los aspectos de: a) Base decimal; b) El principio de numeración posicional y c) El uso de un símbolo especial para cada los diez primeros dígitos (Dávila, 2003a).

Brahmagupta (598-670), proporciona una de las contribuciones más importantes de la matemática hindú al álgebra. Su obra más significativa, el "Brahmasphuta Siddh*a*nta" es un escrito de trigonometría, geometría y álgebra donde aparecen resultados correctos e incorrectos. En relación al álgebra, los aportes más importantes son las fórmulas para calcular áreas y las soluciones generales para ecuaciones cuadráticas donde considera el caso de las soluciones negativas (Dávila, 2003a, p. 29).

El matemático hindú Bhaskara (1114-1185) realizó contribuciones en álgebra; este matemático escribió seis textos matemáticos; dentro de los más conocidos se encuentran: "Vija–Ganita y Lilavati" que contienen problemas que involucran ecuaciones lineales y cuadráticas, cálculo de áreas, progresiones aritméticas y geométricas y ternas pitagóricas; algunos de los problemas provienen de textos hindúes anteriores tales como el Brahmasphuta Siddh*a*nta, que tenían algunos errores, pero que Bhaskara corrige. Además, este matemático es el primero en afirmar que el cociente de una cantidad positiva al ser dividida por cero es infinito. Con las palabras: "...no hay alteración aunque mucho sea agregado o extraído..." lleva directamente al problema del infinito, que solo lo resuelve George Cantor en el último cuarto del siglo XIX y que desde la época de los griegos había desafiado las mentes más brillantes(Dávila, 2003a, p. 32).

Bhaskara, estudió también la ecuación de Jhon Pell del año 1688, que corresponde a $px^2 + q = y^2$ que había sido trabajada por Brahmagupta para el caso $q = 1$ perfeccionando el método y considerando los casos $q = -4,-2,-1,1,2$ *y* 4. Los hindúes a diferencia de los griegos, consideraban verdaderos números a las raíces irracionales de números tales como $\sqrt{2}$ que tiene gran significado en álgebra (Dávila, 2003a).

Periodo cero: Los Árabes (476-1492) y la solución de ecuaciones algebraicas

La caída de Roma (476 D.C.) marca el inicio de la Edad Media; esto no significó el fin del imperio romano, ya que el centro de poder se encontraba en Constantinopla donde surgieron cambios especialmente religiosos; la adopción del cristianismo como religión oficial y el nacimiento del imperio Bizantino. Otro movimiento, que se gestó en el Medio Oriente, que tuvo repercusiones en esta etapa fue el Islam en el año 622, así, que fue la civilización árabe, la que dio un nuevo impulso al estudio de las ciencias, preservando y cultivando el legado de los griegos y otras civilizaciones como la hindú. Además, como los árabes habían conquistado gran parte de la península Ibérica; España se convirtió en un centro cultural importante al que acudían eruditos de toda Europa a nutrirse del conocimiento científico. Así, Euclides, Aristóteles, Platón, Arquímedes, Ptolomeo y otros pensadores griegos fueron conocidos por los escolares medievales por las traducciones al latín realizadas por los árabes.

Con el auge del comercio en Italia en los siglos XIII y XIV se llegó a adoptar los números indo–arábigos en occidente y junto con estos llegaron tratados científicos de los árabes, traducidos al latín por académicos europeos. Esta revolución comercial, fue la responsable de que se fundaran las *escuelas del ábaco* a finales del siglo XIII; pero a medida que se extendía el uso de los números indo–arábigos los *maestros algoristas* que dominaban estas técnicas de operación superaron por mucho a los maestros abacistas. De esta forma, los comerciantes adoptaron su uso y propagaron el nuevo sistema.

El álgebra de los árabes se orientaba a resolver problemas por métodos aritméticos que involucraban: ecuaciones lineales de primer grado y ecuaciones cuadráticas; estos problemas trataban sobre repartición de herencias, transacciones comerciales y medida de terrenos. Así, el álgebra fue una herramienta indispensable para los comerciantes y en el siglo XIV ya los maestros del ábaco se convierten en algebristas e hicieron contribuciones originales como: solución de ecuaciones cúbicas y bicuadráticas particulares relacionadas con problemas específicos.

En el álgebra árabe se tenían métodos generales para resolver ecuaciones cuadráticas que consistían en completar cuadrados: surge así, de manera natural, la búsqueda de métodos que funcionaran para cualquier tipo de ecuación cúbica o de cuarto grado. El álgebra de esta época presentó un carácter "retórico" es decir, verbal, ya que no se tenía la notación simbólica y además las soluciones de las ecuaciones solo podían ser positivas o cero ya que no se tenía idea de los números negativos, que fueron introducidos tiempo después (Dávila, 2002, p. 8).

Otro matemático árabe, poeta, filósofo y astrónomo fue Omar Khayyam (1050-1123), quien escribió un tratado en álgebra más avanzado que el de al-Juarismi ya que presentaba la teoría para resolver la ecuación de segundo grado y abordaba la solución de ecuaciones cúbicas por medio de construcciones geométricas. Las soluciones que obtiene en el caso de la cúbica están dadas como los puntos de intersección de curvas: por ejemplo, una hipérbola y un círculo o una hipérbola y una parábola. Este problema había sido abordado por Arquímides, pero Omar dio un tratamiento sistemático que incluía muchos casos según los coeficientes de la cúbica, ya que al no manejar los números negativos, se tenían distintos tipos para la ecuación, como cubos y cuadrados iguales a números ($ax^3 + bx^2 = c$) o cubos y raíces iguales a cuadrados ($ax^3 + bx = cx^2$) (Dávila, 2003a).

En esta dirección, al matemático árabe Muhamed Abu'l–Wefa (940–998) se le atribuye un tratado de álgebra, la traducción de la Aritmética de Diofanto y una versión abreviada del Almagesto. también, Abu Bekr al–Kharki (953–1029) escribió un texto de álgebra, el "Al–Fakhri" donde se da la primera solución numérica a ecuaciones de la forma $ax^{2n} + bx^n = c$ y por tanto, se cree que es el primer matemático en liberar completamente al álgebra de las operaciones geométricas y reemplazarlas con operaciones de tipo aritmético (Dávila, 2003a).

No es claro, el interés de los árabes en el álgebra, pero se cree que se debe al complicado sistema de leyes de herencia, y a la repartición de las propiedades, que involucraba el tener que resolver ecuaciones algebraicas muy sofisticadas. Se pueden distinguir cuatro características de las matemáticas árabes: su sistema numérico y su aritmética que se derivan de fuentes indias, pero los árabes le agregaron su invención de las fracciones decimales. De otro lado, el álgebra, tenía raíces griegas, indias y babilónicas pero los árabes le dieron nuevas formas (Dávila, 2003a).

En los siglos V al XII en la India y en la cultura árabe se dieron grandes contribuciones a la ciencia en general y a las matemáticas en particular: en estos tiempos Europa vivía un procesos de inestabilidad y retroceso. En contraste, la España árabe de los siglos VIII a XII era un centro cultural importante al que concurrían los europeos interesados en aprender la ciencia árabe. Así, el siglo XII representa un punto de quiebre en la historia de la ciencia de Europa. En este siglo el sistema de enseñanza cambia con el nacimiento de las universidades y con la toma de una nueva actitud hacia las ciencias físicas y matemáticas (Dávila, 2003a).

Leonardo de Pisa (1175–1240) era conocido como Fibonacci; hijo de Guilielmo de la familia Bonnacci, representante de los mercaderes de Pisa (Italia) en el comercio que realizaban en el norte de Africa. Por este motivo, Leonardo estudió con un maestro árabe y viajó a Egipto, Siria y Grecia y aprendió álgebra y el sistema de numeración de los árabes: escribe el libro, “Liber Abaci” en 1202 que no es un libro sobre el uso del ábaco, sino un tratado en el que se incluyen problemas en los que se usa el sistema de numeración indo_árabigo de las nueve figuras significativas y el cero (zephirum). En este texto se explicaban las operaciones aritméticas y la extracción de raíces, problemas sobre transacciones comerciales y cálculos sobre conversión de diferentes tipos de monedas. Debido a la originalidad de sus trabajos, se considera a Fibonacci como el algebrista europeo más importante de la edad media (Dávila, 2003a).

En el siglo XV se presentaron varios factores que trajeron como consecuencia nuevas formas de organización política, social y económica en Europa. Se inventó la imprenta y la brújula; fue posible explorar y descubrir nuevos continentes; los libros alcanzaron a un mayor número de lectores y se favoreció una visión antropocéntrica del mundo, esto es, el hombre como el centro de todas las cosas y el fin absoluto de la naturaleza, terminando la edad media dando inicio al Renacimiento (Dávila, 2003a).

Tabla 2.1: Significado dado al objeto Grupo en las civilizaciones antiguas y al inicio de la edad media

<table>
<tr><td></td><td>EDAD MEDIA</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">PERIODO CERO</td><td>Nicolás Chuquet(1450-1500) Francés
Leonardo de Pisa-Fibonacci (1175-1240)</td><td rowspan="4">SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO</td></tr>
<tr><td>Árabes: OmarKhayyam (1050-1123)
Muhamed Abu’l Wefa (940-998)</td></tr>
<tr><td>Hindúes: Bhaskara (1114-1185)
Brahmagupta (598-670)</td></tr>
<tr><td>Civilizaciones antiguas:
Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII)
Hindúes
Grecia: Diophanto (III)
Babilonia
Egipto</td></tr>
</table>

2.2.4. El renacimiento (siglo XV-XVI)

Periodo uno: Determinación de las relaciones entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado 2, 3 y 4 y el simbolismo algebraico

Un trabajo significativo a finales del siglo XV lo desarrolla Nicolás Chuquet (1445–1488), su principal obra *Triparty en la science des nombres,* apareció en forma manuscrita en 1484 y es el primer libro francés de álgebra. En el se percibe una clara evidencia italiana y se cree que es posible que Chuquet estuviera familiarizado con el *Liber Abaci* de Fibonacci. La tercera parte de esta obra, estaba dedicada a problemas de tipo algebraico y en el se desarrolla una notación propia; por ejemplo, $\cdot 5^1.$,$6^2.$ *y* $\cdot 10^3.$ representaban $5x$ $6x^2$ *y* $10x^3$ (Dávila, 2003a, p.43).

También escribe $\cdot 4^1.$ egaulx a $\bar{m}.$ $2^0.$ que representa la ecuación $4x = -2$ por esto, se cree que Chuquet es el primero en escribir una ecuación algebraica en la cual un término negativo aparece de forma aislada. Este trabajo, no tuvo gran influencia debido a la aparición en 1494 del primer libro impreso de álgebra: "Summa de arithmetica, geometrica, proportioni et proportiolanita" del fraile Luca Pacioli (1445–1517) publicado en italiano, hecho que era inusual en ese tiempo. En el trabajo se presenta un compendio del conocimiento matemático general de la época y se trata de aritmética, álgebra, geometría euclidiana elemental y teneduría de libros (Dávila, 2003a, p.43).

Respecto al álgebra, en la obra "Summa" se presentan métodos de solución para las ecuaciones lineales y cuadráticas que eran bien conocidos. Para la ecuación cúbica intervienen: a) Número, cosa y cubo (n, x, x^3); b) Número, censo y cubo (n, x^2, x^3) y c) Número, cubo y censo de censo (n, x^3, x^4); Paciolo comenta en su obra que *no ha sido posible hasta ahora formar reglas generales* para resolverlas. Paciolo, era profesor de varias universidades italianas; amigo de Leonardo da Vinci de quien recibió gran influencia; entre las universidades se encuentra la de Bolonia donde enseñó de 1501-1502 y donde conoce a Scipione del Ferro que era profesor de matemáticas allí (Dávila, 2003a).

En los siglos XV y XVI en Italia se formaron los algebristas más importantes de Europa y se habla de la escuela italiana de álgebra. Pero en Alemania, en forma similar, se daban avances en esta disciplina y en 1524 aparece la obra: "Die Coss" de Adam Riese (1492-1559) donde se trabajaron problemas algebraicos y en especial problemas del al-jabr de al-Juarismi. Otros trabajos alemanes fueron "Coss" que se traduce como la cosa: la incógnita, de Cristoph Rudolff (1499-1545) publicado en 1525 donde se usa por primera vez la notación decimal para fracciones y el símbolo √ para raíz cuadrada; *v*√ para raíz cúbica y *vv*√ para raíz cuarta. En esta dirección, Michael Stiefel (1487-1567) publica su obra: "Arithmetica" en 1544, donde trabaja números negativos, radicales y potencias positivas y negativas; su trabajo sirvió para hacer extensivo el uso de los símbolos alemanes + y − que aparecieron impresos en 1489 en un trabajo de Johanes Widman (1462-1498), publicado en Alemania (Dávila, 2003a, p. 44).

Periodo uno: La escuela italiana en el renacimiento y la solución de ecuaciones algebraicas

A mediados del siglo XVI se publicaron simultáneamente tres obras que se consideran las aportaciones renacentistas más importantes a la ciencia: De revolutionibus orbium celestium- sobre las revoluciones de las esferas celestes, de Nicolás Copérnico (1473-1543) publicada en 1543; De humanis corporis fabrica-sobre la estructura del cuerpo humano, de Andreas Vesalius (1514-1564) publicada en 1543 y el Artis magnae sive de regulis algebraicis, de Girolamo Cardano (1501-1576) publicada en 1545. Las dos primeras obras cambiaron la idea medieval sobre el universo y el cuerpo humano y el Arte magno, fue un aporte importante para el posterior desarrollo del álgebra moderna donde se daban reglas generales para solucionar ecuaciones cúbicas y bicuadráticas (Dávila, 2003a).

Para la ecuación cuadrática las soluciones estaban dadas por una expresión que involucraba expresiones aritméticas elementales de los coeficientes de la ecuación: suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. A este proceso se le conoce como el *método de solución de la ecuación algebraica por radicales.* Para las cúbicas y bicuadráticas, se pretende el mismo proceso: este problema fue considerado en el mismo nivel que el problema griego de la cuadratura del círculo por Pacioli; se resuelve en forma correcta en la obra de Cardano y al mismo tiempo se genera una controversia por la autoría de los métodos de solución (Dávila, 2003a).

Como se mencionó, Scipione del Ferro (1465-1526) enseñaba matemáticas en la universidad de Bolonia y resolvió un caso especial de la ecuación cúbica: en este tiempo, no se acostumbraba a escribir la ecuación con coeficientes negativos y el álgebra era de tipo retórico; por ejemplo, el problema:

El cubo y la cosa igual a un número.

Se representa por la ecuación:

$$x^3 + px = q$$

Donde, p, q son enteros positivos y el método de solución se expresaba en forma verbal. Este logro del Ferro fue notable ya que el problema, en su forma general, había estado sin solución desde los tiempos de Arquimedes, quién pudo resolver ecuaciones cúbicas por métodos geométricos (Dávila, 2003a, p. 46). Del Ferro no publicó sus resultados, pero, antes de morir reveló el método a su yerno, Annibale della Nave y a su discípulo Antonio María Fior, quién de regreso a su tierra Venecia, pretendía formarse como matemático y para ello retó a una contienda matemática a Niccolo Fontana (1499-1557), profesor de matemática: este profesor era conocido como Tartaglia, que significa tartamudo. Cada uno proponía 30 problemas y se estableció la fecha de solución como el 13 de febrero de 1535. Tartaglia advirtió que todos los problemas eran lo mismo: resolver el problema del cubo y la cosa igual a un número. Tartaglia dio solución al problema y así, a todos los problemas propuestos por Fior, quién no pudo solucionar los problemas planteados por el contrincante (Dávila, 2003a).

En este tiempo, Cardano preparaba su libro: Practicae Arithmeticae Generalis y se enteró de la competencia entre Fior y Tartaglia y de los resultados de la misma. En 1539 Cardano contactó a Tartaglia para enterarse del método del cubo y la cosa y obtener el permiso para incluirlo en su libro. Obtuvo una respuesta negativa, pero en marzo de 1539 establece contacto de nuevo y le revela el método de solución de la cúbica, en una forma poco clara: en verso y bajo el juramento de no revelarlo. Cardano afirma en su obra del Ars Magna, que Tartaglia se quedó con la demostración por lo que tuvo que darse a la tarea de buscarla por sí mismo (Dávila, 2003a).

Período uno: El surgimiento del álgebra abstracta

Viéte, fue un conocedor de Diofanto y Cardano: establece las reglas para la extracción de raíces; da a la trigonometría su forma definitiva en Canon mathematicus (1570). Se le considera uno de los principales precursores del álgebra, puesto que se dedicó al estudio de los fundamentos del álgebra, con la publicación, en 1591, de *In artem analyticam isagoge,* en el cual introduce un sistema de notación que hace uso de letras en fórmulas algebraicas. También, se ocupó de diversas cuestiones geométricas, como la trigonometría plana y esférica (Dávila, 2003a).

Este abogado francés aficionado a las matemática, inició con el uso de vocales para representar variables y consonantes para representar constantes. Esto permitió a los matemáticos representar las ecuaciones cuadráticas como $A^2 + B\ A = C$ y llevar a la discusión de técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones. Viète, es quien interpreta la cúbica general como una ecuación en la que todos los casos que consideraba Cardano resultaban casos particulares. Además, Viète da un método de solución que se puede aplicar a todos los casos (Dávila, 2003a).

Viéte, describe su obra *In Artem Analyticam Isagoge* como el texto del análisis matemático restaurado. Esta obra, traza la línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y en ella se propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone desconocida o indeterminada y una constante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado. Esta distinción entre el concepto de parámetro y la idea de incógnita se considera un paso previo a la matemática moderna. Una de las consecuencias más importantes de la publicación del *Ars magna* de Cardano, fue que la solución de la ecuación cúbica condujo a las primeras consideraciones significativas acerca de un nuevo tipo de número.

También, Ludovico Ferrari (1522-1565) contribuye a la solución de la ecuación de grado cuarto, apoyado en su maestro Jerónimo Cardano: Lodovico fue un matemático italiano, que nació en Bolonia, Italia, el 2 de febrero de 1522 y murió en la misma ciudad envenenado por su hermana el 5 de octubre de 1565. Fue un estudioso de las matemáticas y en unión de otros colaboradores, llegó a ser uno de los mayores representantes de la escuela de Bolonia. Se dedicó principalmente al estudio del álgebra, llegando al descubrimiento de la resolución algebraica de la ecuación general de cuarto grado y de tercer grado (Dávila, 2003a).

Periodo uno: El simbolismo algebraico

Una falla de Viète, fue que no considero los números negativos ni los imaginarios como solución de ecuaciones, por lo que en este aspecto no iguala a Cardano, quien trabajó cantidades negativas como raíces de ecuaciones y las llamó *soluciones falsas* a las que identificaba con débitos y a los números imaginarios con entidades *verdaderamente sofisticadas.* Este simbolismo de Viete, no estuvo completamente desarrollado ya que era una mezcla de álgebra abreviada con un estilo simbólico, pero sentó las bases de la *teoría moderna de ecuaciones*: él consideró ecuaciones generales y no casos particulares como Cardano y sus antecesores. Cardano ya había entendido la estrecha relación entre los coeficientes de la ecuación y sus raíces, pero con el nuevo simbolismo quedaba clara esta relación para los matemáticos. Por tanto, Vieta, fue un analista (algebrista) que con su simbolismo pudo encontrar resultados para la solución de las ecuaciones algebraicas generales y aplicarlos a casos particulares (Dávila, 2003b).

En Inglaterra, las ideas de Viète, tuvieron gran impacto en los académicos Thomas Harriot (1560-1621) y William Oughtred (1574-1660), precursores de una escuela inglesa que favorece el estilo simbólico y establece las bases para el desarrollo del álgebra simbólica en la isla. La producción de Harriot se calcula entre siete mil y ocho mil páginas, pero su trabajo se conoció poco ya que nunca publicó sus investigaciones y en su testamento dio instrucciones para que solo su amigo y discípulo Nathaniel Torpoley, dispusiera de sus escritos y los publicara: este no pudo completar la compilación de los escritos y 10 años después de la muerte de Harriot, Walter Warnes otro discípulo, es el que edita y publica parte de los manuscritos algebraicos en 1631 con el título de *Artis Analyticae Praxis ad Aequations Algebraicas Resolvendas - Práctica del arte analítico para la resolución de ecuaciones algebraicas*, en el Harriot introduce una notación que va más allá de la propuesta por Viète (Dávila, 2003b, p. 39).

En esta dirección, William Outhtred, fue un matemático inglés influenciado por las ideas de Viète quien se dió a la tarea de difundir las ideas del francés en Inglaterra, trabajando el simbolismo de Viète y su Arte Analítico. Outhtred enseñaba los métodos del arte analítico, con muchos discípulos que hicieron grandes contribuciones en el siglo XVII, entre ellos John Wallis, Chistoper Wren y Richard Delamain. En 1631, año de la publicación de la *Praxis* de Harriot también se publicó el trabajo de Oughtred *Clavis Mathematicae* que influyó en los matemáticos de su tiempo y es considerada como una de las publicaciones más influyentes en la historia de las matemáticas de Gran Bretaña (Dávila, 2003b, p. 41).

La notación algebraica que se usa en la actualidad se debe en gran parte, a René Descartes (1596-1650) que en su obra: "La Géométrie", en uno de los tres apéndices, ejemplifica su método: ...para bien conducir la razón y buscar la verdad en las ciencias... que expone en su tratado: Discours de la Méthode, publicado en 1637. En su obra, se formaliza la teoría de ecuaciones y se establecen muchos símbolos y terminología del álgebra actual. Este trabajo influyó en el álgebra, ya que con el método de Descartes las curvas podían ser estudiadas a través de las ecuaciones y las ecuaciones a través de las curvas.

Al denotar las líneas por medio de símbolos algebraicos y al realizar operaciones geométricas que involucraban construcciones con regla y compás que correspondían a las cinco operaciones aritméticas básicas: suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas, inició un camino en el cual el álgebra jugaba un papel importante al introducir una nueva notación: por a^2, b^3 y expresiones similares, hacia referencia a simples líneas, a las cuales, sin embargo, llamó cuadrados, cubos... de tal manera que podía hacer uso de los términos empleados en el álgebra...(citado en Dávila, 2003b, p. 42). Además, usó las primeras letras en este nuevo simbolismo algebraico para denotar las cantidades conocidas y las últimas letras para denotar las incógnitas; también dispone de una notación más compacta: x, x^2, x^3, *etc.* y define los conceptos de ecuación y raíz de una ecuación, aceptados casi de inmediato por los matemáticos de su tiempo.

Para Descartes, era claro que si a era raíz de una ecuación polinomial, $x - a$ era un factor de la ecuación; además estableció la *regla de los signos* para estimar el máximo número de raíces reales de una ecuación de acuerdo a los cambios de signo de los coeficientes de ésta, hecho que ilustró con varios ejemplos. Pero, Descartes fue más allá, al afirmar que: toda ecuación podía tener tantas raíces distintas como el número de la dimensión de la incógnita de la ecuación, hecho que constituye a una primera aproximación del "Teorema fundamental del álgebra (Dávila, 2003b, p. 43).

Descartes aceptaba y trabajaba con raíces negativas a las que llamaba "falsas" y trabajaba las raíces complejas; en el Libro III de La Géométrie, hace una afirmación que se acerca mucho al Teorema Fundamental del Álgebra: Un polinomio de grado n tiene n raíces, sean estas positivas, falsas reales o complejas. Así, para Descartes las raíces que no correspondían a cantidades eran solo producto de la imaginación y las llamó "imaginarias". Este reconocimiento de las raíces imaginarias, fue más allá de lo aceptado por sus colegas matemáticos legitimando su uso (Dávila, 2003b, p. 43).

En la misma dirección, Fermat (1601-1665), fue otro matemático francés, a quien se le atribuye la invención de la *Geometría Analítica* casi simultáneamente que Descartes y de forma independiente. A Fermat, se le debe el uso de las *coordenadas cartesianas* que introduce en la exposición de su método de geometría analítica y que desarrolla en su escrito *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge - Introducción a los lugares [geométricos] planos y sólidos,* escrito en 1643.

En la introducción de su obra, Fermat sigue la notación de Vieta y por ejemplo la ecuación del círculo la escribe como $Bq. + Aq. = Eq.$ con A,B incógnitas, E una constante y q por quadratum. También, clasifica las secciones cónicas de acuerdo con su ecuación y muestra que toda ecuación cuadrática en dos incógnitas representa una línea recta, o una cónica. Fermat, es el fundador de la teoría moderna de números, donde desarrolló una gran cantidad de resultados, pero sin dar demostración a muchos de sus teoremas, los cuales se ha probado que en su mayoría son correctos (Dávila, 2003b).

2.2.5. Edad moderna (finales del siglo XVII-XVIII)

Periodo uno: Los polinomios simétricos de Isaac Newton (1643-1727)

Newton (1642-1727) fue un matemático británico considerado como a uno de los más grandes científicos de la humanidad. Uno de los trabajos más conocidos corresponde a *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica-Principios matemáticos de la filosofía natural,* publicado en 1687 donde establece las leyes del movimiento de los cuerpos y las leyes de la gravitación universal sobre bases geométricas; también hace contribuciones en óptica y se le considera como un físico-matemático; con grandes contribuciones al desarrollo del álgebra. En el período de 1664 a 1667 produce sus más revolucionaria ideas: el estilo de razonamiento lógico de Aristóteles, en su complicado sistema filosófico (Dávila, 2003b).

Newton había leído a Euclides, pero sus conocimientos en geometría no eran suficientemente sólidos y su interés por la astrología lo llevó a estudiar la trigonometría en 1663 al no entender varias de las demostraciones por falta de bases geométricas; por tanto, regresó al estudio de la geometría euclidiana, donde al releer el teorema de pitágoras, cambia de opinión ya que las demostraciones le parecían muy sencillas y vuelve a leer a Euclides: después lee la *Clave* de Oughtred con dificultades para entender. Cambia de lectura a la Geometría, de Descartes en la edición latina realizada por Frans Schooten publicada en 1649; esta edición es ampliamente comentada y con explicaciones muy valiosas sobre el trabajo de Descartes. Luego de varias lecturas, comprende a Descartes mejor que a Euclides. Continúa con la lectura de la Arithmetica Infinitorum de Wallis; *Euclides Elementorum* de Isaac Barrow, quien también fue su maestro y finalmente con: *La opera Mathematica*, de Viète (Dávila, 2003b).

Con la lectura de la Arithmetica, de Wallis, descubre su famoso teorema del Binomio de Newton, el cual ya se conocía desde mucho antes para exponentes enteros no negativos; lo generaliza para exponentes fraccionarios y negativos y lo publica por primera vez en el Tratado de Álgebra de Wallis, con el debido crédito a su descubridor. Newton, no da una prueba rigurosa del teorema, sino que llega a su formulación después de sus investigaciones en cálculo de áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^2$. En el texto: la Arithmetica ya había estudiado cómo calcular estas áreas bajo curvas con ordenadas de la forma $(1-x^2)^{\frac{n}{2}}$ donde n es un entero positivo par. Este resultado fue importante ya que con el llegó a la formulación del cálculo diferencial e integral. (Dávila, 2003b, p. 46).

El trabajo con "polinomios simétricos" es otro de los resultados importantes de Newton: estos polinomios corresponden a aquellos polinomios donde al cambiar el orden de las variables en la ecuación polinomial no cambia su forma. Los polinomios simétricos elementales, para la ecuación de grado dos, en el caso de dos variables corresponden a:

$\sigma_1(u,v) = u + v$
$\sigma_2(u,v) = uv$

Y para la ecuación de grado dos $x^2 + ax + b = 0$ con a,b con números complejos, se tiene que:

$x^2 + ax + b = (x - u)(x - v) = x^2 - (u + v) + uv$

De donde, encuentra una relación entre los coeficientes de la ecuación y los polinomios simétricos elementales en sus raíces, así:

$u + v = -a$
$uv = b$

En forma similar, para la ecuación cúbica:

Sea $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ con coeficientes a,b,c complejos y con raíces u,v,w entonces, los polinomios simétricos elementales corresponden a:

$x^3 + ax^2 + bx + c = (x - u)(x - v)(x - w) = x^3 - (u + v + w) + (uv + uw + vw) - uvw$

Entonces,

$u + v + w = -a = \sigma_1(u,v,w)$
$uv + uw + vw = b = \sigma_2(u,v,w)$
$uvw = -c = \sigma_3(u,v,w)$

Este hecho, evidencia que no es importante conocer las raíces, sino suponer su existencia. Cardano, ya había entendido esta relación al menos para la cúbica y con el nuevo esquema de Viète estas relaciones fueron más evidentes y él observó que esta era una regla que se cumple siempre para las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual que cinco (Dávila, 2003b).

En 1707, Newton publicó el libro: Arithmetica Universalis, cuando tenía gran fama y había cesado en parte su actividad científica, con resultados que habían sido descubiertos tiempo atrás; entre estos resultados, enuncia un teorema sobre la suma de potencias de las raíces de la ecuación polinomial de la forma $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}$ $+...+ a_n-_1x + a_n = 0$, el cual viene a ser muy importante en los desarrollos siguientes del álgebra (Dávila, 2003b).

Continuando con el desarrollo del álgebra, otro de los matemáticos que hace aportes importantes es Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), coinventor del cálculo diferencial e integral de manera independiente a Newton, con aportaciones importantes en álgebra aunque poco conocidas: generalizó el teorema del binomio a expresiones multinomiales tales como $(a+b+c)^n$, $(a+b+c+d)^n$ y fue el primero en introducir la noción de determinante al trabajar con sistemas de ecuaciones. Otra aportación la hace en los números complejos, cuyo estudio había sido relegado en ese tiempo. Leibniz probó en 1676 que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ y en 1702:

$$x^4 + a^4 = (x + a\sqrt{-\sqrt{-1}})\,(x + a\sqrt{\sqrt{-1}})\,(x - a\sqrt{-\sqrt{-1}})\,(x - a\sqrt{\sqrt{-1}})$$

Estos descubrimientos hicieron que Leibniz se sintiera impresionado por el potencial de los números complejos aunque no exploró la posibilidad de darles una representación geométrica y les dio un estatus que estaba a medio camino entre la existencia y la no existencia (Dávila, 2003b, p.48).

Periodo uno: Fórmulas de Girard-Newton

Para las raíces del polinomio se definieron las sumas de las potencias de las ráices del polinomio:

$$S_p(x_1,..., x_n) = \sum_{k=1} x_k^p$$

Y las relaciones entre estas S_p y los polinomios simétricos $\prod_n$ estan dadas por lo que se conoce como las fórmulas de Newton-Girard, que se generalizan:

$$(-1)^m \prod_m (x_1,..., x_n) + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+m} S_k(x_1,..., x_n) \prod_{m-k}(x_1,..., x_n) = 0$$

Para cada $1 \leq m \leq n$ y para un número arbitrario de variables n. Las cinco primeras identidades corresponden a:

$$S_1 - \Pi_1 = 0$$

$$S_2 - S_1\Pi_1 + 2\Pi_2 = 0$$

$$S_3 - S_2\Pi_1 + S_1\Pi_2 - 3\Pi_3 = 0$$

$$S_4 - S_3\Pi_1 + S_2\Pi_2 - S_1\Pi_3 + 4\Pi_4 = 0$$

Estos desarrollos se conocen como las fórmulas de Newton para el polinomio de grado n, $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} +...+ a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ a las relaciones:

$0 = a_1 + S_1 a_0$

$0 = 2a_2 + S_1 a_1 + S_2 a_0$

$0 = 3a_3 + S_1 a_2 + S_2 a_1 + S_3 a_3$

$\vdots$

$0 = na_n + S_1 a_{n-1} + \ldots + S_n a_0$

$\vdots$

$0 = a_n S_i + \ldots + S_{n+i}\, a_0$

$\vdots$

En la obra: *Arithmetica Universalis*, de Newton de 1707, aparece el teorema:

Cualquier polinomio simétrico en las raíces de una ecuación se puede expresar en términos de los coeficientes de la ecuación (Chavarría, 2014, p.78).

Periodo uno: El teorema fundamental del álgebra

Albert Girard (1595-1632) fue otro matemáticos francés, a quien se le reconoce como el primero en establecer en forma explícita que una ecuación polinomial de grado n debí tener n raíces. En 1629 en su tratado de álgebra: Invention Nouvelle en l'Algebra, trata ampliamente el tema de la relación entre los coeficientes de una ecuación y las funciones (polinomios) simétricas de sus raíces y presenta algunos ejemplos de ecuaciones de grado cuatro para las cuales establece que hay cuatro soluciones, no más ni menos. Descartes, ya había presentado este teorema en su obra: la Geométrié, con algunos ejemplos para ilustrarlo. También, deja claro que si t es una raíz de una ecuación polinomial, entonces $(x - t)$ es un factor de la misma. Newton y Colin Maclaurin (1698-1746) también dieron versiones parecidas de este teorema que recibiría el nombre del Teorema fundamental del álgebra-TFA (Dávila, 2003b).

D'Alambert (1717-1783) físico matemático francés; hizo el primer intento de demostración del TFA, pero su prueba no fue totalmente correcta, ya que usó el hecho de que una función continua en un conjunto compacto toma un valor mínimo; lo cual se probaría mucho tiempo después; sin embargo, sus ideas fueron de utilidad años más tarde. Por esa fecha, Leonhard Euler (1707-1783) matemático suizo; prueba que todo polinomio real de grado n con $n \leq 6$ tiene exactamente n raíces complejas y que si $a+b\sqrt{-1})$ es una raíz compleja de un polinomio, su conjugada $a - b\sqrt{-1})$ también era raíz del polinomio. En 1749 intenta la prueba general del teorema pero su prueba es incompleta y es Joseph Louis Lagrange (1736-1813) matemático francés, quien en una memoria presentada a la academia de Berlín en 1772, trató de completar la prueba de Euler, con un razonamiento no muy preciso, ya que Lagrange, al igual que Euler y otros matemáticos de la época, operaban libremente las raíces de las ecuaciones como si fueran números ordinarios, sin tener en cuenta que las raíces fueran números complejos (Dávila, 2003b).

Le corresponde a Carl Friedrich Gauss (1777-1855) matemático Alemán, el mérito de haber sido el primero en dar una prueba convincente, aunque no completamente rigurosa del TFA en su tesis doctoral: Nueva demostración del teorema de que toda función algebraica en una variable puede ser factorizada en factores reales de primer o segundo grado, en 1799. En este trabajo hace la crítica a los trabajos de D'Alambert, Euler y Lagrange y aborda el TFA desde una perspectiva distinta, ya que Gauss no calcula las raíces del polinomio real, sino que demuestra su existencia por medio de un método original (Dávila, 2003b, p.50).

En 1814, Jean Robert Argand (1768-1822) matemático francés; presenta una prueba sencilla del TFA basado en las ideas de D'Alambert y en 1816 Gauss presenta la prueba basado en las ideas de Euler, con una demostración completa y correcta. En ese mismo año, presenta una tercera prueba del teorema desde una perspectiva geométrica, como en su primera demostración y en 1849 Gauss, prueba el TFA en forma general, esto es:

Teorema 2.1. *Un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas (Dávila, 2003b).*

En la terminología moderna este teorema equivale a decir que el campo de los números complejos es algebraicamente cerrado.

Tabla 2.2: Significados dados al objeto Grupo en las civilizaciones antiguas, en la edad media y en la edad moderna

	EDAD MODERNA	
PERIODO UNO		SIGNIFICADO ALGEBRAICO:
	Carl Friedrich Gauss (17771855) Alemán Jean Robert Argand (17681822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierre de Fermat (1606-1665) Francés	Conjunto Z_p Conjunto de permutaciones de las raíces. Conjunto de los enteros y la aritmética módulo *n*.
	RENACIMIENTO	

PERIODO UNO	Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574- 1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (funciones con las raíces de las ecuaciones). Aritmética módulo n.
	EDAD MEDIA	
PERIODO UNO	Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (14651526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (funciones de las raíces las ecuaciones).
	EDAD MEDIA	
PERIODO CERO	Nicolás Chuquet (1450- 1500) Francés Leonardo de Pisa - Fibonacci (1175-1240) Italiano	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO
	Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940- 998)	
	Hindúes: Bhaskara(1114-1185) Brahmagupta (598-670)	
	CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	

2.2.6. Edad contemporánea (XIX a la actualidad)

Período dos: Búsqueda de métodos generales para la solución de la ecuación algebraica de grado n. Demostración de la imposibilidad solucionar por radicales las ecuaciones algebraicas generales de grado $n > 4$

Hacia la segunda mitad del siglo XVIII, uno de los problemas centrales era: encontrar las soluciones de la ecuación general de grado n por el método de radicales, esto es, haciendo operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíces, con los coeficientes de la ecuación:

$$x\hat{}n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (2.1)$$

Los métodos para resolver las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas de los algebrista italianos del siglo XVI se generalizaron en los siglos posteriores; se retomó a Viète, Descartes, Euler y Bézout: por el éxito con el análisis algebraico en la solución de la ecuación (2.1), para los casos $n = 3$ y $n = 4$ así, muchos matemáticos de los siglos

XVII y XVIII trataron de encontrar un método de solución para la ecuación general de grado quinto; entre ellos Newton, Leibniz, Tschimhausen, D'Alambert y Euler. Se pensaba que el método debía existir y por esta razón, no se lograron avances significativos sino hasta 1770 con los trabajos de Vandermonde y Lagrange.

En 1770, Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) matemático Francés: presenta a la academia de Ciencias de París su trabajo: Mémoire sur la Résolution des Equations, en el cual enunciaba que toda ecuación de la forma:

$$x^p - 1 = 0$$

con p un número primo, es soluble por radicales.

Vandermonde, da un método similar para encontrar las raíces de la bicuadrática e incluso analiza algunos casos de ecuaciones particulares de grado superior; pero su trabajo se publicó en 1774 y sus razonamientos fueron opacados por el trabajo de Lagrange, con la "Teoría de ecuaciones algebraicas"; en 1771, se publica la memoria de Lagrange: *Réfléxions sur la Résolution Algébrique des Equations,* por la Academia Prusiana de Ciencias. En este tratado, se analizaban, desde diferentes puntos de vista varios de los métodos para resolver por radicales las ecuaciones de grado tres y cuatro; con base en este análisis, Lagrange presenta un método que resume los anteriores y logra encontrar la característica común de los métodos: los métodos funcionan porque es posible reducir cualquier cúbica o bicuadrática a una ecuación auxiliar cuya grado es menor en uno, respecto a la original: éstas ecuaciones son las que admiten una solución por radicales (Dávila, 2003b, p. 52).

Con respecto a la ecuación de grado quinto Lagrange escribió: "El problema de resolver [por radicales] las ecuaciones cuyo grado es mayor que el cuarto, es uno de esos problemas que no han sido resueltos, si bien nada prueba la imposibilidad de resolverlos" (Lagrange, 1867, p. 305 citado en Dávila, 2003b).

Más adelante en el texto, Lagrange afirma: "De nuestro razonamiento vemos que es muy dudoso que los métodos que hemos considerado puedan dar una completa solución a las ecuaciones de quinto grado" (Lagrange, 1867, p. 307 citado en Dávila, 2003b. p. 55).

Aunque Lagrange no tuvo éxito y a pesar de no obtener resultados concluyentes para las ecuaciones de grado mayor a cuatro, los resultados de su análisis sobre la resolución de ecuaciones algebraicas fueron una parte fundamental en el desarrollo del álgebra moderna, además de la gran influencia que pudo ejercer en la comunidad matemática de finales del siglo XVIII y del siglo XIX (Dávila, 2003b).

Antes de Lagrange, nadie había escrito sobre la posibilidad de la no existencia de métodos generales para resolver por radicales las ecuaciones de grado superior a cuatro. Incluso, algunos matemáticos creyeron haber resuelto la ecuación de grado quinto: en el siglo XVII, el algebrista Tschirnhausen (1661-1708) desarrolló un método que se basaba en transformar la ecuación dada en una más simple, proceso en el cual era necesario resolver una ecuación auxiliar. Este método funcionaba bien para las ecuaciones de grado dos, tres y cuatro; pero, después se probó que para la ecuación de grado quinto, la ecuación auxiliar que previamente se debía resolver resultaba de grado sexto. Así que fue necesario esperar hasta el siglo XIX para resolver el problema completamente (Dávila, 2003b, p. 56).

Paolo Ruffini (1765-1822), matemático italiano, discípulo y admirador de Lagrange, en su trabajo: *Teoría generale delle equazioni*, del año 1799, logró probar usando el método de Lagrange, que para las ecuaciones de grado superior a cuatro es imposible encontrar ecuaciones resolventes de grado menor que cinco. Publicó una segunda memoria sobre el mismo tema en las *Memorie di Matemática e Física della Societá Italiana delle Scienze*, en 1802; posteriormente publicó otro trabajo en 1813 titulado: *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*; versión más elaborada sobre sus trabajos anteriores y estudió con gran detalle las permutaciones de las raíces de una ecuación, con lo cual llegó a demostrar la imposibilidad de resolver algebraicamente las ecuaciones de grado superior a cuatro (Dávila, 2003b, p. 56).

El trabajo de Ruffini, fue analizado con escepticismo por los matemáticos de la época: Malfatti, Carnot y Legendre que expresaron sus dudas acerca de la validez de las demostraciones presentadas. La prueba dada por Ruffini, no fue del todo concluyente ya que en ella se asumía que si una ecuación era soluble por medio de radicales, entonces las expresiones para las raíces podían darse de tal forma que los radicales involucrados fueran funciones racionales de las raíces de la ecuación y de las raíces de la unidad (Kline, 1972, p. 605). Este resultado no fue probado y por tal motivo sus conclusiones no fueron definitivas, aunque esto era correcto (Dávila, 2003b, p. 56).

Aparece en este desarrollo el joven matemático noruego, Niels Henrik Abel (1802–1829) quien demuestra que es imposible resolver por radicales las ecuaciones de grado superior a cuatro. Abel estudió las obras de Euler, Lagrange y Gauss y creyó haber encontrado un método para resolver la ecuación general de quinto grado, pero pronto se dio cuenta de su error y continuó con sus investigaciones en el problema: finalmente, en 1824, demostró la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado mayor que cuatro. Publicó sus resultados en un panfleto titulado: *Mémoire sus les équations algébriques*, corriendo él mismo con los gastos de la publicación por su precaria situación económica. Luego, en 1826 publicó una versión más elaborada de su prueba, en el Journal "für die reine und angewandte Mathematik" - Revista de Matemáticas puras y aplicadas de Crelle, con el título de *Démostration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales* *qui passent le quatriéme degré*. Estos dos trabajos, tenían las mismas ideas solo que algunas partes eran mejor explicadas en el segundo artículo y otras simplificadas (Dávila, 2003b, p. 57).

Abel, conocía el trabajo de Ruffini y había expresado sus dudas sobre la validez de la demostración dada, respecto al problema de la no solubilidad de la ecuación general de grado *n*: "Su memoria es de tal manera complicada que es muy difícil juzgar sobre la justeza de sus razonamientos. Me parece que su razonamiento no es del todo satisfactorio" (Dávila, 2003b, p. 57).

Para probar este teorema hizo uso de otros resultados obtenidos por Lagrange, Ruffini y Cauchy en relación con el número de valores que una función de *n* variables puede tomar si éstas son permutadas. Así quedó resuelto un problema que por más de dos siglos y medio había resistido los embates de muchos matemáticos destacados. Como consecuencia de este resultado, se demostró que es imposible resolver por radicales la ecuación general de grado n para $n \geq 5$.

En 1829, dos meses antes de su muerte, en extrema pobreza Abel publicó otro trabajo en el Journal de Crelle con el título: *Mémoire sur une classe particuliére d'équations resoluble algébraiquement*, el cual trataba sobre el problema de la división de la lemniscata, que es la curva en forma de 8 (la división del círculo llevaba a ecuaciones llamadas "ciclotómicas". En el caso de dividir la lemniscata en arcos de igual longitud se obtenía una familia de ecuaciones algebraicas las cuales probó que eran solubles por radicales; a estas ecuaciones se les llama abelianas. Abel introduce otras nociones importantes en su estudio, como campo y polinomio irreducible: nociones centrales en el trabajo de Galois (Dávila, 2003b, p. 58).

Tabla 2.3: Significados dados al objeto Grupo en la edad contemporánea

	EDAD CONTEMPORÁNEA	
PERIODO DOS	Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) Francés Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano Alexandre Théophile Vandermonde (1735-796) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones. Grupo S_4 de permutaciones. Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).

El trabajo de Abel fue muy importante, pero le faltó dar respuesta a la pregunta:¿Cuándo una ecuación arbitraria es soluble por radicales? Se sabía de la imposibilidad de dar métodos generales, que permitieran resolver cualquier tipo de ecuación de grado superior a cuatro (Teorema de Abel); pero, existen familias particulares de ecuaciones de grado mayor que cuatro que son solubles por radicales.

Este hecho había sido demostrado por Karl Frederick Gauss, desde 1801, año en que se publicó su famoso libro: *Disquisitiones Aritmethicae*, el cual fue la fuente de inspiración para muchos matemáticos y fundamental en el desarrollo de la teoría de números y del álgebra(Dávila, 2003b).

Período tres: Determinación de las familias de ecuaciones algebraicas de grado n > 4 solubles por radicales y la Teoría de Galois

Evariste Galois (1811_1832) fue el matemático Francés, que dio respuesta definitiva al problema de la solubilidad de las ecuaciones algebraicas por medio de radicales y crea la teoría algebraica llamada hoy "Teoría de Galois" que corresponde a una de las más grandes creaciones en la historia de la matemática, tanto por las aportaciones a ésta, como por los desarrollos posteriores de la teoría, dando lugar a un área de investigación en las matemáticas contemporáneas (Dávila, 2003b, p. 59).

En 1829, el 25 de mayo, Galois presenta a la Academia de Ciencias de París los primeros resultados de sus investigaciones sobre la solubilidad de las ecuaciones de grado primo por intermediación de Cauchy, quien fue designado para revisar los trabajos; sin embargo, el día de dar el reporte, Cauchy se excusa y pide programar su presentación para otra sesión; en la siguiente sesión, presentó un trabajo suyo y no mencionó al trabajo de Galois. Se tiene la hipótesis de que Cauchy animo a Galois a unificar y extender sus investigaciones y presentar su memoria para el Grand Prix de Matemáticas, cuya convocatoria cerraba el primero de marzo. Así, en Febrero de 1830 Galois presentó una memoria en la cual se analizaban las condiciones para que una ecuación fuera soluble por radicales; esta memoria fue asignada a Fourier en calidad de secretario perpetuo de física y matemáticas de la Academia. Después de varios meses, Galois envía una carta a la Academia quejándose por el negligente trato con su trabajo; la respuesta que obtuvo fue: "...el asunto es muy simple, la memoria se perdió con la muerte de Cauchy, a quien se le había confiado la tarea de examinarla..." También, Fourier muere el 16 de mayo de ese año y no se encontró entre sus papeles, por lo que no participó en el concurso (Dávila, 2003b, p. 60).

Galois, publicó varios trabajos en el período de abril a junio de 1830 en el prestigioso Bulletin de sciences mathematiques, physiques et chimiques, dirigido por el Barón de Férussac; estos trabajos correspondían a un resumen de la memoria enviada al Grand Prix, *Analyse d'une mémoire sur la résolution algébrique des équations*, en la cual enunciaba sin demostrar los teoremas principales que ella contenía y un artículo titulado: *Notes sur la résolution des équations numériques*; además, un artículo muy importante titulado: Sur la théorie des nombres. Por invitación de Poisson, volvió a reescribir la memoria presentándola de nuevo a la Academia el 17 de enero de 1831, con el título de: *Mémoire sur les Conditions de Résolubilité des Équations par Radicaux*: los revisores designados fueron Lacroix y Poisson. En julio recibió la respuesta:

Estimado señor Galois:

Su artículo fue enviado al Sr. Poisson para su revisión. El lo ha regresado con su reporte, que ahora citamos:

Hemos hecho todo esfuerzo para entender las demostraciones del Sr. Galois. Su argumento no es lo suficientemente claro no lo suficientemente desarrollado de tal manera que nos permita juzgar su rigor; ni siquiera es posible para nosotros darnos una idea sobre este artículo.

El autor afirma que las proposiciones contenidas en el manuscrito son parte de una teoría general la cual tiene muchas aplicaciones. Con frecuencia, diferentes partes de una teoría se aclaran unas a otras y se pueden entender más fácilmente cuando son tomadas juntas en vez de aisladas. Por lo tanto, deberíamos mejor esperar para formarnos una opinión más definida, hasta que el autor publique una versión más completa de su trabajo.

Por esta razón, le estamos regresando el manuscrito esperando que encuentre útiles las observaciones del Sr. Poisson para su trabajo futuro.

Francois Arago, Secretario de la Academia (Dávila, 2003b, p. 61).

Galois lee la memoria en la noche anterior al duelo haciéndole algunas correcciones y anotaciones: "ha sido uno de los más grandes testamentos científicos en la historia de las matemáticas" (Dávila, 2003b, p. 61). Todas las proposiciones y teoremas enunciados son correctos. Algunas demostraciones, requerían de ciertos retoques ya que estaban solo esbozadas, al estilo de Galois; sin embargo, resultaba impresionante la claridad y la profundidad de las ideas, así como la seguridad de este, sobre la importancia de sus resultados (Dávila, 2003b, p. 61).

Galois, al igual que Abel, tenía claro el concepto de campo como el conjunto a donde pertenecían los coeficientes de la ecuación y además, que al adjuntar otras cantidades al campo, se iban construyendo extensiones del campo base y que éstas extensiones eran campos. Define polinomio reducible, como aquel que se puede factorizar en el campo base, de lo contrario se llama irreducible; una ecuación que es irreducible en el campo original, puede volverse reducible al adjuntarle al campo una cantidad (campo extensión). Otro de los conceptos fundamentales en este trabajo fue el de Grupo de permutaciones. Así, Galois es el primero en usar el término "Grupo" como una colección cerrada de permutaciones bajo la operación de composición: "si uno tiene en el mismo "grupo" las sustituciones S y T uno deberá tener la sustitución ST. " Estas sustituciones eran las permutaciones de las raíces de la ecuación (Dávila, 2003b, p. 62).

Los conceptos anteriores, fueron la base de una teoría general de la cual Galois tenía una idea completamente clara, lo cual se puede constatar con sus escritos; así, en la introducción de su memoria escribe: "me debo conformar con describir de una manera sintetizada los principios generales y una sola aplicación de mi teoría" (Dávila, 2003b, p. 62). La aplicación era la solubilidad de las ecuaciones por radicales;

ya que con ésta teoría, las principales propiedades de la ecuación se reflejan en ciertas propiedades del grupo asociado a la ecuación denominado en la actualidad: El grupo de Galois de la ecuación. La existencia del grupo y de sus propiedades fueron probadas por Galois en su memoria (Dávila, 2003b).

La memoria no fue entendida por los matemáticos de la Academia de Ciencias encargados de su revisión; tuvieron que pasar 14 años después de la muerte de Galois para que fuera publicada por Joseph Liouville (1809-1882) matemático Francés, en su Journal de Mathématiques Pures et Apliquées, en el año 1846. Aquí, Liouville hace algunos comentarios y cuenta el gran regocijo que sintió, después de llenar unas cuantas omisiones leves por parte de Galois y al verificar que los resultados propuestos eran totalmente correctos. Otra de los aportes de Galois al álgebra, en su memoria: *Sur la théorie de nombres*, fue el inicio de lo que hoy se llaman los campos de Galois, importantes en el álgebra contemporánea (Dávila, 2003b, p. 63).

Entre los primeros que estudiaron y continuaron los trabajos de Galois se encuentran: Liouville, Charles Hermite, Victor Puiseux y Joseph_Alfred Serret. Este último tomó algunos cursos con Liouville sobre la Teoría de Galois y publicó en 1854 un libro titulado: *Cours d'Algebre Supérieure*, cuya tercera edición de 1866 incluye un capítulo dedicado a exponer esta teoría. Las dos ediciones anteriores no la incluían, debido al anuncio hecho por Liouville de publicar las obras de Galois, lo cual no llevó a cabo. Sin embargo, el primero en hacer una exposición completa de esta teoría y presentar en forma detallada todas las demostraciones fue Enrico Betti en 1852. Después, Camille Jordan publicó en 1870 un tratado que tuvo mucha influencia en el desarrollo posterior de la teoría de Grupos y la Teoría de Galois (Dávila, 2003b).

Período tres: Los conjuntos de permutaciones

Una de las aportaciones fundamentales de Lagrange, fue el hecho de que sus métodos mostraron la importancia que tenía el estudio de las permutaciones de las raíces de la ecuación algebraica. Lagrange consideró que en este estudio residía la verdadera filosofía del problema (Dávila, 2003b, p. 65). De hecho, según Kleiner (1986): "... era la primera vez que se hacía una asociación entre las soluciones de una ecuación polinomial y las permutaciones de sus raíces..." Este punto de vista de Lagrange fue correcto como lo apreció Galois en su trabajo (Dávila, 2003b).

En la misma dirección, el matemático Francés, Augustin–Louis Cauchy (1789-1857) en 1815 realizó grandes aportes a la teoría de los grupos de permutaciones; a él se debe que esta teoría se haya desarrollado de manera autónoma, ya que antes de Cauchy solo se estudiaban las permutaciones en relación a la teoría de ecuaciones. En ese año, Cauchy publicó un importante resultado relacionado con los distintos valores que puede tomar una función racional no-simétrica en n variables. Ruffini había probado que para el caso de una variable el número de valores distintos no podía ser menor que 5, a menos que fuera 2; Cauchy generalizó este resultado para el caso de n variables y Abel usó el resultado para probar su famoso teorema (Dávila, 2003b).

En los años 1844 a 1846 Cauchy avanzó en su producción respecto a los grupos de permutaciones en varios artículos, en los que probó teoremas importantes de la teoría moderna de grupos. Además, Cauchy introduce una notación que es muy usada para las permutaciones: para el conjunto $X = \{1,2,3,4\}$ define una permutación como una función biyectiva de X en sí mismo. Al conjunto de todas las permutaciones lo denota por S_4 y este conjunto con la operación de composición de funciones viene a ser el grupo denominado grupo de permutaciones de cuatro objetos que tiene 4! = 24 elementos; Cauchy denota una permutación como:

$$f = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2341 \end{pmatrix}$$

Y en notación cíclica como (1234), simbología que se usa hasta actualmente. Entre los resultados más importantes de Cauchy respecto a este grupo de permutaciones se tiene: a) Toda permutación es producto de 3−ciclos y b) Si un número primo p es divisor del número de elementos de un grupo, entonces el grupo contiene un subgrupo de orden p (Dávila, 2003b).

Un trabajo que unifica las ideas de Galois (grupos asociados a las ecuaciones) y de Cauchy (grupos de permutaciones en sí mismos) fue el trabajo de Camille Jordan (1838-1922). En su libro: Traité des substitutions et des équations algébriques, publicado en 1870, no solo aplicó el concepto de grupo a la teoría de ecuaciones, sino también a la geometría algebraica; las funciones trascendentes y la mecánica teórica (Dávila, 2003b). Entre las nociones que introduce Jordan en su tratado, se encontraban: el concepto de homomorfismo, isomorfismo y grupo soluble. También, define el concepto de serie de composición para un grupo (de permutaciones) y prueba parcialmente el famoso teorema de Jordan−Hölder, que establece que: “cualquiera dos series de composición para un grupo son equivalentes; por lo que todo grupo que tenga una serie de composición determina una lista única de grupos simples. Esto hace referencia a grupos de permutaciones que no tienen subgrupos normales no triviales. En este contexto, Jordan prueba que los grupos A_n son simples para $n \geq 5$ (Dávila, 2003b, p. 66).

Período tres: Grupos abelianos

Gauss (1777-1855) fue un matemático Alemán y en su obra *Disquisitiones,* inició con el estudio de los *grupos abelianos finitos*, obteniendo muchos resultados pero sin usar la terminología de la teoría de grupos. Los objetos, con los que trabajaba Gauss y que en la actualidad se dan como ejemplos importantes de grupos son: *el grupo aditivo de los enteros módulo n*, $\mathbb{Z}_n$*; el grupo multiplicativo de enteros que son primos relativos con n, módulo n; el grupo de clases de equivalencia de formas cuadráticas binarias* *y el grupo de las raíces n*–ésimas de la unidad. Además, prueba que el conjunto $Z_p^* = \{\bar{1}, ..., \overline{p-1}\}$ es un grupo multiplicativo cíclico, esto es, que todos sus elementos se generan como potencias de uno solo de ellos y usó argumentos propios de la teoría de grupos, para probar el pequeño teorema de Fermat:

Teorema 2.2. *Si p no divide al entero a, entonces* $a^{p-1} \cong 1$ *mod p.*

En los grupos la operación definida entre los elementos es conmutativa, por eso se llaman *grupos abelianos.*

Período cuatro: La Teoría Abstracta de Grupos en el siglo XIX

El tratado de Jordan sobre grupos de permutaciones, tuvo gran influencia en la evolución de la teoría general de grupos, por el estudio realizado a ciertos grupos de sustituciones lineales, que en la terminología moderna corresponden a grupos clásicos sobre el campo de Galois $GF(p)$, con p un número primo. El grupo lineal $GL(n, p)$ de matrices invertibles de orden n con entradas en el campo finito $GF(p)$ es uno de ellos, esto en notación moderna y Jordan logra probar que algunos de los grupos clásicos o sus subgrupos son simples.

Los grupos simples, con un número finito de elementos son importantes ya que con ellos se construye cualquier grupo finito. La clasificación de todos los grupos finitos simples, fue el trabajo de muchos matemáticos del siglo XIX. Así, Otto Hölder en 1889, es el primer matemático en estudiar de forma abstracta los grupos simples; según Hölder : "seria de gran interés si una lista de todos los grupos simples con un número finito de elementos se pudiera conocer" (citado en Dávila, 2003b, p. 73).

La importancia de los tratados de Jordan en teoría de Grupos es indiscutible; sin embargo, el concepto unificador de Jordan de *grupo de permutaciones,* quedó rebasado con los trabajos de dos matemáticos que fueron atraídos a París, por la fama de Jordan. Fueron estos matemáticos, Félix Klein y Sophus Lie, quienes permanecieron allí de abril a junio de 1870 justo cuando el libro de Jordan hacia su aparición. Klein y Lie se hicieron amigos en 1869 y sus investigaciones tenían puntos en común. Lie había sido introducido a la teoría de grupos por L. Sylow, matemático noruego. Klein y Lie viajaron a Francia, donde tuvieron contacto con Jordan y su estancia fue determinante para sus desarrollos posteriores (Dávila, 2003b).

La generalidad del concepto grupo, no como grupo de permutaciones de Jordan, Cauchy y Galois sino como "grupo de transformaciones", aparece en un artículo publicado en 1871 por Klein y Lie en Mathematische Annale. En este artículo se explora la idea de "grupo continuo dimensión uno" y se establece la conmutatividad de éstos. Luego de esto, los intereses de los dos matemáticos tomaron caminos separados aunque siempre ligados al estudio de grupos: Lie desarrolló su teoría de grupos continuos y la aplicó al estudio de las ecuaciones diferenciales; Klein, por su parte, aplicó la noción de grupo de transformaciones, al estudio de las geometrías y luego inició trabajos en "grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales" importantes en el estudio de las funciones automorfas (Dávila, 2003b).

Período cuatro: Los grupos de transformaciones y la clasificación de las geometrías

Klein, en la conferencia inaugural para su admisión como profesor de la Universidad

Tabla 2.4: Significados dados al objeto Grupo

PERIODO TRES	EDAD CONTEMPORÁNEA Camille Jordan (1838-1922) Francés Evariste Galois (1811-1832) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones. Grupos A_n de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Grupos simples. Grupos solubles. Grupo de Galois del polinomio o grupo asociado a la ecuación polinomial.
PERIODO DOS	EDAD CONTEMPORÁNEA Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego Agustín-Louis Cauchy (1789-1857) Francés Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO Grupos de permutaciones Grupo S_4 de permutaciones. Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).
PERIODO UNO	EDAD MODERNA Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán Jean Robert Argand (1768- 1822) Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierrede Fermat (1606-1665) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjunto de permutaciones. Aritmética módulo n.

PERIODO UNO	RENACIMIENTO Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574-1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (funciones con las raíces de las ecuaciones). Aritmética módulo *n*.
PERIODO UNO	EDAD MEDIA Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (14651526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones. (Funciones con las raíces de las ecuaciones).
PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés Leonardo de Pisa - Fibonacci (1175-1240) Italiano Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998) Hindúes: Bhaskara (1114-1185) Brahmagupta (598-670)	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO
	CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	

de Erlangen en 1872, marcó un cambio profundo en la *concepción de la noción grupo*. La conferencia tenía el título: *Resumen comparativo de investigaciones recientes en Geometría:* allí establece lo que sería llamado "el Programa de Erlangen" cuyo eje principal era la clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas), como el estudio de invariantes bajo varios grupos y sus geometrías asociadas, tales como: el grupo proyectivo, el grupo de movimientos rígidos, el grupo hiperbólico, creando una nueva concepción, tanto del concepto grupo como del de geometría.

Período cuatro: Los grupos continuos de transformaciones

En la misma dirección, Lie trabajó los grupos continuos de transformaciones, que iniciaron a tomar forma en 1870 y lo llevaron a formular lo que ahora se conoce como: "La teoría de Lie" (grupos de Lie y Álgebras de Lie,) la cual se convirtió en una rama independiente de las matemáticas: sus investigaciones se publicaron entre

1872 y 1879; sus ideas fueron de fecundidad extraordinaria ya que aún hoy se siguen demostrando resultados relacionados con los grupos y las álgebras de Lie (Dávila, 2003b).

Las ideas de Lie, se relacionaban con la integración de ecuaciones diferenciales parciales; sus investigaciones lo llevaron a considerar "grupos de transformaciones" que dejaban invariante una ecuación diferencial parcial (simetrías de ecuaciones diferenciales) y así pudo darse cuenta que los distintos métodos conocidos en la época para integrar ecuaciones diferenciales eran casos particulares de una teoría general en la que cada ecuación podía integrarse debido a que ésta quedaba invariante bajo la acción de un grupo continuo de transformaciones que, para estos casos, se podía calcular fácilmente. Así, la intención de Lie, era la de crear una teoría para resolver ecuaciones diferenciales similar a la de Galois con las ecuaciones algebraicas. De ésta forma, dada una ecuación diferencial, se debería encontrar un grupo de transformaciones que dejara invariante la ecuación y por medio del estudio de las propiedades del grupo y simplificar la ecuación para resolverla. Lie, no pudo dar una formulación completa como la teoría de Galois para ecuaciones diferenciales, pero su trabajo fue fundamental en el desarrollo de la teoría de grupos (Dávila, 2003b, p. 74).

Período cuatro: La definición abstracta de Grupo por Cayley

Las investigaciones sobre los grupos continuos de transformaciones, prepararon el camino para la definición abstracta de grupo, ya que representaba una visión más amplia del concepto, dando ejemplos de grupos infinitos y además extiende el campo de aplicación de la noción de grupo, la cual estuvo presente en algunos desarrollos de la teoría de números, la geometría, ecuaciones diferenciales y la teoría de funciones.

El paso que definió la teoría de grupos de forma abstracta lo dio Arthur Cayley (18211895) matemático Británico, en 1854 en su artículo: *Sobre la teoría de grupos que dependen de la ecuación simbólica* $\theta^n = 1$ en el cual se encuentra la primera definición abstracta de un grupo:

Un conjunto de símbolos {1, α, β,...,} todos ellos diferentes y tal que el producto de cualesquiera dos de ellos (no importa en que orden) o el producto de cualquiera de ellos consigo mismo, pertenece al conjunto; se dice ser un grupo (Dávila, 2003b, p. 75).

Como parte de la definición, Cayley establece que el producto de esos símbolos, no tiene por que ser conmutativo, pero sí asociativo. Cayley presentó varios ejemplos, tales como: a) Los cuaternios con la suma; b) Las matrices invertibles con la multiplicación y c) Grupos de permutaciones con la operación compuesta. También demostró que cualquier grupo abstracto, era isomorfo a un grupo de permutaciones: resultado que hoy recibe el nombre del *Teorema de Cayley*. Además, introduce una tabla de multiplicación de un grupo y afirma que: " un *grupo abstracto* queda determinado por ésta" (Dávila, 2003, p. 75).

A pesar de que Cayley era un matemático reconocido de la época, su definición de grupo no llamó la atención de la comunidad y se tuvo que esperar a que pasaran muchos años para que el concepto abstracto de grupo, tomara forma en los matemáticos de finales del siglo XIX. Esta tarea la realizó Cayley, en una serie de artículos, donde llama la atención sobre el tema: Cayley estaba inmerso en un ambiente de abstracción. Otros matemáticos que dieron definiciones abstractas de grupo fueron: R. Dedekind (1831-1916), H. Weber (1842-1913) y W. Von Dyck (1856-1934) matemáticos alemanes.

Período cuatro: El álgebra moderna

Un concepto fundamental en el álgebra contemporánea, es el de "operación o ley de composición" que según Bourbaki, es uno de los conceptos matemáticos que se pueden considerar entre los más primitivos. Así, una vez que el hombre primitivo tuvo cierta familiaridad con el proceso de contar, el siguiente paso fue calcular. En todo cálculo intervienen dos componentes: los objetos con los que se opera (calcula) y las reglas de operación (las reglas del cálculo). Estas últimas son las que interesan, ya que de los objetos solo interesa que satisfagan las reglas de operación. Esta es, precisamente, la característica principal del álgebra contemporánea: su objeto de estudio son los sistemas algebraicos, entendidos como un conjunto de objetos que satisfacen ciertas reglas (axiomas) dadas de antemano y la "abstracción" entonces viene del hecho, de que no interesa la naturaleza de los elementos con los que se opera: lo que interesa es que cumplan los axiomas que definen las operaciones entre dichos elementos (Dávila, 2003b).

Período cuatro: Clasificación de los grupos finitos simples en el siglo XX

En el siglo XX se dio todo un movimiento de cambio en álgebra del cual surgieron nuevas estructuras y teorías algebraicas: la teoría de anillos, la teoría de campos, la teoría de módulos, la teoría de representaciones de grupos y de álgebras: el nombre de "álgebra moderna" se hizo popular con la publicación del trabajo de B. L. van der Waerden (1903-1996) matemático Holandés, en 1930 titulado: *Modern Algebra,* que fue el primer documento publicado, donde se hace una exposición de forma axiomática de las nuevas ideas y tendencias del álgebra de esa época (Dávila, 2003b, p. 77).

La axiomatización del álgebra, se da principalmente en la escuela alemana moderna donde se inicia con una unificación de las tendencias que se habían dado, entre las que se encuentran los trabajos de Dirichlet, Kummer, Kronecker, Weber, Sylvester, Clifford, Peirce, Dickson, Wedderburn, Weierstrass, Frobenius, Molien, Laguerre y Cartan, entre otros. Ésta síntesis fue iniciada por Dedekind y Hilbert en los últimos años del siglo XIX y fue continuada por E. Steinitz, E. Artin, E. Noether, Hassen, Krull, Schreier y culmina con los trabajos de van der Waerden en su tratado de 1930, donde se reúnen por primera vez estos trabajos en una exposición en conjunto, abriendo el camino y sirviendo de guía a las investigaciones posteriores en álgebra abstracta (Dávila, 2003b, p. 77).

Finalmente, en relación con el problema de la clasificación de los grupos finitos simples, en 1983 se consigue terminar una clasificación de éstos grupos, estableciéndose que existen cinco grandes familias y que cualquier grupo finito simple pertenece a una de esas cinco familias, con la excepción de 26 grupos que reciben el nombre de grupos esporádicos. El mayor de ellos es conocido como grupo monstruo (ver, figura 2.1). Así, todo grupo finito simple puede ser:

Un grupo cíclico de orden primo: se tratan de los únicos grupos finitos simples abelianos. El famoso teorema de Walter Feit y John G. Thompson, establece que todo grupo finito de orden impar es resoluble. Por tanto, todo grupo finito simple tiene, o bien orden impar y se trata de un grupo cíclico de orden primo, o bien orden par.

Un grupo no abeliano de orden par, que puede ser:

Un grupo alternado de grado al menos 5.
Un grupo de Lie simple incluyendo los grupos clásicos: Los grupos de las transformaciones proyectivo especial, unitarias, simplécticas u ortogonales sobre un cuerpo finito.
Un grupo de Lie excepcional o twisted incluyendo al grupo de $Tits_2F4(2)'$
Uno de los 26 grupos esporádicos incluyendo al grupo monstruo.

Hay quienes como John Conway consideran al grupo de Tits como un grupo esporádico (porque no es estrictamente un Grupo de Lie), en cuyo caso hay 27 grupos esporádicos. Los grupos esporádicos suelen ser de orden grande. El más pequeño es de orden 7.920. Los más grandes son el "baby monster group" de orden superior a 4×1033 y el "monstruo" de orden superior a 8 × 1053. Veinte de los 26 grupos esporádicos están incluidos en el grupo monstruo. A los seis restantes, $J1$, $J3$, $J4$, $O'N$, Ru, Ly se les llama "grupos parias"; cinco de los más pequeños fueron descubiertos por Mathieu en 1860 y el resto entre 1965 y 1975. Sin embargo varios fueron predichos antes de ser construidos ((s.f.). Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm).

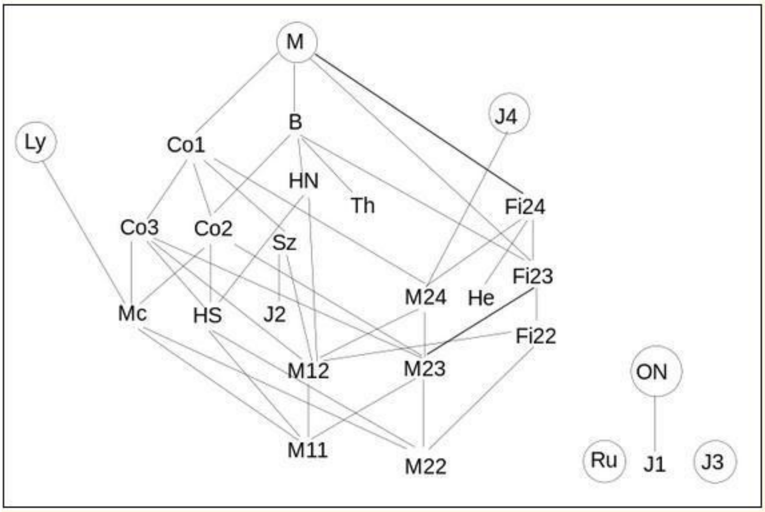


Figura 2.1: Clasificación de los grupos finitos simples (s.f.).
Recuperado de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm).

Período cuatro: Los grupos a partir del siglo XX

Según Rivero (1999), la simetría es una característica de la forma que no depende del movimiento y permanece constante bajo ciertos movimientos del plano y del espacio. El hecho de poder estudiar conceptos de tipo geométrico mediante el movimiento, abre una nueva línea de pensamiento en la matemática a mediados del siglo XIX. Dicha fusión nace de lo que se llama la *Geometría de las transformaciones*: un nuevo método de estudio de la geometría, donde se usan coordenadas, transformaciones lineales en el plano, álgebra lineal y teoría de Grupos. Una transformación en el plano, es una función uno a uno del plano en sí mismo: si P es un punto del plano el es enviado a un único punto P' del plano y se escribe $T(P) = P'$. Es posible que algunos puntos queden fijos, esto es, que $T(Q) = Q$. En este caso se dice que el punto Q permanece invariante bajo la transformación T.

En la misma dirección, una *isometría* se tiene cuando la transformación T no altera la distancia entre los puntos (cuando se habla de plano se hace referencia a su estructura afín. En este sentido, todas las transformaciones consideradas, incluyendo las isometrías, son transformaciones afines). Se prueba que un movimiento en el plano es una isometría, esto es, que todo movimiento preserva la forma de los objetos en el plano, aunque los puede mover. Y se tiene que el conjunto de movimientos con la operación compuesta es un grupo: el *Grupo de los movimientos del plano* $O(\mathbb{R}^2)$; entre sus elementos se encuentran: las traslaciones (la traslación es una isometría), rotaciones, reflexiones y la simetría de deslizamiento (Rivero, 1999).

Grupos ornamentales del plano

El concepto de simetría de una figura plana, se define con precisión al usar el grupo de movimientos del plano $O(\mathbb{R}^2)$. En general, si H es cualquier figura del plano, el conjunto de movimientos que fijan a H es un subgrupo de $O(\mathbb{R}^2)$ y se denota por G_H: se llama *grupo de simetrías de H.* Este grupo da información sobre los aspectos geométricos y en especial sobre las simetrías de la figura H.

Entre los grupos ornamentales se encuentran:

Los grupos de Leonardo, donde la figura se genera por la acción de un grupo de rotaciones (por ejemplo, un pétalo sobre un circulo), un ángulo determinado y donde se tiene que $G_H \supseteq \langle\sigma\rangle$ y σ es una rotación determinada. El grupo de simetrías de H que contiene también algunas reflexiones. *El grupo de Frisos*, contiene solo una traslación y corresponde a las decoraciones que se ven en los frisos de las fachadas de los templos o en las paredes de las casas coloniales. Se considera un friso H, como una figura que se extiende infinitamente a lo largo de una línea recta; donde H no tiene simetrías de tipo rotatorio y finalmente, cuando el grupo de traslaciones está generado por dos traslaciones no paralelas y la figura básica se repite en todo el plano inifinitamente, generando una celosía o papel tapiz, se tienen los "grupos cristalográficos planos (Rivero, 1999).

En 1981, el cristalógrafo E. S. Feodorov, demostró que solo existen 17 grupos cristalográficos, al hacer una clasificación exhaustiva de ellos. Más tarde, en 1897 Felix Klein y R. Fricke redescrubrieron este resultado; pero ya los árabes en la edad media, conocían los 17 grupos y los emplearon en la decoración de las mezquitas, castillos y fortalezas:

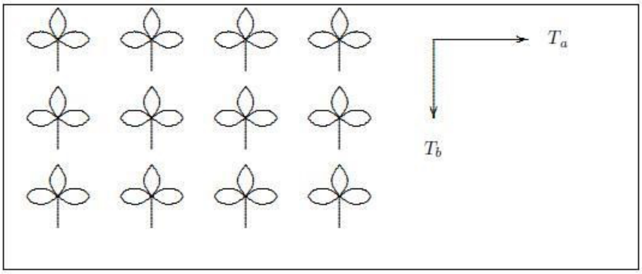


Figura 2.2: Grupo cristalográfico plano, (Rivero, 1999)

En la figura 2.2 se considera a H como una figura similar a un campo florido, que se extiende por todo el plano: H se ha generado a partir de una flor K la cual se ha trasladado en dos direcciones mediante un par de traslaciones independientes T_a, T_b. Luego el grupo G_H contiene al grupo $\langle T_a, T_b\rangle$ y además, G_H contiene infinitas reflexiones, unas con ejes verticales que pasan por los centros de las flores y otras con ejes equidistantes de dos flores. Se prueba que G_H se genera por T_a,T_b y una reflexión cualquiera de las anteriores (Rivero, 1999).

Período cuatro: Grupos cristalográficos planos

Un cristal se forma por millones de moléculas iguales que al colocarse unas al lado de otras en forma ordenada generan formas simétricas casi perfectas: la misma molécula se repite en forma ordenada y periódica en todas las dimensiones del espacio y es posible asignarle a cada compuesto cristalino un "grupo de simetrías" a fin de poderlos diferenciar bien, unos de otros. Existen millones de ellos en la naturaleza. La forma de hacer esta clasificación, consiste en partir de una figura básica o celda, formada por una cierta combinación de moléculas y entonces se va copiando la celda en el espacio, como una imagen reflejada, rotada o trasladada de la original. Para esto, se necesita considerar solo un cierto tipo de traslaciones que coloque las moléculas en el lugar que le corresponda en forma ordenada, sin que se solapen o se fundan unas con las otras: un grupo de traslaciones con éstas características, se llama un "Grupo discontinuo" (Rivero, 1999).

Un grupo G de movimientos en el plano es un grupo discontinuo si para cada punto P del plano existe un entorno, un disco abierto D con centro en P tal que la imagen $\sigma(P)$ no se encuentra en D, para todo σ en G diferente de la identidad. Es decir, los movimientos de G no triviales, mueven a P fuera del entorno D. Y un grupo G de movimientos en el plano es un "Grupo cristalográfico" si el subgrupo de G formado por las traslaciones es un grupo abeliano infinito y generado por dos elementos (Rivero, 1999).

Período cuatro: Grupos puntuales

En simetría molecular, se define como operación de simetría a una permutación de átomos que transforma una molécula o cristal en un estado que no es posible distinguirla del estado original. Asociada a cada operación de simetría se tiene un elemento de simetría, que corresponde a un punto, línea o plano respecto del cual se realiza la operación de simetría. Así, una molécula presenta simetría de tipo puntual, si todos sus elementos de simetría pasan por un único punto, en contraste con el cristal que presenta simetría de tipo espacial y los elementos de simetría que posee una molécula determinan el grupo puntual al que pertenece.

Por ejemplo, se tiene:

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	**Grupo puntual de simetría**
C_3	E,$2C_3$	3	C_3
Operaciones de Simetría	Símbolo		
Identidad	E		

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	**Grupo puntual de simetría**
Rotación propia de $\frac{2\pi}{n}$	C_n^m		
Reflexión	σ		
Inversión	i		
Rotación impropia de $\frac{2\pi}{n}$	S_n^m		
Elementos de Simetría	Símbolo		
Eje de simetría de orden n (eje propio)	C_n		
Plano de simetría	σ		
Centro de inversión	i		
Eje impropio de orden n	S_n		

Se cumple que $S_1 = \sigma$ y $S_2 = i$; esta operación de identidad i, deja la molécula igual: es la operación que tiene cualquier molécula y no necesita ningún elemento de simetría. Se dice, que existe un eje propio de orden n cuando la molécula no cambia después de una rotación de $\frac{360}{n}$; el eje de mayor orden de una molécula se denomina eje principal y, por convención se define como el eje z. De igual forma, el eje impropio corresponde a una rotación impropia que resulta de la operación compuesta de una rotación convencional (propia) seguida de una reflexión entorno a un plano perpendicular al eje de rotación (Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://www3.uah.es/edejesus/resumenes/DECI/tema1.pdf).

Tabla 2.5: Significado del objeto Grupo

	EDAD CONTEMPORÁNEA	
PERIODO CUATRO	Arthur Cayle (1821-1895) Británico	SIGNIFICADO ABSTRACTO: El grupo de los cuaternios con la suma. El grupo de matrices invertibles con la multiplicación. Los grupos de permutaciones con la operación compuesta.
	Félix Klein (1849-1925) Alemán	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Grupo de transformaciones. Grupos de Transformaciones: Grupos continuos de transformaciones. Grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales. Grupo proyectivo. Grupos continuos de transformaciones.
	Sophus Lie (1842-1899) Noruego	Grupo de transformaciones que dejan invariante a la ecuación diferencial. Grupo de transformaciones.

	EDAD CONTEMPORÁNEA	
PERIODO TRES	Camille Jordan (1838-1922) Francés	SIGNIFICADO ALGEBRAICO:
	Evariste Galois (1811-1832) Francés	Grupos de permutaciones Grupos A_n de permutaciones. Conjunto de Permutaciones. Grupos simples. Grupos solubles. Grupo de Galois del polinomio o grupo asociado a la ecuación polinomial.
	EDAD CONTEMPORÁNEA	
PERIODO DOS	Niels Henrik Abel (1802-1829) Noruego	SIGNIFICADO ALGEBRAICO:
	Agustín-Louis Cauchy (1789- 1857) Francés	Grupos de permutaciones.
	Paolo Ruffini (1765-1822) Italiano	Grupo S_4 de permutaciones.
	Joseph Louis Lagrange (1736-1813) Francés de origen Italiano	Conjunto de Permutaciones.
	Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) Francés	Funciones racionales de las raíces (polinomios simétricos).
	EDAD MODERNA	
PERIODO UNO	Carl Friedrich Gauss (1777-1855) Alemán	SIGNIFICADO ALGEBRAICO:
	Jean Robert Argand (1768-1822)	Conjunto de permutaciones.
	Joseph Louis Lagrange (1736-813) Leonhard Euler (1707-1783) Suizo Gottfried Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) Francés Wilhelm Leibniz (1646-1716) Alemán Isaac Newton (1643-1727) Británico John Wallis (1616-1703) Inglés Pierrede Fermat (1606-1665) Francés	En Aritmética módulo n.

PERIODO UNO	RENACIMIENTO Albert Girard (1595-1632) Francés René Descartes (1596-1650) Francés William Oughtred (1574-1660) Inglés Thomas Harriot (1560-1621) Inglés Francois Viéte (1540-1603) Francés Girolamo Cardano (1501-1576) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (funciones con las raíces de las ecuaciones) y en Aritmética módulo *n*.
PERIODO UNO	EDAD MEDIA Cristoph Rudolff (1499-1545) Alemán Adam Ries (1492-1545) Alemán Scipione del Ferro (1465-1526) Italiano Luca Pacioli (1445-1517) Italiano	SIGNIFICADO ALGEBRAICO: Conjuntos de permutaciones (Funciones con las raíces de las ecuaciones).
PERIODO CERO	EDAD MEDIA Nicolás Chuquet (1450-1500) Francés LeonardodePisa-Fibonacci (1175-1240) Italiano	SIGNIFICADO PRE-ALGEBRAICO
	Árabes: Omar Khayyam (1050-1123) Muhamed Abu'l Wefa (940-998)	
	Hindúes: Bhaskara (1114-1185) Brahmagupta (598-670)	
	CIVILIZACIONES ANTIGUAS Árabes: Al-Jhwarizmi (VIII) Hindúes Grecia: Diophanto (III) Babilonia Egipto	

2.3. Configuraciones socio–epistémicas en problemas relacionados con el objeto Grupo

Las etapas de evolución del pensamiento matemático, respecto al objeto grupo descritas por Piaget et. al. (2008), corresponden a la etapa inter, intra y trans-operacional: bajo este supuesto, se establece una etapa 0, donde se da solución por métodos empíricos a las ecuaciones algebraicas (civilizaciones antiguas); una etapa uno, denominada intra-operacional, en la cual se asocian las problemáticas de la época a la configuración epistémica CE1; de igual forma, para la CE2, la cual se relaciona con las problemáticas de la etapa inter-operacional y finalmente, la CE3, se relaciona con las problemáticas de la etapa trans-operacional, la cual se inicia con los problemas planteados y solucionados por Galois. Finalmente, se identificaron otras problemáticas relacionadas, en la emergencia del objeto grupo y corresponden a problemas relacionados con contextos intra- matemáticos y extra-matemáticos las cuales se agruparon en las configuraciones epistémicas CE4.1, CE4.2 y CE4.3 y finalmente, la configuración epistémica CE5, se relaciona con el significado global del objeto de investigación que corresponde a la definición abstracta del objeto de investigación y determina el significado abstracto del objeto de estudio. Las configuraciones surgen de las problemáticas identificadas tanto en la evolución del objeto, como en la aplicación en otros campos de las matemáticas y por tanto se describen con subíndices, como por ejemplo la CE1.1 que se relaciona con el período uno.

Se identificaron como problemáticas principales: (0) Problemas relacionados con Métodos empíricos para la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media (siglo V-XV); (1) Problemas relacionados con la determinación de la relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación algebraica de grado 2,3, 4 y el simbolismo algebraico en el renacimiento (siglo XV-XVI); (2) Problemas geométricos que involucran ecuaciones algebraicas de grado 4 (Descartes); (3) Problemas en Teoría de números en la edad moderna; (4) Problemas relacionados con la búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar por radicales la ecuación algebraica general de grado $n > 4$ en la edad moderna (siglo XVII-XVIII); (5) Problemas con las ecuaciones de grado $n > 4$ resolubles por radicales y la Teoría de Galois en la edad contemporánea (siglo XVIII-); (6) Problemas en Aritmética modular en la edad contemporánea (Gauss); (7) Problemas relacionados con el surgimiento de la teoría abstracta de Grupos; (8) Problemas con el conjunto de matrices (Cayley); (9) Problema de la clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas); (10) Problemas en ecuaciones diferenciales parciales; (11) Problema de la clasificación de los grupos finitos simples en el siglo XIX y (12) El problema de la definición abstracta del objeto grupo en el siglo XIX.

A partir de la determinación de estas configuraciones epistémicas y haciendo uso de las herramientas del EOS, se pasa a caracterizar cada una de estas configuraciones, identificando los objetos matemáticos primarios (lenguaje, situaciones problema, reglas: proposiciones–propiedades–teoremas, conceptos, argumentos, notaciones, procedimientos–técnicas) que conforman cada configuración junto con las relaciones entre los objetos que las componen, en términos de las problemáticas identificadas en cada época. Se presenta un ejemplo del análisis semiótico realizado uno de los problemas identificados en el período cero.

2.3.1. Problema 0.1: Solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 en la matemática egipcia

Problema: Hallar el valor del aha si el aha y una séptima parte del aha es 19 (Hallar el valor del montón si montón y una séptima parte de montón hacen 19)

La respuesta del escriba Ahmés fue $16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 16$. Este problema es el número 24 del papiro Rhind y corresponde a problemas de ecuaciones resueltas por la regla de la falsa posición.

Solución:

La ecuación a resolver corresponde a $\frac{8}{7}x = 19$ y se utilizó la regla de la falsa posición que era conocida:
1) Se daba una solución al azar en este caso $x = 7$ (solución falsa)
2) Se reemplaza en la ecuación: $7 * \frac{8}{7} = 8$ (Resultado falso)
3) Debe dar 19 pero en este caso 8 $(2 + \frac{3}{8}) = (2 + \frac{3}{8})8$
4) Entonces 19 = $(2 + \frac{3}{8})8$ un número 8 veces
5) La respuesta correcta corresponde entonces $(2 + \frac{3}{8})7$ por la solución falsa
6) $= 14 + \frac{21}{8} = 16 + \frac{5}{8} = 16 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
$= 16 + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16}) + \frac{1}{8}$
$= 16 + \frac{8}{16} + \frac{1}{8} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ que es la respuesta dada.

Una de las fuentes históricas sobre las matemáticas en egipto que se conserva, es el *papiro de Rhind y el papiro de Moscú.* El primero se conoce como papiro de Ahmés. En este papiro se daba solución a *problemas* sobre repartición de pan y cerveza, cálculo de áreas de terrenos con varias formas trigonométricas y cálculo de volúmenes, e incluso se encuentran rudimentos de trigonometría en algunos de ellos; entre estos *problemas* se encuentra el 24 que corresponde al presentado.

El problema se relaciona con la configuración_epistémica: "Ecuaciones lineales en la matemática egipcia" y se observa que el objeto matemático predominante, corresponde a los *procedimientos,* ya que para dar solución al problema se aplica un método concreto: el método o la regla de la falsa posición. En el papiro Rhind se utilizó una forma de aritmética o unos *procedimientos* que hacían uso de las fracciones unitarias, que eran precedidas a menudo por un número entero y se tomaban las fracciones de los números enteros y de la unidad juntas como una sola declaración, como cocientes y restos, o simplemente como aritmética del resto.

El papiro, se cree que pudo ser un documento con intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno. Para otros historiadores de la matemática, representa una guía de las matemáticas del antiguo Egipto y se considera como el mejor texto escrito en el que se revelan los conocimientos matemáticos. En el papiro aparecen algunos errores importantes en algunos casos, que pueden deberse al hecho de haber sido copiados de textos anteriores. Aunque en la resolución de los *problemas* aparecen métodos de cálculo basados en prueba y error, sin formulación y muchas veces tomados de las propias experiencias de los escribas; en general, representa una fuente valiosa de información.

En cuanto al *lenguaje y los términos* utilizados en la solución del problema, se considera que las fracciones constituían un sistema de representación (Rico, Castro & Romero, 1997), un lenguaje de comunicación de las cantidades no enteras y positivas y que como tal este sistema estaba sometido a unas normas sintácticas que pueden evaluarse sistemáticamente (Kaput, 1987 citado en Gairín, 2001). Se puede entender que este *sistema de representación* al igual que otros, surgió de la necesidad de comunicación de los resultados de las manipulaciones de objetos del mundo real y que estaba asociado con la cuantificación de cantidades de magnitudes que se obtenían al resolver problemas cotidianos.

Se afirma que la aparición de las fracciones tuvo lugar al hacer tareas diferentes a las de contar, ya que los resultados de contar se comunicaban con el sistema de numeración aditivo del que ellos disponían. Estas tareas como se mencionó correspondían a problemas de reparto, problemas que eran habituales en el quehacer de los escribas:

Los papiros de Rhind y de Moscú son manuales para los escribas, que dan ejemplos de cómo hacer las cosas que forman parte de sus tareas cotidianas (Fauvel & Gray, 1987 citado en Gairín, 2001, p. 657).

Los 110 problemas del Papiro Rhind y de Moscú tenían un origen práctico relacionado con repartos de pan y de cerveza, con mezclas de comida para ganado y aves domésticas y con el almacenamiento de grano (Eves, 1969 citado en Gairín, 2001, p.657).

Los desarrollos matemáticos egipcios corresponde a un tipo de *pre-álgebra* ya que en este período no se tenía conciencia del álgebra como un área independiente de la aritmética y de la geometría. En Egipto y Babilonia específicamente se tenía un álgebra aritmética. *Los problemas* fueron específicos y se pueden llamar de tipo-algebraico; para su solución se tenían métodos equivalentes a resolver ciertos tipos de ecuaciones algebraicas.

En cuanto a los *conceptos* que utilizaron los egipcios para la solución del problema, se tiene el de *fracciones unitarias,* que se interpretaban como la suma de los resultados parciales obtenidos al efectuar el reparto en fases sucesivas; se elaboraban dos posibles alternativas sobre el modo en que el escriba realizaría los cálculos numéricos asociados al reparto (Gairín, 2001). En los resultados del texto del escriba no se justificaban las fracciones que utilizaban y por la forma precisa e inequívoca en que se presentan los resultados se puede concluir que el escriba lo que hacía era comprobar que la descomposición estuviera bien hecha, pero no se considera que allí se plasme el modo por el cual se encontraba la solución (Gairín, 2001, p. 656).

2.3.2. Problema 0.2: Solución de ecuaciones: Distribución de un área en cuadrados - egipcios

Problema: Si se te dice que distribuyas 100 ells cuadrados [ell: unidad de área]sobre dos cuadrados de tal modo que el lado de uno sea $\frac{3}{4}$ del otro: por favor, dame cada una de las incógnitas

Este problema fue encontrado en Egipto y corresponde a un tiempo anterior al de la edad de oro de Grecia. En nuestro lenguaje el problema equivale a solucionar la ecuación cuadrática:

$x^2 + y^2 = 100$

$y = \frac{3}{4}x$

Solución:

Se supone que el lado de un cuadrado es 1 y el otro lado es $\frac{3}{4}$. La suma de las áreas es $\frac{25}{16}$ siendo $\frac{5}{4}$ una raíz de ésta. Como la raíz de 100 es 10, se tiene que 10 es al lado requerido como $\frac{5}{4}$ es a 1 por lo que un cuadrado es de lado 8 y el otro tiene lado 6.

En el problema la *situación-problema* corresponde a un reparto de áreas y se encuentra relacionado con un problema geométrico. Los papiros Ahmés y de Moscú, muestran que la matemática en Egipto permaneció en un mismo nivel durante varios milenios y además que no se desarrolló un sistema de numeración eficiente, que hubiese llevado sus matemáticas por otros senderos más productivos. Además, los *problemas* del papiro muestran que los egipcios podían resolver cierto tipo de ecuaciones de segundo grado, aunque aún desconocían un método general para la resolución (Dávila, 2002, p. 12).

El *procedimiento* utilizado en la solución, es el uso de proporciones para reducir el problema a una ecuación lineal o de grado uno que se solucionaba por el método de la regla falsa; además, utilizaron conocimientos geométricos para llegar a la solución del problema. En cuanto a los *conceptos* para dar solución al problema, utilizaron las fracciones unitarias, la solución de las ecuaciones de grado uno y algunos conocimientos geométricos.

2.3.3. Problema 0.3: Solución de ecuaciones algebraicas de grado 2 y 3 por los babilonios

Problema: Encontrar dos números si se conoce su suma y su producto

El método de los babilónicos para resolver esta ecuación, comprendía los siguientes pasos (Dávila, 2002, p. 13):

Solución:

a) Tomar la mitad de la suma $[\frac{s}{2}]$
b) Elevar al cuadrado el resultado obtenido $[(\frac{s}{2})^2]$
c) De lo anterior, restar el producto $[(\frac{s}{2})^2 - p]$
d) Tomar la raíz cuadrada de lo que resulta $[\sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}]$
e) Sumar al resultado la mitad de la suma $[x = \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p} + \frac{s}{2}]$
f) El resultado anterior es uno de los números que se buscan
g) El otro es la suma menos este último número $y = s - x$

Este *procedimiento* para resolver la ecuación de segundo grado es equivalente a resolver la cuadrática por fórmula (radicales), ya que:

La suma de los números es $s = x + y$

$sx = x$^2 $+ yx$ multiplicando por x

$x^2 + p = sx$ ya que $p = xy$

$x^2 - sx + p = 0$ realizando operaciones se tiene que x es solución de la ecuación;

$sy = xy + y^2$ multiplicando la suma por y

$y^2 - sy + p = 0$ esto es, y también es solución de la ecuación.

Ahora, al considerar la ecuación general de grado dos $ax^2 + bx + c = 0$ con a,b,c números racionales, con $a \neq 0$ se tiene la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
entonces, $x + y = s = -\frac{b}{a}$ y $xy = p = \frac{c}{a}$.

Los pasos del 1) al 5) de los babilónicos para resolver la forma normal, en notación simbólica llevan a:

$[x = \frac{s}{2} + \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}]$

$[y = \frac{s}{2} - \sqrt{(\frac{s}{2})^2 - p}]$

Estas dos soluciones se pueden expresar como:

$[x, y = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}]$

$[x, y = \frac{\frac{-b}{a} \pm \sqrt{\frac{-b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}}}{2}]$ reemplazando valores

$[x, y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}]$ simplificando valores.

Los *procedimientos*, para resolver la ecuación de grado dos, corresponden a la deducción y aplicación de la fórmula cuadrática o método de radicales para la ecuación de grado dos; además, consideraron las ecuaciones de la forma $x^2 + bx = c$ donde b,c no eran necesariamente enteros, pero $c \geq 0$. Utilizaron tablas de cuadrados en reversa para encontrar raíces cuadradas y siempre usaron la raíz positiva ya que esto tenía sentido al resolver problemas reales; *los problemas* incluían: encontrar las dimensiones de un rectángulo dada su área y la cantidad por la cual el largo excedía el ancho.

Se resalta que la fórmula para la solución de las ecuaciones de segundo grado, se conoce y se aplica desde hace más de 3700 años con uso hasta nuestros días (Dávila, 2002, p.14). En general, las *situaciones–problema,* estaban orientadas a resolver problemas cotidianos de cálculo de impuestos, cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. Pero a diferencia de las matemáticas egipcias, se tenía conciencia de algunas reglas generales que hacían que los métodos funcionaran en los casos particulares a los que cuales se les aplicaba; aunque no lograron dar el paso a lo general que es lo que distingue el pensamiento abstracto del común (Dávila, 2002, p. 13).

2.3.4. Problema 0.4: Solución de la ecuación algebraica de grado 2 por los griegos

Problema: Encontrar dos números x, y tal que $x + y = s$ y $x\,y = p$ para p, s dados.

Los pitagóricos, conocían el álgebra babilónica y por tanto, ella debía ajustarse a la geometría, así, la forma normal de las ecuaciones de segundo grado para encontrar dos números dada su suma y su producto, se debía interpretar geométricamente.

2.3.5. Problema 0.5: Solución de ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 por los hindúes

El hindú: Arybhata, escribió su tratado en verso *Aryabhatiya* en el año 499 y de su texto se obtuvo el siguiente problema:

Problema: En la regla de tres, multiplica la fruta por el deseo y divide por la medida. El resultado será la fruta del deseo.

Solución:

La traducción en el lenguaje actual corresponde a solucionar la ecuación $ax = bc$ donde a es la medida, b es la fruta y c es el deseo, entonces la fruta del deseo es x y el procedimiento establece que $x = \frac{bc}{a}$.

2.3.6. Problema 0.6: Solución de las ecuaciones de grado 2 por los árabes

Problema: He dividido diez en dos porciones: he multiplicado una de las porciones por la otra; después de esto, he multiplicado la una de las dos por sí misma y el producto de la multiplicación por sí misma es tanto como cuatro veces el de una de las porciones por la otra.

Solución:

> Al-Juarismi resuelve el problema de la siguiente forma:
>
> Llama *cosa* a una de las dos porciones; la otra es *diez menos la cosa.* Al multiplicar las dos obtiene *diez cosas menos un cuadrado (mal)* y siguiendo con el problema, le resulta la ecuación: *un cuadrado, el cual es igual a cuarenta cosas menos cuatro cuadrados.*
>
> Si x es la cosa, entonces $10-x$ es diez menos la cosa. Se multiplica x consigo misma y se obtiene x^2 que debe ser igual a cuatro veces el producto de x por $10-x$. Es decir, resulta la ecuación $x^2 = 4x(10-x)$, por lo que $x^2 = 40x - 4x^2$. Aquí Al-Juarismi usa el *al-jabr* para restaurar el balance:
>
> $x^2 + 4x^2 = 40x - 4x^2 + 4x^2$
>
> luego aplica *al–muq ãbalah* para cancelar los opuestos:
>
> $5x^2 = 40x$
>
> de donde $x^2 = 8x$
>
> y se obtiene $x = 8$

El *problema* se encuentra en el libro *al-jabr* escrito por al-Juarismi. El texto, se encuentra dividido en tres partes: en la primera, tiene los *procedimientos* que explican cómo resolver *problemas* que involucran *la cosa* y su *cuadrado* a los cuales Al-Juarismi llamó *shaî y mal* respectivamente: estos *problemas* de ecuaciones lineales y cuadráticas, los clasificó en 6 tipos diferentes y en particular el *problema* presentado correspondía al caso de *cuadrados iguales a raíces.* Todas las ecuaciones se consideraban diferentes y en este tiempo no se trabajaron los números negativos, razón por la cual era necesario separar los 6 casos: a) Cuadrados iguales a raíces; b) Cuadrados iguales a números; c) Raíces iguales a números; d) Cuadrados y raíces iguales a números; e) Cuadrados y números iguales a raíces y f) Raíces y números iguales a cuadrados (Dávila, 2002, p.10).

En general, los *métodos* del álgebra, fueron métodos aritméticos que daban solución a ecuaciones lineales (grado 1) y cuadráticas (grado dos) y los *problemas* planteados correspondían a repartición de herencias, transacciones comerciales, medida de terrenos: *lo que los hombres hacen constantemente requiere... en todos sus tratos entre ellos...* Y el *lenguaje* utilizado para el tratamiento de los problemas era de tipo verbal, como se muestra en el planteamiento del problema presentado.

2.3.7. Problema 0.7: Solución de las ecuaciones de grado 2 aplicando propiedades de los números cuadrados (Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo, Fibonacci)

Problema: Encontrar un número tal que su cuadrado sumado con cinco y su cuadrado menos cinco sean ambos cuadrados

Solución:

El problema se plantea dando solución al sistema:

$x^2 + 5 = a$ y $x^2 - 5 = b$

En el texto: "Liber Quadratorum-Libro de los números cuadrados" se presenta un análisis detallado de la solución del problema. Fibonacci descubrió que ningún número entero cumplía la condición, por tanto, el resultado debía ser una fracción. La solución dada corresponde a $x = 3\frac{5}{12}$ por lo que $x^2 + 5 = (4\frac{1}{12})^2$ y $x2 - 5 = (2\frac{7}{12})^2$.

2.3.8. Problema 0.8: Método de Fibonacci para la solución de ecuaciones algebraicas de grado 3

Problema: Encontrar un número tal que su cubo, dos cuadrados y diez raíces sean veinte

Solución:

Como:
$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ (1)
se tiene que:
$10(x + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2) = 20$ (2)
de donde:
$x + \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{5}x^2 = 2$ (3)
Y en consecuencia $x < 2$.

Pero de (1) se tiene que $1 + 2 + 10 = 13 < 20$ por lo que $x > 1$
Además, x no puede ser una fracción, ya que si $x = \frac{a}{b}$ entonces de (3) se tiene que:
$\frac{a}{b} + \frac{a^3}{10b^3} + \frac{a^2}{5b^2}$ no puede ser un entero.

Por tanto, x debe ser un número irracional; pero tampoco puede ser un irracional de la forma $\sqrt{m}$ para un entero positivo m, pues de (1) se tiene que:

$x = \frac{20-2x^2}{10+x^2}$

Por lo que si $x = \sqrt{m}$ entonces:

$\sqrt{m} = \frac{20-2m}{10+m}$

Lo cual es absurdo al ser x un irracional. Pero x no puede ser alguna de las irracionalidades discutidas en el libro X de los Elementos de Euclides, tales como $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

Así, la solución es un número irracional x que cumple $1 < x < 2$ y se presenta la solución aproximada: $x = 1; 22, 7, 42, 33, 4, 40$, en notación sexagesimal: que corresponde a:

$x = 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^{66}}$

Por lo que $x \approx 1{,}368808106$

y al sustituir el valor en la ecuación (1) se obtiene 19,99999995 por lo tanto $20 - (x^3 + 2x^2 + 10x) = 0{,}00000005$ y la solución propuesta es notablemente precisa.

En la obra *Flos (1225)* de Fibonacci, se encuentra este problema y su solución, que también presenta en la obra de *Los números cuadrados*. En el *problema*, se establece que no es posible encontrar una solución exacta por *métodos algebraicos*, por lo que recurre a la solución por un *procedimiento* de *aproximaciones;* no es claro cómo logra realizar el proceso de resolución, sin embargo, en algunas fuentes (Boyer, 2001) se afirma que posiblemente utilizó el *método de Horner,* el cual se conocía en China desde mucho tiempo atrás (Chavarría, 2014, p.43).

Entre los *conceptos* que utiliza para la solución de los problemas, se encuentran precisamente el de los *números cuadrados* cuyo estudio inició a partir de los rudimentos de lo que se conocía desde la antigua Grecia y fue avanzando gradualmente y resolviendo proposiciones hasta dar solución al *problema del análisis indeterminado* que le había propuesto como desafío un matemático de la corte de Federico II (Teodoro) en el cual se le propone: Encontrar un cuadrado tal que si se le suma o resta el número cinco, da como resultado en ambos casos números cuadrados. Curiosamente, el año de publicación del libro también es un número cuadrado y la respuesta corresponde a la que se presenta para la solución del problema. Pasaron tres siglos para que Tartaglia y Cardano trabajaran el problema de la ecuación cúbica; sin embargo, Fibonacci en este segundo problema, encontró que la solución no era entera y pudo dar una buena aproximación.

2.3.9. Problema 0.9: Método de resolución para un caso especial de la ecuación cúbica (Scipione del Ferro)

La primera solución de una forma particular de la ecuación cúbica se debe a Del Ferro, profesor de matemáticas de la universidad de Bolonia.

Problema: El cubo y la cosa (incógnita) igual a un número

Solución:

El problema corresponde a la solución de la ecuación $x^3 + px = q$ con p, q números enteros positivos.

En este tiempo no se acostumbraba a escribir la ecuación con coeficientes negativos y el álgebra era de tipo retórico, por lo que la ecuación que se conocía era la que se enunciaba en el problema: el *método* de solución fue de tipo verbal. Este logro del Ferro fue notable ya que el problema en forma general había estado sin solución desde los tiempos de Arquímedes, quien resolvió ecuaciones cúbicas por métodos geométricos. Además, otros matemáticos habían resuelto casos particulares de esta ecuación. Del Ferro, nunca publicó sus resultados, pero antes de su muerte, reveló el método a su yerno Annibale della Nave y a su discípulo Antonio María Fior (Tartaglia) (Dávila, 2003b, p. 46) este método se explica en el siguiente problema.

2.3.10. Problema 0.10: Método de resolución de un caso de ecuación cúbica (Niccolo Fontana-Tartaglia)

La primera solución de una forma particular de la ecuación cúbica se debe a del Ferro, profesor de matemáticas de Bolonia.

Problema: $x^3 + px = q$

Solución

Quando chel cubo con le cose appresso Se aggualia à qualche numero discreto Trouan dui altri differenti in esso Dapoi terrari questo per consueto Che'l lor produtto sempre sia eguale Al terzo cubo delle cose neto, El residuo poi suo general Delli lor lati cubi ben sustratti Varra la tua cosa principale	Cuando el cubo junto a la cosa se iguala a cualquier número discreto encuentra dos números que difieran en eso despúes tendrás esto por costumbre: que su producto siempre sea igual al cubo del tercio de [el coeficiente de]la cosa entonces su residuo general de sus lados cúbicos que han sido restados te dará la cosa principal

El álgebra era de tipo retórico, ya que no se había desarrollado una notación adecuada; por lo que la solución dada es la que se presentó en la tabla anterior. El *procedimiento* correspondía a hallar dos números u, v tal que $u - v = q$ pero estos números debían satisfacer que $uv = \frac{1}{3}p^3$ para finalmente llegar a obtener que, $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Con la solución del problema, Tartaglia afirma que le había dado una explicación completa de su método a Cardano; pero en el libro del *Ars Magna* Cardano, explica que Tartaglia se quedó con la demostración, por lo que tuvo que buscarla (Dávila, 2003b, p. 48).

Las anteriores 10 problemáticas dieron origen a la configuración epistémica que se presenta de la tabla 6.16. Se presentan estos problemas de las civilizaciones antiguas y en la parte superior de la tabla se registran los problemas de la edad media.

Tabla 2.6: Configuración epistémica CE0

CE0. Métodos empíricos de solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media	
CE0.10	Método de resolución de un caso de ecuación cúbica (Niccolo Fontana-Tartaglia)
CE0.9	Método de resolución para un caso especial de la ecuación cúbica (Scipione del Ferro)
CE0.8	Método de Fibonacci para la solución de la ecuación de grado 3
CE0.7	Solución de ecuaciones algebraicas de grado 2 aplicando propiedades de los números cuadrados (Fibonacci)
CE0.6	Las ecuaciones algebraicas de grado 2 en la matemática árabe
CE0.5	Las ecuaciones algebraicas de grado 1 y 2 en la matemática hindú
CE0.4	Las ecuaciones algebraicas de grado 2 en la matemática griega
CE0.3	La solución de ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 por los babilonios
CE0.2	Ecuaciones relacionadas con la distribución de un área en cuadrados
CE0.1	Las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en la matemática egipcia

2.3.11. Problema 1.1: Solución de un caso especial de la ecuación cúbica (Gerolamo Cardano)

Problema: $x^3 + 6x = 20$

Solución:

Cardano procede de la siguiente forma (método para el problema de Tartaglia):

$\left(\frac{1}{3}6\right)^3 = 8$

$\frac{1}{2}20 = 10$ ahora $10^2 = 100$

Se suma $100 + 8 = 108$ luego se toma la raíz cuadrada $\sqrt{108}$

$(\sqrt{108} + 10)$ es el binomio

$(\sqrt{108} - 10)$ es la apotama

Se toma raíz cúbica $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$ y $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

Por lo tanto el valor de la cosa es:

$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$

Así, si $u = \sqrt{108}+10$ y $v = \sqrt{108}-10$
entonces, $u-v=20$ como lo establece el método de Tartaglia y además $uv=2^3$
finalmente, la solución es de la forma $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$.

Cardano no dice nada de las otras raíces de la ecuación, ya que esta es la única verdadera porque no consideró las raíces negativas o complejas como tales. Pero, el verdadero mérito de Cardano fue que no solo solucionó este problema, sino que inició con el estudio de los otros casos de la cúbica con éxito. Así, para otro de los *problemas* que corresponde al caso del cubo igual a la cosa y un número, da la siguiente regla:

Caso $x^3 = px + q$:

"Cuando el cubo de la tercera parte del coeficiente de la cosa no es más grande que el cuadrado de la mitad de la constante de la ecuación, restas el primero de estos números de este último y agregas la raíz cuadrada de esta resta a la mitad de la constante de la ecuación y de nuevo, réstalo de la misma mitad y tendrás, como se dijo, un binomio y su apotama: la suma de las raíces cúbicas de los cuales constituyen el valor de la cosa" (Dávila, 2003b, p. 49.)

2.3.12. Problema 1.2: Solución por radicales de las ecuaciones algebraicas generales de grado 3 y 4 en la edad media

Problema de Gerolamo Cardano y la resolución general de la ecuación cúbica:

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{2.2}$$

Para la ecuación cúbica general $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ con raíces x_1, x_2, x_3 y a, b, c números racionales, el *procedimiento* dado por Cardano, corresponde a:

$x^3+ax^2+bx+c=0=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$
$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0$
de donde, se describen los polinomios simétricos elementales en relación con los coeficientes de la ecuación:

$x_1+x_2+x_3=-a$
$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b$
$x_1x_2x_3=-c$

Para solucionar la cúbica general procede con la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$ para llegar a una ecuación de la forma $y^3 + py + q = 0$ y toma como solución:
$y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ luego como:

$$y^3 = (\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})^3 = u + v + 3(\sqrt[3]{u})^2 \sqrt[3]{v} + 3(\sqrt[3]{u})(\sqrt[3]{v})^2$$
$$= (u + v) + 3(\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v})(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})$$

se tiene la ecuación $y^3 - 3(\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v})y - (u + v) = 0$ que la compara con la ecuación $y^3 + py + q = 0$ y obtiene que:
$\sqrt[3]{u}\ \sqrt[3]{v} = \frac{-p}{3}$
$u + v = -q$ de donde:
$uv = -(\frac{p}{3})^3$

Se halla la ecuación cuadrática con u, v raíces y se reemplazan las fórmulas anteriores para obtener:

$$z^2 + qz - (\tfrac{p}{3})^3 = 0 = z^2 - (u + v)z + uv = 0$$

Soluciona la cuadrática en z y obtiene:

$$z = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Por lo que:

$$u = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$
$$v = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Y como se supuso la solución de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ se tiene que:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Y ésta es la solución de la cúbica general (2.2) que se conoce como la *fórmula de Cardano.*

En la configuración epistémica, correspondiente a la solución de la cúbica general de Cardano, se tiene que entre los objetos matemáticos, predominan los *procedimientos* ya que en este caso, se describe en forma completa un método de solución. Se observa que si se tiene una raíz, es fácil encontrar las otras dos y que las raíces de la cúbica general (2.2) se obtienen mediante la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$. Cardano descubrió con su alumno Ferrari que efectivamente el primero en descubrir el método para resolver el problema *del cubo y la cosa igual al número* había sido del Ferro cerca a 1515 (Dávila, 2003b, p. 53).

2.3.13. Problema 1.3: Solución general de la ecuación bicuadrática (Ludovico Ferrari)

Otra de las aportaciones del *Ars Magna* de Cardano, fue el *método* para resolver la ecuación de grado cuarto y el crédito del descubrimiento Cardano lo da a Ludovico Ferrari. Ludovico fue alumno de Cardano, y encontró un método para calcular las raíces de la ecuaciones de cuarto grado $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$.

Problema:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{2.3}$$

Solución:

Primero se elimina el término cúbico con la sustitución $x = y - k$

$(y-k)^4 + a(y-k)^3 + b(y-k)^2 + c(y-k) + d = 0$

Se hace el coeficiente del término cúbico $-4k + a = 0$ para obtener que $k = \frac{a}{4}$

Entonces se llega a la ecuación $y^4 + y^2(-\frac{3a^2}{8} + b) + y(\frac{a^3}{8} - \frac{ba}{2} + 1) + (-\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{a}{4} + d) = 0$

Que se representa como:

$y^4 + py^2 + qy + r = 0$

Ahora, se introduce un parámetro α y se expresa la ecuación en términos de p, q, r como:

$$\left(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha\right)^2 = 2\alpha y^2 - qy + \left(\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}\right) \tag{2.4}$$

Luego, se toma el lado derecho de la igualdad de (2.4) y se factoriza:

$2\alpha\left(y^2 - \frac{q}{2\alpha}y + \left(\frac{\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}}{2\alpha}\right)\right)$

Ahora, para que la expresión sea un cuadrado perfecto se necesita que:

$\frac{q^2}{16\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + p\alpha - r + \frac{p^2}{4}}{2\alpha}$

Para que esto suceda α debe ser la raíz de la ecuación cúbica auxiliar que actualmente se conoce como "la cúbica resolvente" de la ecuación cuartica:

$8\alpha^3 + 8p\alpha^2 + (2p^2 - 8r)\alpha - q^2 = 0$

la cual se resuelve usando la fórmula de Cardano (fórmula del Ferro).

Y se obtiene la raíz α_0 de la cúbica, luego la ecuación 2.4 se expresa como:

$(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0)^2 = 2\alpha_0(y - \frac{q}{4\alpha_0})^2$

Y se encuentra que,

$(y^2 + \frac{p}{2} + \alpha_0) = \pm\sqrt{2\alpha_0}(y - \frac{q}{4\alpha_0})$

Estas son dos ecuaciones cuadráticas para y por lo que se obtienen las cuatro soluciones, las cuales se reemplazan en $x = y - \frac{a}{4}$ para obtener las raíces de (2.3).

En la configuración-epistémica predominan los *procedimientos* que presenta Cardano, para dar solución a la ecuación (2.3), este procedimiento es diferente al de los algebristas italianos del siglo XVI, pero los *métodos* son equivalentes (Dávila, 2003b, p. 54). La obra de Cardano del *Ars Magna,* marcó un punto en la historia del desarrollo del álgebra, por esto, a Cardano se le considera como una figura central en este proceso.

2.3.14. Problema 1.4: Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas (Cardano y Viète)

Problema: ¿Qué relación existe entre las raíces y los coeficientes de la ecuación algebraica?

Solución:

Para la ecuación de grado dos $ax^2 + bx + c = 0 = (x - x_1)(x - x_2)$ se tiene que si x_1, x_2 son las raíces de la ecuación, entonces:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Para la ecuación algebraica general de grado n:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ se tiene entonces que:

$$a_{n-1} = -a_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$
$$a_{n-2} = a_n(x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)$$
$$a_{n-3} = a_n(x_1x_2x_3 + x_1x_2 + x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n)$$
$$\vdots$$
$$a_1 = (-1)^{n-1}a_n(x_1x_2 \dots x_{n-2}x_n + \dots + x_2 \dots x_{n-1}x_n)$$
$$a_0 = (-1)^n a_n(x_1x_2 \dots x_n)$$

La configuración epistémica asociada al *problema* hace referencia a la generalización de la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación algebraica de grado n y sus raíces. La configuración tiene como objeto primario matemático predominante a los *argumentos,* ya que se presentan fórmulas generales que establecen las relaciones entre los coeficientes y las raíces de la ecuación de grado *n*. Las relaciones se pueden definir como funciones de los polinomios simétricos elementales los cuales fueron descritos por Newton y otros matemáticos.

2.3.15. Problema 1.5: Solución general de las ecuaciones de grado 2 (Francois Viète)

Problema: a quadr + B2in A aequantur Z plano

Solución:

Para la solución de la ecuación $x^2+2ax=b$, Viéte inicia con la sustitución $x=u-v$:
$(u-v)^2+2a(u-v)=b$ y luego hace la sustitución $v=\frac{a}{2}$ para obtener:
$(u-\frac{a}{2})^2+2a(u-\frac{a}{2})=b$
así,
$u^2-au+(\frac{a}{2})^2+2au=a^2+b$
$(u+\frac{a}{2})^2=a^2+b$
entonces,
$u=\sqrt{a^2+b}-\frac{a}{2}$
así,
$x=u-\frac{a}{2}=(\sqrt{a^2+b}-\frac{a}{2})-\frac{a}{2}$
$x=\sqrt{a^2+b}-a$

En esta configuración, se verifica que el *procedimiento* descrito por Viéte, corresponde al desarrollo de la fórmula para las ecuaciones de segundo grado; pero la nueva *notación*, hace posible la discusión de las técnicas generales para resolver algunas clases de ecuaciones.

2.3.16. Problema 1.6: Solución general de la ecuación algebraica de grado 3 (Francois Viète)v

Problema: $x^3+ax^2+bx+c=0$

Solución:

Primero hace la sustitución $x = y - \frac{a}{3}$ para reducir la ecuación a una de la forma $y^3 + 3py = q$:

$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0$

De donde se obtiene:
$y^3 + 3(\frac{b}{3} - \frac{a^2}{9})\text{y} + (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c) = 0$

Se hace $p = \frac{b}{3} - \frac{a^2}{9}$ y

$q = -(\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c)$

Se llega a la ecuación $y^3 + 3py = q$ equivalente a $y^3 + py + q = 0$
que según los métodos de Cardano:

Se supone la solución de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.
Así, que:

$y^3 = (u + v) + 3(\sqrt[3]{u}\,\sqrt[3]{v})(\sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v})$ y

$y^3 - 3(\sqrt[3]{u}\,\sqrt[3]{v})y - (u + v) = 0$

Ecuación que se compara con la ecuación $y^3 + py + q = 0$ para obtener:
$uv = -(\frac{p}{3})^3$
$u + v = -q$

En segundo lugar, si u, v son raíces de la cuadrática, se tiene:

$z^2 - (u + v)z + uv = 0 = z^2 + qz - (\frac{p}{3})^3 = 0 =$ cuyas soluciones son:

$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ entonces como:

$u = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ y

$v = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ y como la solución es de la forma:

$y = \sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{v}$ se tiene que:

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ de cuyas combinaciones salen 6 raíces

pero solo 3 raíces cumplen la condición que $uv = -(\frac{p}{3})^3$ así que:

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

En la configuración epistémica relacionada con la práctica matemática, los *términos* en el álgebra de Vieta, tenía algo de verbal, ya que no se adoptó el *símbolo* + hasta mucho tiempo después de éstos desarrollos; también se observa de la solución, que el objeto matemático predominante corresponde a *procedimientos*, ya que la solución presenta un método claro para solucionar las ecuaciones de grado tres (Dávila, 2003b, p. 39).

2.3.17. Problema 1.7: El simbolismo algebraico y la solución de la ecuación de grado 4 (Thomas Harriot)

Problema: $aaaa - 6aa + 136a = 1155$

Solución:

La ecuación es $a^4 - 6a^2 + 136a = 1155$	
Parte de la ecuación equivalente $aaaa - 2aa + 1 = 4aa - 136a + 1156$	
Así que :	
$(aa-1)^2 = (2a-34)^2$	
$aa - 1 = 2a - 34$	$aa - 1 = 34 - 2a$
$33 = 2a - aa$	$aa + 2a = 35$
$aa - 2a = -33$	$aa + 2a + 1 = 1 + 35$
$aa - 2a + 1 = +1 - 33$	
$a - 1 = \sqrt{-32}$	$a + 1 = \sqrt{36}$
$1 - a = \sqrt{-32}$	$a = \sqrt{36} - 1 = 5$
$a = 1 + \sqrt{-32}$	$-a - 1 = \sqrt{36}$
$a = 1 - \sqrt{-32}$	$a = -\sqrt{36} - 1 = -7$

El *problema* en este caso corresponde a resolver la ecuación de grado cuarto (Dávila, 2003b, p. 40). En el *procedimiento* que desarrolla, se observa como completar cuadrados y la simplificación de algunos pasos elementales en el proceso de obtener las raíces de la ecuación; el conocimiento sobre la extracción de la raíz cuadrada cuyo resultado corresponde a dos valores; uno positivo y el otro negativo y el manejo de todas las raíces sean negativas, positivas, reales o complejas. En el *procedimiento* se hace evidente el manejo de la *notación* relacionada con un simbolismo algebraico que sirvió para influenciar a las dos siguientes generaciones de matemáticos ingleses: incluso a Lagrange en el siglo XVIII y a Silvester en el siglo XIX, los cuales se expresaron bien del trabajo de Harriot.

2.3.18. Problema 1.8: Solución de la ecuación algebraica de grado 4 (Euler)

Problema: $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$

Solución:

Para solucionar la ecuación $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ se inicia eliminando el término cúbico: para esto, se divide por A y propone la sustitución:
$y = x - \frac{B}{4A}$ lo cual lleva a una ecuación donde se ha eliminado el termino de grado tres:

$y^4 - ay^2 - by - c = 0 = x^4 - ax^2 - bx - c$

Euler, toma la solución para la ecuación de grado cuarto de la forma:

$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$

donde, p, q, r se calculan en función de las raíces a, b, c.

Elevando al cuadrado la solución, obtiene:

$x^2 - (p + q + r) = 2(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r})$

Elevando nuevamente al cuadrado se obtiene que:

$x^4 - 2(p + q + r)x^2 + (p + q + r)^2 = 4(pq + pr + qr) + 8\sqrt{pqrx}$

Se realizan las sustituciones:

$f = p + q + r$
$g = pq + pr + qr$
$h = pqr$

Y se establece la ecuación reducida de cuarto grado como:

$x^4 - 2fx^2 - 8\sqrt{hx} - (4g - f^2) = x^4 - ax^2 - bx - c = 0$

Luego:

$f = \frac{a}{2}$

$h = \frac{b^2}{64}$

$g = \frac{4c + a^2}{16}$

Y se llega a la ecuación reducida:

$x^4 + Px^2 + Qx + R = 0$ donde se conoce P, Q, R

Ahora, pasa a construir la ecuación cúbica auxiliar con raíces p, q, r:

$(z - p)(z - q)(z - r) = z^3 - (p + q + r)z^2 + (pq + pr + qr)z - pqr = z^3 - fz^2 + gz - h = 0 =$ $x^3 + ax^2 + bx + c$ de donde se conocen los coeficientes f, g, h utilizando el método de Cardano (utiliza la ecuación en x).

Para esto se hace la sustitución:

$x = z - \frac{a}{3}$ para eliminar el término cuadrático:
$z^3 + (b - \frac{a^2}{3})z + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$
$z^3 + pz + q = 0$
con $p = (b - \frac{a^2}{3})$
$q = (\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c)$

Esta ecuación tiene como solución (método de Cardano):

$z = \left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta} \right)^{\frac{1}{3}} \Big) - \frac{a}{3}$

$\Delta = \left(\frac{q}{2} \right)^2 + \left(\frac{p}{3} \right)^3$

Donde se tiene que si:

$\Delta = 0$ todas las raíces son reales y al menos dos de ellas iguales.
$\Delta > 0$ la ecuación tiene una raíz real y dos imaginarias.
$\Delta < 0$ la ecuación tiene tres raíces reales simples.

Ahora, la raíz Δ se escoge arbitrariamente y se fija; las raíces u, v se escogen de modo que cumplan la relación $p = -3uv$, es decir, se escoge una arbitrariamente y la otra se calcula mediante la relación dada y se tiene que:

$u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ es una raíz cúbica arbitraria del radicando, se define la raíz v mediante la relación $p = -3uv$ para obtener:

$v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}}$

Con estas tres raíces llamadas p, q, r se obtienen cuatro raíces:

$x_1 = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$
$x_2 = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$
$x_3 = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$
$x_4 = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$

Finalmente, como se tenía que la solución a la ecuación de grado cuatro era de la forma $y_i = x_i - \frac{B}{4A}$ se reemplaza y se obtienen las cuatro soluciones de la ecuación de grado cuatro.

Cardano en su obra del "Ars Magna" establece que el primero en dar solución a la ecuación de grado cuarto fue Ludovico Ferrari; sin embargo, Leonhard Euler también interviene en la solución de las ecuaciones de grado cuarto, como lo muestra el *procedimiento* descrito para la solución; este *procedimiento* inicia con una sustitución adecuada que permite eliminar el término cúbico, de donde resulta una ecuación incompleta de grado cuatro; para ésta toma una solución apropiada de la forma $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ que eleva al cuadrado dos veces para obtener una ecuación incompleta de grado cuarto en p, q, r. Luego, construye la ecuación algebraica de grado tres con raíces p, q, r donde conoce los coeficientes de la ecuación y utiliza el método de Cardano para solucionar la ecuación de grado tres, iniciando con la eliminación del término cuadrático: mediante una sustitución, propone una solución para la cúbica de la forma $y = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ y construye la ecuación de grado dos con u,v raíces de la ecuación que resuelve por fórmula la ecuación de grado dos.

Este *procedimiento*, le permite obtener las soluciones para la ecuación de grado tres y llegar finalmente a la solución de la ecuación de grado cuatro. Se observa que en esta configuración epistémica, el objeto matemático primario predominante corresponde a los *procedimientos* y métodos particulares para encontrar la solución general de las ecuaciones de grado cuarto.

2.3.19. Problema 1.9: Planteamiento de problemas geométricos relacionados con ecuaciones algebraicas de grado 4 (René Descartes)

***Problema:* x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0**

Solución:

Descartes, primero plantea un cambio de variable:

$z = x + \frac{b}{4}$ así que $x = z - \frac{b}{4}$ que se reemplaza para suprimir el término cúbico:

$z^4 + (c - \frac{3b^2}{8})z^2 + (d - \frac{bc}{2} + \frac{b^3}{8})z + (e - \frac{bd}{4} + \frac{b^2c}{16} - \frac{3b^4}{216}) = 0$

llegando a la ecuación:

$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$

La idea de Descartes es factorizar la ecuación de la forma:

$(z^2 + \alpha z + \beta)(z^2 - \alpha z + \gamma) = 0$

De donde resulta:

$z^4 + (\gamma + \beta - \alpha^2)z^2 + \alpha(\gamma - \beta)z + \beta\gamma = 0$

Llegando a una ecuación de la forma $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$

Donde se obtiene que:

$\gamma + \beta - \alpha^2 = p$
$\alpha(\gamma - \beta) = q$
$\beta\gamma = r$

Con estas ecuaciones y haciendo operaciones se llega a la ecuación:

$\alpha^6 + 2p\alpha^4 + (p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2 = 0$

Ecuación de sexto grado, donde α tiene solo potencias pares.

Finalmente se hace la sustitución, $A = \alpha^2$ y se obtiene la ecuación cúbica:

$A^3 + 2pA^2 + (p^2 - 4r)A - q^2 = 0$

Ecuación que se resuelve nuevamente por el método de Cardano para hallar α, β, γ y reemplazarlas en las ecuaciones:

$(z^2 + \alpha z + \beta) = 0$
$(z^2 - \alpha z + \gamma) = 0$

Se obtienen así, las cuatro raíces para finalizar con la sustitución $x = z - \frac{b}{4}$ y obtener los valores de las raíces en la variable x.

En el problema, se observa que el objeto matemático primario predominante en la configuración epistémica, corresponde nuevamente a los *procedimientos;* ya que se da un método general para solucionar éstas ecuaciones de grado cuarto, diferente al de Euler. Entre los *conceptos* que se utilizan se encuentra la factorización de trinomios, que representan la idea genial de Descartes. En su obra *La Géométrie,* en uno de los apéndices ejemplifica su *método: para bien conducir la razón y buscar la verdad de las ciencias;* método que expone en su tratado *Discours de la Méthode* de 1637.

2.3.20. Problema 1.10: El problema de Pappus (Descartes)

Problema de Pappus descrito por Descartes: "Teniendo tres, cuatro o un número mayor de rectas, dadas en su posición, se intenta hallar en primer lugar un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de modo que el rectángulo formado por dos de las trazas desde el mismo punto, guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no hayan sino tres; o bien con el rectángulo de las otras dos si no hay más que cuatro; o bien, si hay cinco, que el paralelepípedo formado por tres guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada; si hay seis, que el paralelepípedo construido sobre tres guarde una proporción dada con el paralelepípedo formado por las otras tres; si hay siete, que el resultado obtenido cuando se multipliquen cuatro de ellas entre sí, guarde la proporción dada con el resultado de las otras tres y también de una línea dada; si hay ocho, que el resultado obtenido de la multiplicación de cuatro, guarde la proporción dadaconelresultadoobtenidodelasotrascuatro. Deestemodo,talcuestiónpuedehacerseextensiva a cualquier otro número de líneas" (Descartes, 1596).

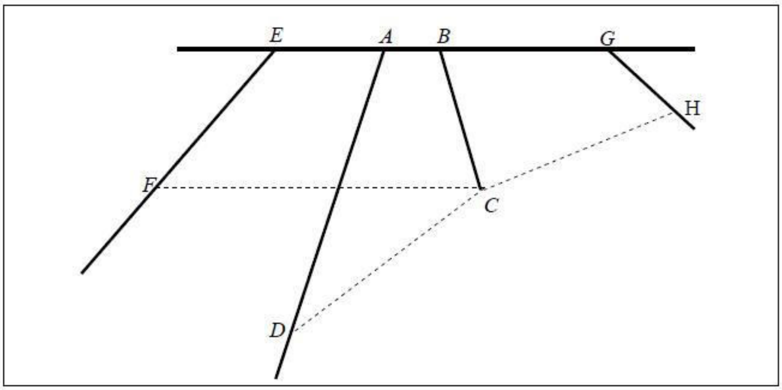


Figura 2.3: Caso particular para cuatro rectas (Chavarría, 2014, p. 69)

El problema en términos modernos, se traduce en: Dado un número par de rectas (2n rectas), encontrar el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias, bajo ángulos dados, a *n* de esas rectas se encuentre en una relación dada con el producto de las distancias, bajo ángulos también dados, a las otras *n* rectas.

2.3.21. Problema 1.11: Problemas en Teoría de números: Aritmética modular (Fermat)

Problema: pequeño teorema de Fermat: Si** p **es un número primo que no divide al entero a, entonces a^p−1≡ 1modp.

Demostración: Fermat no da demostración del teorema.

Problema: ¿Cuando un número** n **es expresable como la suma de dos cuadrados? (Fermat en 1636).

Demostración: Fermat no da demostración del teorema y es Euler el que da una primera demostración del teorema.

2.3.22. Problema 1.12: Problemas en Teoría de números: Aritmética modular (Euler)

***Problema: Teorema de Fermat por Euler: Sea** p **un primo impar. Entonces** p **es suma de dos cuadrados si y solo si** $p \equiv 1(mod4)$*

En la configuración epistémica correspondiente a la demostración del teorema, realizada por Euler, se observan como objetos matemáticos predominantes los *conceptos* de congruencias y números primos, el *método* del descenso infinito de Fermat, los residuos cuadráticos, el principio del buen orden y conceptos de divisibilidad. En la prueba sobresalen los objetos matemáticos de los *argumentos deductivos* para obtener la prueba del teorema. En la configuración se utilizan numerosos conceptos que ahora hacen parte de la rama de la matemática conocida como Teoría de números y de igual forma de Matemática discreta.

Problema: Teorema de Euler-Fermat: Si** a **y** n **son primos relativos, entonces** n **divide al entero** $a^{\varphi(n)}-1$ **(Euler en 1736).

2.3.23. Problema 1.13: Las resolventes de Lagrange y el conjunto S_3

Joseph Louis Lagrange, fue un físico, matemático y astrónomo, italiano que hizo importantes contribuciones a la astronomía, la mecánica y las matemáticas en la línea de álgebra. En 1771, en su memoria *Réfléxions sur la Résolution Algébrique des Equations,* presentó un método que tenía su base en técnicas hasta el momento conocidas para solucionar ecuaciones algebraicas hasta el grado cuarto y por el método de radicales. Lagrange pensó que podía extender el método a la solución de ecuaciones de grado mayor o igual que cinco, sin llegar a lograrlo. Como se ha establecido, las ecuaciones de tercer y cuarto grado fueron resueltas por los matemáticos italianos en el siglo XVI, así que en la primera parte de su memoria, se encuentran los diferentes métodos conocidos para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado. Lagrange buscaba los principios básicos de estos métodos para usarlos y encontrar soluciones semejantes por el método de radicales para las ecuaciones de grado mayor a cuatro (Ruffini y Abel a inicios del siglo XIX basándose en estas ideas demostraron que esto era imposible).

El método de Lagrange, consistía en sustituir una ecuación por otra de menor grado: encontró que se trataba siempre de la *existencia de funciones resolventes* de las raíces y que las funciones mismas eran raíces de ecuaciones de grados menores. En su artículo presentó varios ejemplos, entre ellos:

Problema: Determinar las resolventes, para la ecuación de grado tres

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Solución:

El trabajo de Lagrange para la ecuación cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ se inicia con la sustitución $y = x + \frac{a}{3}$ para eliminar el término cuadrático y llegar a la ecuación cúbica $y^3 + py + q = 0$. El teorema fundamental del álgebra, que era conocido, garantizaba la existencia de las raíces x_1, x_2, x_3 de la ecuación. Por tanto define la función:

$$r = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$$

Donde μ_1, μ_2, μ_3 pertenecen a los números complejos y luego de permutar las tres raíces obtiene las siguientes seis combinaciones:

$r_1 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3$
$r_2 = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_2$
$r_3 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_3 + \mu_3 x_1$
$r_4 = \mu_1 x_3 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_1$
$r_5 = \mu_1 x_3 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_2$
$r_6 = \mu_1 x_2 + \mu_2 x_1 + \mu_3 x_3$

Con las funciones $r_1,..., r_6$ Lagrange construye la ecuación de sexto grado (Chavarría, 2014):

$(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)...(y-r_6)=0$

Luego toma de manera conveniente $\mu_1=1, \mu_2=\omega, \mu_3=\omega^2$ donde ω es una raíz cúbica distinta de la unidad, es decir, $\omega^3-1=0$ y se tiene que $\omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)$ luego ω podría ser $\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ o $\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Y reemplazando, obtiene las funciones:

$$r_1=x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3$$
$$r_2=x_1+\omega x_3+\omega^2 x_2$$
$$r_3=x_2+\omega x_3+\omega^2 x_1$$
$$r_4=x_3+\omega x_2+\omega^2 x_1$$
$$r_5=x_3+\omega x_1+\omega^2 x_2$$
$$r_6=x_2+\omega x_1+\omega^2 x_3$$

Haciendo cálculos encuentra una relación entre $r_1,..., r_6$; estas relaciones son diferentes cuando se establece un orden diferente para las permutaciones (Chavarría, 2014, p. 83):

$\omega r_1=\omega x_1+\omega^2 x_2+\omega^3 x_3$
$=x_3+\omega x_1+\omega^2 x_2=r_5$
$\omega^2 r_1=\omega^2 \mathrm{x}_1+\omega^3 x_2+\omega^4 x_3$
$=x_2+\omega x_3+\omega^2 x_1=r_3$
$\omega r_2=\omega x_1+\omega^2 x_3+\omega^3 x_2$
$=x_2+\omega x_1+\omega^3 x_3=r_6$
$\omega^2 r_2=\omega^2 x_1+\omega^3 x_3+\omega^4 x_2$
$=x_3+\omega x_2+\omega^2 x_1=r_4$

Al conjunto de permutaciones de las raíces $\{r_1,..., r_6\}$ se le conoce actualmente como el conjunto S_3 de permutaciones de tres elementos y corresponde al grupo simétrico de orden 3. A este conjunto lo llama Lagrange inicialmente, la Resolvente de la ecuación de tercer grado y basándose en esta idea, encuentra la resolvente para la ecuación de cuarto grado. Esto fortaleció la idea equivocada de que dicho conjunto debería existir para la ecuación de quinto grado.

Con estos desarrollos en la ecuación se tiene que:

$$(y-r_1)(y-r_2)(y-r_3)(y-r_4)(y-r_5)(y-r_6)=0$$
$$=(y-r_1)(y-r_2)(y-\omega^2 r_1)(y-\omega^2 r_2)(y-\omega r_1)(y-\omega r_2)$$
$$=(y^2-(r_1+r_1\omega^2)y+\omega^2 r_1^2)(y-\omega r_1)$$
$$=y^3-(r_1+r_1\omega+r_1\omega^2)+(\omega^2 r_1^2+r_1^2\omega+r_1^2\omega^3)y-\omega^3 r_1$$
$$=y^3-r_1^3$$

Ahora,
$(y-r_2)(y-\omega^2 r_2)(y-\omega r_2)=(y^3-r_2^3)$

Luego,
$(y^3-r_1^3)(y^3-r_2^3)=(y^3)^2-(r_1^3+r_2^3)y^3+r_1^3 r_2^3$

Ahora toma $y^3 = t$ y obtiene una ecuación auxiliar de grado menor que la cúbica (Chavarría, 2014, p. 88):

$$t^2 - (r_1^3 + r_2^3)t + r_1^3 r_2^3 = 0 \quad (2.5)$$

A partir de las permutaciones se pueden encontrar los valores para x_1, x_2, x_3 tomando:

$r_1 + r_2 = 2x_1 + \omega(x_2 + x_3) + \omega^2(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = 2x_1 + (\omega + \omega^2)(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = 2x_1 + (-1)(x_2 + x_3)$
$r_1 + r_2 = -x_1 + 3x_1 - x_2 - x_3$

Así,
$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + r_1 + r_2]$
$x_2 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega^2 r_1 + \omega r_2]$
$x_3 = \frac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega r_1 + \omega^2 r_2]$

Como las soluciones quedaban expresadas en términos de r_1, r_2 faltaba determinar $(r_1^3 + r_2^3)$ y $r_1^3 r_2^3$ para reemplazarlas en la ecuación de grado dos en la variable t:

Luego para,

$r_1^3 = r_1 r_1 r_1$
$= (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$

Como $\omega^3 = 1$ se tiene que:

$r_1^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \omega(3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + \omega^2(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + 6x_1 x_2 x_3$
$r_2^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \omega(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + \omega^2(3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + 6x_1 x_2 x_3$
$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \omega(3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2 + 3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1) + \omega^2(3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_3 + 3x_3^2 x_1 + 3x_1^2 x_3 + 3x_2^2 x_1 + 3x_3^2 x_2) + 12x_1 x_2 x_3$

Sea hace $R = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_1 + x_3^2 x_2$ se tiene:

$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \omega(3R) + \omega^2(3R) + 12x_1 x_2 x_3$

Como $\omega + \omega^2 = -1$ se tiene que:

$r_1^3 + r_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (-1)(3R) + 12x_1 x_2 x_3$

Para continuar con el calculo de $r_1^3 + r_2^3$ se utilizan las identidades de Girard que establecen la relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación, que para el caso de la ecuación cúbica $y^3 + py + q = 0$ corresponden a:
$x_1 + x_2 + x_3 = 0$ el término en x^2
$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = p$
$x_1 x_2 x_3 = -q$

Y tomando,

$(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1^2x_2+3x_2^2x_3+3x_3^2x_1+3x_1^2x_3+3x_2^2x_1+3x_3^2x_2+6x_1x_2x_3$

$(x_1+x_2+x_3)^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3+(3R)+6x_1x_2x_3$

Utilizando las tres identidades, se tiene que:

$x_1^3+x_2^3+x_3^3 = -(3R)-6x_1x_2x_3$

Así, $r_1^3+r_2^3 = 2(-(3R)-6x_1x_2x_3)+(-3R)+12x_1x_2x_3$

$r_1^3+r_2^3 = -9R$

Y se tiene que $R+3x_1x_2x_3 = (x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

Por las relaciones de Girard, se tiene que $R = -3x_1x_2x_3$ y

$r_1^3+r_2^3 = 27x_1x_2x_3$

$r_1^3+r_2^3 = -27q$

Falta calcular $(r_1r_2)^3 = r_1^3r_2^3$

Entonces, $r_1r_2 = (x_1+\omega x_2+\omega^2x_3)(x_1+\omega x_3+\omega^2x_2)$

$r_1r_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+\omega(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+\omega^2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

De igual forma, como $\omega+\omega^2 = -1$ se tiene que:

$r_1r_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

Ahora, $(x_1+x_2+x_3)^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = 0$

Por las identidades de Girard se tiene que:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = -2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = 0$

Reemplazando en:

$r_1r_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$= -2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+(-1)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$= -3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = -3p$

Así, $(r_1r_2)^3 = -27p^3$

Y reemplazando en la ecuación de segundo grado $t^2-(r_1^3+r_2^3)t+r_1^3r_2^3 = 0$ se tiene :

$t^2-(-27q)t-27p^3 = 0$

Como r_1 y r_2 son soluciones de la ecuación cuadrática, aplicando el método de radicales se tiene que :

$t = r_1^3 = \frac{-27q}{2}+\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}$ y

$t = r_2^3 = \frac{-27q}{2}-\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}$

Finalmente en la solución:

$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+r_1+r_2]$

Se escribe como:

$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+\sqrt[3]{r_1^3}+\sqrt[3]{r_2^3}]$

Y la solución es:

$x_1 = \frac{1}{3}[(x_1+x_2+x_3)+\sqrt[3]{\frac{-27q}{2}+\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{-27q}{2}-\sqrt{\frac{27^2q^2}{4}+\frac{4(27)p^3}{4}}}]$

Por las identidades de Girard, se tiene que $x_1+x_2+x_3 = 0$ entonces,

$x_1 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}$

En esta ecuación, Lagrange llegó a la misma expresión que su antecesor Cardano, para la solución de la ecuación cúbica por medio de radicales, a través del proceso que hoy se conoce como: *La resolvente de Lagrange* (Chavarría, 2014, p. 93).
De igual forma se procede con:

$$x_2 = \tfrac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega^2 r_1 + \omega r_2]$$

$$x_3 = \tfrac{1}{3}[(x_1 + x_2 + x_3) + \omega r_1 + \omega^2 r_2]$$

A partir de estos desarrollos, se tiene que: $r_1,...,r_6$ forman el grupo simétrico S_3 de permutaciones con tres elementos al cual Lagrange denominó inicialmente como: "La resolvente de la ecuación de tercer grado" y siguiendo las mismas ideas pasa a hallar la resolvente para la ecuación de cuarto grado.

2.3.24. Problema 1.14: El teorema de Lagrange

En el artículo de 1771 de Lagrange, aparece por primera vez, *El teorema de Lagrange,* en una forma limitada y difícil de reconocer; este artículo lo publicó en dos partes la academia de Berlín entre los años (1770-1771). En esta obra de 200 páginas no se mencionaban los grupos, sin embargo, fue una de las bases mas importantes para el desarrollo del álgebra moderna del siglo XIX. Los matemáticos que vinieron después, como Galois y Abel estudiaron esta obra para sus investigaciones. El tema de la obra se relacionaba con el problema de *buscar soluciones generales de las ecuaciones:* este era el problema del álgebra en la época, para buscar la solución general de las ecuaciones de grado mayor o igual que 5, por el método de radicales.

El *Teorema de Lagrange* en su forma primitiva se enunció en la siguiente forma:

Si $f(x_1,x_2,...,x_n)$ es una función de n variables y si bajo las $n!$ posibles permutaciones de las variables, aparecen t funciones distintas, entonces t es un divisor de $n!$

Según esto, el teorema de Lagrange en su forma original equivale a decir que el índice del subgrupo H de S_n es un divisor del orden de S_n, donde H es e1 subgrupo de permutaciones que dejan fija a f. Así, el teorema que se llama teorema de Lagrange fue enunciado en forma restringida y en un *lenguaje* diferente al que se conoce en la actualidad.

La idea de *grupo de permutaciones* la formula más adelante Galois, 50 años después; pero las semillas del concepto las encontró en el trabajo de Lagrange. Sin embargo, sus construcciones o procedimientos en el proceso general para resolver una ecuación algebraica de cualquier grado en 1770 y 1771 fallaban en el método para las ecuaciones de orden superior a cuatro porque involucraban la solución de una ecuación de orden superior; pero con las soluciones de las ecuaciones de grado menor a cinco, Lagrange creyó poder extender su método sin lograrlo.

En este apartado se analizaron las configuraciones epistémicas que se muestran en las tablas 6.19, 6.20 y 6.21.

Tabla 2.9: Configuración epistémica CE1

CE1. Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado 2,3 y 4 y el problema del simbolismo algebraico	
CE1.14	El Teorema de Lagrange
CE1.13	Las resolventes de Lagrange y el conjunto S_3
CE1.8	Euler y la solución de la ecuación algebraica de grado 4
CE1.7	Harriot: el simbolismo algebraico y la solución de la ecuación de grado 4
CE1.6	Viéte y la solución general de la ecuación algebraica de grado 3
CE1.5	Viéte y la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 2
CE1.4	Relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de Cardano y Viète
CE1.3	Ferrari y la solución general de la ecuación bicuadrática
CE1.2	Método de radicales para la solución de las ecuaciones algebraicas generales de grado 3 y 4 en la edad media
CE1.1	Cardano y la solución de un caso especial de la ecuación cúbica
CE1.1. La geometría y las ecuaciones algebraicas de grado 4	
CE1.10	Descartes y el problema de Pappus
CE1.9	Descartes y el planteamiento de problemas geométricos relacionados con ecuaciones algebraicas de grado 4
CE1.2. Las ecuaciones algebraicas y los problemas de teoría de números en aritmética modular	
CE1.12	Euler y los problemas en Teoría de números con Aritmética modular
CE1.11	Fermat y los problemas en Teoría de números con Aritmética modular

2.3.25. Problema 2.1: Imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado 5 (Paolo Ruffini)

Teorema 2.3. *Si una ecuación es resoluble con el uso de radicales, las expresiones para las raíces pueden darse de tal forma que los radicales en ellas sean funciones racionales con coeficientes racionales de las raíces de la ecuación dada y las raíces de la unidad.*

8.3 Schema della dimostrazione del 1813 [1]

Cerchiamo di capire come Ruffini intende procedere discutendo un esempio particolare. Una formula risolutiva algebrica per l'equazione

$$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \cdots + u = 0 \tag{8.1}$$

consiste nel trovare una funzione $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ delle radici di (8.1) che ne dipenda in modo simmetrico, in modo da poter essere espressa in termini dei coefficienti di (8.1): $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(a, b, c, \cdots u)$ e grazie alla quale sia possibile esprimere *tutte* le radici di (8.1). L'ambiguità in una tale formula, già evidenziata da Vandermonde, risiede in questo: se

$$x_1 = F^*(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

dove F^* indica una determinazione particolare della F, allora permutando in ambo i membri x_1 ed x_2, si deve anche avere

$$x_2 = F^*(x_2, x_1, \cdots, x_n).$$

Ad esempio questa situazione si presenta nella formula risolutiva delle equazioni di secondo grado che, detta $\alpha = \pm 1$ una radice quadrata dell'unità, si può scrivere come

$$x = \frac{-b + \alpha\sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

scelto $\alpha = +1$ e ricordando che $b = -(x_1 + x_2)$, $c = x_1 x_2$ e che il radicando va considerato in senso aritmetico, si ottiene

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{2} = F^*(x_1, x_2).$$

Figura 2.4: Demostración del teorema de Ruffini de 1813 (dimat.unipv.it/ rosso/ Ruffini-Abel)

Paolo Ruffini, matemático italiano, continuó con los desarrollos de Lagrange y presentó la demostración sobre la irresolubilidad de la ecuación de grado quinto por el método de radicales, pero, la notación que utilizó para representar las permutaciones hicieron que ésta fuera ignorada por los matemáticos de la época. Ruffini presentó la demostración en dos publicaciones: la primera en el artículo sobre *Teoría generale della equazion* y en *La reflessione intorno alla soluzione della equazioni algebriche generali* (1799). El *método* de Ruffini establecía que no existía una resolvente para las ecuaciones de grado mayor o igual a cinco. Sin embargo, la afirmación no tuvo las justificaciones suficientes para la época y no pudo lograr la aceptación de los matemáticos; además, Ruffini utilizó una afirmación que en su momento no tenía la justificación suficiente pero que luego llegó a convertirse en el teorema que se conoce como el teorema de Abel-Ruffini (Muñoz, 2011, p. 6).

2.3.26. Problema 2.2: Generalización del Teorema de Rufinni (Agustín Louis Cauchy)

Uno de los primeros trabajos de Cauchy fue generalizar el teorema de Ruffini:

Si mediante las permutaciones de sus n - variables un polinomio toma más de dos valores, entonces él toma al menos p valores.

En el teorema p es el mayor primo en la factorización de n; así, en el lenguaje de la teoría de Grupos, no hay subgrupos del grupo simétrico de $n-$ permutaciones con un índice i tal que $2 < i < p$ (según algunos autores, aquí Cauchy crea la noción de Grupo de permutaciones al estudiar las permutaciones de las raíces).

El *método* que utilizó Cauchy dio origen al *cálculo de sustituciones, grupos de permutaciones:* su método comprendía una fundamentación de las matemáticas, especialmente de Análisis y se le considera como el fundador del rigor en matemáticas: la base de sus trabajos fueron los *conceptos* de teoría de grupos, tales como el orden de un elemento, la noción de subgrupo y la de conjugación.

En la misma dirección, el siguiente teorema de Cauchy fue fundamental para la teoría de grupos finitos:

Para cualquier primo *p* que divida al orden hay un elemento de orden *p*.

Este teorema fue notablemente mejorado por Sylow de la siguiente forma: "Si G es un grupo finito abeliano y p es un primo divisor del orden del grupo, existe al menos un elemento de orden p. Cauchy estudió ciertos *conceptos* en varios de sus artículos publicados en 1815 y 1844 entre ellos, las permutaciones de conjuntos finitos arbitrarios además, introduce la *notación* que se utiliza actualmente; define el producto de permutaciones, permutaciones cíclicas, transposiciones, conjunto de permutaciones generadas por productos de ciertas permutaciones dadas y en particular prueba que, los 3 ciclos generan todas las permutaciones pares. A Cauchy se le debe la notación y muchos resultados actuales; sus contemporáneos usaron sus resultados sobre permutaciones para realizar sus aportes en la teoría de las ecuaciones algebraicas, pero fue Galois quién utilizó el término *Grupo* asociado a una ecuación y que resultó en la terminología actual como el Grupo de Permutaciones.

2.3.27. Problema 2.3: Imposibilidad de resolver por radicales la ecuación algebraica general de grado 5 (Niels Henrik Abel)

Abel, fue un matemático Noruego, que proporcionó la demostración correcta y aceptada por los matemáticos de la época, sobre la imposibilidad de resolver por el método de radicales, la ecuación general de quinto grado.

Abel escribe sobre la demostración de Ruffini:

El primero y si no estoy equivocado, el único que antes que yo ha intentado demostrar la imposibilidad de la solución algebraica de una ecuación en general, ha sido el geómetra Ruffini. Pero su demostración es tan complicada que es muy difícil afirmar lo acertado de su razonamiento. Me parece que no son siempre satisfactorios (Henrik, 1881, p. 218).

El trabajo en el que resuelve por radicales la ecuación de quinto grado, lo presentó a su mentor Michael Holmboe (1795-1850) otro matemático noruego, pero ninguno de los matemáticos noruegos pudieron probar la veracidad del trabajo. Así, Holmboe lo envía a la Real Sociedad de Ciencias de Dinamarca, donde lo revisa el matemático danés Carl Ferdinand Degen (1766-1825) y sugiere presentar ejemplos numéricos; en este ejercicio Abel encuentra un error en su razonamiento lo que hace detener su trabajo en esta línea y se dedica entonces al estudio de las integrales elípticas que también eran su tema de trabajo.

Desde Lagrange, después de presentar un intento fallido en la solución por radicales de la ecuación de quinto grado el problema se plantea en otra dirección: en la búsqueda de un método desde la perspectiva geométrica y analítica y es desde este punto de vista que Abel logra demostrar la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación de quinto grado y de grados superiores. En su artículo *Mémoire sur les equations algébriques, oul'on demontres l'impossibilité de la resolution de l'equation générales du cinquiéne degré (1824)*, reconoce la importancia de su hallazgo al afirmar (Chavarría, 2014):

> **Los geómetras se han ocupado mucho de la solución general de las ecuaciones algebraicas y varios de ellos trataron de probar la imposibilidad. Pero, si no estoy equivocado, no han tenido éxito hasta ahora, por eso, espero que acojan con agrado esta memoria, la cual está destinada a llenar el hueco existente en la teoría de las ecuaciones algebraicas (Abel, 1824, p. 3).**

En 1826 Abel presentó una nueva versión de la memoria; más clara y se publica en el *Journal für die reine und angewandte Mathematik - Revista de matemáticas puras y aplicadas* fundado por August Leopold Crelle (1780-1855): matemático alemán, reconocido en el campo de las matemáticas por sus publicaciones en matemáticas aplicadas y escolares. Crelle se convirtió en amigo y benefactor de Abel. Pero Abel quería dar a conocer su trabajo a matemáticos prestigiosos, por este motivo se desplazó a Berlín para entrevistarse con Gauss a quién había enviado su memoria pero Gauss la ignoró por completo afirmando: He aquí otra de esas moustruosidades.

Abel, llegó a París donde presentó su memoria a la Academia de Ciencias de Francia para su publicación en la revista de la academia: el documento para ser evaluado fue revisado por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y Adrien Marie Legendre (1752-1857). Legendre le dejó la responsabilidad a Cauchy afirmando que era poco legible y Cauchy no se interesó por el trabajo al punto que fue extraviado. Abel regresó a Europa donde falleció debido a una tuberculosis pulmonar (Chavarría, 2014).

Legendre, después de la muerte de Abel afirmó:

¿Qué descubrimiento es ese de Abel? ... ¿Cómo es posible que ese descubrimiento, quizás el más importante que se haya hecho en nuestro siglo, se comunicara a su academia hace dos años y se escapara a la atención de sus colegas? (Muñoz, 2011, p. 17).

Luego de la muerte de Abel, Cauchy y Legrendre intentaron publicar la memoria en la revista de la académia, pero ya se había publicado en el Journal de Crelle. En 1830 le concedieron el gran premio de matemáticas y esta demostración funda las bases del Álgebra abstracta.

En la configuración epistémica CE2, determinada por la *situación-problema* que se relaciona con la demostración del Teorema sobre la imposibilidad de resolver la ecuación algebraica de grado $n > 4$ por radicales dada por Abel, sobresalen los *procedimientos* que utiliza para determinar las raíces de las ecuaciones algebraicas. Abel hace uso de sustituciones apropiadas donde utiliza el *concepto* de función racional de las raíces, raíces de la unidad, permutaciones de las raíces de la ecuación, multiplicidad de una ráiz, valores de la función de las raíces. Además, utiliza *métodos* de solución de sistemas de ecuaciones lineales, lo cual le permiten llegar a una contradicción en lo cual se basaba el método de demostración.

Se presenta en la tabla 2.11, la configuración epistémica definida a partir de estas tres configuraciones epistémicas que se determinan en la edad moderna y en el perído dos.

Tabla 2.10: Configuración epistémica CE2

CE2. Búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar las ecuaciones de grado n > 4 por el método de radicales	
CE2.3	Abel y la demostración de la imposibilidad de resolver por radicales las ecuaciones algebraicas de grado $n > 4$
CE2.2	Cauchy y el conjunto de permutaciones de las raíces de las ecuaciones algebraicas
CE2.1	Ruffini y la demostración de la imposibilidad de resolver por radicales la ecuación general de grado 5

2.3.28. Problema 3.1: Problemas en aritmética modular (Carl Friedrich Gauss)

Gauss inició sus investigaciones en *teoría de números* durante su estancia en el Collegium Carolinum en 1795, pero inicia la escritura de sus *Disquisitiones arithmeticae,* a lo largo de su estancia en la Universidad de Göttingen entre 1795 y 1798. En su diario científico, en 1796 aparecen dos de sus resultados más brillantes: la descomposición de todo número entero en tres triangulares y la construcción del hepta-decágono regular. Ambos recogidos en las Disquisitiones. A finales de 1798 Gauss entrega el manuscrito a un editor de Leipzig, pero dificultades económicas retrasan la publicación hasta el verano de 1801. Con las Disquisitiones, Gauss da una nueva orientación a la *Teoría de Números,* dejando de ser ésta una acumulación de resultados anecdóticos aislados para convertirse en una rama de las matemáticas tan importante como el análisis o la geometría (Pérez, s.f.).

Las *Disquisitiones* se encuentran organizadas en siete secciones: 1) Números congruentes en general; 2) Congruencias de primer grado; 3) Residuos de potencias; 4) Congruencias de segundo grado; 5) Formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado; 6) Aplicaciones de las nociones anteriores; 7) Ecuaciones de las secciones de un círculo.

Problema: Pequeño Teorema de Fermat (Art. 49 y 50): Si p es un número primo que no divide a a, $a^{p-1}-1$ ***es siempre divisible por*** p.

Problema: Teorema de Wilson (Art. 49 y 50): El producto de todos los números menores que un número primo dado, aumentado en una unidad es siempre divisible por dicho número.

Problema: Ley de reciprocidad cuadrática

Demostración:

En la sección (4) de su libro, Gauss proporciona la primera demostración de la *Ley de reciprocidad cuadrática*, a la que denomina Theorema aureum (Art. 131) y siguientes:

Si p es primo de la forma $4n + 1$, $+p$ será un residuo o un no-residuo de todo primo que tomado positivamente sea un residuo o un no residuo de p. Si p es de la forma $4n + 3$, $-p$ tiene la misma propiedad. Esto es, existe una reciprocidad entre el par de congruencias $x^2 \equiv q(mod p)$, $x^2 \equiv p(mod q)$ en la que tanto p como q son primos; ambas congruencias son posibles o ambas son imposibles, a no ser que tanto p como q dejen residuo 3 cuando se dividen por cuatro, en cuyo caso una de las congruencias es posible y la otra no. Gauss contaba con esta demostración desde 1796, a los 19 años. Euler y Legendre lo habían intentado sin éxito como comenta el propio Gauss en el art. 151. solo por esta demostración Gauss ya debería ser considerado como uno de los matemáticos más potentes de la época (Pérez, s.f.).

2.3.29. Problema 3.2: Solución de ecuaciones ciclotómicas (Carl Friedrich Gauss)

El problema de la solución de las ecuaciones de grado quinto por el método de radicales después de los hallazgos de Abel, se planteó en términos de la pregunta ¿cuándo una ecuación es resoluble por medio de radicales? En la época de Gauss se tenía que algunas familias particulares de ecuaciones de grado mayor a cuatro eran resolubles por radicales; así, el interés de los matemáticos se enfocó hacia la caracterización de manera general de las ecuaciones de grado quinto y mayores que eran resolubles por radicales; este problema fue resuelto finalmente, por Galois como se presenta más adelante. En 1801 Gauss retoma el planteamiento de Vandernomde (1735-1796) de su obra *Mémoire sur le Résolution des Equations- 1770* en la que afirmaba que:*todas las ecuaciones, a las que actualmente se les llama ciclotómicas* $x^p - 1 = 0$ *donde p es un número primo, son resolubles por el método de radicales.* Esta afirmación no pudo ser demostrada en general; Vandermonde logró probarla para $p \leq 11$ y logra probar el planteamiento; Gauss empleó la técnica basada en reducir el grado de la ecuación, que fue el método empleado por Lagrange.

Problema: Hallar las raíces de la ecuación $x^n - 1 = 0$ ***con*** n ***un número primo impar***

La ecuación se llama ciclotómica y salvo para $x = 1$, todas las raíces son imaginarias. La ecuación también se denomina *ecuación para la división del circulo* y esto se debe a que las raíces pueden escribirse como:

$x_k = cos\left(\frac{k2\pi\theta}{n}\right) + sen\left(\frac{k2\pi\theta}{n}\right)$ para $k = 1, 2, ..., n$.

Gauss encontró que todas las raíces eran de la forma $r, r^2, r^3, ..., r^{n-1}$ o $r^e, r^{2e}, r^{3e}, ..., r^{(n-1)e}$ para cualquier entero positivo o negativo e. Los métodos que desarrolló se relacionaban con los "grupos". Una consecuencia geométrica de este trabajo fue la demostración que se puede inscribir un polígono regular de 17 lados en un circulo usando regla y compás. Esto como consecuencia, de que las raíces complejas al dibujarlas geométricamente corresponden a los vértices del polígono regular de n lados sobre el circulo unitario.

2.3.30. Problema 3.3: Teorema Fundamental del Álgebra (Carl Friedrich Gauss)

Aunque no se había demostrado *El Teorema fundamental del álgebra;* (1798) ya se tenían suficientes ejemplos que una ecuación de grado n tiene n raíces. El Teorema fundamental del álgebra establece que toda ecuación polinomial de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces complejas (Chavarría, p. 79). Descartes da una primera versión de este teorema y presenta ejemplos; sin embargo es Carl Friedrich Gauss quién presenta la primera demostración acabada de este teorema (ver, Salazar, 2009, p. 137-139).

La configuración epistémica, se relaciona con la demostración dada por Gauss del Teorema Fundamental del Álgebra: su primera demostración formal fue presentada en su tesis doctoral: Nueva demostración del teorema de que toda función algebraica en una variable puede ser factorizada en factores reales de primero o segundo grado (1799). Para su demostración, recurrió a *métodos* geométricos y la demostración resultó tan clara que fue aceptada por la comunidad matemática. Esta demostración representa una interacción entre los *procedimientos* geométrico y los algebraicos, junto con la *representación* gráfica de los números complejos que se habían descubierto en 1797 por Wessel (1745-1818). Gauss fue el primero en observar que en todas las demostraciones anteriores se suponía la existencia de las raíces y se deducían propiedades de ellas. Él mismo no afirmó tener la demostración, sino que una demostración rigurosa debía ir en esos términos. En el trabajo, Gauss hace una crítica a los intentos anteriores de D'Alembert, Euler y Lagrange y aborda el teorema desde una perspectiva diferente: Gauss no calcula las raíces de un polinomio real sino que demuestra la existencia de éstas por medio de un método muy original (Dávila, 2003b, p.50). Entre los *conceptos* que utiliza para su demostración se encuentran: factor cuadrático irreducible, propiedades de los números complejos y de identidades trigonométricas relacionadas con ellos, coordenadas polares, intersección de curvas algebraicas, cantidades infinitamente largas, funciones continuas, números complejos y rama de la curva.

En general la demostración de Gauss se basó en los siguientes *argumentos:* si se tiene el polinomio real $P(z)$ que tiene una raíz compleja de la forma $a + bi$ entonces $P(a + bi) = 0$ y además, esta función algebraica se puede representar como $P(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$. La gran originalidad de Gauss fue la de hacer corresponder cada raíz compleja $a + bi$ del polinomio con un punto (a,b) del plano cartesiano. Así, el punto (a,b) debía ser la intersección de las curvas $u = 0$ y $v = 0$ por lo que era necesario probar que estas dos curvas se cortaban. Gauss utilizó un argumento cualitativo para esta prueba y su razonamiento se basó en las gráficas de las curvas por lo que no fue completamente riguroso: sin embargo, su argumento fue convincente y la prueba que un polinomio real de grado n se factoriza como producto de factores lineales de primero y segundo grado (Davila, 2003b, p.82).

2.3.31. Problema 3.4: Ecuaciones solubles por radicales: el grupo de Galois asociado a la ecuación polinomial (Évariste Galois)

Galois fue un matemático francés, que siendo adolescente determinó la condición necesaria y suficiente para que un polinomio fuera soluble por radicales. Dio solución a un problema abierto mediante el nuevo concepto de *Grupo de Permutaciones.* La idea genial de la teoría de Galois es que se pueden representar ciertos conjunto asociados a la solución de ecuaciones algebraicas mediante grupos de simetrías. El 4 de julio de 1843, Liouville se dirige a la Academia de Ciencias de París con estas palabras:

Espero interesar a la Academia anunciando que entre los papeles de Evariste Galois he encontrado una solución tan precisa como profunda de este bello problema: ¿cuándo es una ecuación soluble por radicales?

Teorema 2.4. *Si $p(x) = 0$ es soluble por radicales, entonces el Grupo de Galois del polinomio es soluble.*

La idea de la prueba del Teorema de Galois consiste en suponer que si G es un grupo soluble, tenemos una cadena $G = G_0, G_1,..., G_m$ de forma que G_i es normal en G_{i-1} y el cociente G_{i-1}/G_i tiene orden primo. Asociada a la cadena hay una cadena de subconjuntos de los números complejos $F_0 \subset F_1... \subset F_m$ tales que F_i es el conjunto de números complejos que quedan fijos bajo la acción de G_i (esto es $g(z) = z$ para todo elemento de G_i). El conjunto F_0 contiene a los coeficientes de $p(x)$, mientras que todas las raíces de $p(x) = 0$ están en F_m. El hecho que G_{i-1}/G_i tenga orden primo implica que los elementos de F_i se pueden construir por radicales a partir de los coeficientes del polinomio $p(x)$ (De la Peña, 2011).

Problema: Probar que el polinomio $x^5 - 6x + 3 = 0$ ***no es soluble por radicales.***

Solución:

1) La ecuación $x^5 - 6x + 3 = 0$ tiene tres soluciones reales y dos complejas. La observación se sigue del hecho que el polinomio toma valores negativos en -2 y en 1, valores positivos en -1 y 2 y sabiendo que tiene un solo máximo local en $\sqrt[4]{\frac{6}{5}}$ y un solo mínimo local $\sqrt[4]{\frac{6}{5}}$.

2) El polinomio $x^5 - 6x + 3 = 0$ no puede escribirse como producto de dos polinomios con coeficientes enteros de grado menor que cinco:

Supongamos que este no fuera el caso y se tuviera que $p(x) = q(x)r(x)$ con $q(x)$, $r(x)$ de grado menor que cinco. Como el grado de $q(x)$ más el grado de $r(x)$ es 5, entonces se puede suponer que $q(x)$ tiene grado 1 o 2, mientras que $r(x)$ tiene grado 4 o 3.

Si $q(x)$ tiene grado 1, entonces $q(x) = nx + m$ y $r(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con m, n, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 números enteros. Así que $na_4 = 1$ lo que implica que $n = 1$ o $n = -1$ y además $\frac{m}{n} = -m$ es una solución de $p(x) = 0$. Pero por el punto 1) se sabe que que $p(x) = 0$ no tiene soluciones enteras.

Se pasa a suponer ahora que que $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ y $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ con coeficientes enteros. Entonces, igualando los coeficientes de los polinomios $p(x) = q(x)r(x)$ se tiene que: $a0b0 = 3$ $a0b1 + a1b0 = -6a0b2 + a1b1 + a2b0 = 0$ $a1b2 + a2b1 + a3b0 = 0$ $a2b2 + a3b1 = 0$ $a3b2 = 1$

De la primera ecuación se concluye que uno y solo uno de a_0 o b_0 es divisible entre 3. De la segunda ecuación se obtiene que b_1 es también divisible por 3 y finalmente, de la tercera ecuación se tiene que b_2 es divisible por 3. Esto contradice la última ecuación.

3) Un polinomio de grado 5 que satisface las condiciones 1) y 2) tiene como grupo de Galois a S_5. El grupo de Galois G es un grupo de permutaciones de las cinco raíces complejas del polinomio $p(x)$ por el Teorema Fundamental de la Aritmética, luego G es un subgrupo de S_5. Un polinomio (con la propiedad 2) tiene siempre un elemento de orden 5 en el grupo de Galois, esto es, hay una permutación $g \in G$ tal que $g^5 = 1$ pero $g^i \neq 1$ para $1 \leq i \leq 4$. Por otra parte, como hay dos raíces no reales de $p(x)$ estás tienen la forma $s + ti$, $s - ti$ lo que produce un elemento de orden 2 en G : en efecto, la transformación de plano complejo g que consiste en enviar cualquier número complejo $x_1 = s + ti$ en su conjugado complejo $x_2 = s - ti$ tiene la propiedad: o bien x_1, x_2 son reales y ambas raíces quedan fijas, o bien envía la raíz x_1 en la segunda x_2 (esto sucede en caso que x_1, x_2 no sean reales). Esta transformación satisface también que $g^2(z) = z$ para todo número complejo z. Se puede así suponer que a G le pertenecen la transposición $(1, 2)$ y la rotación $(5, 4, 3, 2, 1)$. Estos elementos generan a S_5.

4) El grupo S_5 no es soluble. Esto es, no hay una cadena de subgrupos $S_5 = G_0, G_1, \ldots, G_m$ de forma que cada G_i sea normal en G_{i-1} y el cociente G_{i-1}/G_i tenga orden primo: en efecto, esto es así porque S_5 tiene como subgrupo normal a A_5 que no tiene subgrupos normales.

5) El teorema de Galois indica que: si $p(x) = 0$ es soluble por radicales, entonces el grupo de Galois del polinomio es soluble. Entonces como S_5 no es soluble se sigue que el polinomio $p(x) = x^5 - 6x + 3 = 0$ no es soluble por radicales (De la Peña, 2011).

Problema: Hallar el grupo de Galois de la ecuación $x^2+bx+c=0$

Solución:

Se generaliza el grupo de Galois para un polinomio de grado 2.

1) Sean r_1, r_2 las raíces de la ecuación algebraica; los coeficientes de la ecuación b, c vienen dados por funciones polinómicas simétricas:

Como $x^2 + bx + c = 0 = (x - r_1)(x - r_2) = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$

Se tiene que:

$c = r_1 r_2$

$b = -(r_1 + r_2)$

Y $b^2 - 4c = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2 = (r_1 - r_2)^2$ función simétrica

$\sqrt{b^2 - 4c} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - 4r_1 r_2} = \sqrt{(r_1 - r_2)^2} = \pm(r_1 - r_2)$ función no simétrica

2) Se define el conjunto K_0 = {conjunto de todas las expresiones que se pueden obtener a partir de b, c haciendo sumas, restas, multiplicaciones y divisiones}

Y $K_1 = K_0(\sqrt{b^2 - 4c})$ con $b, c \in K_0$, $r_1, r_2 \in K_1$ de forma que el paso de K_0 a K_1 representa resolver la ecuación. Como las funciones de K_0 son invariantes al permutar sus dos variables r_1, r_2 diremos que su grupo de simetrías es S_2, mientras que las funciones de K_1 no son en general simétricas de ningún modo y por tanto se le asigna el grupo trivial de simetrías $\{id\}$.

Así, se puede representar en el siguiente esquema:

$$\begin{pmatrix} K_0 & \surd & K_1 = K_0(\sqrt{b^2 - 4c}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_2 = G_0 & \rhd & G_1 = \{id\} \end{pmatrix}$$

3) Como el índice de G_1 respecto a G_2 es 2 se tiene que G_1 es normal respecto a G_2.

Entonces, si el polinomio tiene una sola raíz, el grupo de Galois del polinomio es el trivial, esto es, contiene solo la permutación identidad. Si el polinomio tiene dos raíces racionales el grupo de Galois es el trivial y finalmente si las dos raíces son irracionales entonces el grupo de Galois contiene dos permutaciones y es isomorfo al grupo de los enteros módulo 2.

Problema: Identificar el grupo de Galois de la ecuación $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$

1) 1) Sean r_1, r_2, r_3 las raíces de la ecuación algebraica; los coeficientes de la ecuación b,c,d vienen dados por funciones polinómicas simétricas:

Como $x^3 + bx^2 + cx + d = 0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r2r3)$ $x - r_1r_2r_3$

Se tiene que:

$d = -r_1r_2r_3$
$b = -(r_1 + r_2 + r_3)$
$c = r1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$

2) Se toma:

a) $D = (9bc - 27^3 - 27d)^3 + 4(3c - b^2)^3$

b) $E = \frac{(9bc - 2b^3 - 27d) + \sqrt{D}}{2}$

c) $t = \sqrt[3]{E}$

d) La fórmula para resolver la ecuación:

$\frac{-b}{3} + \frac{t}{3} + \frac{b^2 - 3c}{3t}$

2) Se tiene que $D = -27(r_1 - r_2)^2(r_1 - r_3)^2(r_2 - r_3)^2$

$E = (r_1 + \varsigma r_2 + \varsigma^2 r_3)^3$

$\varsigma = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ (raíz cúbica de la unidad)

3) Se observa la perdida de simetrías por medio de radicales: D es una función simétrica pero $\sqrt{D}$ no, aunque perduran algunas simetrías, así $\sqrt{D}$ es invariante al cambiar $(r_1,r_2,r_3) \longrightarrow (r_2,r_3,r_1)$. También E goza de las mismas simetrías que $\sqrt{D}$ pero al extraer las raíces cúbicas se pierden todas ellas.

4) Se tiene el siguiente esquema para la ecuación cúbica:

$$\begin{pmatrix} K_0 & \sqrt{} & K_1 = K_0(\sqrt{D}) & \sqrt[3]{} & K_2 = K_1(\sqrt[3]{E}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_3 = G_0 & \rhd & G_1 = A_3 & \rhd & G_2 = \{id\} \end{pmatrix}$$

5) La normalidad de A_3 se justifica ya que el índice respecto a S_3 es 2, también es evidente que $\{id\}$ es un subgrupo normal de A_3.

Entonces el grupo de Galois del polinomio corresponde a un subgrupo del grupo S_n según la naturaleza de las raíces.

Problema: Grupo de Galois de la ecuación $x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$

Solución:

Al aplicar el método descrito para las ecuaciones de grado 2,3 y 4 se verifica que no existe una cadena de subgrupos desde S_5 a $\{id\}$ donde cada uno sea subgrupo normal del anterior. Así no se puede escribir la expresión: $S5 \triangleright A5 \triangleright ... \triangleright \{id\}$ Porque A_5 no tiene subgrupos normales propios (ningún A_n para $n \geq 5$). La cadena se corta y falta hacer los radicales $\sqrt[5]{}$, $\sqrt[3]{}$,... por tanto, no existe una fórmula para resolver la ecuación de quinto grado usando solo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y radicales (Teorema de Abel). Lo mismo se aplica a la ecuación general de grado $n > 5$; pero hay casos particulares de ecuaciones que sí se pueden resolver por radicales (ciclotómicas) (Póveda, s.f.).

Se presentan en la tabla 2.12. las configuración epistémicas CE3, C3.1, relacionadas con los problemas presentados en este período, que corresponde a la última etapa en la emergencia del objeto Grupo.

Tabla 2.11: Configuración epistémica CE3

CE3. Clasificación de las ecuaciones algebraicas solubles por radicales	
CE3.4	Grupo de Galois asociado a la ecuación polinomial: ecuaciones solubles por radicales
CE3.3	Gauss y la demostración del Teorema Fundamental del lgebra
CE3.2	Gauss y la solución de ecuaciones ciclotómicas
CE3.1 Problemas en aritmética modular	
CE3.1	Gauss y problemas en aritmética modular

2.3.32. Problema 4.1: Propiedades generales de los grupos continuos de transformaciones (Sophus Lie)

Lie fue un matemático noruego, que creó gran parte de *La teoría de la simetría continua* y la aplicó al estudio de la geometría y de las ecuaciones diferenciales parciales; los grupos de Lie son importantes en el análisis matemático, la física y la geometría porque sirven para describir la simetría de las estructuras analíticas; fueron introducidos por Sophus Lie en 1870 para estudiar simetrías de ecuaciones diferenciales y se relacionan con temas de geometría diferencial. Lie escribe a Mayer en 1874: “Mis primeros trabajos estaban, por decirlo así, preparados por adelantado para servir de fundamento a la nueva teoría de los grupos de transformaciones (Campos, 2007)”. Lie propone considerar un nuevo elemento generador a la manera de Plücker: considerar no solo un punto sobre ella, sino un punto y la tangente en ese punto a la curva, es lo que llama un elemento lineal, ahora elemento de contacto de primer orden. Las transformaciones apropiadas son entonces aquellas que aplican curva sobre curva pero que no solamente hacen corresponder puntos sino elementos de contacto de primer orden; en cada punto la imagen del elemento de contacto en primer orden es la imagen del elemento de contacto en el punto de partida. Son las transformaciones de contacto (Campos, 2007).

La idea anterior, la generaliza a *n* dimensiones y esto le permite a Lie refinar la noción de variedad integral de un sistema diferencial hasta constituirla en la esencia de la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, según Demidov citado en Campos (2007). Tal desarrollo fue el fruto de un denotado estudio por parte de Lie de las concepciones al respecto de Euler, Lagrange, Monge, Pfaff, Hamilton, Plücker y Jacobi. Las generalizaciones logradas por Lie mediante su concepción de los elementos de contacto le permitieron ligar las nociones de incidencia de elementos de contacto, formas de Pfaff, transformaciones de contacto, invariación de una ecuación diferencial mediante una transformación.

El gran mérito de Lie al dar solución de sistemas diferenciales, dependía finalmente de los grupos continuos finitos de transformaciones. Van der Waerden citado en Campos (2007) explicó que lo de continuo tenía que ver con la diferenciabilidad (como se tenía en 1870) y lo de finito con el número de parámetros: si hay infinitos parámetros, o mejor, una función arbitraria, se dice que el grupo es infinito: desde Hermann Weyl en 1934, se le dice grupo de Lie.

La condición de invariación conduce a un sistema diferencial cuya solución es la que provee los parámetros. Al nacimiento de los grupos de transformaciones dedican Lie y Engel grandes esfuerzos, materializados en tres gruesos volúmenes publicados entre 1888 y 1893: el primero, trataba de propiedades generales de los grupos de transformaciones; el segundo, trataba de transformaciones de contacto y el tercero, consta de seis partes, las cuatro primeras relacionadas con los grupos continuos finitos. La primera, trata de los de la recta y el plano. La segunda, de los del espacio tridimensional. La tercera, del grupo proyectivo del espacio tridimensional. La quinta parte estudia el problema de los fundamentos de la geometría. La sexta da consideraciones generales acerca de grupos continuos finitos: en particular, figuran allí tres célebres teoremas, llamados fundamentales, junto con sus recíprocos, que constituyeron la base de toda la teoría y han sido profundamente estudiados, desde el punto de vista local inicialmente y luego desde el punto de vista global (Campos, 2007).

2.3.33. Problema 4.2: La clasificación de las Geometrías (Felix Klein)

Klein, fue un matemático alemán, que demostró que las geometrías métricas, euclidianas y no euclidianas constituían casos particulares de la geometría proyectiva. En 1872 presentó una notable clasificación de la Geometría: *El programa Erlangen,* pone fin a la escisión entre geometría pura y geometría analítica. En esta clasificación el concepto de *Grupo,* desempeñó un papel fundamental, ya que el objeto de cada geometría se convierte en el estudio del grupo de transformaciones que la caracteriza.

Lie, Klein, Poincaré, Hilbert y Cartan demarcaron toda una época en la historia de la geometría, donde parte de su obra puede ser estudiada desde un mismo punto de vista: **"la construcción de la geometría sobre la noción de grupo"** (Campos, 2007). Klein vivió en la época de la consolidación Weierstrassiana del análisis y en la de la consolidación de las geometrías no euclidianas, a las cuales él mismo hizo una contribución esencial; demostrando que si la geometría proyectiva es consistente, también lo serán las geometrías esférica, euclidiana e hiperbólica. Klein estaba más cerca de la concepción estructural de Hilbert o Bourbaki: construye las geometrías elíptica e hiperbólica a partir de la euclidiana. Pero demuestra igualmente cómo construir la euclidiana a partir de la elíptica. El segundo estudio fundamental de Klein sobre la geometría fue el que se conoce como programa Erlangen: *Consideraciones comparativas de las nuevas investigaciones geométricas:* así, Klein escribe (Campos, 2007, p. 88):

> **"Siguiendo la analogía con las transformaciones del espacio, se habla de transformaciones de la variedad; estas también forman grupo". Para decir algo de lo abstracto, la variedad parte de lo concreto, el espacio. Hay transformaciones del espacio que no alteran las propiedades geométricas de las figuras. Llámese grupo principal de transformaciones del espacio al conjunto de todas estas transformaciones. Las propiedades geométricas no son alteradas por las transformaciones del grupo principal. La recíproca es igualmente verdadera: las propiedades geométricas son caracterizadas por su invariación relativamente a las transformaciones del grupo principal.**

Esta fue la idea central del Programa Erlangen, que en términos actuales equivale a: "una geometría determina un grupo y Recíprocamente, un grupo determina una geometría". Por lo tanto, una geometría es una tripla (V,G, I), en la que V es un conjunto no vacío, el de los elementos de base de la geometría; G es un grupo de transformaciones; I son las propiedades de los elementos de V , invariantes respecto de G. Por ejemplo, si V es el plano euclidiano bidimensional, G puede ser el grupo de similitudes, es decir, de las transformaciones que no alteran los ángulos, pero sí las distancias; entre las propiedades I se encontrarán los teoremas de semejanza de triángulos. Un subgrupo, es el de las isometrías, las cuales conservan las distancias, a demás de los ángulos. Entre las propiedades I se encontrarán los teoremas clásicos de congruencia de triángulos. La geometría de la congruencia resulta subordinada a la de la semejanza (Campos, 2007, p. 88).

Problema:como generalización de la geometría de [Euclides], Klein pone la cuestión general: dados una variedad y un grupo de transformaciones de esta variedad, determinar las propiedades de sus elementos que no son alteradas por las transformaciones del grupo.

La geometría proyectiva no nació sino cuando se volvió costumbre considerar como enteramente idénticas a la figura primitiva y a todas aquellas que se obtienen de ella por proyección, y enunciar las propiedades proyectivas de tal manera que se ponga en evidencia su independencia respecto de las modificaciones causadas por la proyección; esto era lo mismo que tomar como base de consideraciones el *grupo de las transformaciones proyectivas. El grupo de las semejanzas* es subgrupo del proyectivo; así, la geometría de la semejanza resulta subordinada a la proyectiva. La subordinante es más general. Se llega a la idea de las geometrías equivalentes. Dos geometrías aparentemente disímiles pueden resultar equivalentes si es posible exhibir una correspondencia inyectiva entre los elementos de cada geometría. Los grupos serán isomorfos (Campos, 2007). En 1872, Klein en el Programa Erlangen, hizo una sistematización y jerarquización de las geometrías, mediante grupos y subgrupos, concibiendo como objeto de cada una el estudio de propiedades invariantes respecto de un determinado grupo de transformaciones y considerando cada geometría como subgeometría de otra. Así, clasificar geometrías es, clasificar grupos de transformaciones. En esta dirección, la Topología es la geometría de los homeomorfismos o aplicaciones bicontinuas, que constituyen un grupo de transformaciones que conservan la conexión (deformar sin cortar); en la geometría proyectiva, las transformaciones son proyectivas o proyectividades que constituyen un grupo que conserva la alineación; el grupo de transformaciones afines o afinidades conserva el paralelismo y caracteriza la geometría afín.

Dentro de ésta se encuentra incluida, la geometría de la semejanza. Así, la geometría euclídea es, la geometría de las congruencias, que consiste en el estudio de propiedades de las figuras, incluidas las áreas y longitudes, que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones rígidas, generado por las traslaciones y rotaciones en el plano. Esto es equivalente al axioma no postulado de Euclides, de que las figuras no varían en sus propiedades cuando se las somete a movimientos en el plano. Por tanto, la geometría euclídea, desde el punto de vista de Klein, es solo un caso especial de la geometría afín, y ésta a su vez un caso especial de una geometría aún más general, la proyectiva (Gómez, García, Pina & Navarro, 2003).

2.3.34. Problema 4.3: La clasificación de los grupos finitos simples

En 1983 se logró terminar la clasificación de los grupos finitos simple, estableciéndose que existían cinco grandes familias y que cualquier grupo finito simple pertenece a una de esas cinco familias, con la excepción de 26 grupos que reciben el nombre de grupos esporádicos. El mayor de ellos es conocido como grupo monstruo (ver, figura 2.1).

Problema: Clasificar los grupos finitos simples.

Solución:

Todo grupo finito simple puede ser:

Un grupo cíclico de orden primo: se tratan de los únicos grupos finitos simples abelianos. El famoso teorema de Walter Feit y John G. Thompson, establece que todo grupo finito de orden impar es resoluble. Por tanto, todo grupo finito simple tiene, o bien orden impar y se trata de un grupo cíclico de orden primo, o bien orden par.

Un grupo no abeliano de orden par, que puede ser:

Un grupo alternado de grado al menos 5.

Un grupo de Lie simple incluyendo los grupos clásicos: Los grupos de las transformaciones proyectivo especial, unitarias, simplécticas u ortogonales sobre un cuerpo finito. Un grupo de Lie excepcional o twisted incluyendo al grupo de $Tits_2F4(2)'$

Uno de los 26 grupos esporádicos incluyendo al grupo monstruo. John Conway consideró al grupo de Tits como un grupo esporádico (porque no es estrictamente un Grupo de Lie), en cuyo caso hay 27 grupos esporádicos.

Los ordenes y nombres de los grupos corresponden a:

Los grupos esporádicos suelen ser de orden grande. El más pequeño es de orden 7.920. Los más grandes son el “baby monster group” de orden superior a 4 $_\times$ 1033 y el “monstruo” de orden superior a 8 $_\times$ 1053. Veinte de los 26 grupos esporádicos están incluidos en el grupo monstruo. A los seis restantes, $J1$, $J3$, $J4$,$O'N$,Ru,Ly se les llama “grupos parias”; cinco de los más pequeños fueron descubiertos por Mathieu en 1860 y el resto entre 1965 y 1975. Sin embargo varios fueron predichos antes de ser construidos (Recuperado el día 4 de marzo de 2016, de http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/gruposimple.htm).

2.3.35. Problema 4.4: La clasificación de los grupos cristalográficos

Se tiene que un grupo G de movimientos en el plano se denomina *grupo cristalográfico*, si el subgrupo de G formado por las traslaciones es un grupo abeliano infinito y generado por dos elementos. Así, por ejemplo, se tiene que es imposible llenar todo el plano con pentágonos regulares, sin cortarse unos con otros o dejar espacios libres. Esta limitación se llama *restricción cristalográfica* y proviene del hecho que los grupos de cristalografía no pueden tener simetrías rotatorias de orden 5; pero sí es posible tener grupos cristalográficos con rotaciones de orden 6 (Rivero, 1999).

En la misma dirección, se define un *grupo discontinuo,* como aquel grupo G de movimientos en el plano donde se cumple que para cada punto P del plano existe un entorno, disco abierto D con centro en P tal que la imagen $\sigma(P_)$ no se encuentra en D, para todo σ en G diferente de la identidad.

Problema 1: ¿Qué grupos discontinuos de traslaciones existen en el plano?

Todo grupo de traslaciones discontinuo G en el plano corresponde a uno de los siguientes:

1) G consiste solo de la identidad. $G = \langle I \rangle$

2) G está generado por una traslación. $G = \langle T_a \rangle$

3) G está generado por dos traslaciones. $G = \langle T_a, T_b \rangle$

Problema 2: ¿Cuáles son los generadores de un grupo cristalográfico?

Si G es un grupo cristalográfico de movimientos directos, entonces G está generado por traslaciones y una única rotación de orden n=1, 2, 3, 4, 6 (Rivero, 1999).

Problema 3: ¿Cuántos grupos cristalográficos planos existen?

Existen 17 grupos cristalográficos no isomorfos. Estos se clasifican de acuerdo al grupo de rotaciones:

1) Grupos sin rotación: $W_1, \quad W_1^1, \quad W_1^2, \quad W_1^3$

2) Grupos con rotación de orden 2: $W_2, \quad W_2^1, \quad W_2^2, \quad W_2^3, \quad W_2^4$

3) Grupos con rotación de orden 3: $W_3, \quad W_3^1, \quad W_3^2$

4) Grupos con rotación de orden 4: $W_4, \quad W_4^1, \quad W_4^2$

5) Grupos con rotación de orden 6: $W_6, \quad W_6^1$

La *notación*, W_i^j indica para el subíndice i el tipo de rotación que contiene el grupo, así el 1 indica una rotación de orden 1 (la identidad); el 2 una rotación de orden 2 o giro de 180 grados; el 3, una rotación de orden 3 o giro de 120 grados y así sucesivamente. El subíndice j se usa para diferenciar los posibles movimientos inversos, dentro de una familia con el mismo orden del grupo de rotaciones (Rivero, 1999).

2.3.36. Problema 4.5: La clasificación de los grupos puntuales

Una molécula presenta simetría de tipo puntual, si todos sus elementos de simetría pasan por un único punto. La existencia de uno o varios elementos de simetría obliga o impide la existencia de otros en la molécula. Así, solo son posibles algunos conjuntos de elementos de simetría.

Problema: ¿Cuál es el grupo puntual de la molécula?

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	Grupo puntual de simetría
C_3	$E, 2C_3$	3	C_3
$C_3, 3C_2$	$E, 2C_3, 3C_2$	6	D_3
$C_3, 3\sigma_v$	$E, 2C_3, 3\sigma_v$	6	C_{3v}
$C_3, 3\sigma_h$	$E, 2C_3, 3\sigma_h, 2S_3$	6	C_{3h}

Elemento de simetría	Operaciones	Orden del grupo	Grupo puntual de simetría
$C_3, 3C_2, \sigma_h$ $S_3^*, 3\sigma_v^*$	$E, 2C_3, 3C_2, 3\sigma_h$ $2S_3, 3\sigma_v$	12	D_{3h}
$C_3, 3C_2, i$ $S_6^*, 3\sigma_d^*$	$E, 2C_3, 3C_2, i$ $2S_6, 3\sigma_d$	12	D_{3d}

La (∗) significa que los elementos se encuentran implicados por los anteriores. Cada uno de los conjuntos de elementos de simetría forma un grupo puntual de simetría y los elementos de simetría que posee la molécula determinarán el grupo puntual al cual pertenece.

2.3.37. Problema 4.6: Los grupos en la Física

Por simetría de un sistema físico se entiende cuando las ecuaciones de movimiento permanecen invariables respecto a un cierto conjunto de transformaciones: si una ecuación es invariante respecto a las transformaciones A,B, entonces es también invariante respecto a la transformación C que resulta de la aplicación sucesiva de A y B. La transformación C se denomina producto de las transformaciones y así la operación de multiplicación es una operación interna en el conjunto de transformaciones de simetría de un sistema físico. Un conjunto de transformaciones con estas propiedades se denomina un *Grupo de transformaciones de simetría del sistema físico dado* (Pietrásheñ & Tрífonov, 2000).

Problema: ¿Qué grupos utiliza la Física?

Algunos de los grupos que utiliza la física corresponden a:

1) Grupo de desplazamientos (traslaciones) en el espacio tridimensional: sus elementos son las transformaciones de traslación del origen de coordenadas en un vector arbitrario a, es decir, $r' = r + a$; este es un grupo continuo triparamétrico (el vector a tiene tres componentes).

2) Grupo de rotaciones $O^+(3)$: sus elementos son las transformaciones de rotación del espacio tridimensional o las matrices ortogonales correspondientes con determinante igual a la unidad. Este grupo es continuo y triparamétrico (los 9 elementos de una matriz ortogonal están relacionados entre sí mediante condiciones.) Tres parámetros independientes pueden ser escogidos, por ejemplo, $\{\phi, \theta, \psi\}$. Los ángulos polares $\{\phi,\theta\}$ determinan la posición del eje de rotación que pasa por el origen de las coordenadas. El ángulo $\{\psi\}$ describe la rotación respecto a este eje. La invariancia respecto al grupo $O^+(3)$ pone de manifiesto la propiedad de isotropía del espacio tridimensional (esto es, las tres direcciones son equivalentes, no existe una directiva privilegiada). Si al grupo de rotaciones se le añada la operación de inversión dada por $x = -x$, $y = -y$, $z = -z$ se obtiene el grupo ortogonal $O(3)$.

3) Los grupos de simetría de las moléculas (grupos puntuales) están compuestos por ciertas transformaciones ortogonales del espacio tridimensional. Por ejemplo, el grupo de simetría de una molécula con forma de tetraedro regular (como la molécula CH4) consta de 24 elementos: rotaciones y reflexiones que transforman uno en otro los vértices del tetraedro.

4) Los grupos de simetría de los cristales (o grupos espaciales) que están compuestos por un número finito de transformaciones ortogonales, de desplazamientos (traslaciones) discretos y de los productos de estas transformaciones. Tal simetría es invariante solo a un cristal infinito o bien a un modelo de cristal con las denominadas condiciones de contorno cíclicas.

5) Grupos de permutaciones de n objetos, por ejemplo, de las coordenadas de n partículas idénticas. Es un grupo de orden $n!$.

6) El grupo de Lorentz L^+, formado por las transformaciones que describen el paso de un sistema de referencia a otro que se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme respecto al primero. Este grupo contiene al grupo de rotaciones $O^+(3)$ y depende de 6 parámetros: los 3 ángulos que determinan la orientación relativa de los ejes coordenados espaciales y las tres componentes de la velocidad del movimiento relativo. El requisito de la invariancia de las ecuaciones de movimiento respecto al grupo de Lorentz es una consecuencia de los postulados de la teoría de la relatividad.

Los grupos anteriores no agotan, todos los ejemplos de los grupos que tienen aplicaciones en la Física y se puede decir, que la importancia de la Teoría de Grupos, son sus *métodos*, que proporcionan la posibilidad de *clasificar* los estados de un sistema físico a partir de sus propiedades de simetría, sin resolver las propias ecuaciones de movimiento (Pietrásheñ & Trífonov, 2000).

Se presenta en la tabla 2.13. y 2.14., las configuraciones epistémicas CE4.4, CE4.3, CE4.2 y CE4.1, relacionadas con los problemas del período cuatro y que corresponde a a la definición abstracta de grupo y luego a algunas de las aplicaciones del objeto Grupo en contextos extramatemáticos.

Tabla 2.12: Configuración epistémica CE4.4

CE4.4 Los grupos en los contextos extramatemáticos	
CE4.6	Grupos en física
CE4.5	Clasificación de los grupos puntuales
CE4.4	Clasificación de los grupos cristalográficos

Tabla 2.13: Configuración epistémica CE4.3

CE4.3 Clasificación de los grupos finitos simples
CE4.2 Clasificación de las geometrías
CE4.1 Los grupos continuos finitos de transformaciones y las ecuaciones diferenciales parciales

2.3.38. Problema 5: Primera definición abstracta de Grupo (Cayley)

Las investigaciones sobre los grupos continuos de transformaciones, prepararon el camino para la definición abstracta de Grupo, ya que representaban una visión más amplia del concepto, donde se daban ejemplos de grupos infinitos y por tanto se extiende el campo de aplicación de la noción grupo, la cual estuvo presente en desarrollos de Teoría de Números, Geometría, Ecuaciones diferenciales parciales y Teoría de Funciones.

Problema: ¿Qué es un grupo?

Arthur Cayley dio el paso definitivo para la definición abstracta de Grupo en su artículo, "Sobre la Teoría de Grupos que dependen de la ecuación cúbica $\theta^n = 1$", en la cual se encuentra la primera definición abstracta de grupo que corresponde a:

> **"Un conjunto de símbolos $\{1, \alpha, \beta, \ldots\}$ todos ellos diferentes y tal que el producto de cualquiera dos de ellos (no importa en que orden) o el producto de ellos consigo mismo, pertenecen al conjunto; se dice ser un grupo"**

Como parte de la definición Cayley establece que el producto de estos símbolos, no tiene porque ser conmutativo, pero sí asociativo. Cayley presenta varios ejemplos en su artículo como:

1) Los cuaterniones con la suma

2) Las matrices invertibles con la multiplicación

3) Grupos de permutaciones con la operación compuesta

También, Cayley muestra que cualquier Grupo abstracto, es isomorfo a un grupo de permutaciones: este resultado se conoce como el *Teorema de Cayley;* introduce además, la tabla de multiplicación para un grupo y afirma que: "un grupo abstracto, queda determinado por ésta". En 1878, escribe 4 artículos sobre el tema, uno de ellos llamado "The theory of groups." Esta definición no llamó la atención de la comunidad matemática y se tuvo que esperar muchos años para que el concepto abstracto de Grupo, iniciara a permear a los matemáticos del siglo XX. En la tabla 2.15 se presenta la configuración epistémica, correspondiente a ésta práctica matemática.

Tabla 2.14: Configuración epistémica CE5

CE5 Definición abstracta de Grupo	
CE5.1	Cayley y la primera definición abstracta de Grupo

2.4. Significado global del objeto Grupo

El estudio histórico, epistemológico y fenomenológico de la evolución del objeto Grupo permite la reconstrucción del significado global del objeto matemático, a partir de la identificación de doce sistemas de prácticas, las cuales llevan asociadas cada una, una configuración epistémica, la cual constituyen un significado parcial del objeto de investigación: las configuraciones asociadas a los sistemas de prácticas se han denominado: **CE0.** Métodos empíricos para la solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media (siglo V-XV); **CE1.** Relación entre los coeficientes y las raíces de la ecuación algebraica de grado 2,3, 4 y el simbolismo algebraico en el renacimiento (siglo XV-XVI); **CE1.1.** La geometría y las ecuaciones algebraicas de grado 4 (Descartes); **CE1.2.** Las ecuaciones algebraicas y los problemas de teoría de números en aritmética modular (edad moderna); **CE2.** Búsqueda de métodos generales y la imposibilidad de solucionar por radicales la ecuación algebraica general de grado $n > 4$ (edad moderna, siglo XVII-XVIII); **CE3.** Clasificación de las ecuaciones algebraicas solubles por radicales y la Teoría de Galois (edad contemporánea, siglo XVIII-); **CE3.1.** Problemas en aritmética modular; **CE4.1** Los grupos finitos de transformaciones y las ecuaciones diferenciales parciales; **CE4.2.** La clasificación de las geometrías (euclidianas y no euclidianas; **CE4.3.** Clasificación de los grupos finitos simples; **CE4.4.** Los grupos en los contextos extramatemáticos (CE4.4, CE4.5, CE4.6) y en el nivel superior se encuentra la configuración **CE5.** Definición abstracta de Grupo.

En esta dirección, desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento Matemático, se entiende el significado de un concepto desde una perspectiva pragmatista, es decir, en términos de los sistemas de prácticas en las que dicho objeto interviene (significado sistémico): estos sistemas de prácticas están ligados a situaciones-problemas, de donde se deriva la posibilidad de distinguir los distintos significados cuando se abordan problemas diferentes (Pino-Fan, 2013, p. 129). Estas doce configuraciones epistémicas descritas pesar de que se consideran distintas, guardan algunas similitudes, de tal forma que se pueden relacionan como se ilustra en la figura 6.14. Se consideraron cronológicamente según las etapas de evolución del objeto Grupo definidas en la obra de Piaget & García (2008). Estos sistemas de prácticas/significados parciales, se pueden ver como “primarios” ya que, las configuraciones activadas en éstos sistemas (CE0, CE1, CE1.1, CE1.2, CE2, CE3, CE3.1, CE4.1, CE4.2, CE4.3, CE4.4 y CE5), tienen un carácter extensivo, es decir, resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas, con métodos y procedimientos particulares.

En un primer nivel, según la tabla 2.10, se encuentran las configuraciones epistémicas CE0.1,...,CE0.12 las cuales se generalizan por la configuración CE0, relacionada con los métodos empíricos de solución de las ecuaciones algebraicas de grado 1,2 y 3 en las civilizaciones antiguas y en la edad media. De igual forma, las configuraciones CE1.1,...,CE1.4 corresponden a situaciones-problemáticas que quedan generalizadas en la configuración CE1, que corresponde a la relación entre los coeficientes y las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado 2,3 y 4 y el problema del simbolismo algebraico. En la misma dirección, las configuraciones CE2.1, CE2.2 y CE2.3, se generalizan con la configuración CE2, que corresponde a la búsqueda de los métodos generales para solucionar las ecuaciones algebraicas y el problema de la imposibilidad de solucionar por el método de radicales la ecuación de grado cinco. En la tercera etapa de evolución en la emergencia del objeto grupo se encuentran las configuraciones CE3.2, CE3.3 y CE3.4 que se pueden generalizar con la configuración CE3, que corresponde a la clasificación de las ecuaciones algebraicas que son solubles por radicales y la Teoría de Galois y en el mismo nivel de la CE3 se encuentra la configuración CE3.1, que se relaciona con los problemas en aritmética modular de Gauss. En la cuarta etapa, se encuentran las configuraciones CE4.4, CE4.5 Y CE4.6 que se generalizan, con la configuración CE4.4 que corresponde a la aplicación de los grupos en contextos extra-matemáticos como los grupos cristalográficos, los grupos puntuales de las moléculas y los grupos en Física; en el mismo nivel se encuentra la configuración CE4.3 que corresponde a la clasificación de los grupos finitos simples, la CE4.2, que corresponde a la clasificación de las geometrías y la CE4.1, que corresponde a los grupos finitos de transformaciones y sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales y finalmente, en el nivel cinco se ubica la CE5, que corresponde a la definición abstracta o axiomática del objeto Grupo, que corresponde al significado de referencia dado al objeto Grupo y que es el significado que utilizan los libros de texto analizados y de igual forma, es el significado que pretenden los programas académicos de los estudiantes de formación matemática.

En la figura 2.6, se presenta el significado holístico del objeto Grupo.

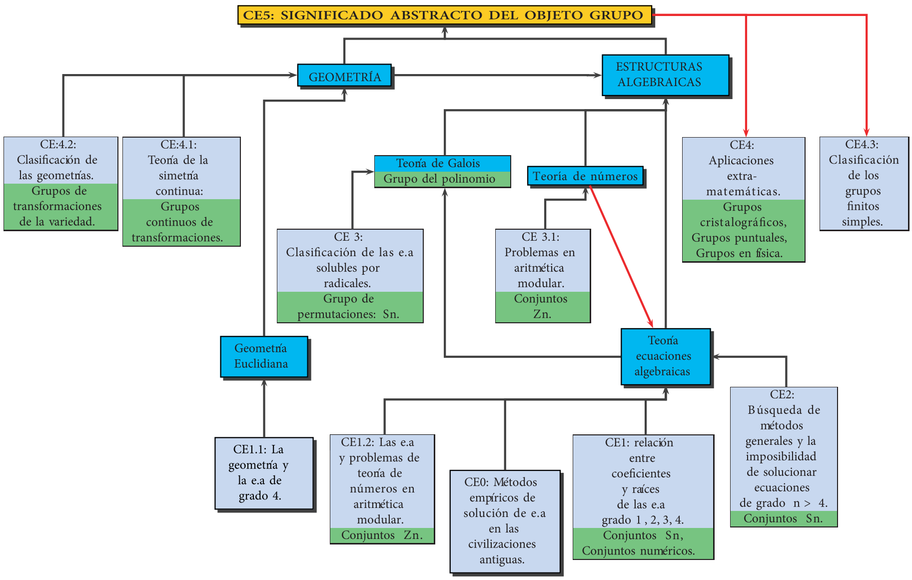


Figura 2.5: Significado global del objeto Grupo

2.5. Importancia del estudio fenomenológico sobre la estructura Grupo

Con el estudio de la emergencia del objeto grupo, se hace evidente en primer lugar la complejidad del objeto matemático y de igual forma, para la enseñanza del objeto Grupo, lo cual indica que se deben presentar situaciones-problemas de la matemática y fuera de la matemática, de modo que el estudiante logre el trabajo con conjuntos abstractos y pueda iniciar el estudio de los teoremas formales y de las aplicaciones propias de la Teoría de Grupos.

En esta dirección, algunos autores como Rivero (1999. p.15) establecen que, la geometría de los movimientos debe ocupar un lugar importante en el currículum de las Licenciaturas en Matemáticas (Matemáticas), ya que además de incentivar el interés por aspectos geométricos de la Matemática, es un punto de convergencia de varias ramas como la geometría euclidiana, el álgebra lineal y la teoría de grupos. Además, argumenta que, es deseable que los estudiantes de Educación Matemática (Licenciados) orientados a la docencia a nivel de bachillerato, tomen durante la carrera, un curso de este tipo. El autor hace referencia al estudio de los grupos cristalográficos, los grupos puntuales y los grupos en Física.

2.6. La estructura algebraica Grupo en los programas y libros de Texto

Se presenta el análisis a los programas de Teoría de Grupos, específicamente, el análisis de las unidades que se relacionan con el objeto Grupo, para determinar cuáles son los significados pretendidos por cada uno de los programas. De igual forma, se realiza el análisis de cuatro textos de teoría de Grupos, en las unidades relacionadas con el objeto para determinar el significado pretendido por cada uno de ellos. Así, el presente capítulo tiene el objetivo de presentar el tratamiento otorgado al objeto de investigación en el currículo y en libros de texto universitarios.

La información de esta sección, junto con los significados identificados para el objeto de investigación a partir de las prácticas matemáticas, en el estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, permiten establecer el significado de referencia institucional del objeto Grupo y compararlo con el significado Global, del objeto. El estudio de los significados se convierte en un insumo para efectuar en la puesta en marcha del diseño, validación e implementación de un instrumento para evaluar el conocimiento didáctico-matemático potenciado en los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto matemático.

2.6.1. La Teoría de Grupos en el currículo nacional

La Teoría de Grupos, es una asignatura de los planes universitarios, para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y para los Matemáticos. En esta dirección, en la presente investigación se pretende relacionar el conocimiento del contenido (según Shulman, 1986, 1987) de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo y el conocimiento didáctico - matemático, que se ha potenciado o desarrollado en relación al objeto matemático, en su proceso de formación universitaria.

En la resolución 5443 del 30 de Junio de 2010, del Ministerio de Educación Nacional se definen las características específicas de los programas de formación profesional en Educación, en el marco de las condiciones de calidad y se dictan otras disposiciones.

Los egresados de los programas de Licenciatura según la resolución 02041 del 3 de febrero de 2016, se desempeñan como profesionales en Educación básica y media (secundaria) y el Ministerio de Educación Nacional define los estándares relacionados con la Matemática para cada grado de educación básica y media; sin embargo, en las universidades Colombianas, se pueden vincular estos egresados del programa de Licenciatura en Matemáticas, como docentes universitarios. La resolución define el perfil de los egresados y plantea un conocimiento de los objetos matemáticos en cuanto a las distintas representaciones y establece que deben aprender de manera "autónoma" para utilizar los conocimientos y prácticas propias de su disciplina, además de fortalecer sus competencias a través de su ejercicio profesional. Estas competencias le deben permitir desarrollar actividades de enseñanza y aprendizaje fundamentadas en la articulación de conocimientos, conceptos y procedimientos de los saberes de la disciplina, de la didáctica, la historia, la epistemología y la pedagogía.

En este punto, las exigencias para los egresados de los programas de Licenciatura en Matemáticas, se podrían relacionar con la búsqueda de una potenciación o desarrollo de conocimientos didácticos y matemáticos necesarios para la enseñanza y en esta dirección, es pertinente analizar los conocimientos de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y específicamente aquellos relacionados con la dimensión epistémica, es decir, con los conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional para la enseñanza del objeto Grupo en la Educación Superior.

En la misma dirección, la resolución 2769 del 2003 del Ministerio de Educación Nacional, define las características específicas de calidad para los programas de pregrado en Ciencias Exactas y Naturales en el cual se ubica el programa de Matemáticas.

Se deduce de la normatividad, que a partir de la resolución 2769, el Ministerio de Educación Nacional ubica la Teoría de Grupos dentro del área disciplinar para los Matemáticos, fundamentada en la apropiación por parte del estudiante, de los contenidos y métodos de la disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la "epistemología" y en las prácticas científicas propias de su campo. En esta dirección, se realizó el estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo para identificar los significados que se fueron dando el objeto Grupo a lo largo de su desarrollo histórico; a partir de este estudio y del estudio de los significados pretendidos por los programas de Teoría de Grupos, se determinaran los significados pretendidos por la Institución (la universidad y los textos): estos estudios son necesarios para el diseño del instrumento que permite evaluar los conocimientos didácticos-matemáticos en relación con el objeto Grupo de los estudiantes de Formación Matemática.

2.6.2. La Teoría de Grupos en los programas de formación matemática

La asignatura de Teoría de Grupos se cursa en el quinto semestre (10 semestres) en el programa de Licenciatura en Matemáticas y pertenece al área disciplinar y de profundización; antes de cursar la asignatura, el estudiante ha tomado los cursos de: Fundamentos de Matemáticas, Geometría Analítica, Cálculo Diferencial, Estadística Descriptiva, Geometría Euclídea, Teoría de Conjuntos, Álgebra Lineal, Cálculo Integral, Sistemas Numéricos, Teoría de Probabilidad, Cálculo Multivariable, Distribución de Probabilidad, Física I, Topología Métrica, Física II e Inferencia Estadística. Según los contenidos mínimos del programa de Teoría de Grupos para los Licenciados, en la unidad 1 se define que el "significado institucional o de referencia" pretendido para el objeto matemático, corresponde a la configuración de Grupo como Grupo Abstracto, y se relaciona con un conjunto donde se define una operación binaria, que puede cumple los axiomas de: clausura de la operación definida, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de un elemento inverso en el conjunto, para cada elemento del conjunto. Otro significado que se pretende y se infiere de la unidad 5 del programa curricular, corresponde a la configuración de Grupo como "Conjunto de Permutaciones": grupos alternantes como subgrupos de los grupos de permutaciones S_n: en especial, se presentan los grupos Diédricos D_n que se estudian como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo S_n de permutaciones en un conjunto finito de elementos.

Del programa de Teoría de Grupos de Matemáticas, se establece que los significados pretendidos para el objeto Grupo según los contenidos mínimos, corresponden a: Grupo, en el contexto de *Grupo Abstracto* y Grupo como *Conjunto de permutaciones* de elementos de un conjunto finito. Sin embargo, al retomar la resolución 2769 de 2003 dada por el Ministerio de Educación Nacional, para el programa de Matemáticas, se ubica la Teoría de Grupos en el área disciplinaria "fundamentada en la apropiación por parte del estudiante de los contenidos y métodos de su disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la "epistemología" y en las prácticas científicas propias de su campo": queda en evidencia la epistemología, como rama de la filosofía interesada en el conocimiento científico, que plantea cuestiones fundamentales a las cuales el Matemático deberá dar respuesta: entre otras preguntas se plantean: ¿Cuáles son los orígenes del conocimiento científico? (¿Empírico? ¿Racional?), ¿Cuáles son los criterios de validez del conocimiento científico?, (¿Capacidad de predecir sucesos?, ¿Consistencia lógica?), ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico?, (¿Acumulación y continuidad? ¿Períodos de ciencia normal, revoluciones científicas y discontinuidad?, ¿Desplazamiento y refinamiento de programas científicos? Estas cuestiones se hacen en términos generales o se pueden hacer más específicas con respecto a algún dominio particular del conocimiento científico como las matemáticas y aún más específico como para el caso del objeto Grupo: cuestiones tales como ¿Cuáles son las fuentes del significado del conocimiento? y finalmente ¿Cómo se constituye el significado del objeto matemático? (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 829). Así, queda en evidencia, que el estudiante de Matemáticas debe tener un conocimiento del objeto Grupo en los contextos de su uso.

Respecto a los programas de Teoría de Grupos, se concluye que el estudio del objeto Grupo no se aborda desde su evolución histórica: en las asignaturas, se estudian los grupos S_n con sus propiedades pero como un ejemplo particular, en el contexto general de Grupo Abstracto; de igual forma, no se estudian los polinomios simétricos, ni la relación que tienen los grupos de permutaciones con la solución por el método de radicales para las ecuaciones de grado 2, 3, 4 y 5. De igual forma, no se aborda el Grupo de Galois, que fue precisamente la idea de Galois, para llegar a consolidar el concepto de grupo como Grupo de Permutaciones. Por su parte, los grupos $\mathbf{Z}_n$ se presentan, como ejemplos particulares de Grupos en su contexto de Grupo Abstracto y en ninguna parte del programa se trabaja la solubilidad de las ecuaciones algebraicas que precisamente, corresponde al origen histórico del objeto matemático.

2.6.3. La Teoría de Grupos en los libros de texto

Se realiza un análisis semiótico de cuatro libros de texto y se identifican los significados pretendidos por ellos: se analizaron estos libros de textos, al tener presente que el libro representa un recurso potente para el profesor al momento de organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje (Remillard, 2000 citado en Vásquez, 2014). Por esta razón, se pretende dar respuesta a algunos de los siguientes interrogantes: ¿Cuáles son los objetos matemáticos vinculados con el objeto Grupo?, ¿Cómo se introduce su estudio?, ¿Se tiene en cuenta su desarrollo histórico: específicamente, se aborda el estudio desde los distintos significados dados hasta llegar a la construcción del objeto? Para esto, se analizan los textos, en las unidades relacionadas con el objeto Grupo: estos textos, son los recursos de mayor uso para el proceso de instrucción en los programas de formación matemática (ver, tabla 2.16).

Tabla 2.15: Libros de texto de Teoría de Grupos

Título	Autor	Editorial	Edición
Contemporary Abstract Algebra	Joseph A. Gallian	Houghton Mifflin Company	2a ed. 2006
Abstract Algebra	I.N. Herstein	John Wiley & Sons, INC.	3a ed. 1999
Cuadernos de Álgebra No. 1 Grupos	Oswaldo Lezama	Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá	2012
Teoría de Grupos	José F. Caicedo C.	Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá	2004

Se presenta el análisis de los objetos matemáticos presentes en los libros de texto: en primer lugar, se determinan los contenidos relacionados con el objeto Grupo y luego se realiza el estudio de los objetos matemáticos primarios, presentes en las unidades relacionadas con el objeto y sus significados. Para este estudio se utiliza la técnica del análisis semiótico de textos (Godino, 2002).

En la tablas 2.17. y 2.18. se presentan las entidades matemáticas (unidades elementales) presentes en la Parte 2 del texto de Gallian (2006) que corresponde a uno de los textos de mayor uso en los programas de Licenciatura en Matemática; el estudio se realiza en los capítulos 1-2 que son los que se relacionan con el estudio de los significados institucionales (texto) del objeto Grupo; para esto, se hace uso de la técnica analítica del análisis semiótico, propuesta desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática.

Tabla 2.16: Entidades matemáticas (unidades elementales), capítulo 1, del texto Contemporary Abstract Algebra.

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Conjunto de Simetrías del cuadrado	Rotaciones, Reflexiones, identidad, inverso	
Técnicas	*Notaciones*	*Propiedades*
Se considera la rotación de 90 grados y la de 450 como igual.	R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'	Si $A,B \in D_4$ entonces también AB.
	Rotación de 0 grados, de 90 grados	R_{90} y R_{270} son inversos cada uno del otro y H es su propio inverso.
Se puede pensar que la región cuadrada es transparente (un vidrio), con las esquinas marcadas: en un lado con color azul, negro, rosa y verde. Esto hace fácil distinguir entre movimientos que tienen diferentes efectos.		Si $A \in D_4$ entonces $AR_0 = R_0A$ y así combinando cada elemento. Un elemento R_0 con esta propiedad se llama una identidad y cada grupo debe tener una.
	H reflexión a través del eje horizontal, V reflexión a través del eje vertical, D reflexión por la diagonal principal, D' reflexión por la otra diagonal.	Vemos que para cada elemento $A \in D_4$ existe exactamente un elemento $B \in D_4$ tal que $AB = BA = R_0$. En este caso B se dice que es el inverso de A y viceversa.
	Tabla de operaciones para estos 8 elementos (p. 33)	$HD \neq DH$ pero $R90R180 = R180R90$
		Si se tiene que $AB = BA$ para todo A,B se dice que el grupo es conmutativo o abeliano de otro modo, se dice que el grupo no es abeliano.
		D_4 es un grupo.
		Argumentos
		Se quiere describir las posibles relaciones entre la posición inicial del cuadrado y su posición final, en términos de los movimientos.
		La clausura es un requerimiento para que un sistema matemático sea un grupo.

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
		En un grupo AB puede o no puede ser el mismo que BA.
		Se ha ilustrado que D_4 posee tres o cuatro condiciones que definen un grupo: clausura, existencia de una identidad y existencia de inversos.
		La condición restante requerida para un grupo es la asociatividad; esto es, $(ab)c = a(bc)$ para todo a,b,c del conjunto: se debería chequear las $8^3 = 512$ posibilidades para la elección de a,b,c en la práctica, esto rara vez se hace.
		Los 8 movimientos son funciones y la operación de composición de funciones es asociativa, así, no debemos revisar las ecuaciones.
Los grupos Dihedrales: el grupo D_n es el "grupo dihedral" de orden $2n$.	Grupo de simetrías, polígono regular, orden del grupo	El grupo dihedral de orden $2n$ es a menudo llamado el "grupo de simetrías del nágono regular ".
	Arte, naturaleza, Químicos, Mineralogistas, cálculos orbitales, niveles de energía, átomos, moléculas, vibración molecular, molécula piramidal	
		El término simetría, es de la palabra griega symetros, que significa de igual medida.
		El grupo de simetrías de una figura plana, es el conjunto de todas las simetrías de la figura. Simetrías en tres dimensiones se definen de manera análoga.
	Rotación, traslación	Una rotación de un plano alrededor de un punto en el plano es una simetría del plano.
		Una traslación de un plano o del espacio tridimensional es una simetría.
		Una reflexión a través de una línea L es que la función que deja a todos los puntos de L fijos y toma cualquier punto q que no está en L, hasta el punto q' de modo que L es la mediatriz del segmento que une q y q'.

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
		Una reflexión a través de un plano en tres dimensiones se define de manera análoga.
		La restricción de una rotación de 180 grados, alrededor de una línea L en tres dimensiones a un plano que contiene L es una reflexión, a través de L en el plano.
		En los grupos dihédricos, los movimientos que describimos como voltear sobre ejes de simetría en tres dimensiones (por ejemplo H,V,D,D') son reflexiones a través de lineas en dos dimensiones.
	Grupos cíclicos	Algunos objetos y figuras tienen simetría rotacional pero no simetría de reflexión. Un grupo de simetría, consiste de las simetrías de rotación 0_o, $360^o/n$, $2(360^o)/n,\ldots,(n-1)360^o/n$: si no hay otras simetrías, el grupo se llama un grupo de rotación cíclica de orden n y se denota por $\langle R_{360/n}\rangle$.
El grupo de simetría de una molécula piramidal tal como el amoníaco (NH_3) tiene como grupo de simetría a D_3.		
Mineralogístas, determinan la estructura interna de los cristales por el estudio 2dimensional de las radiografías de la composición atómica de los cristales.		
Es matemáticamente imposible para un cristal poseer un patrón de simetría D_n con $n = 5$ o $n > 6$		
En los ejercicios del capítulo (p. 37) se presentan 23 situaciones-problemas, entre ellas:		
Con pinturas y palabras describe cada simetría de D_3		

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Escriba una tabla Cayley completa de D_3		
¿Es D_3 un grupo abeliano?		
Describa con pinturas y palabras los elementos de D_5		
Para $n \geq 3$ describa los elementos de D_n		
	D_n	
		Argumentos
		El análisis realizado para un cuadrado, puede similarmente darse para un triángulo o un pentágono regular o ciertamente, cada n–ágono regular ($n \geq 3$).
		Los grupos dihedrales aparecen con frecuencia en el arte y en la naturaleza. Los logos corporativos son recursos ricos de grupos dihedrales de simetrías; los químicos clasifican moléculas de acuerdo a su simetría: más aún, consideraciones simétricas se aplican en cálculos orbitales, en la determinación de los niveles de energía de átomos y moléculas, y en el estudio de las vibraciones moleculares.

Tabla 2.17: Entidades matemáticas (unidades elementales), capítulo 2, texto Contemporary Abstract Algebra

Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
Dado un conjunto y una operación binaria, determinar si el conjunto define un Grupo	Conjunto, Operación binaria, Grupo, Función, par ordenado	Sea G un conjunto. Una operación binaria en G es una función que asigna a cada par ordenado de elementos de G un elemento de G.

	Conjuntos finitos, fórmula	Clausura
	Matrices con entradas en $\mathbf{Z}_n$	La operación binaria de adición módulo n y multiplicación módulo n en el conjunto $\{0,1,2,...,n-1\}$, que se denota por $\mathbf{Z}_n$ juega un papel extremadamente importante en álgebra abstracta.
Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
	Identidad, el inverso, propiedad asociativa	Sea G un conjunto no vacío, junto con una operación binaria (usualmente llamada multiplicación) que asigna a cada par ordenado (a,b) de elementos de G un elemento en G denotado por ab. Nosotros decimos que G es un grupo bajo esta operación si se satisfacen las siguientes propiedades: 1. Asociativa. La operación es asociativa; esto es, $(ab)c = a(bc)$ para todo $a,b,c \in G$. 2. Identidad. Existe un elemento e (llamado identidad) en G tal que $ae = ea = a$ para todo $a \in G$. 3. Inversos. Para cada elemento $a \in G$ existe un elemento $b \in G$ (llamado un inverso de a) tal que $ab = ba = e$.
	Grupo Abeliano	Un grupo es no Abeliano si existe algún par de elementos a,b tal que $ab \neq ba$.

El conjunto $\{1,-1, i, -i\}$ de números complejos es un grupo bajo la multiplicación de complejos. Nótese que -1 es su propio inverso, mientras que el inverso de i es $-i$ y viceversa.	Inverso, números complejos, multiplicación de complejos	
El conjunto $\mathbf{Q}^+$ de racionales positivos es un grupo bajo la multiplicación ordinaria. El inverso de cada a es $\frac{1}{a}$	Racionales positivos, multiplicación ordinaria.	
El conjunto S de números irracionales positivos junto con el 1 bajo la multiplicación satisface las tres propiedades dadas en la definición de grupo pero no es grupo, ya que $\sqrt{2}\,\sqrt{2} = 2$ así, S no es cerrado bajo la multiplicación.	Números irracionales positivos, propiedades de la definición de grupo.	
El conjunto de todas las matrices 2×2 con entradas en los reales es un grupo bajo la adición componente a componente	Matrices con entradas reales	Un arreglo rectangular de la forma: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ se llama una matriz 2×2.
Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*
El conjunto $\mathbf{Z}_n = \{0,1,..., n - 1\}$ para $n \geq 1$ es un grupo bajo la adición módulo n. Para cada $j > 0$ en $\mathbf{Z}_n$ el inverso de j es $n - j$.	Adición módulo n	El grupo $\mathbf{Z}_n$ usualmente se denomina "el grupo de los enteros módulo n ".
El conjunto $\mathbf{R}^+$ de números reales distintos del cero es un grupo bajo la multiplicación ordinaria. La identidad es 1. El inverso de a es $\frac{1}{a}$.	Números reales distintos de cero	
El conjunto de matrices con entradas reales y determinante no cero es un grupo no abeliano bajo la multiplicación de matrices		
$U(n)$ es un grupo bajo la multiplicación módulo n	$U(n)$, primos relativos	Se define $U(n)$ como el conjunto de enteros positivos menores que n y primos relativos con n

Para todo $n \geq 1$, el conjunto de raíces complejas de la unidad es grupo bajo la multiplicación	Raíces complejas de la unidad	
El conjunto $\mathbf{R}^n = \{(a_1, a_2,..., a_n) \mid a_1,a_2,...,a_n \in \mathbf{R}\}$ es grupo bajo la adición componente a componente		
$T_{a,b} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ es grupo bajo la composición de funciones. Los elementos de G se llaman traslaciones	Composición de funciones, traslaciones	Para un punto fijo $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ se define $T_{a,b} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ por $(x,y) \rightarrow (x+a, y+b)$.
El conjunto de matrices 2×2 con determinante 1, con entradas en $\mathbf{Q}$ (racionales), $\mathbf{R}$ (reales), $\mathbf{C}$ (complejos), o $\mathbf{Z}_p$ (p-primo) no son grupos Abelianos bajo la multiplicación de matrices	p-primo, Grupo lineal especial $SL(2,F)$	
El conjunto de matrices 2×2 con determinante $\neq 0$, con entradas en $\mathbf{Q}$ (racionales), $\mathbf{R}$ (reales), $\mathbf{C}$ (complejos), o $\mathbf{Z}_p$ (p-primo) es un grupo no Abeliano bajo la multiplicación de matrices		
Praxis	Lenguaje	Teoría
Situaciones	*Términos y expresiones*	*Conceptos*

El conjunto de todas las simetrías de un modelo ornamental infinito, en el que las puntas de las flechas están espaciadas uniformemente; una unidad de separación a lo largo de una línea es un grupo abeliano bajo la composición		
En los ejercicios del capítulo 2 (p. 53) se presentan 37 situaciones-problemas relacionados con las propiedades que debe cumplir un conjunto para ser grupo; además, continua proponiendo 4 ejercicios para desarrollar computacionalmente.		
Se concluye el capítulo con una nota histórica, sobre la no conmutatividad de la multiplicación de matrices		
Asegúrese de verificar la clausura para probar que un conjunto es un grupo.	Note que si a es el inverso de b,entonces b es el inverso de a	Si el grupo tiene la propiedad que $ab = ba$ para cada par de elementos a,b decimos que el grupo es Abeliano.
La mejor manera de captar la carne de un teorema es ver lo que dice en casos específicos	$-a$ el inverso de a	El conjunto de los enteros bajo la multiplicación ordinaria no es grupo.
Para desarrollar un mejor entendimiento de los siguientes ejemplos, el lector debe suministrar los detalles que faltan.	*det* A, $U(n)$, $\mathbf{Z}_p$	El conjunto $\{0,1,\ldots,n-1\}$ es un grupo bajo la multiplicación módulo n si y solo si n es primo.
		En un grupo G, existe solo un elemento identidad
		En un grupo G, las leyes de cancelación a derecha y a izquierda se tienen; esto es, $ba = ca$ implica $b = c$ y $ab = ac$ implica $b = c$.
		Para cada elemento a en un grupo G, existe un único elemento b en G tal que $ab = ba = e$.
		El conjunto $\{0,1,2,3\}$ no es grupo bajo la multiplicación módulo 4

		Argumentos
		En otras palabras, entonces, un grupo es un conjunto con una operación asociativa tal que existe una identidad, cada elemento tiene un inverso y cada par de elementos puede ser combinado sin salirse del conjunto.
		Ahora que tenemos la definición formal de un grupo, nuestro primer trabajo es construir un buen número de ejemplos. Esos ejemplos serán usados a través del texto, para ilustrar los teoremas.
		El conjunto de los enteros bajo la multiplicación ordinaria no es grupo: como el número 1 es la identidad, la propiedad 3 falla, por ejemplo, no existe un entero b tal que $5b = 1$.
		Los números reales, las matrices 2×2 con entradas reales, y los enteros módulo n son todos grupos bajo la adición apropiada. ¿Y con la multiplicación? en cada caso, la existencia de algunos elementos que no tienen inverso hacen que el conjunto con la multiplicación usual no sea grupo.
		En su libro clásico “Lehrbuch der Algebra” publicado en 1899, Heinrich Weber, da un tratamiento extensivo de los grupos $U(n)$ y los describe como unos de los más importantes ejemplos de los grupos Abelianos finitos.
		El conjunto de los enteros bajo la sustracción, no es grupo ya que, la operación no es asociativa.

Como conclusión al análisis del texto de Gallian (2006) y dando respuesta a las preguntas planteadas para este análisis de textos, se presenta en la parte 1 del texto, Capítulo 0 o Preliminares, la lección denominada: *Aritmética modular* a partir de la cual, se introducen los conjuntos $\mathbf{Z}_n$ con la operación binaria de adición módulo n. Es decir, se introduce en primer lugar, el objeto Grupo como un conjunto especial, donde se ha definido una operación que cumple ciertas propiedades algebraicas. En esta lección se observa que uno de los significados dados al objeto matemático corresponde al contexto de uso en *Aritmética Modular*.

En el capítulo 1, la parte 2 se titula: *Introducción a los Grupos* y en él se define el objeto matemático, como un conjunto de movimientos denominados “simetrías del cuadrado” y posteriormente, se pasa al estudio de los grupos denominados: *Grupos dihedrales;* en este capítulo se trabaja el objeto Grupo en su *significado como Conjunto de Permutaciones.* Se continúa con el capítulo 2, denominado: Grupos: en este capítulo, se trabaja el objeto Grupo en su significado *global*, esto es, el significado de Grupo, como *Grupo Abstracto*: un conjunto donde se ha definido una operación binaria interna que cumple las propiedades o axiomas de: asociativa, existencia de un elemento identidad en el conjunto y existencia de un elemento inverso para cada elemento del conjunto, en el conjunto. Continuando con el análisis, el capítulo 3 se denomina: Grupos finitos y Subgrupos. En este capítulo se presentan unos test para determinar cuando un subconjunto de un Grupo es el mismo Grupo. Se infiere de lo anterior, que el texto de igual forma introduce el objeto Grupo desde el estudio de los “Grupos de simetrías de los polígonos regulares” es decir, desde su significado como conjunto de permutaciones, que corresponde históricamente a uno de los primeros significados dados al objeto Grupo.

El capítulo 4 del texto de Gallian (2006), denominado: *Grupos cíclicos* presenta ciertas propiedades que tienen los grupos y el capítulo 5, denominado: *Grupos de permutaciones,* inicia con la definición del grupo de permutaciones, para continuar con las notaciones que se le pueden dar a una permutación y se trabajan algunas aplicaciones de estos grupos. Los grupos de permutaciones se trabajan como ejemplos particulares del objeto matemático: aquí, se estudian los grupos de simetrías D_n de los polígonos regulares. Finalmente, el texto sigue con el estudio de casos particulares de Grupos y de las relaciones que se definen entre ellos denominadas Homomorfismos e isomorfismos.

En la tabla 2.17., en el análisis del capítulo 1, se observa que de los seis objetos matemáticos presentes para el análisis del mismo, sobresalen las *propiedades* que se relacionan con el conjunto de simetrías del cuadrado, D_4, especialmente, la propiedad que tiene $(D_4, \circ)$ con la operación de composición de funciones de ser grupo. De igual forma, sobresalen los *argumentos* relacionados con el grupo D_4 como por ejemplo, que en general, los elementos no cumplen la propiedad $AB = B A$. En este capítulo, se continua con el análisis de la *situación:* D_n es el grupo dihedral de orden n, y se observa que entre los objetos matemáticos, sobresalen los *conceptos* relacionados con el conjunto D_n como: la definición de rotación, traslación y reflexión; también, se hace una introducción a la propiedad del grupo de ser cíclico y se continua con el estudio del conjunto de rotaciones del grupo D_4. En este capítulo se presentan algunas *situaciones* extra-matemáticas que se relacionan con los grupos D_4 como: El grupo de simetrías de una molécula piramidal y el que determina la estructura interna de un cristal.

Como conclusión al tratamiento del objeto Grupo en el texto de Gallian (2006), se observa que al final del capítulo, se presentan suficientes *situaciones-problemáticas* intramatemáticas y extra-matemáticas, para contextualizar, reforzar y aplicar las propiedades, notaciones, conceptos, técnicas y argumentos en la búsqueda de una mejor comprensión del objeto Grupo.

En el capítulo 2, de la segunda parte y según la tabla 2.18., se observa que entre los objetos matemáticos presentes, sobresalen los *conceptos,* tales como: el de operación binaria, la adición módulo n y la definición abstracta del objeto Grupo. De igual forma, sobresalen las *situaciones-problemas* relacionadas con los conjuntos numéricos (naturales, enteros, racionales, complejos, irracionales); las matrices de tamaño 2×2 con entradas reales; las operaciones aritméticas módulo n que definen los conjuntos $\mathbf{Z}_n$; el conjunto de raíces de la unidad para $n = 4$; el conjunto de enteros primos relativos con n y menores que n denominado el conjunto $U(n)$; las matrices con determinante distinto de cero; de igual forma, matrices con determinante 1. Y se finaliza el capítulo con la situación extra-matemática del conjunto infinito de simetrías de un modelo ornamental. De igual forma, al terminar el capítulo se proponen un gran número de *situaciones-problemáticas* para contextualizar los contenidos matemáticos del capítulo.

En la misma dirección, del análisis a los objetos matemáticos presentes en el texto de **Herstein,** (1999) se da respuesta a las preguntas planteadas para el análisis de textos. Se observa que en el capítulo 1, se presentan las lecciones bajo el título de: Cosas familiares y menos familiares, a partir de las cuales se presentan *situaciones-problemas* orientadas a verificar propiedades de la operación definida en el conjunto dado. Se continúa, con la lección denominada: *Teoría de Conjuntos,* donde se presentan y definen las operaciones entre conjuntos y algunas de las propiedades de estas operaciones y al final de la lección, se proponen *situaciones-problemáticas* relacionadas con los conjuntos; estas situaciones, se presentan como problemas fáciles, problemas de nivel medio y problemas duros. El capítulo sigue con la lección: *Mapeos-funciones*; donde se definen funciones entre conjuntos, se define función 1-1, sobreyectiva y función biyectiva y se presentan propiedades relacionadas con las funciones donde se proponen *situaciones-problemáticas* para contextualizar la lección.

En la siguiente lección se presenta: el conjunto $A(S)$ de funciones 1-1 del conjunto S en el mismo, donde el conjunto S consta de un número finito de elementos. En la introducción de la lección, se *argumenta*, que el conjunto $A(S)$ tiene el nombre del "Grupo de simetrías de grado n" cuando el conjunto S tiene n elementos y a menudo se denota por S_n: a los elementos del conjunto o del grupo se les denomina *permutaciones* del conjunto S. Se argumenta que, estamos interesados en la estructura del grupo S_n: en la lección se dan las propiedades que cumplen las funciones con la operación compuesta, entre ellas se verifica la clausura, la asociatividad, la existencia del elemento identidad y la existencia del elemento inverso, para cada función. Se puede establecer, que se introduce el objeto grupo a partir del estudio del conjunto $A(S)$ con S un conjunto finito, que para el caso se nota como el grupo S_n o grupo de Simetrías de grado n.

Se continúa con la *lección: Los enteros,* donde se dan propiedades como: el principio del buen orden, el algoritmo de Euclides, la definición de divisibilidad y algunas de sus propiedades; definición de máximo común divisor y sus propiedades; definición de números primos relativos y algunas propiedades; número primo y propiedades. De igual forma, al final de cada lección se presentan *situaciones problemáticas* que permiten contextualizar los objetos matemáticos presentes en la lección. La siguiente lección se denomina *Inducción Matemática* y en ella se presenta la proposición del principio de inducción matemática; se dan algunos ejemplos de la aplicación del principio y se termina la lección con el planteamiento de situaciones problemáticas. El capítulo finaliza, con el estudio de los números complejos, donde se define la operación + de números complejos y se dan propiedades; finalmente, se presenta la proposición de la desigualdad triangular para finalizar la lección con situaciones-problemáticas.

El capítulo 2, del texto de Herstein (1999) se titula: *Grupos* e inicia con la *argumentación,* que el conjunto $A(S)$ de funciones 1-1 del conjunto S en sí mismo cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad, existencia de inverso; continúa, con el concepto o definición del objeto matemático, como *Grupo Abstracto;* es decir, como un conjunto donde se ha definido una operación binaria interna; operación que cumple las propiedades o axiomas de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento unidad en el conjunto y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto, en el conjunto. Se sigue, con el análisis, del capítulo 3, que se denomina: Grupos finitos; Subgrupos. En este capítulo se presentan tests para determinar cuando un subconjunto de un Grupo es el mismo Grupo.

Se determina que de los seis objetos matemáticos presentes en la unidad 1 del Capítulo 2, titulada: *Definiciones y ejemplos de Grupos*, sobresalen los *conceptos o definiciones* relacionados con el conjunto $A(S)$, especialmente, las propiedades que hacen que el conjunto, con la operación de composición de funciones sea un grupo en su *significado Global*. Estas funciones 1-1 en un conjunto finito definen un *grupo de permutaciones,* como se *argumenta* en el capítulo inicial. Se identifica el significado de grupo en este segundo capítulo, como *Conjunto de permutaciones,* con la *situación - problem*ática planteada: el conjunto $A(S)$ cumple cuatro propiedades algebraicas. La unidad 1, inicia con la lección 1: *Ejemplos de Grupos,* donde sobresalen como objetos matemáticos las *situaciones-problemáticas* tales como: el conjunto de los enteros con la operación adición que cumplen los cuatro axiomas de grupo; el conjunto de los racionales con la adición de números racionales es grupo; el conjunto de los racionales no cero con la operación multiplicación ordinaria de racionales forma un grupo con relación a ese producto; los reales positivos con el producto ordinario de números reales es grupo; el conjunto $E(n)$ de números complejos de la forma θ_n^i donde $i = 0, 1, 2, \ldots,\ n - 1$ y $\theta_n = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, denominado el conjunto de raíces de la unidad, es grupo bajo la multiplicación ordinaria de potencias de θ_n como número complejo; el conjunto de funciones de los reales en los reales $T_{a,b}$ con la operación compuesta es grupo; el plano *S* donde se define un conjunto especial con la operación compuesta de funciones.

La lección 2, del capítulo 2, se titula: *No ejemplos* y en ella sobresale el objeto matemático de las *situaciones - problemáticas* donde se presentan conjuntos, con operaciones que no determinan una estructura de grupo, tales como: el conjunto de los números enteros y el producto; el conjunto de los números reales y el producto $a * b = a^2b$ y se finaliza la lección, con la situación problemática del conjunto de los enteros positivos con el producto usual de enteros $a * b = ab$ que no define un grupo, ya que, no se cumple la propiedad de los inversos. De igual forma, en esta lección sobresalen los *argumentos* entre ellos: "que históricamente, al sujeto le tomó algún tiempo reconocer que las cuatro propiedades algebraicas jugaban un papel clave en la matemática" y de igual forma, se termina la lección con el planteamiento de un gran número de situaciones problemáticas.

El texto de Herstein (1999) continúa con la Unidad 2, denominada: *Algunas propiedades simples;* en esta unidad sobresalen las *propiedades* que se deducen de los axiomas de grupo y los argumentos relacionados con los conjuntos numéricos y algunas de las operaciones usuales que se definen en ellos; se termina la unidad de igual forma, con el planteamiento de un gran número de situaciones problemáticas propias de la matemática. La unidad 3 se denomina: *Subgrupos* y no se analiza, ya que, en ella se presentan propiedades de los subconjuntos de los conjuntos mencionados, que en algunos casos también son grupos pero, no es pertinente para el estudio de los significados del objeto matemático.

En la misma dirección, del análisis a los objetos matemáticos presentes en el texto de **Lezama,** (2012), y para dar respuesta a las preguntas planteadas para el análisis de textos, se tiene que: el Capítulo 1 se titula: *Grupos y subgrupos* e inicia con el *concepto* de operación binaria interna (ley de composición interna) en un conjunto *G* donde se presentan 4 *situaciones problemáticas* para contextualizar el concepto: se define la función suma en los números naturales, la función Δ en los naturales, la función de intersección en el conjunto de partes de un conjunto y la función $*$ en el conjunto de los números naturales, para finalizar con la función ∇ en el conjunto de los números enteros. Se continúa con el *concepto* de propiedad asociativa de una operación $*$ en un conjunto *G* y se dan *propiedades* de la potenciación para un elemento $a \in G$; se sigue, con el *concepto* de semigrupo (que corresponde a una estructura algebraica) y se presentan las *situaciones problemáticas*: el conjunto de los naturales con la operación adición; el conjunto $Apl(X)$ de aplicaciones (funciones) del conjunto *X* en sí mismo, con el conjunto X no vacío y la operación compuesta; se sigue con el *concepto* de propiedad conmutativa y se presenta una proposición relacionada con esta propiedad. Se sigue, con el *concepto* de elemento identidad y se presenta la *situación problemática:* del conjunto de los enteros con la adición que constituyen un semigrupo; se pasa a dar la *proposición* de la unicidad del elemento identidad y se define una nueva estructura algebraica: "El Monoide" (semigrupo con elemento identidad) y la propiedad de ser invertible; se finaliza el capítulo, con la *proposición* de la unicidad del elemento inverso.

De lo anterior, se infiere que el texto de Lezama (2012), introduce el objeto Grupo, a partir de las *propiedades* que puede tener la operación definida en un conjunto; esto es, inicia con el estudio de la estructura de semigrupo (cuando la operación $*$ es asociativa) y al poseer la operación $*$ más propiedades, la *estructura* se va haciendo más rica (Lezama, 2012) y las posibilidades de operar en G se hacen mayores); así, si además, en el semigrupo existe un elemento identidad respecto a la operación $*$ entonces, el conjunto adquiere la estructura de Monoide y a partir del Monoide en la lección 2, se presenta el *concepto* de Grupo en su *significado de Grupo Abstracto*. También se observa que se introduce el objeto grupo a partir del conjunto de $Apl(X)$ con la operación compuesta como una *situación problemática* con estructura de semigrupo, de donde se establece que se introduce el significado de grupo, como *Grupo de Permutaciones* (funciones biyectivas).

La lección 2 del capítulo se denomina: *Grupos* y en ella predominan los *conceptos o definiciones*, entre ellos: el concepto de Grupo, grupo Abeliano y además, las *situacionesproblemáticas*: el conjunto de los enteros con la adición y con el 0 forman un grupo; de igual forma, el conjunto de los racionales, los reales y los complejos con la adición. En estos conjuntos numéricos se plantea nuevamente la *situación-problemática* para el caso de la operación multiplicación usual en cada conjunto y se pasa a dar contraejemplos de conjuntos y operaciones que no definen estructura de grupo. Se continúa con el planteamiento de la *situación problemática* de los elementos invertibles del monoide $(G,\cdot,1)$ que determinan precisamente el "grupo de elementos invertibles", dando las *notaciones* de estos nuevos grupos en los conjuntos numéricos. Sigue la lección, con la *definición* que establece que en el conjunto $Apl(X)$ de aplicaciones del conjunto X en sí mismo, existen inversos solo en el caso que las funciones sean biyectivas. Al conjunto de funciones biyectivas se les da el nombre de "Permutaciones"; se sigue con la *situación problemática* del conjunto de funciones de los naturales en los reales, que recibe el nombre del conjunto de "sucesiones reales" y definen de igual forma, una estructura de Grupo con la operación de composición de funciones. Finalmente, se introducen dos *situaciones problemáticas* de especial interés en matemáticas y familiares para los estudiantes que cursaron Álgebra Lineal: el conjunto de las matrices con la adición de matrices y el conjunto de polinomios con entradas reales y con la operación de adición: conjuntos que también tienen la estructura de Grupo. De igual forma, en el capítulo se presentan las *propiedades* de la unicidad del elemento identidad y del elemento inverso. Al final del capítulo se presentan situaciones-problemáticas (22) para contextualizar los objetos matemáticos presentados en el capítulo 1.

En el último texo, del análisis a los objetos matemáticos presentes en **Caicedo,** (2003) y para dar respuesta a las preguntas planteadas en el análisis, se tiene que el capítulo 1 se titula: *Grupos* e inicia con el *concepto* de "ley de composición interna" (operación binaria) en el conjunto E; a continuación, se presentan 5 *situaciones problemáticas* para contextualizar el concepto: se define la función suma en los números naturales, la función producto en los naturales, la función suma en los números enteros y la función producto en el conjunto de los números reales positivos, además, en cada una de estas situaciones planteadas, se identifica el elemento identidad en el conjunto con la operación definida en él, el elemento inverso y la propiedad asociativa sin enunciar cada propiedad formalmente. De igual forma, se introduce el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas del conjunto S en sí mismo, con el conjunto S no vacío y la operación compuesta para los elementos del conjunto y se *argumentan* las propiedades de clausura, asociatividad, elemento identidad y existencia de inversos sin enunciarlas formalmente.

De lo anterior, se infiere, que el texto de Caicedo (2003), introduce el objeto Grupo a partir de las *propiedades* que puede tener la operación definida en los conjuntos numéricos: especialmente, se estudia el conjunto de los enteros con la suma y el conjunto de los reales positivos con el producto, verificando las cuatro propiedades o axiomas de grupo. Aquí, se introduce el objeto Grupo en su *significado abstracto* como un conjunto con una operación que cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto. De igual forma, se puede establecer que se introduce el objeto Grupo desde su significado como *Conjunto de Permutaciones* al definir el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas con la operación compuesta de funciones. En esta lección 1 predominan las *proposiciones* que cumplen los conjuntos mencionados anteriormente.

La lección 2 del capítulo se denomina: *Definición de Grupo* y en ella predominan los *conceptos o definiciones*, entre ellos: el concepto de Grupo y grupo Abeliano. De igual forma, se presentan 8 *situaciones-problemáticas*: el conjunto de funciones biyectivas con la operación compuesta es un grupo; el conjunto partes de un conjunto con la operación de diferencia simétrica entre conjuntos es un grupo; el conjunto de los números reales sin el cero, con la operación de producto usual de números reales es un grupo; de igual forma, los números complejos sin el cero con el producto usual de complejos es un grupo; el conjunto de los números enteros con la adición usual de enteros es un grupo: el intervalo abierto de números reales $G = (-1,1)$ con la operación $*$ es un grupo; el conjunto $G = \{-1,1\}$ con la operación $\cdot$ es un grupo; el conjunto $G = \{-1,1,i,-1\}$ de números complejos con el producto usual de números complejos es un grupo; esta *situación-problemática* la identifica con el conjunto de raíces cuartas de la unidad y con la operación del producto de estas raíces que de igual forma determinan un grupo. En la siguiente *situación-problemática* define el conjunto de rectas que no son paralelas, con pendiente diferente de cero y con la operación compuesta de funciones y establece que ellas determinan un grupo, de igual forma, para esta situación define que cada recta se puede ver como la pareja (a,b) donde a es la pendiente distinta de cero y b es el corte con el eje y y define un producto entre parejas que determinan un grupo. Se sigue con la lección 3 denominada: *Primeros teoremas,* donde se presentan propiedades como: la unicidad del elemento neutro, la unicidad del inverso de un elemento, el cumplimiento de las leyes cancelativas a izquierda y a derecha y en general, propiedades que se cumplen en un grupo. De igual forma, en el texto, al final del capítulo presenta 13 problemas para contextualizar los objetos matemáticos dados en cada una de las lecciones. El capítulo 2 del texto se relaciona con los subgrupos del Grupo y no se toma como unidad de análisis en la determinación de los significados pretendidos por el texto para el objeto Grupo.

Capítulo 3

Segundo Resultado: Diseño de un instrumento para evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática

3.1. Introducción

En el presente estudio se relaciona el conocimiento de los estudiantes de formación matemática (Licenciados y Matemáticos) sobre el objeto Grupo y el conocimiento didáctico-matemático, que se han potenciado y en algunos casos desarrollado en el proceso de formación, para la enseñanza universitaria del objeto matemático. En esta dirección, se describe la fase de diseñó del instrumento que permitió evidenciar el nivel de preparación de los estudiantes de formación matemática, para la enseñanza universitaria en relación con el objeto Grupo; para esto se analizan las categorías del conocimiento común del contenido en relación con el objeto matemático y el conocimiento ampliado del contenido, como bases para la potenciación y desarrollo del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza del objeto matemático. Con el estudio del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de los estudiantes de formación matemática, se posibilita la determinación de criterios y orientaciones para mejorar su formación, como es el caso de la identificación de las dificultades de los estudiantes con el objeto de estudio.

En esta dirección, se describe el proceso para la construcción del instrumento que permitió evaluar el CDM de los estudiantes de formación matemática. En primer lugar, se establecen los objetivos del instrumento *CDM - Grupo;* luego, el proceso de diseño del instrumento: se presenta el análisis de la versión piloto que se aplicó al grupo de estudiantes de formación matemática junto con el juicio de expertos (9) en didáctica del Álgebra y específicamente, en Teoría de Grupos. También, se realiza el análisis a las tareas seleccionadas para la prueba 178 piloto, junto con los análisis cualitativo y cuantitativo de la prueba para llegar finalmente a la versión definitiva del instrumento *CDM - Grupo* cuya aplicación es motivo de análisis en el siguiente capítulo.

3.2. Objetivo del instrumento, CDM-Grupo

Las investigaciones que se relacionan con los conocimientos del profesor de matemáticas, parten del hecho que este posee un Conocimiento del Contenido matemático que le permite, desempeñarse en la labor de la enseñanza: esto como un primer requisito, ya que es necesario la potenciación de un complejo de conocimientos en el futuro profesor universitario, para la labor de la docencia. El conocimiento del contenido sobre un objeto matemático, según el modelo del CDM (Godino, 2009) se encuentra integrado por las categorías de: Conocimiento Común del Contenido, en el sentido de Shulman y Conocimiento Ampliado del Contenido, que en este estudio se toman como base para la potenciación o desarrollo del Conocimiento Especializado, necesario para la labor de la enseñanza. En la investigación se analiza como se ha potenciado el conocimiento común, el ampliado y el conocimiento especializado del contenido. Además, se tiene presente que la población de estudio se encuentra integrada por estudiantes de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) y no por profesores en ejercicio de su profesión. Así, desde este punto de vista, se hacen relevantes las investigaciones que permitan evidenciar y caracterizar los conocimientos de los estudiantes, para la labor de la enseñanza universitaria en tópicos de matemática y específicamente, los relacionados con el objeto Grupo, como en la línea de estudio en formación de docentes.

En esta dirección, se diseñó el instrumento *CDM - Grupo* con el objetivo de "explorar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática": faceta que forma parte de uno de los componentes del CDM en el modelo propuesto por Godino (2009) analizado en el marco teórico. Así, el instrumento se orienta a evaluar aspectos de la faceta epistémica del CDM que incluyen en congruencia con el modelo de Ball y Colaboradores (Ball, Lubienski & Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) los tres tipos de conocimientos: Conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido. Al respecto, la dimensión epistémica del conocimiento CDM no solo se refiere al conocimiento del contenido matemático que deben poseer los profesores, se relaciona también, con todos aquellos conocimientos que son necesarios para la enseñanza y que el profesor adquiere y aprende en la institución educativa, producto de la instrucción y no de la práctica: en esta dirección se enfoca el presente estudio (Vásquez, 2014).

Con la aplicación del instrumento, se busca obtener datos sobre el CDM de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo; estos datos corresponden a evidencias sobre el conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado que poseen los estudiantes desde la aplicación del modelo del Conocimiento Didáctico y Matemático de Godino y Colaboradores (Godino, 2009; Pino-Fan, 2013; Pino-Fan, Godino & Font 2013a, 2013b; Vásquez, 2014). Así, se busca con el diseño e implementación del instrumento, caracterizar la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática en aspectos parciales, debido a la complejidad inmersa en los estudios sobre los componentes del CDM y a la misma complejidad del objeto de estudio.

3.3. Construcción del instrumento CDM-Grupo

Para cumplir con los objetivos 5, 6, 7 y 8 planteados en la investigación, los cuales dan respuesta a la pregunta: ¿Cómo diseñar un instrumento que permita evaluar el conocimiento común y el conocimiento ampliado como bases del conocimiento especializado necesario para una enseñanza idónea del objeto Grupo? Se plantearon los siguientes seis (6) pasos en el proceso de diseño y construcción del cuestionario *CDM-Grupo*: 1) estudio de las investigaciones relacionadas con el objeto Grupo; 2) estudio epistemológico, histórico y fenomenológico del objeto Grupo; 3) análisis de libros de texto y programas de estudio; 4) construcción de la versión piloto del instrumento *CDM - GRUPO*; 5) análisis de la aplicación de la versión piloto del instrumento y del juicio de expertos y finalmente, 6) implementación y análisis de la versión final del cuestionario.

El primer paso corresponde a la revisión de las investigaciones sobre el objeto Grupo. En la segunda fase, se determinaron los distintos significados del objeto matemático a través de su evolución histórica; en un tercer paso, se realizó el análisis de los diferentes significados del objeto de investigación que pretenden: por un lado, los libros de texto y por otro los programas de estudio: con esta información se definieron los criterios que permiten abordar la fase cuatro, sobre la construcción e implementación de la versión piloto del instrumento, para continuar con la aplicación y análisis de la prueba piloto y finalizar en este capítulo con la presentación de la versión definitiva del cuestionario.

3.3.1. Criterios para la selección de tareas

Para el diseño de este instrumento que tiene como objetivo: evaluar las categorías del conocimiento CDM de los estudiantes de formación matemática, necesarias para la labor de la enseñanza del objeto Grupo en la Educación Superior; se tomó como referencia el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) de Godino (2009), y la metodología que el modelo propone. Dicha metodología incluye dos fases: en primer lugar, la selección de la tarea matemática que lleve al estudiante a poner en juego por medio de la solución a la situación (prácticas matemáticas), los aspectos más relevantes en relación el conocimiento que se pretende evaluar; en segundo lugar, la formulación de ítems y subítems de evaluación o actividades que contemplen los distintos tipos de conocimientos del contenido matemático y didáctico, que se desean evaluar (Vásquez, 2014).

La fase cuatro para el diseño del instrumento *CDM-Grupo* contempló como un primer paso, la creación de un banco de problemas recopilados de las investigaciones que sirvieron como antecedentes para el estudio y el análisis de los cuatro libros de texto. Del banco de problemas (200 preguntas) se seleccionaron las tareas que cumplieran, según el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) presentado en el marco teórico, con tres aspectos definidos para el estudio de la faceta epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática:

1) Globalidad del significado del objeto Grupo: este criterio hace referencia a que las tareas deben proporcionar información sobre el significado personal respecto del significado global del objeto Grupo, determinado a partir del estudio histórico del desarrollo del objeto de investigación, hasta la consolidación del significado abstracto del objeto Grupo. Según este criterio, se eligieron las tareas que proporcionaran información respecto al significado del objeto Grupo en los contextos de: *Conjuntos de Permutaciones, Conjuntos* $\mathbf{Z}_n$ *en Aritmética Modular, Teoría de Ecuaciones Algebraicas, Teoría de Galois, Teoría de Matrices y en general, en el contexto de Grupo abstracto*. Así, se tiene que el significado global del objeto Grupo, se relaciona con el contexto de "Grupo Abstracto" y corresponde a: Un conjunto G con una operación $*$ se denomina un grupo si:

   En el conjunto G la operación $*$ *cumple las propiedades:* G1. *Asociatividad de la operación* $*$*;* G2. *Existencia en el conjunto de un elemento identidad e tal que para todo elemento del conjunto se cumple que* $g * e = e * g = g$ *y* G3. *Existencia en el conjunto de un elemento denominado inverso a para cada elemento a del conjunto, tal que* $a * \tilde{a} = a * \tilde{a} = e$.

2) Contenido curricular: criterio que hace referencia a que las tareas se deben relacionar con los contenidos principales propuestos en los programas de formación matemática para el objeto Grupo.

3) Tipo de conocimiento del contenido a evaluar: criterio, que hace referencia a que las tareas deben poner en juego ciertos tipos de conocimientos del contenido matemático: un conocimiento común del contenido; un conocimiento ampliado del contenido y tareas que requieran de un conocimiento especializado necesario para la labor de la enseñanza en el ámbito universitario.

Se presenta en la tablas 3.1. los criterios definidos para la selección de las tareas del banco de tareas.

Tabla 3.1: Criterios para la selección de tareas

Criterio1: Significados del objeto Grupo
a) Conjunto de Permutaciones. b) Conjuntos $\mathbf{Z}_n$ en Aritmética Modular. c) En Teoría de Ecuaciones Algebraicas: conjuntos de permutaciones que dejen a una función invariante. d) En Teoría de Galois: conjunto de permutaciones asociadas a un polinomio: Grupo de Galois del polinomio. e) EnTeoríadeMatrices:conjuntosdematricesquecumplenciertaspropiedades algebraicas. f) **Grupo Abstracto: un conjunto, con una operación binaria interna, que cumple los axiomas de grupo.** (Significado que se adicionó finalmente).
Criterio 2: Contenido curricular de los programas de formación matemática
a) Operación Binaria b) Estructuras algebraicas c) Grupo d) Subgrupo e) Orden del grupo, orden del elemento f) Propiedades de los grupos
Criterio3: Conocimiento didáctico-matemático: faceta epistémica
a) Conocimiento común del contenido: que permite resolver la tarea matemática, propia de la Teoría de Grupos. b) Conocimiento ampliado: que permite generalizar las tareas del conocimiento común o especializado o realizar conexiones con objetos más avanzados del currículo. c) Conocimiento especializado: este conocimiento es el necesario para la enseñanza de tópicos de Teoría de Grupos y corresponde al uso de representaciones, uso de diferentes significados del objeto matemático; aplicación de diferentes procedimientos para resolver un problema; las diversas argumentaciones válidas para un procedimiento; la identificación de los conocimientos puestos en juego para la solución de una tarea matemática (se tiene en cuenta que el estudio se realiza con estudiantes y no con profesores en ejercicio, por esto, se analiza si, este conocimiento se ha podido potenciar a partir del conocimiento común y del ampliado).

Para la construcción de la versión piloto del instrumento *CDM - GRUPO* se seleccionaron 11 tareas con el objetivo de evaluar la faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática en relación con el objeto Grupo. Así, para la construcción del instrumento se consideran los tres criterios descritos: con el primer criterio, se consideró que las tareas debían proporcionar información sobre el grado de ajuste respecto al significado global del objeto matemático, para compararlo con los posibles significados personales de los estudiantes de formación matemática; para esto, se incluyeron ítems que activaran los distintos significados del objeto Grupo correspondientes a: conjunto de raíces de una ecuación polinomial-Teoría de ecuaciones algebraicas, conjunto de permutaciones, grupo de Galois de un polinomio, problemas en aritmética modular con los conjuntos $\mathbf{Z}_n$, Teoría de matrices: conjuntos especiales de matrices; todos ellos hacen referencia a la definición abstracta de Grupo, pero se toman en los diferentes contextos de uso del objeto matemático.

Con el segundo criterio, se pretendía que los ítems seleccionados se relacionaran con los principales contenidos curriculares para el objeto matemático: así, luego de la revisión en el capítulo anterior de los programas para los estudiantes de formación matemática se establecieron los contenidos programáticos relacionados con el objeto Grupo: operación binaria, estructuras algebraicas (semigrupo, monoide y grupo), grupo-ejemplos y contraejemplos, subgrupo, orden del grupo y propiedades de los grupos.

Con el tercer criterio, se tenía el propósito de *categorizar* las tareas según los componentes de la dimensión epistémica, en el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) para la enseñanza del objeto grupo en el marco teórico del enfoque EOS, como marco para el estudio: se consideró la inclusión de tres tipos de tareas con este criterio: (1) tareas que pusieran en juego un conocimiento común (resolver una tarea sobre el objeto grupo); (2) tareas que requirieran de un conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo) y finalmente, (3) tareas que requirieran de un conocimiento especializado necesario para la enseñanza (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática.)

Con estos criterios se seleccionaron las tareas del banco de tareas (200 preguntas) y se eligieron las que cumplieran con los tres criterios, pero luego de hacer los análisis correspondiente y teniendo en cuenta la complejidad que tiene el planteamiento o selección de tareas que cumplieran con los tres criterios simultáneamente, se estableció que las tareas se seleccionaban de tal forma que, dentro del instrumento *CDM-Grupo,* se complementaran y que permitieran al mismo tiempo, llegar a evaluar los criterios propuestos. En esta dirección, se seleccionaron 11 tareas luego de un análisis minucioso a las preguntas respecto a los criterios propuestos y buscando que permitieran evaluar las distintas categorías del conocimiento didáctico-matemático en relación con el objeto Grupo y la faceta epistémica del CDM. En esta dirección, el instrumento se elaboró con el objetivo de explorar ciertos aspectos iniciales de las categorías que componen el modelo del conocimiento didáctico-matemático, por medio del planteamiento de situaciones-problemáticas de enseñanza relacionadas con el objeto matemático, para analizar así las prácticas matemáticas operativas y discursivas de los estudiantes ligadas a sus configuraciones cognitivas.

De esta forma, las preguntas del cuestionario dan respuesta a preguntas como: ¿Existe el elemento identidad en el conjunto, cuál es el inverso de un elemento, se cumple la propiedad de clausura; la asociativa...? hecho que permite evaluar en "cierta medida" un nivel de conocimiento común del contenido relacionado con el objeto Grupo: para medir el conocimiento ampliado, se plantearon preguntas como: ¿A qué otro grupo conocido resulta isomorfo el subgrupo anterior?; defina una operación similar en el conjunto dado; ¿En qué grupo se está trabajando?; determine un conjunto que deje *invariante* el 2 (no se define la propiedad de invariante) y finalmente, se diseñaron o seleccionaron preguntas como: ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas se usan para dar solución al problema?, ¿Qué conceptos de la Teoría de Grupos utilizó para solucionar el ejercicio ...? preguntas que permiten evaluar el conocimiento especializado de los estudiantes de formación matemática, respecto al objeto Grupo.

Como el objetivo de la investigación se encuentra centrado en la evaluación del conocimiento didáctico-matemático que poseen los estudiantes de formación matemática, para la labor de la enseñanza del objeto Grupo, en su dimensión epistémica, se considera necesario precisar nuevamente, que se entiende por "conocimiento": este término se utiliza en la investigación como un constructo epistémico-cognitivo-afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición (Pino-Fan, Godino & Font, 2010, p. 209), en el que la "comprensión" se refiere a las relaciones que se establecen entre los distintos elementos que influyen en el proceso de implementación; ya sea de una configuración epistémica o cognitiva idónea. La "competencia" por su parte, se relaciona con la activación de la configuración cognitiva adecuada e idóneamente acoplada a la configuración epistémica o configuración de referencia, al contexto en el que se desarrolla la práctica. Mientras que la disposición o capacidad, se relacionan con la noción de objeto matemático y didáctico personal, es decir, aquello que posibilita la práctica (Pino-Fan, 2013, p. 143-144).

3.3.2. Selección de tareas para la versión piloto del cuestionario

Considerando los criterios mencionados, se seleccionan las siguientes once (11) tareas:

TAREA 1. En el conjunto $(Z,*)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$

a) Existe el elemento identidad? Justifique

a) $*$ define una operación asociativa? Justifique

b) Existe el inverso del elemento 3? Justifique

c) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...,_1,0,1,2,3,...}

TAREA 2. Sea (R,∗) el conjunto de los números reales, se define $a * b = 3a + 4b$

a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura? Justifique

b) La operación es asociativa? Justifique

c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique

d) En (R,·) cómo se puede definir una operación en forma similar a la propuesta y que significado tendría según otras asignaturas del programa.

TAREA3. Dividaelpolinomio$3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$porelpolinomio$2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(Z_5,+_5)$

a) El cociente corresponde a ? Justifique

b) El residuo corresponde a? Justifique

c) En qué grupo se está trabajando? Justifique

d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

TAREA 4. Dado el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números, la función $r : N \rightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además, se define en el conjunto A_2 la operación $x \oplus y = r_{(}x + y_{)}$.

a) Solucione $x \oplus 17 = 99$. ¿Qué propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique

b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \oplus)$? Justifique

c) A que grupo es isomorfo $(A_2, \oplus)$? Justifique

d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3? Justifique

TAREA 5. Sea el conjunto $(Z_6,+_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6. a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique

a) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo. Justifique

b) Es Z_3 subgrupo de Z_6? Justifique

c) Elabore la tabla de operación del conjunto.

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) De un ejemplo de un subgrupo de D_3. Justifique

b) A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique

c) Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(Z_4,+4)$? Justifique

d) El grupo D_3 es cíclico? Justifique

TAREA 7. Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.

b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$. Justifique

c) Qué condición cumple el subgrupo H? Justifique

d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique

TAREA 8. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

TAREA 9. Determine el subconjunto de S_4 que:

a) Deja invariante el número 2.

b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial? Justifique

c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique

d) Cómo se define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

TAREA 10. Sea el grupo S_4 definido en los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) = f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que f es invariante.

a) Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante ? Justifique

c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. De un polinomio simétrico? Justifique

d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1, x_2? Justifique

TAREA 11. El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.

a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo? Justifique

c) Es conmutativo el grupo? Justifique

d) A qué otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

3.3.3. Revisión del instrumento mediante juicio de expertos

Luego del diseño del instrumento, se somete a un proceso de validación en dos aspectos: "validez del contenido" que se garantiza, primero, a partir de la selección de los contenidos relacionados con el estudio del objeto Grupo (programas de pregrado universitario) y con la selección de los diferentes referentes curriculares involucrados (programas de estudio, libros de texto e investigaciones didácticas) y segundo, con la "contrastación de la validez de los ítems" es decir, se valida el cuestionario para determinar, si realmente mide lo que se pretende medir; para esto se realizaron dos procedimientos: el juicio de expertos y el análisis de los ítems a partir de la aplicación piloto del instrumento (análisis cualitativo y cuantitativo).

3.3.3.1. Análisis del contenido de las tareas

Se presenta el análisis a las tareas de la prueba piloto, iniciando con la opinión de (9) expertos; este juicio de expertos, se contrastó con la experiencia del investigador en tópicos de Teoría de Grupos: este proceso resulto complejo, tanto para los expertos en Álgebra como para el investigador debido a la poca experiencia en la utilización de las herramientas proporcionadas por el enfoque EOS y debido a la complejidad que conlleva la construcción de instrumentos para evaluar las categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático para la enseñanza del objeto Grupo y además la complejidad del mismo objeto. En especial, se encontró gran dificultad con la asignación de las tareas a un posible significado del objeto; ya que, para los expertos era claro que todas las tareas correspondían al contexto de Grupo en su significado abstracto, es decir, definido por unos axiomas o propiedades de grupo y de igual forma para los expertos era claro el Teorema de Cayley, en teoría de grupos, que afirma que: “todo grupo es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones” es decir, que todo grupo se puede verse como un grupo de Permutaciones. Por esta razón, se transcriben las respuestas de los expertos y se realiza un análisis minucioso de las mismas.

Los criterios establecidos se dieron a conocer a los expertos: (1) Criterio, respecto a que la tarea perteneciera a uno de los significados establecidos para el objeto matemático; (2) Criterio: que la tarea correspondiera a un contenido curricular y (3) Criterio, respecto a que la tarea permitiera evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada, esto es, que la tarea permitiera evidenciar alguna de las categorías definidas en el modelo del conocimiento didáctico-matemático, correspondientes a la dimensión epistémica de este conocimiento (CDM). De igual forma se presentaron a los expertos las tareas con su propósito, según los subítems de cada una. Se establece del juicio de expertos, que en general resultó más sencillo dar respuesta a los criterios 2 y 3 que relacionaban los subítems de la tarea con un determinado conocimiento del contenido según el modelo del Conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza del objeto grupo y el criterio 2 respecto a que la tarea y así los subítems se relacionaran con un contenido curricular. En la aplicación del criterio 1, que correspondía a ubicar la tarea en un significado del objeto Grupo o en uno de sus contexto de uso, resultó ser un proceso complejo y para algunos subítems, los investigadores no respondieron nada en cuanto al criterio.

Se presentan las 11 tareas de la prueba piloto con el análisis cualitativo, según los aportes de los expertos en Álgebra Abstracta(9) y del investigador. Las tareas se tomaron de las investigaciones que sirvieron como antecedentes al estudio, pero se modificaron en algunos subítems, ya que estas investigaciones no pretendía analizar los conocimientos didácticos y matemáticos de los estudiantes para la enseñanza del objeto Grupo. Se analiza la tarea según la opinión de los expertos respecto al criterio sobre el significado de grupo y según la escala dada, donde NA-No aplica; NR-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante.

Análisis del ítem 1

La tarea 1, se seleccionó de la investigación sobre el “Sentido de la estructura para el álgebra universitaria” (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria.

TAREA 1. En el conjunto (Z,∗) de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$
a) Existe el elemento identidad? Justifique
a) ∗ define una operación asociativa? Justifique
c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique
d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...,_1,0,1,2,3,...}

Solución a la tarea 1

(1a) ¿Existe el elemento identidad?
Justifique.

$a * e = a$

$a + e - 4 = a$

$e = 4$

(1b) ¿∗ define una operación asociativa? Justifique.

Si.

$(a * b) * c = (a + b - 4) * c = a + b - 4 + c - 4$

$= a + b + c - 8$

$a * (b * c) = a * (b + c - 4) = a + b + c - 4 - 4$

$= a + b + c - 8$

(1c)¿Existe el inverso del elemento 3? Justifique.

Si. $(3)^{-1} = 5$

$3 * b = 4$

$3 + b - 4 = 4$

$b = 5$

(1d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...-1,0,1,2,3,...}

*	-1	0	1	2	3
-1	-6	-5	-4	-3	-2
0	-5	-4	-3	-2	-1
1	-4	-3	-2	-1	0
2	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2

Criterio1: Significados del objeto Grupo	**NR (1-5) a)**	**NR (1-5) b)**	**NR (1-5) c)**	**NR (1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	2	2	2	2

Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

Con la tarea 1 se esperaba evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática que corresponde a: la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática de las propiedades o axiomas del objeto Grupo: propiedad asociativa, de existencia de identidad y de inversos aditivos; además, la comprensión respecto al significado del objeto matemático que se puede ubicar en la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 2, según el juicio de expertos (9) a los subítems ((a),(b),(c) y (d)) de la tarea 1. Sin embargo, en el cuestionario dado a los expertos, no se había definido el significado de Grupo como *Grupo abstracto*, tratando de evitar que la mayoría de los ítems y subítems correspondieran a este significado; luego de un análisis minucioso, se consideró conveniente, relacionar la tarea con este significado y asignarle un nivel de relevancia de 3 en una escala de niveles de relevancia.

Criterio2: Contenido Curricular: objeto Grupo	**NR (1-5) a)**	**NR (1-5) b)**	**NR (1-5) c)**	**NR (1-5) d)**
Operación binaria	2	2	4	5
Estructuras algebraicas (semigrupo, monoide, grupo)	5	5	5	5
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad del Grupo	2	2	2	2

En cuanto al contenido curricular, la tarea 1 se relaciona con el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en promedio, al preguntar por las propiedades de la operación incluyendo parte de la tabla de operaciones en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); con el tema de *estructuras algebraicas* en un nivel de relevancia de 5; ya que, se pretende el análisis del conjunto Z con una operación definida en el conjunto; con esta tarea se buscaba que el estudiante realizará un análisis de las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto de los enteros y que según estas propiedades, analizará la estructura algebraica del conjunto en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); corresponde al tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, para determinar si el conjunto con la operación definida alcanza la estructura de grupo; se debe verificar las propiedades que se preguntan, en los subítems ((a),(b) y (c)) y finalmente, se puede ubicar la tarea en el tema de *propiedad de Grupo* ya que, se analizan las propiedades que definen la estructura algebraica de grupo, en los subítmes ((a),(b) y (c)) con un nivel de relevancia de 2.

Criterio3: Categorías del CDM: objeto Grupo	NR (1-5) a)	NR (1-5) b)	NR (1-5) c)	NR (1-5) d)
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	2	2	2	2
Conocimiento especializado del contenido	3	3	3	3

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según los expertos (9) y el análisis del investigador, la tarea 1 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 2, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) y un conocimiento especializado, con un nivel de relevancia 3 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)). Las preguntas que componen la tarea tenían como propósito evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con el análisis de las propiedades que cumple la nueva operación definida en el conjunto **Z** de los números enteros; propiedades que definen si el conjunto con la operación alcanza la estructura de Grupo, en su significado global. El conocimiento ampliado se relaciona con la determinación de la existencia del elemento identidad y del elemento inverso y el conocimiento especializado se relaciona, con la identificación de las propiedades que cumple un grupo conocido con una operación definida que no es la suma tradicional.

Análisis del ítem 2

La tarea 2, es una pregunta que se organizó según los problemas propuestos en la investigación: el Sentido de la estructura para el álgebra universitaria (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria. En esta pregunta, el sentido de la estructura se relaciona con la comprensión del estudiante de la propiedad asociativa en el conjunto de los números reales, cuando se define una nueva operación.

TAREA 2. Sea $(R,\bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a \quad b = 3a + 4b$

a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura? Justifique

b) La operación es asociativa? Justifique

c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique

d) En $(R,\bullet)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta, y que significado tendría según otras asignaturas del programa?

Solución a la tarea 2

(a) ¿La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura? Justifique

Sí, porque como $a \bullet b = 3a + 4b \in \mathbf{R}$ ya que $a,b \in \mathbf{R}$

(b) ¿La operación es asociativa? Justifique No, porque:

$(a \bullet b)\bullet c = (3a + 4b)\bullet c = 3(3a + 4b) + 4c$

$= 9a + 12b + 4c$

$a \bullet (b \bullet c) = a \bullet (3b + 4c) = 3a + 4(3b + 4c)$

$= 3a + 12b + 16c$

(c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique

No, porque: Si $a \bullet b = a$ entonces,

$3a + 4b = a$

$b = \frac{-1a}{2}$

Es decir, no existe el elemento identidad ya que este debe ser único para todos los elementos.

Por tanto, no puede existir el elemento inverso de ningún número en el conjunto dado.

(d) ¿En $(R^2,\bullet)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta y qué significado tendría según otras asignaturas del programa?

Ejemplo:

$(x1,y1)\bullet(x2,y2) = (3x1y1,4x2y2)$

Podrían definirse muchas operaciones en el conjunto R^2.

Con esta pregunta se busca que el estudiante relacione el subítem con conceptos de álgebra lineal o con otra asignatura del programa.

Se analiza ahora la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos y según la escala dada a ellos.

Criterio1: significados del objeto Grupo	NR (1-5) a)	NR (1-5) b)	NR (1-5) c)	NR (1-5) d)
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	2	2	2	2
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 2, al igual que la anterior, busca evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada, correspondiente a la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática de las propiedades o axiomas que cumple el conjunto R de los números reales, con una operación definida diferente a la usual (suma): propiedad de clausura, asociativa, existencia de identidad y de inversos aditivos en los subítems ((a),(b) y (c)); además, se busca evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático correspondiente a la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 2 según el juicio de los expertos (9); sin embargo, en el cuestionario de expertos, no se definió el significado de Grupo como *Grupo abstracto*, tratando de evitar que la mayoría de los ítems tomaran ese significado del objeto. Se decide, luego de un análisis minucioso, relacionar esta tarea con el significado mencionado y asignarle un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a),(b) y (c)); es decir, la tarea tiene un mayor nivel de complejidad respecto de la tarea anterior.

Criterio2:contenidocurricular: objeto Grupo	**NR (1-5) a)**	**NR (1-5) b)**	**NR (1-5) c)**	**NR (1-5) d)**
Operación binaria	5	5	5	5
Estructuras algebraicas	5	5	5	5
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad de Grupo	4	4	4	4

En cuanto al contenido curricular, la tarea 2, se relaciona con el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 5 en promedio para los subítems ((a),(b) y (c)); al tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 5 en los subítems ((a),(b) y (c)); ya que, en el tema se analizan las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto dado; finalmente, se relaciona con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, para determinar si el conjunto (R,•) con la operación definida alcanza la estructura de grupo se deben verificar las propiedades de los subítems(a),(b) y (c).

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	**NR (1-5) a)**	**NR (1-5) b)**	**NR (1-5) c)**	**NR (1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	4
Conocimiento ampliado del contenido	2	2	2	2
Conocimiento especializado del contenido	2	2	2	2

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico - matemático (CDM) que se buscan evidenciar con la tarea y según el criterio de los expertos (9) y del investigador: la tarea 2, permite evidenciar un conocimiento común del contenido con un nivel de relevancia en promedio de 4 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)); un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 2 respecto a la comprobación de la propiedad de clausura, asociativa y a la existencia de un elemento inverso en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 2 relacionada con la definición de una operación similar, pero en otro conjunto dado en el subítem (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con la verificación de las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto $(R, \bullet)$ y de evidenciar un conocimiento especializado para definir una operación en el conjunto R^2, esto es, una operación con elementos que son parejas.

Análisis del ítem 3

La tarea 3, es una pregunta que se seleccionó también, de la investigación sobre el Sentido de la estructura para el álgebra universitaria (Novotná et al., 2006) y permite explorar si un estudiante posee o no sentido de la estructura en problemas del álgebra universitaria. En la investigación, la pregunta se relaciona con el sentido de la estructura al aplicar los conocimientos de identidad e inverso en el conjunto $(Z_p,+_p)$ cuando se dividen dos polinomios con coeficientes en Z.

TAREA 3. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(Z_5,+_5)$
a) El cociente corresponde a ? Justifique
b) El residuo corresponde a? Justifique
c) En que grupo se esta trabajando? Justifique
d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

Solución a la tarea 3

(a) ¿El cociente corresponde a? Justifique $q = 4x^2 + x + 4$ La justificación corresponde a realizar la división en forma tabular.
(b) ¿El residuo corresponde a? Justifique $r = x^2 + 2x + 2$ La justificación se toma del punto anterior.
(c) ¿En qué grupo se esta trabajando? Justifique En el grupo de los polinomios $Z_5[x]$

(d) ¿Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores? Posibles respuestas: Operaciones en el grupo $(Z_5,+_5)$ para los coeficientes. Elemento identidad e inverso en el conjunto $(Z_5,+_5)$ Operaciones con exponentes.

Se analiza la tarea respecto a los criterios de selección y según la opinión de los expertos.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**N.R.(1-5)a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	5	5	5	5
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	5	5	5	5

Con la tarea 3, se espera evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática en cuanto a las operaciones en el conjunto $(Z_5,+_5)$ y en el conjunto $(Z_5[x],+_5)$ y se relaciona con la configuración de: *Problemas en aritmética modular*; con un nivel de relevancia de 5, según el juicio de expertos (9) y del investigador para los subítems ((a),(b) y (c)); la tarea además, busca evidenciar la comprensión del estudiante respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* al identificar el grupo donde se realiza la práctica matemática; el nivel de relevancia asignado es de 5 y con ésta tarea, se busca también aumentar el nivel de complejidad al relacionar dos grupos distintos: $(Z_5,+_5)$ y el grupo $(Z_5[x],+_5)$ en el subítem (c).

Criterio2:contenidoCurricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	3	3	3	3
Estructuras algebraicas	3	3	5	5
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad de Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 3 se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a) y (b)); en el tema de *estructuras algebraicas,* con un nivel de relevancia de 4 en promedio al analizar las propiedades que cumplen las operaciones definidas en los conjuntos dados, para los subítems ((a),(b),(c)y(d)) y al tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 5; ya que, se trabaja con dos grupos distintos, en los subítems ((a),(b) y (c)) y corresponde a *propiedades de Grupo*; ya que, al realizar las operaciones requeridas se verifican las propiedades de identidad e inverso: propiedades que definen al objeto matemático Grupo, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 5.

Criterio3: categorías del CDM: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	4	4	4	4
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según los expertos (9) y el investigador, la tarea 3, permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems ((a),(b)); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems ((c) y (d)). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con las operaciones en aritmética módulo 5, en el conjunto $(Z_5[x],+_5)$ de los polinomios con coeficientes en el grupo $(Z_5,+_5)$; un conocimiento ampliado respecto al conjunto de polinomios y un conocimiento especializado, que permite reconocer el grupo de trabajo y las propiedades que se utilizan para solucionar la situación planteada.

Análisis del ítem 4

La tarea 4, corresponde a una pregunta que se seleccionó de la investigación de Stehlíkova (2004) sobre un proyecto matemático en aritmética, en el cual se iniciaba con la definición del conjunto de los $z-$*números* y luego, se proponían operaciones en él, se establecen proposiciones y teoremas que se cumplen en el conjunto, para finalmente, concluir que la descomposición en el conjunto de los enteros, creada por la función de reducción es idéntica a la descomposición creada por la factorización $Z/99Z$ además, se establecen los isomorfismos correspondientes.

TAREA 4. Dado el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números, la función $r : \mathrm{N} \rightarrow A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además se define en el conjunto A_2 la operación $x \oplus y = r(x + y)$.

a) Solucione $x \oplus 17 = 99$, que propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique

b) Existe el elemento identidad en $(A_2, \oplus)$? Justifique

c) A que grupo es isomorfo $(A_2, \oplus)$? Justifique

d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3? Justifique

Solución a la tarea 4

(a) Solucione $x \oplus 17 = 99$ ¿qué propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique x=82, porque $x \oplus 17 = r(x+17) = r(82+17) = r(99) = 99$
(b) ¿Existe el elemento identidad en $(A_2, \oplus)$? Justifique Sea $a \oplus e = a$ r(a+e)=r(a) entonces $e = 0$, pero 0 no pertenece al conjunto A_2 Entonces e=99
(c) ¿A qué grupo es isomorfo $(A_2, \oplus)$? Justifique $(A_2, \oplus) \cong (\mathbb{Z}_{99}, +_{99})$ Para la justificación es suficiente con definir la función biyectiva, que establece el isomorfismo. $f : a \rightarrow a \bmod 99$
(d) ¿Cuáles $z\_$ números son divisibles por 3? Justifique Los que pertenecen a la clase del 3={3,6,9,12,...,99}=3M Porque, $r(3m) = 3r(m)$

Se presenta la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, según la opinión de los expertos.

Criterio1: significados del objeto Grupo	NR(1-5) a)	NR(1-5) b)	NR(1-5) c)	NR(1-5) d)
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	3	3	3	3
Teoría de las ecuaciones algebraicas	5	5	5	5
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	4	4	4	4

La tarea 4, buscaba evidenciar el conocimiento matemático, necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las operaciones en aritmética modular; para el caso de las operaciones en el conjunto $(Z_{99},+_{99})$ y se puede ubicar en la configuración de *problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems ((a),(b),(c) y (d)), según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea además, pretende evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *solución de ecuaciones algebraicas,* al solucionar la ecuación planteada en el conjunto $(Z_{99},+_{99})$ que se presenta en una forma distinta sin una definición rigurosa de la operación establecida en el subítem (a); el nivel de relevancia asignado corresponde a 5; además, la tarea explora el significado del objeto en la configuración de *Grupo abstracto,* al trabajar con las propiedades que cumple un conjunto para definir la estructura de grupo; el nivel de relevancia asignado es de 4 en los subítems ((a),(b) y (c)): en esta tarea, se aumenta el nivel de complejidad al presentar un grupo no conocido pero isomorfo a uno conocido $(Z_{99},+_{99})$; para esto, el estudiante debe tener una comprensión de las operaciones en aritmética modular.

Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	3	3	3	3
Estructuras algebraicas	4	4	4	4
Grupo, ejemplos y contraejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 4, se puede ubicar en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(b),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se analizan las propiedades que cumple la operación definida en el conjunto $(A_2,\oplus)$ con una operación definida; en el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* en el subítem (c)) con un nivel de relevancia de 5, ya que, en la tarea se pregunta por una de las propiedades que definen al grupo y por un grupo isomorfo al grupo dado; corresponde, también, al tema de *propiedades de Grupo* ya que se pregunta por la propiedad de identidad que es una de las propiedades que determinan si un conjunto con la operación definida alcanza la estructura de Grupo y además, se pregunta por un grupo isomorfo al dado, junto con la propiedad de divisibilidad en el grupo en los subítems (a),(b) y (c); el nivel de relevancia asignado es de 5.

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	3	3	3	3
Conocimiento ampliado del contenido	4	4	4	4
Conocimiento especializado del contenido	5	5	5	5

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar y según el criterio de los expertos (9) y del investigador, esta tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3, en los subítems (b) y (c); un conocimiento ampliado del contenido en los subítems (a),(b),(c)y(d) con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común, en relación con la identificación del elemento identidad en el conjunto $(A_2, \oplus)$ y a la identificación de un grupo isomorfo a este; se busca evidenciar el conocimiento ampliado y especializado que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con las operaciones en aritmética modular, presentadas en una forma distinta; el conocimiento ampliado respecto a establecer un isomorfismo con otro grupo conocido y un conocimiento especializado al identificar las propiedades que se aplican en la solución de una ecuación y al definir en el conjunto $(A_2, \oplus)$ la propiedad de divisibilidad por 3.

Análisis del ítem 5

La tarea 5, se seleccionó de la investigación de Dubinsky et al. (1994) la cual tenía el objetivo de mirar los tipos de comprensión en Álgebra abstracta (Teoría de Grupos), que habían adquirido los estudiantes y los resultados de la investigación estaban dirigidos a implementar un método de enseñanza.

TAREA 5. Sea el conjunto $(Z_6,+_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6.

a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique

a) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo? Justifique

b) Es Z_3 subgrupo de Z_6? Justifique

c) Elabore la tabla de operación del conjunto?

Solución a la tarea 5

(a) ¿Dé un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique H={0,2,4} (i) Si $a,b \in H$ entonces $a+b \in H$: 0+2=2+0=2; 2+4=4+2=0; 4+4=2; 2+2=4 (ii) Si $a \in H$ entonces $-a \in H$: -0=0; -2=4; -4=2
(b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo. Justifique T={0,1,3} por ejemplo, donde no se cumple la clausura, ni la propiedad de inversos.
(c) ¿Es Z_3 subgrupo de Z_6? Justifique No, porque son grupos no isomorfos.
(d) Elabore la tabla de operación del conjunto.

+6	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos.

Criterio 1: significados del objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	5	5	5	5
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 5, busca evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática en aritmética modular y corresponde a la configuración de: *Problemas en aritmética modular* con un nivel de relevancia de 5, en el subítems (d) según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea busca también, evidenciar la comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3 al preguntar por los subgrupos del grupo $(Z_6,+_6)$ en los subítems (a),(b),(c) y (d); así, la tarea busca evidenciar la comprensión respecto a los criterios que se establecen para que un subconjunto sea un subgrupo.

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	4	4	4	4
Estructuras algebraicas	4	4	4	4
Grupo, ejemplos y contraejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	5	5	5	5
Orden del grupo	2	2	2	2
Propiedad de Grupo	NA	NA	NA	NA

En cuanto al contenido curricular, la tarea 5, se ubica en el tema de *operación binaria,* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se pregunta por las propiedades que cumple la operación definida en un subconjunto del grupo $(Z_6,+_6)$ para que sea un subgrupo y finalmente, en el tema de *Subgrupo* por las razones anteriores en los subítems (a),(b) y (c) y el nivel de relevancia asignado es de 5.

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	2	2	2	2
Conocimiento especializado del contenido	3	3	3	3

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según los expertos (9) y el investigador, la tarea 5 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); un conocimiento ampliado del contenido en los subítems (b) y (c) con un nivel de relevancia de 2 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 3 en los subítems (b) y (c). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con las operaciones en aritmética módulo 6; el conocimiento ampliado respecto a la identificación de subgrupos del grupo $(Z_6,+_6)$ y un conocimiento especializado al identificar las clases de equivalencia en cada uno de los grupos dados y al describir un subconjunto que no es subgrupo dando la justificación correcta.

Análisis del ítem 6

La tarea 5, se seleccionó de la investigación de Dubinsky et al. (1994) la cual tenía el objetivo de mirar los tipos de comprensión en Álgebra abstracta (Teoría de Grupos) que habían adquirido los estudiantes y los resultados de la investigación estaban dirigidos a implementar un método de enseñanza.

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.
a) ¿Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique
b) ¿A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique
c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(Z_4,+_4)$? Justifique
d) ¿El grupo D_3 es cíclico ? Justifique

Solución a la tarea 6

(a) ¿Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique $H1 = \{R_0, R_{120}, R2_{40}\}$ $H_2 = \langle R_i \rangle$ para $i = 0,120,240$ $H_3 = \langle d_i \rangle$ para $d_i =$ reflexión por el vértice 1,2 o 3 En este punto, el estudiante puede construir muchos ejemplos de subgrupos.
(b) ¿A qué grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique Por ejemplo $H_1 \cong Z_3$ Para H_2 y H_3 los puede hacer isomorfos a subgrupos del grupo S_3 de permutaciones con tres elementos, o analizar los isomorfismos con el grupo Z_n según el caso. $H_3 \cong Z_2$ son subgrupos de orden 2.
(c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(Z_4,+_4)$? Justifique No. Porque, el orden del subgrupo debe dividir al orden del grupo y 4 no divide a 6.
(d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique No, no existe ningún elemento de orden 6. Se puede también hacer los generados y llegar al mismo resultado.

Se analiza la tarea respecto a los criterios de selección y según la opinión de los expertos.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	5	5	5	5
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 6, busca evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las operaciones en el grupo de simetrías de los polígonos regulares; específicamente, en el grupo de simetrías del triángulo equilátero $(D_3,\circ)$ que es isomorfo a un subgrupo del grupo $(S_3,\circ)$ y por tanto, se puede ubicar en la configuración de: *Conjunto de Permutaciones* con un nivel de relevancia de 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d) según el juicio de expertos (9) y del investigador; la tarea, busca también evidenciar la comprensión respecto al significado del objeto matemático en la configuración de *Grupo abstracto* al preguntar por grupos isomorfos a subgrupos del grupo D_3 en los subítems (b) y (c) y con un nivel de relevancia de 3.

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	2	2	2	2
Estructuras algebraicas	4	4	4	4
Grupo, ejemplos y contraejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	5	5	5	5
Orden del grupo	3	3	3	3
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 6 se ubica en el tema de *operación binaria*, con un nivel de relevancia de 2, en los subítems (a),(c) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a), b),(c) y (d); ya que, se indaga por los subgrupos del conjunto D_3; al tema de *Grupo* al preguntar por los grupos a los cuales son isomorfos los subgrupos del conjunto, en los subítems (a),(b) y (c), con un nivel de relevancia de 4 y específicamente, corresponde al tema de *Subgrupo* en los subítems (a),(b) y (c) con un nivel de relevancia de 5 y corresponde al tema de: *orden del Grupo* al preguntar si existe un subgrupo de orden 4 que sea isomorfo al grupo $(\mathbb{Z}_4,+_4)$ en el grupo D_3 (pregunta (c)) con un nivel de relevancia de 3 y finalmente, la tarea corresponde al tema de *propiedad del grupo* al preguntar si el grupo D_3 es un grupo cíclico en el subítem (d) con un nivel de relevancia de 5.

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	NR(1-5) a)	NR(1-5) b)	NR(1-5) c)	NR(1-5) d)
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	4	4	4	4
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según el juicio de los expertos, la tarea 6, permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 5 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems ((b),(c) y (d))con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (b),(c) y (d). Las preguntas que componen esta tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con la determinación de los elementos que forman un grupo de simetrías para determinar de allí un subgrupo. Para este caso, se trabaja con el grupo de simetrías del triángulo equilátero y se pretende identificar algunos subgrupos de este grupo; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de grupos isomorfos a un subgrupo dado y a la propiedad de ser grupo cíclico y un conocimiento especializado al preguntar por un grupo isomorfo al dado; la existencia de un subgrupo con 4 elementos en el grupo D_3 y la propiedad de ser grupo cíclico.

Análisis del ítem 7

La tarea 7, se construyó a partir de la investigación de Hazzan (1999), sobre el grupo cociente. Para ésta tarea se cambio el grupo. La investigación tenía el objetivo de estudiar los niveles de abstracción en Álgebra Abstracta.

TAREA 7. Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.

b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$? Justifique

c) Qué condición cumple el subgrupo H ? Justifique

d) Liste los elementos de la clase bH ? Justifique

Solución a la tarea 7

(a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.

•	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$. Justifique

$H = \langle a \rangle = \{a,e\}$

$G/H = \{Ha, Hb\}$

$G = \{e, a, b, c\}$ $Ha = \{a, e\} = H = He$ $Hb = \{c, b\} = Hc$

(c) ¿Qué condición cumple el subgrupo H? Justifique

H debe ser un subgrupo normal para obtener el grupo cociente; esto es

$Hg = gH$ para todo elemento del conjunto.

(d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique

$bH = b\{a,e\} = \{ba,be\} = \{c,b\}$

Se analiza la tarea, respecto a los criterios para la selección de las tareas y según la opinión de los expertos.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 7, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a: la comprensión del estudiante de formación matemática en cuanto a la estructura de grupo cociente con la identificación de clases laterales y de operaciones en estas clases; la tarea corresponde a la configuración de: *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3, en los subítems (a),(b),(c) y (d).

Criterio2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	4	4	4	4
Estructuras algebraicas	5	5	5	5
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	4	4	4	4
Orden del grupo	3	3	3	3
Propiedad del Grupo	4	4	4	4

En cuanto al contenido curricular, la tarea 7, se ubica en el tema de *operación binaria*, con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b) y (d); en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); ya que, se pregunta por el grupo cociente y sus elementos que corresponden a clases laterales; la condición del subgrupo en el grupo cociente (la normalidad del subgrupo); al tema *Grupo;* ya que, se busca la construcción de otro grupo en el subítem (b) y el nivel de relevancia es de 5; al tema de *subgrupo* con la pregunta de la condición que cumple el subgrupo para realizar un grupo cociente, en el subítem (c) con un nivel de relevancia de 4; al tema *orden del grupo* al realizar la tabla de operaciones en este grupo V-4 de Klein (a) con un nivel de relevancia de 3 y finalmente, al tema de *propiedad del grupo* con la pregunta sobre la condición del subgrupo para formar el nuevo grupo denominado el grupo cociente, en el subítem (c) y el nivel de relevancia es de 4.

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	4	4	4	4
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar; según el juicio de los expertos y del investigador, la tarea 7 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia de 5 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 4 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems (c) y (d). Las preguntas que componen esta tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación con la elaboración de la tabla de operación de los elementos del grupo; un conocimiento ampliado respecto a la construcción de un nuevo grupo denominado "grupo cociente", la descripción de la condición necesaria para la construcción del grupo cociente y la construcción de clases laterales y un conocimiento especializado con la construcción del grupo cociente y la identificación de la condición que cumple el subgrupo (ser subgrupo normal) para llegar al grupo cociente y de igual forma, con la construcción de clases laterales.

Análisis del ítem 8

La tarea 8, se seleccionó de un conjunto de pruebas elaboradas en el departamento de Matemática de la Universidad Nacional de Colombia (2014) para una prueba de *eficiencias 1*, de los estudiantes de matemáticas con conceptos relacionados con Teoría de Grupos. La pregunta se modificó ya que la prueba no pretendía medir los conocimientos didácticos y matemáticos de los estudiantes de matemática.

TAREA 8. Sea $(G,\bullet)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

Solución a la tarea 8

(a) El grupo es Abeliano. Falso, porque: Si el grupo es abeliano $f(xy) = a(xy)a^2 = (ax)(ay)a = xya^3$ $f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xya^6$
(b) $a = e$ y el grupo es abeliano: Verdadero, porque: $f(xy) = axya^2 = xy$ $f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xy$ Si el grupo no es abeliano también se cumple.
(c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano. Verdadero, porque: $f(xy) = a(xy)a^2 = axya = (ax)(ay) = f(x)f(y)$ $f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = (axa)(aya) = axaya = axay = f(x)f(y)$
(d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano Verdadero, porque: $f(xy) = axya^2 = xy$ $f(x)f(y) = (axa^2)(aya^2) = xya^6 = xy$

Se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y según los expertos.

Criterio 1: significados del objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	5	5	5	5

La tarea 8, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de las propiedades que se preservan en el grupo bajo homomorfismos, en los subítems (a),(b),(c) y (d) y corresponde a la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 5.

Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	NA	NA	NA	NA
Estructuras algebraicas	3	3	3	3
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	NA	NA	NA	NA
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	2	2	2	2
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 8 se ubica en el tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(c) y (d); ya que, se debe analizar la propiedad de ser grupo conmutativo; al tema de *orden del grupo* pero, específicamente, con el orden de los elementos del grupo, en los subítems (c) y (d) y con un nivel de relevancia de 2; al tema de *propiedad del grupo* con la pregunta sobre la identidad y el orden de los elementos, con un nivel de relevancia de 5 y también, en esta tarea se pregunta por la propiedad del grupo de ser abeliano, en los subítems (a),(c) y (d).

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	NR(1-5) a)	NR(1-5) b)	NR(1-5) c)	NR(1-5) d)
Conocimiento común del contenido	5	5	5	5
Conocimiento ampliado del contenido	3	3	3	3
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar con la tarea 8, según el juicio de los expertos y del investigador, la tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido con un nivel de relevancia 5 en los subítems (a),(b),(c) y (d); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (a),(b),(c) y (d) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática en relación a la preservación de propiedades del grupo por homomorfismos; un conocimiento ampliado respecto a las propiedades que se preservan por homomorfismo y a la identificación del homomorfismo como tal y finalmente, un conocimiento especializado con la verificación del homomorfismo y las propiedades que se preservan por éstos homomorfismos.

Análisis del ítem 9

La tarea 9, se seleccionó del curso de Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) en el capítulo 9, sobre Grupos y aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta se modificó según los aportes de los expertos en Álgebra y se adaptó para el estudio de las categorías del conocimiento didáctico matemático.

TAREA 9. Determine el subconjunto de S_4 que:

a) Deja invariante el número 2.

b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique

c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique

d) Como define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

Solución a la tarea 9

(a) Deja invariante el número 2. $H = \{(1),(13),(14),(134),(43),(143)\}$
(b) El subconjunto anterior es un subgrupo. ¿Tiene algún nombre especial? Justifique Sí, porque: $(13)(13) = (1)$ (clausura) y además: $(1)^{-1} = (1)$ $(13)^{-1} = (13)$ por ser un ciclo de orden 2. $(14)^{-1} = (14)$ por ser un ciclo de orden 2. $(134)^{-1} = (143)$ elemento de orden 3. $(143)^{-1} = (134)$ elemento de orden 3. No. No es isomorfo a $\mathbf{Z}_6$.
(c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. ¿Tiene algún nombre especial? Justifique $H = \{(1),(13)\}$ $\{(13)(13) = (1)\}$ (clausura) y además: $(1)^{-1} = (1)$ $(13)^{-1} = (13)$ por ser un ciclo de orden 2. $(14)^{-1} = (14)$ por ser un ciclo de orden 2. Se puede decir que es un subgrupo de orden 2, cíclico y que por tanto, isomorfo a $\mathbf{Z}_2$
(d) ¿Cómo define en este ejercicio la propiedad de ser invariante? Exprésela mediante una fórmula y Justifique. Ejemplo: La normalidad: $Hg = gH$ para todo g elemento del grupo. Con esta pregunta se quería llegar a que si se cumple que: $\alpha\ f\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) := f\ (x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},\ldots,x_{\alpha(n)})$ para toda permutación $\alpha \in S_n$ entonces f es un invariante del grupo finito S_n. Para este grupo, los polinomios simétricos corresponden a los elementos invariantes.

Se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas y el criterio de los expertos.

Criterio 1: significados del objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	5	5	5	5
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	3	3	3	3

La tarea 9, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática del grupo de permutaciones con cuatro elementos y a la propiedad de ser un invariante de un grupo finito; por tanto, se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* en los subítems (a),(b),(c) con un nivel de relevancia de 5; ya que, en toda la tarea se pregunta por las propiedades que se definen en este conjunto; también, corresponde a la configuración de *Grupo abstracto* con un nivel de relevancia de 3 al definir propiedades de los subgrupos del grupo S_4 en los subítems (a),(b) y (c).

Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	NA	NA	NA	NA
Estructuras algebraicas	3	3	3	3
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	4	4	4	4
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad del Grupo	4	4	4	4

En cuanto al contenido curricular, la tarea 9 corresponde al tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 3 en los subítems (a),(b) y (c); ya que, se debe analizar la propiedad de ser subgrupo, es decir, las propiedades de grupo; al tema *grupo, ejemplos y contraejemplos* ya que la tarea se relaciona con las propiedades de un grupo específico: el grupo S_4 de permutaciones de cuatro elementos y el nivel de relevancia asignado es de 4, en el subítem (b); al tema de *subgrupo*; ya que, se pregunta si un subconjunto define un subgrupo y con un nivel de relevancia de 4 en el subítem (b); finalmente se ubica en el tema de *propiedad del grupo;* ya que, se define una propiedad y se pregunta si con esa propiedad el conjunto es un subgrupo, en el subítem (b) y el nivel de relevancia asignado es de 4.

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	3	3	3	3
Conocimiento ampliado del contenido	3	3	3	3
Conocimiento especializado del contenido	2	2	2	2

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) que se buscan evidenciar, según el juicio de los expertos y del investigador, la tarea 9 permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (b),(c) y

(d) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 2 en el subítem (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar el conocimiento común que poseen los estudiantes de formación matemática, en relación con el análisis de la propiedad que permite determinar algunos de los subgrupos del grupo S_4: una tarea común en Teoría de Grupos que se relaciona con determinar los subgrupos del grupo; ésta tarea permite evidenciar un conocimiento ampliado respecto a la determinación de propiedades en el subconjunto que lo lleven a ser un subgrupo y con la definición de la propiedad de ser un invariante de un grupo finito. Finalmente, la tarea permite evidenciar un conocimiento especializado, al pretender que el estudiante en forma intuitiva construya la definición de la propiedad de ser un invariante de un grupo finito.

Análisis del ítem 10

La tarea 10, complementa la tarea 9 y se seleccionó del curso Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) en el capítulo 9, sobre Grupos; aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta se modificó según los aportes de los expertos en Álgebra y se adaptó para medir las categorías del conocimiento didáctico matemático y el contexto de significado de la Teoría de Galois.

TAREA 10. Sea el grupo S_4 definido en los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que f es invariante.

a) Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante? Justifique

c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$

De un polinomio simétrico ? Justifique

d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1, x_2? Justifique

Solución a la tarea 10

(a) ¿Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique No. Porque, existe $\alpha = (13) \in S_4$ tal que:

$\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$

$= f(x_3,x_2,x_1,x_4) = x_3x_2 + x_1x_4 \neq x_1x_2 + x_3x_4 = f$

(b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante. Justifique $\alpha = (1) \in S_n$ la identidad deja a todo polinomio igual. Esta pregunta según los expertos, estaría mal formulada por la definición de ser invariante que afirma que: f es un invariante del grupo S_n si $\alpha f = f$ para toda $\alpha \in S_n$. Pero en el contexto histórico, para la solución de ecuaciones algebraicas por radicales se habla de "las permutaciones" que dejan invariante a una función en las raíces de la ecuación y es en este sentido que se formula la pregunta.
(c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. De un polinomio simétrico. Justifique Ejemplo, una posible solución sería: Sea $f = x_1 + x_2$ y el grupo $S_2 = \{(1),(12)\}$ ya que: $f(x1,x2) := f(x\alpha(1),x\alpha(2))$ $= f(x_1,x_2) = x_1 + x_2 = f$ para $\alpha = (1)$ la identidad y $= f(x_1,x_2) = x_2 + x_1 = f$ para $\alpha = (12)$. En S_4 se tiene como respuesta al conjunto: $H = \{(1),(12),(34),(12)(34),(13)(24),(14)(23),(1423),(1324)\}$
(d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2+bx+c=0$ en función de sus raíces x_1,x_2. Justifique $b = -x_1 - x_2$ $c = x_1x_2$ Justificación: Sea $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$ $= x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$ luego, $b = -(x_1 + x_2)$ $c = x_1x_2$

Se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas, y los expertos.

Criterio1: significados del objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	4	4	4	4
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	4	4	4	4
Teoría de Galois	2	2	2	2
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	4	4	4	4

Con la tarea 10, se pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática de los invariantes de un grupo finito, relacionados con los polinomios simétricos; para este caso, el grupo finito corresponde al grupo S_4 de permutaciones de 4 elementos; por tanto, esta tarea se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b) y (c); la tarea se relaciona también, con la comprensión que tiene el estudiante de la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación algebraica y las raíces o soluciones de la misma y la relación con el grupo S_4, es decir, la relación de las soluciones de una ecuación de grado cuatro y el grupo S_4; por tanto, corresponde a la configuración de *Teoría de ecuaciones algebraicas* con un nivel de relevancia de 4; además, los invariantes del grupo S_4 fueron fundamentales para determinar las soluciones de las ecuaciones algebraicas de grado cuatro mediante el método de radicales, en los subítems (a),(b),(c) y (d). Finalmente, la tarea corresponde a la comprensión del estudiante de la estructura de Grupo en su significado abstracto y se ubica por tanto, en la configuración de *Grupo Abstracto;* ya que, la tarea permite relacionar el grupo S_4 con las soluciones de la ecuación de grado cuatro, en los subítems (a),(b) y (c) y el nivel de relevancia es de 4. Esta tarea tiene en general un nivel alto de complejidad y los expertos proponen varios arreglos para lograr una mejor comprensión por parte de los estudiantes de formación matemática; hecho que se analiza en la evaluación de la prueba piloto. La tarea se relaciona con la configuración *Grupo de Galois del polinomio-Teoría de Galois* al relacionar los coeficientes de la ecuación de grado dos con sus raíces, en el subítem (d).

Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	NA	NA	NA	NA
Estructuras algebraicas	NA	NA	NA	NA
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	NA	NA	NA	NA
Subgrupo	NA	NA	NA	NA
Orden del grupo	NA	NA	NA	NA
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 10 se ubica en el tema de *propiedad del grupo* con un nivel de relevancia de 5. Se busca indagar por los invariantes de un grupo finito, en este caso del grupo S_4 y la relación con las ecuaciones algebraicas, en los subítems (a),(b),(c) y (d). En general, los subítems no fueron claros para los expertos y por tal motivo, la pregunta se reorganizó en la versión final del cuestionario; ya que, ella se relaciona con uno de los problemas que dieron origen al objeto Grupo. Se tiene presente además, que dentro del contenido curricular de los programas de formación matemática, no aparece el tema de polinomios simétricos, ni la determinación de los invariantes de un grupo finito, según el análisis de los programas de estudio presentados en el capítulo anterior: en la asignatura de Teoría de Grupos, no se trabaja Teoría de Galois.

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	NR(1-5) a)	NR(1-5) b)	NR(1-5) c)	NR(1-5) d)
Conocimiento común del contenido	3	3	3	3
Conocimiento ampliado del contenido	5	5	5	5
Conocimiento especializado del contenido	5	5	5	5

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM), la tarea 10 buscan evidenciar, según el juicio de los expertos y del investigador, un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 3 en el subítem (d); un conocimiento ampliado del contenido, en los subítems (a),(b),(c) y (d) con un nivel de relevancia de 5 y un conocimiento especializado, con un nivel de relevancia 5, en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común de los estudiantes de formación matemática en cuanto a la identificación de la relación que existe entre los coeficientes de una ecuación de grado dos y las soluciones o raíces de la misma; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de un polinomio como función invariante y a la identificación de la relación existente entre los coeficientes de la ecuación y sus soluciones o raíces y un conocimiento especializado al pretender que el estudiante de formación matemática llegue a definir la propiedad de invariante de un grupo finito, para el caso del grupo S_4.

Análisis del ítem 11

La tarea 11, se toma del curso Teoría y Problemas del Álgebra Abstracta (Ayres & Jaisingh, 2005) del capítulo 9, sobre Grupos y aparece en la sección de problemas suplementarios. Esta pregunta no fue clara para los expertos y se modificó según los aportes dados; además, se adaptó para mediar las categorías del conocimiento didáctico matemático.

TAREA 11. El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.

a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo. Justifique

c) Es conmutativo el grupo? Justifique

d) A que otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

Solución a la tarea 11

(a)Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique $H = \{\alpha 1 = (1), \alpha 2 = (12)(34), \alpha 3 = (13)(24), \alpha 4 = (14)(23)\}$ Por tabla se verifica la propiedad de clausura, identidad e inverso y la propiedad asociativa se hereda del grupo de funciones.

o	α 1	α 2	α 3	α 4
α 1	α 1	α 2	α 3	α 4
α 2	α 2	α 1	α 4	α 3
α 3	α 3	α 4	α 1	α 2
α 4	α 4	α 3	α 2	α 1

(b)¿Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo? Justifique $\|\alpha 1\| = 1$ el orden de la identidad en cualquier grupo es 1. $\|\alpha 2\| = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos. $\|\alpha 3\| = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos. $\|\alpha 4\| = 2$ el orden es el mínimo común múltiplo de las longitudes de los ciclos disyuntos.
(c) ¿Es conmutativo el grupo? Justifique Si, por la simetría de la tabla, o se prueba que $\alpha i \alpha j = \alpha j \alpha i$ para $i = 1,2,3,4$.
d) ¿A qué otro grupo puede ser isomorfo? Justifique Al grupo k −4 de Klein. Se puede comparar con la tabla presentada en la tarea 7 subítem 1a) Por el orden de los elementos el grupo regular no puede ser isomorfo al grupo Z_4. Se puede establecer una función biyectiva entre los dos conjuntos, pero se buscan justificaciones cortas, que muestren la comprensión del estudiante.

Se analiza la tarea respecto a los criterios y según la opinión de los expertos.

Criterio 1: significados del objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	5	5	5	5
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	NA	NA	NA	NA
Grupo Abstracto	4	4	4	4

La tarea 11, pretende evidenciar el conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a la comprensión del estudiante de formación matemática del subgrupo de rotaciones del cuadrado y las propiedades del grupo D_4 que en esta tarea se toma isomorfo a un subgrupo del grupo S_4 de permutaciones con 4 elementos; por tanto, la tarea se ubica en la configuración de *Conjunto de Permutaciones* en los subítems (a),(b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 4; la tarea se relaciona también, con la comprensión que tiene el estudiante de la estructura de Grupo: grupo conmutativo, subgrupo e isomorfismos con subgrupos del grupo S_4 y se ubica en la configuración de *Grupo Abstracto* con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d).

Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	3	3	3	3
Estructuras algebraicas	4	4	4	4
Grupo, ejemplos y contra ejemplos	5	5	5	5
Subgrupo	3	3	3	3
Orden del grupo	4	4	4	4
Propiedad del Grupo	5	5	5	5

En cuanto al contenido curricular, la tarea 11 ubica en el tema de *operación binaria* los subítems (a),(b),(c) y (d), con un nivel de relevancia de 3; en el tema de *estructuras algebraicas* con un nivel de relevancia de 4, en los subítems (a),(c) y (d). La tarea también pretende indagar por la propiedad conmutativa para un subgrupo del grupo D_4 visto como subgrupo isomorfo a un subgrupo del grupo S_4. También, corresponde al tema de *grupo* con un nivel de relevancia de 5, en los subítems (a),(c) y (d) al preguntar por el grupo regular de cuatro símbolos, el orden de los elementos de ese grupo regular, la propiedad conmutativa en el grupo regular y por un grupo isomorfo al grupo regular; además, la tarea corresponde de igual forma, al tema de *subgrupo* con un nivel de relevancia de 3, en los subítems (a),(c) y (d); ya que, el grupo regular en mención es un subgrupo del grupo D_4 y por tanto, todas las preguntas se relacionan con el subgrupo: los subgrupos son en si mismos grupos. Finalmente, la tarea corresponde al tema de *propiedad del grupo*con un nivel de relevancia de 5, en los subítems (b),(c) y (d); ya que, indaga por el orden de los elementos del grupo regular.

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	4	4	4	4
Conocimiento ampliado del contenido	3	3	3	3
Conocimiento especializado del contenido	4	4	4	4

Respecto a las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) la tarea 11 busca evidenciar, según el juicio de los expertos y del investigador, un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia 4 en el subítem (a); un conocimiento ampliado del contenido, ((a),(b),(c) y (d)) con un nivel de relevancia de 3 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia de 4 en los subítems (a),(b),(c) y (d). Las preguntas que componen la tarea tienen el propósito de evidenciar un conocimiento común de los estudiantes de formación matemática en cuanto a la determinación de un grupo según una propiedad definida; un conocimiento ampliado respecto a la identificación de un grupo a partir de una propiedad, la determinación del orden de los elementos en el grupo, la verificación de la propiedad conmutativa y la determinación de un grupo isomorfo al grupo regular y finalmente, un conocimiento especializado al pretender que el estudiante construya un grupo a partir de una propiedad establecida; encuentre el orden de los elementos de ese grupo; verifique la propiedad conmutativa en el grupo y finalmente, encuentre un grupo que sea isomorfo al grupo regular de rotaciones del cuadrado.

Se presentan en la tabla 3.2, los 11 ítems y sus subítems clasificados según los "significados" dados al objeto Grupo y seleccionados según el primer criterio para la construcción del cuestionario piloto. El significado del objeto grupo como *Grupo abstracto* contiene todos los ítems y subítems del cuestionario, como se evidencia en la tabla 3.2; ya que, los significados parciales del objeto grupo subyacen al significado de referencia del objeto matemático. En esta misma dirección, se presenta la tabla 3.3 con los 11 ítems y sus subítems clasificados según el criterio dos: este criterio corresponde a la *pertenencia de la tarea a alguno de los contenidos curriculares* establecidos para el estudio del objeto Grupo luego del análisis de los programas de los estudiantes de formación matemática. Y en la tabla 3.4 se presentan de igual forma, los 11 ítems y sus subítems clasificados según el criterio tres para la selección de preguntas del cuestionario; este criterio corresponde a *las categorías del conocimiento didáctico-matemático (CDM) del estudiante de formación matemática* que se pretenden evaluar con las tareas. Finalmente, en la tabla 3.5, se presentan cada una de las tareas y los criterios que ella permitirá evaluar.

Tabla 3.2: Significados del objeto Grupo

Significados del objeto Grupo	Ítem	**Subítem**	**Nivel de relevancia**
Permutación	6	a) b) c) d)	5
	9	a) b) c)	5
	10	a) b) c)	4
	11	a) b) c) d)	4
Aritmética modular	3	a) b) c)	5
	4	a) b) c) d)	3
	5	d)	5
Teoría de ecuaciones algebraicas	4	a)	5

	10	a) b) c) d)	4
Teoría de Galois	10	a)	2
Teoría de Matrices			
Grupo Abstracto	1	a) b) c) d)	3
	2	a) b) c)	4
	3	c)	5
	4	a) b) c)	4
	5	a) b) c)	3
	6	a) b) c) d)	3
	7	a) b) c) d)	3
	8	a) b) c) d)	5
	9	a) b) c)	3
	10	a) b) c)	4
	11	a) b) c) d)	4

Tabla 3.3: Contenidos curriculares para el estudio del objeto Grupo

Contenidos curriculares para el objeto Grupo	Ítem	**Subítem**	**Nivel de relevancia**
Operación binaria	1	a) b) c) d)	3
	2	a) b) c)	5
	3	a) b)	3
	4	a) b) c) d)	3
	5	a) b) c) d)	4
	6	a) c) d)	2
	7	a) b) d)	4
	11	a) b) c) d)	3
Estructuras algebraicas	1	a) b) c) d)	5
	2	a) b) c)	5
	5	a) c) d)	4
	6	a) b) c) d)	4
	7	a) b) c) d)	5
	8	a) c) d)	3
	9	a) c) d)	3
	11	a) b) c) d)	4
Grupo, ejemplos y contraejemplos	1	a) b) c)	4
	2	a) b) c)	4
	3	a) b)	5

	4	c)	5
	6	a) b) c)	4
	7	b)	5
	8	a) b) d)	4
	9	b)	4
	11	a) c) d)	5
Subgrupo	5	a) b) c)	5
	6	a) b) c)	5
	7	c)	4
	9	b)	4
	11	a) c) d)	3
Orden del grupo	6	c)	3
	7	a)	3
	8	c) d)	2
Propiedad del grupo	1	a) b) c)	4
	3	a) b) c) d)	5
	4	a) b) c)	5
	6	d)	5
	7	c)	4
	8	a) c) d)	5
	9	b)	4
	10	a) b) c) d)	5
	11	b) c) d)	5

Tabla 3.4: Categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático

Categorías del Conocimiento Didáctico-Matemático	**Item**	**Subitem**	**Nivel de relevancia**
Conocimiento común del contenido	1	a) b) c) d)	5
	2	a) b) c) d)	4
	3	a) b)	5
	4	a) b) c) d)	3
	5	a) b) c) d)	5
	6	a)	5
	7	a)	5
	8	a) b) c) d)	5
	9	a)	3

	10	d)	3
	11	a)	4
Conocimiento Ampliado del contenido	1	a) b) c) d)	2
	2	a) b) c) d)	2
	3	a) b) c) d)	4
	4	a) b) c) d)	4
	5	a) b) c)	2
	6	b) c) d)	5
	7	b) c) d)	5
	8	a) b) c) d)	3
	9	b) c) d)	3
	10	a) b) c) d)	5
	11	a) b) c) d)	3
Conocimiento especializado del contenido	1	a) b) c) d)	3
	2	d)	2
	3	c) d)	4
	4	a) b) c) d)	5
	5	b) c)	3
	6	b) c) d	4
	7	c) d)	4
	8	a) b) c) d)	4
	9	d)	2
	10	a) b) c) d)	5
	11	a) b) c) d)	4

Tabla 3.5: Tareas del cuestionario piloto *CDM-GRUPO*

Tarea	Significados	Subítems	Contenido	Subítems	Categoría del CDM	Subítems
1	Grupo abstracto	a) b) c) d)	Operación binaria	a) b) c) d)	Conocimiento común	a) b) c) d)
			Estructuras algebraicas	a) b) c) d)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	a) b) c)	Conocimiento especializado	a) b) c) d)
2	Grupo abstracto	a) b) c)	Operación binaria	a) b) c)	Conocimiento común	a) b) c) d)

			Estructuras algebraicas	a) b) c)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	a) b) c)	Conocimiento especializado	d)
3	Aritmética modular	a) b) c)	Operación binaria	b)	Conocimiento común	b)
	Grupo abstracto	c)	Grupo, ejemplos, contraejemplos	b)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Propiedad del grupo	a) b) c) d)	Conocimiento especializado	c) d)
4	Aritmética modular	a) b) c)	Operación binaria	a) b) c) d)	Conocimiento común	a) b) c) d)
	Teoría de ecuaciones algebraicas	a)	Grupo, ejemplos, contraejemplos	c)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
	Grupo abstracto	a) b) c)	Propiedad del Grupo	a) b) c)	Conocimiento especializado	a) b) c) d)
5	Aritmética modular	d)	Operación binaria	a) b) c) d)	Conocimiento común	a) b) c) d)
	Grupo abstracto	a) b) c)	Estructuras algebraicas	a) c) d)	Conocimiento ampliado	a) b) c)
			Subgrupo	a) b) c)	Conocimiento especializado	b) c) d)
6	Permutación	a) b) c) d)	Operación binaria	a) c) d)	Conocimiento común	a)
	Grupo abstracto	a) b c) d)	Estructuras algebraicas	a) b) c) d)	Conocimiento ampliado	b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	a) b) c)	Conocimiento especializado	b) c) d)
			Subgrupo	a) b) c)		
			Orden del grupo	c)		
			Prop. del grupo	d)		
7	Grupo abstracto	a) b) c) d)	Operación binaria	a) b) d)	Conocimiento común	a)

			Estructuras algebraicas	a) b) c) d)	Conocimiento ampliado	b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	b)	Conocimiento especializado	d)
			Orden del grupo	a)		
			Propiedad del grupo	c)		

Tarea	Significados	Subítems	Contenido	Subítems	Categoría del CDM	Subítems
8	Grupo abstracto	a) b) c) d)	Estructuras algebraicas	a) c) d)	Conocimiento común	a) b) c) d)
			Grupo, ejemplos, contraejemplos	a) b) d)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
			Orden del grupo	c) d)	Conocimiento especializado	a) b) c) d)
			Propiedad del grupo	a) c) d)		
9	Permutación	a) b) c)	Estructuras algebraicas	a) c) d)	Conocimiento común	a)
	Grupo abstracto	a) b) c)	Subgrupo	b)	Conocimiento ampliado	b) c) d)
			Propiedad del Grupo	b)	Conocimiento especializado	d)
			Grupo, ejemplos y contraejemplos	b)		
10	Permutación	a) b) c)	Propiedad del grupo	a) b) c) d)	Conocimiento común	d)
	Teoría de ecuaciones algebraicas	a) b) c) d)			Conocimiento ampliado	a) b) c) d)
	Teoría de Galois	a) b) c) d)			Conocimiento especializado	a) b) c) d)
	Grupo abstracto	a) b) c)				
11	Permutación	a) b) c) d)	Operación binaria	a) b) c) d)	Conocimiento común	a)
	Grupo abstracto	a) b) c) d)	Estructuras algebraicas	a) b) c) d)	Conocimiento ampliado	a) b) c) d)

			Grupo, ejemplos y contraejemplos	a) c) d)	Conocimiento especializado	a) b) c) d)
			Subgrupo	a) c) d)		
			Propiedad del grupo	b) c) d)		

El documento para los expertos se imprimió y organizó en carpetas que fueron entregadas a los 11 expertos en Álgebra Abstracta; se obtuvo respuesta solo de 9 expertos, los cuales son docentes universitarios, magísteres y otros doctores en matemática en la línea de Álgebra: profesores de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (7); de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (1) y de la Universidad del Norte (1). Estos docentes se seleccionaron por su conocimiento experto en el tema de Teoría de Grupos y por su desempeño como docentes de programas de formación matemática y específicamente, de la asignatura de Teoría de Grupos (Millman & Green, 1989); se les solicitó emitir un juicio según las indicaciones presentadas en el cuestionario, donde se preguntaba por el grado de relevancia de cada subítem respecto a los tres criterios definidos para la selección de tareas.

Se presenta parte del documento:

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Escuela de Matemáticas y Estadística

Cuestionario CDM-Grupo

Nombre:____

Universidad donde labora:______________________________

Último título académico:______________________________

Estimado doctor, queremos agradecerle por el apoyo que nos puede brindar, para llevar a cabo una de las etapas más importantes en el desarrollo de nuestra tesis doctoral titulada: *El Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor Universitario: Objeto Grupo.* Esta evaluación mediante juicio de expertos, sustenta la fiabilidad y validez del instrumento que se está construyendo para evaluar el conocimiento didáctico - matemático del estudiante de formación matemática (Licenciados en Matemáticas y Matemáticos) sobre el objeto Grupo, para la labor de enseñanza en el ámbito universitario.

Como criterios de evaluación en la selección de las tareas del cuestionario, se han tenido en cuenta los siguientes:

- Tareas que proporcionen información sobre el grado de ajuste del **significado**

personal de los estudiantes de formación matemática, respecto del significado global del objeto Grupo. Para esto, se incluyen ítems que activan los diferentes sentidos del objeto Grupo: *Permutaciones, Aritmética Modular, Teoría de Ecuaciones Algebraicas, Teoría de Galois, Teoría de Matrices e invariantes en Geometría;* según su evolución histórica, hasta llegar a la consolidación del concepto que se tiene en la actualidad.

- Aquellas tareas que ponen en juego:
  El conocimiento común del contenido (resolver la tarea matemática propia de la Teoría de Grupos. Es el conocimiento que tendrían por ejemplo los físicos, químicos o cualquier estudiante que cursa Teoría de Grupos); tareas que requieren de un conocimiento ampliado (generalizar tareas sobre el conocimiento común o especializado y/o realizar conexiones con objetos más avanzados del currículo) y aquellas que requieren del conocimiento especializado, que se define como aquel que es necesario para la labor de la enseñanza en el ámbito universitario (como: usar diferentes representaciones, distintos significados del objeto matemático, resolver un problema mediante diferentes procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego para la resolución de una tarea matemática).

- Tareas que se relacionen con los siguientes contenidos:
  Operaciones binarias, Estructuras algebraicas elementales, Grupos, ejemplos y contraejemplos, Grupo de elementos invertibles de un semigrupo, Subgrupos, Orden de un grupo, orden de un elemento, Propiedades de los Grupos (ser Abeliano, cíclico, ser un grupo de permutaciones, isomorfismos, homomorfismos, etc.)

En este sentido, solicitamos su colaboración para evaluar cada una de las tareas que componen el instrumento denominado *Cuestionario CDM - Grupo,* respecto a los criterios anteriores. Nos interesa saber su punto de vista sobre los siguientes aspectos:

- El grado de relevancia con el que el ítem evalúa alguno de los diferentes significadosdel objeto grupo (teniendo en cuenta el origen de este objeto: desde la Teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la Geometría).

- El grado de relevancia con el que evalúa los diferentes tipos de conocimientos del es-tudiante de formación matemática, para la labor de profesor universitario de Teoría de Grupos.

- El tipo y grado de relevancia con el que se evalúa el CDM (conocimiento didáctico-matemático).

- La ausencia de algún contenido importante.

- La redacción y comprensión de los enunciados.

- Sugerencias.

Para este análisis se han incluido tablas que evalúan el grado de relevancia de los tres criterios mencionados, siendo: NR=Nivel de Relevancia

Nada relevante = 1

Totalmente relevante = 5

NA= No aplica

Por favor, para cada uno de los ítems de la tarea, marque el nivel que corresponda según su criterio; si un ítem no aplica marque NA.

TAREA 1. En el conjunto $(Z, *)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$
a)¿ Existe el elemento identidad? Justifique

b) ¿ $*$ define una operación asociativa? Justifique

c) ¿Existe el inverso del elemento 3? Justifique

d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para $\{..., -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Conocimiento Didáctico - Matemático	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NR**	**NA**
	1	2	3	4	5	
Significados del objeto Grupo: Permutaciones						
a)						
b)						
c)						
d)						

En la misma dirección y según el juicio de los expertos, se presenta en la figura 3.1 el grado de relevancia asignado a cada una de las tareas del cuestionario, según el criterio 1, que corresponde a la pertenencia de la tarea en un contexto de significado del objeto Grupo: estos contextos corresponden a: P=Permutación; AM=Aritmética modular; TEA=Teoría de ecuaciones algebraicas; TG=Teoría de Galois; TM=Teoría de Matrices; GA=Grupo abstracto.

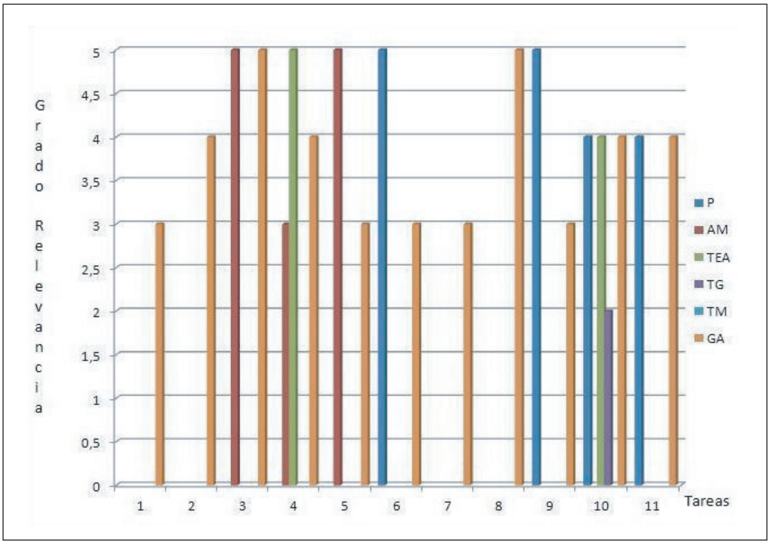


Figura 3.1: Tareas según el significado del objeto Grupo y grado de relevancia

Para la selección de tareas, con el criterio 1, se pretende que estas se ubiquen en un contexto de significado. Según el grado de relevancia asignado por los expertos se concluye que en el contexto de *Conjunto de Permutaciones* se encuentran las preguntas 6 y 9 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 10 y 11 con un nivel de relevancia de 4; en el contexto de *Aritmética Modular* se encuentran las preguntas 3 y 5 con un nivel de relevancia de 3; respecto al significado de Grupo en el contexto de *Teoría de Ecuaciones algebraicas* se encuentra la pregunta 4 con un nivel de relevancia de 5 en el subítem (a) y la pregunta 10 con un nivel de relevancia de 4 en todos los subítems. Al contexto de la *Teoría de Galois* corresponde la pregunta 10 con un nivel de relevancia de 2 en el subítem (a) y finalmente, en el contexto de Grupo como *Grupo abstracto* se encuentran las preguntas 3 y 8 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 2,4,10 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 1,5,6,7,9 con un nivel de relevancia de 3 (ver, tabla 3.2).

De los criterios dados por expertos, se concluye que se debe incluir una pregunta que corresponda al contexto de la *Teoría de Galois y Teoría de Matrices.* Por tanto, se analiza la figura 3.1. y se determina que las tareas que pueden eliminar según los criterios de los expertos pueden ser: la tarea 7 que tiene un nivel de relevancia de 2 y corresponde a la categoría de grupo como *Grupo abstracto,* donde quedan incluidas todas las preguntas del cuestionario (11 preguntas) y la tarea 1 que corresponde al significado de Grupo abstracto, con un nivel de relevancia de 3 y en este contexto se encuentran todas las tareas del cuestionario.

De la prueba piloto aplicada a los estudiantes de formación matemática y luego de una revisión y un análisis al desarrollo de las tareas; junto con el análisis de los comentarios de los estudiantes; tales como: "el tiempo de 2 horas no alcanza para resolver las tareas propuestas", se concluye, que se deben eliminar o sintetizar algunas de las tareas y además, se deben incluir las tareas que hacen falta: se resalta que algunas preguntas se relacionan con la Teoría de Galois, solo que la relación no es dada en forma explícita.

En la figura 3.2 se presenta las tareas según el criterio 2 de selección que buscaba que las tareas se relacionaran con un contenido curricular. Según el grado de relevancia asignado por los expertos (ver, tabla 3.3) se concluye que en el tema de Operación binaria (OB), se encuentra la pregunta 2 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 5 y 7 con un nivel de relevancia de 4; en el tema de Estructuras algebraicas (EA), las preguntas 1,2 y 7 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 5,6 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 8 y 9 con un nivel de relevancia de 3. En el tema de Grupo, ejemplos y contraejemplos (GEC), se encuentran las tareas 3,4,7 y 11 con un nivel de relevancia de 5; las tareas 1,2,6,8 y 9 con un nivel de relevancia de 4; en el tema de Subgrupo (S), las preguntas 5 y 6 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 7 y 9 con un nivel de relevancia de 4 y la pregunta 11 con un nivel de relevancia de 3; en el tema: Orden del grupo (OG), se encuentran las tareas 6 y 7 con un nivel de relevancia de 3 y la pregunta 8 con un nivel de relevancia de 2; en el tema: Propiedades del grupo (PG), se encuentran las preguntas 3,4,6,8,10 y 11 con un nivel de relevancia de 5 y las preguntas 1,7 y 9 con un nivel de relevancia de 4.

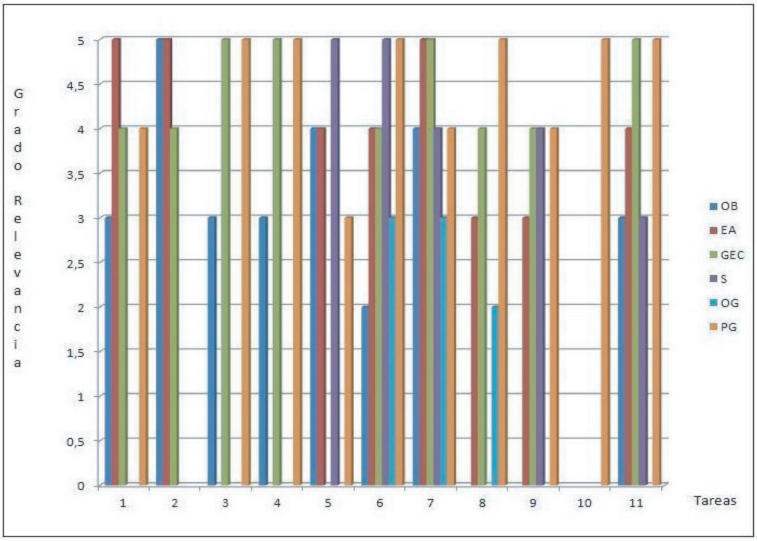


Figura 3.2: Tareas según el contenido curricular para el objeto Grupo y grado de relevancia. OB=Operación binaria; EA=Estructuras algebraicas; GEC=Grupo, ejemplos y contraejemplos; S=Subgrupo; OG=Orden del grupo; PG=Propiedades del grupo.

Del juicio de expertos y según el grado de relevancia asignado respecto al criterio 2, se concluye que se puede eliminar la pregunta 7 que se relaciona con el tema de *Operación binaria* con un nivel de relevancia de 4, con el tema de *Estructuras algebraicas* con un nivel de relevancia de 5, con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 5, con el tema de *Subgrupo* donde se encuentran otras 9 tareas y un nivel de relevancia de 4 y con el tema de *Propiedad de Grupo* con un nivel de relevancia de 4. De igual forma, la pregunta 8 se encuentra en el tema de *Estructuras algebraicas* donde aparecen 8 tareas con un grado de relevancia de 3, en el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4, en el tema de *Orden del grupo* con un nivel de relevancia de 2. Se realiza en la misma dirección el análisis a la tarea 1 y se encuentra que se relaciona con el tema *Operación binaria* con un grado de relevancia de 3, con el tema de *Estructuras algebraicas* con un grado de relevancia de 5, con el tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* donde se encuentran 9 tareas con un grado de relevancia de 4 y con el tema de *Propiedades de Grupo* donde se encuentran 9 tareas con un nivel de relevancia de 4.

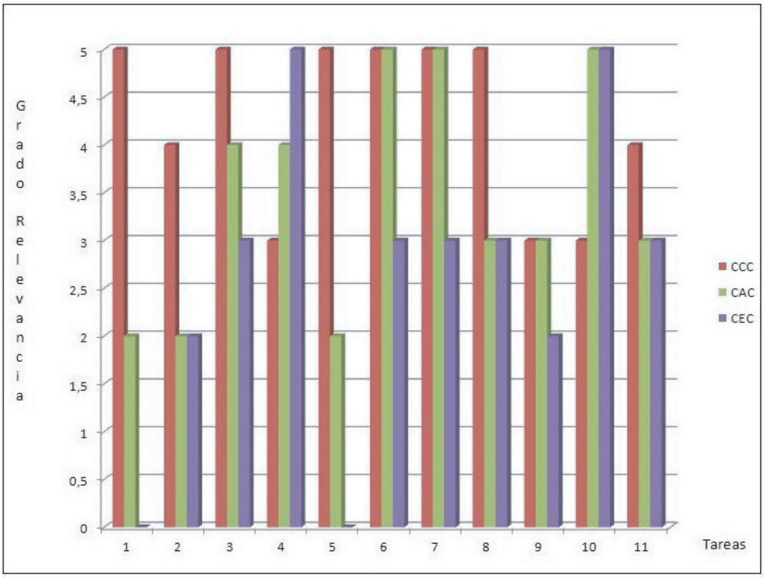


Figura 3.3: Tareas de la subcategoría del CDM y grado de relevancia. CCC=Conocimiento común del contenido; CAC= Conocimiento ampliado del contenido; CEC=Conocimiento especializado del contenido.

En la figura 3.3 se presenta las tareas respecto al criterio de selección 3, que busca que las tareas permitan evaluar una subcategoría del *Conocimiento didáctico-matemático del estudiante de formación matemática sobre el objeto grupo* referente a la faceta epistémica de este CDM. Según el grado de relevancia asignado por los expertos (ver, tabla 3.4) se concluye que en la subcategoría del *Conocimiento común del contenido*

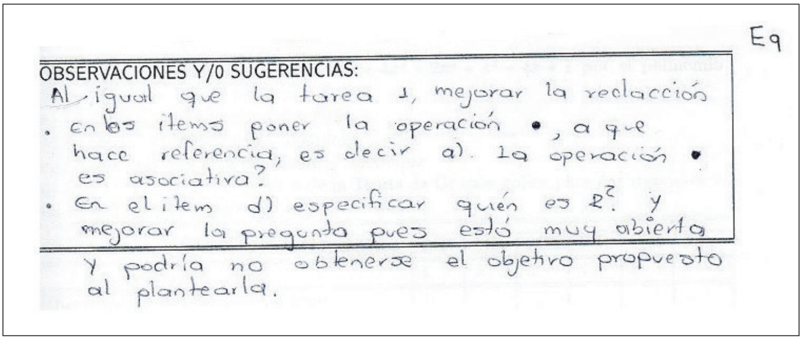
(CCC) se encuentran las preguntas 1,3,5,6,7 y 8 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 2 y 11 con un nivel de relevancia de 4 y las preguntas 4,9 y 10 con un nivel de relevancia de 3; en la subcategoría de *Conocimiento ampliado del contenido (CAC)* se encuentran las preguntas 6,7 y 10 con un nivel de relevancia de 5; las preguntas 3 y 4 con un nivel de relevancia de 4; las preguntas 8,9 y 11 con un nivel de relevancia de 3 y las preguntas 1,2 y 3 con un nivel de relevancia de 2. En la subcategoría de *Conocimiento especializado del contenido (CEC)* se encuentran las tareas 4 y 10 con un nivel de relevancia de 5; las tareas 3,6,7,8 y 11 con un nivel de relevancia de 3 y las tareas 2 y 9 con un nivel de relevancia de 2.

Del juicio de expertos y del grado de relevancia asignado por ellos respecto al criterio 3, se concluye que se puede eliminar la pregunta 2 que permite evaluar en ciertos aspectos, el CAC y el CEC con un nivel de relevancia de 2; de igual forma, la tarea 8 que permite evaluar el CAC y el CEC con un nivel de relevancia de 3. Se analiza la tarea 7 como posible tarea a ser eliminada y se concluye que ella permite medir el CCC con un nivel de relevancia de 5 pero que en esta categoría se encuentran 6 tareas; de igual forma, permite medir el CAC con un nivel de relevancia de 5 y se encuentran entre 3 tareas y finalmente, permite medir el CEC con un nivel de relevancia de 3 en una categoría que cuenta con 5 tareas (ver, figura 3.4).

En la misma dirección, se analiza la pregunta 1, bajo el criterio 3 y según el juicio de los expertos: se encuentra que respecto al CCC el nivel de relevancia es 5, pero respecto al CAC el nivel de relevancia es de 2.

De igual forma, se analizaron las sugerencias de los expertos, que en algunos casos se relacionaron con la *formulación* de las preguntas y en la búsqueda de mayor claridad y comprensión por parte de los estudiantes: estas sugerencias se analizaron minuciosamente, ya que en algunos casos, para el experto no era clara la pregunta dentro del contexto histórico. Por ejemplo, respecto a la Teoría de Galois, no es habitual que se trabaje en los cursos de Teoría de Grupos así corresponda a un significado del objeto Grupo; por tanto, algunos de los ejercicios con el grupo S_n que se relacionan con el grupo de Galois del polinomio, no eran claros para los expertos. Finalmente, se incluye la tarea 8 que corresponde al significado de Grupo en el contexto de la *Teoría de Matrices* en el cual hacían falta algunas preguntas.

Se presentan una de las sugerencias de los expertos: cada una fue motivo de un análisis minucioso, para determinar la validez y concreción de las mismas y su aplicabilidad respecto a los criterios definidos para su análisis.


Eq

OBSERVACIONES Y/0 SUGERENCIAS:
Al igual que la tarea 1, mejorar la redacción
. en los ítems poner la operación •, a que
hace referencia, es decir a). la operación •
es asociativa?
• En el ítem d) especificar quién es e? y
mejorar la pregunta pues está muy abierta
y podría no obtenerse el objetivo propuesto
al plantearla.

Figura 3.4: Sugerencia de expertos a la tarea 2

En esta dirección, luego de realizar los análisis y de cruzar la información respecto a los análisis presentados para la eliminación o cambio de tareas, se concluye que se cambia la pregunta 1; ya que la pregunta 2 en cuanto a los significados tiene un grado de relevancia alto de 4 y en cuanto al contexto de Grupo como grupo abstracto; además, corresponde al tema de operación binaria, con un grado de relevancia de 5; al tema de Grupo, ejemplos y contraejemplos con un nivel de relevancia de 5 y al tema de subgrupo con un nivel de relevancia de 4. La tarea 7 es la única tarea donde se trabaja el grupo cociente y la tarea 8 es la tarea que realmente correspondería al concepto de grupo como Grupo Abstracto; por tanto, se determina que la pregunta que se elimina o se cambia es la pregunta 1.

3.4. Prueba piloto del instrumento CDM-Grupo

El cuestionario piloto se aplicó a 17 estudiantes de formación matemática: 11 de Licenciatura en Matemáticas y 6 de Matemáticas en la asignatura de Teoría de Anillos; estudiantes que ya han aprobado la asignatura Teoría de Grupos y continúan con esta otra asignatura. A estos estudiantes, se les solicitó responder el cuestionario con el objetivo de evaluar algunos de los conocimientos relacionados con Teoría de Grupos. El objetivo de la aplicación de la prueba piloto era valorar, por medio de un análisis cualitativo y cuantitativo, ciertos aspectos, tales como: adecuación del tiempo estimado (2 horas), claridad, comprensión de los enunciados e índice de dificultad de los subítems que componen cada ítem, además de incrementar y sustentar la validez y factibilidad del cuestionario definitivo (Cohen, Manion & Morrison, 2011).

Al iniciar la aplicación de la prueba piloto, se dieron y se leyeron las instrucciones claras y precisas sobre cómo responder el cuestionario y sobre cuál era el objetivo de dicha aplicación. Además, se les solicitó a los estudiantes que indicaran las dificultades en relación a la comprensión y redacción de los ítems. Por lo anterior, durante la aplicación del cuestionario, algunos de los estudiantes informaron que el tiempo de 2 horas era insuficiente para abordar las 11 preguntas del cuestionario:

atendiendo a esta inquietud se valoran y analizan las primeras 7 preguntas y se hacen pequeñas modificaciones al cuestionario piloto.

3.4.1. Análisis cuantitativo de la prueba piloto en el grupo de Licenciados en Matemáticas

La prueba piloto fue aplicada en el curso de Teoría de anillos, en la segunda semana de Junio del 2015. En esta asignatura se espera reforzar y continuar con el desarrollo de los conceptos de Teoría de Grupos al estudiar los anillos como estructura matemática, en las cuales se definen dos operaciones para el conjunto dado $(A,+,.)$ de modo que el conjunto con la primera operación $(A,+)$ es un grupo abeliano y con la segunda operación un semigrupo (clausura y asociatividad de la operación) y se cumplen dos propiedades distributivas. Atendiendo a las sugerencias de los expertos en Álgebra, se consideró que al final de esta asignatura era apropiado aplicar la prueba piloto; se esperaba que como en la asignatura de anillos se profundizan los conceptos y definiciones del objeto grupo, los estudiantes tuvieran estos conocimientos presentes para la solución de las tareas planteadas. La prueba tuvo una duración de dos horas y fue aplicada por el profesor de la asignatura de Teoría de Anillos.

Los resultados individuales en la prueba piloto se presentan en las tablas 3.6 a 3.11 para el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Para la valoración de la prueba se tuvo presente que como la mayoría de los estudiantes solo contestó hasta la pregunta 7 -por cuestiones de tiempo- la nota definitiva para este análisis se tomó sobre 70 puntos al analizar las 7 primeras preguntas; se hizo la equivalencia de 70 a 50 y en cada caso se presenta la respectiva conversión para asignar una valoración definitiva a la prueba que tome valores entre 0 y 50 puntos que es lo habitual en este contexto universitario y como cada tarea consta de cuatro subítems, a cada uno se le asigna una valoración de 2.5 puntos para la suma total y luego se aplica la conversión respectiva.

Para el análisis cuantitativo de la prueba piloto, se consideró la variable "grado de corrección de las respuestas del ítem" donde se asignan los valores de 0 si la respuesta es incorrecta; 2.5 si la respuesta es correcta y entre 0 y 2.5 si la respuesta se encuentra parcialmente correcta. Los criterios de corrección para la consideración de una respuesta incorrecta, parcialmente incorrecta o correcta se encuentran en la solución dada para cada una de las tareas. En consecuencia, de acuerdo con las puntuaciones establecidas para el grado de corrección de las respuestas al ítem, el puntaje máximo y mínimo a obtener en el cuestionario corresponde a 50 y 0 puntos respectivamente.

Para determinar el índice de dificultad de la tarea (ítem), se divide el número de personas que contestan correctamente el ítem, entre el total de personas. La escala de clasificación para la dificultad de los ítems se toma de la literatura especializada (Muñiz, 1994). Según los índices de dificultad, establecidos en la literatura se recomendaban los siguientes porcentajes:

5 por ciento de ítems fáciles.
20 por ciento para ítems medianamente fáciles.
50 por ciento, para ítems de dificultad media.
20 por ciento, para ítems medianamente difíciles.
5 por ciento, para ítems difíciles.

Según la escala anterior se establecen los siguientes intervalos de clasificación que se pueden traducir en porcentajes o en forma decimal, para el índices de dificultad del ítem:

dificultad de 0: ítem de alto grado de dificultad (valor extremo).

≤ 0,05 ítem difícil.
(0,05 – 0,25] ítem medianamente difícil.
(0,25 – 0,75] ítem de dificultad media.
(0,75 – 0,95] ítem medianamente fácil.
> 0,95 ítem fácil.
1 ítem de un grado máximo de facilidad.

De igual forma, se establecen los siguientes niveles de dominio del conocimiento, según la escala del índice de dificultad de la pregunta:

Dificultad ≤ 0,25: bajo nivel de dominio.
Dificultad entre (0,25, 0,75): nivel de dominio medio.
Dificultad ≥ 0,75: alto nivel de dominio.

Se consideró necesario incluir en el instrumento ítems de todos los grados de dificultad; para obtener, un nivel de dificultad balanceado y en especial, se consideró pertinente que el nivel de dificultad del ítem correspondiera a un nivel de dominio medio, como se establece en la literatura especializada.

Se presentan los resultados de la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas en la tabla 3.6.

Tabla 3.6: Resultados de la prueba piloto - Licenciados en Matemáticas

Resultados de la prueba piloto del cuestionario CDM – Grupo																					
L1																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	0	a	2	a	0	a	0	a	2.5	a	1.5	a	0	a	2.0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	2.0	b	1.5	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	2.0	c	2.0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	2	d	0	d	2.5	d	2.0	d	0	d	0	d	0
	10		10		0		2		2		0		9		7		0		2		0
N	=	42																		=	30
L2																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	0	a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	2.5		0		0		2.5		5		0		0		0		0		0		0
N	=	10																		=	0.7
L3																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		5		5		2.5		2.5		0		2.5		0		0		0		0
N	=	27.5																		=	20
L4																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	0	a	0	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	0	b	0	b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	2.5		0		0		0		7.5		0		0		0		0		0		0
N	=	10																		=	0.7
L5																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	2.5	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	5		5		0		2.5		2.5		0		0		0		0		0		0
N	=	15																		=	11
L6																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	¡
	10		5		2.5		2.5		2.5		0		2.5		5		0		0		0
N	=	30																		=	21

Resultados de la prueba piloto del cuestionario CDM – Grupo																					
L7																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	5		10		5		2.5		0		0		5			0	0		0		0
N	=	27.5																		=	20
L8																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	2.5		0		0		0		0		0		0		0		0		0		0
N	=	2.5																		=	0.2
L9																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	7.5		5		0		2.5		5		5		2.5		0		0		0		0
N	=	27.5																		=	20
L10																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	0.5	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	2.5		7.5		3		0		2.5		0		0		0		0		0		0
N	=	15.5																		=	11
L11																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	0	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0	d	0
	7.5		5		7.5		5		0		2.5		0		0		0		0		0
N	=	27.5																		=	20

Tabla 3.7: Resultados en la prueba piloto de los Licenciados en Matemáticas

Estudiante	Valoración
LM1	30
LM2	0.7
LM3	20
LM4	0.7
LM5	11
LM6	21

Estudiante	Valoración
LM7	20
LM8	0.2
LM9	20
LM10	11
LM11	20

Tabla 3.8: Distribución de frecuencias de la puntuación total en el grupo de Licenciados en Matemáticas

Intervalos de puntuación	**Frecuencia absoluta**	**Porcentaje**
0-5	1	9.1
5-10	2	18.2
10-15	2	18.2
15-20	0	0
20-25	5	45.4
25-30	1	9.1
30-35	0	0
35-40	0	0
40-45	0	0
45-50	0	0

Según la tabla 3.8 de frecuencias, se observa que el 45.5 por ciento *de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas* obtienen una puntuación menor a 20 puntos (sobre 50) en la prueba piloto, lo que muestra *cierto grado de dificultad* (ver, figura 3.5) para los estudiantes. Se presenta en la tabla 3.9. y 3.10. los estadísticos que permitieron hacer inferencias sobre las valoraciones de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

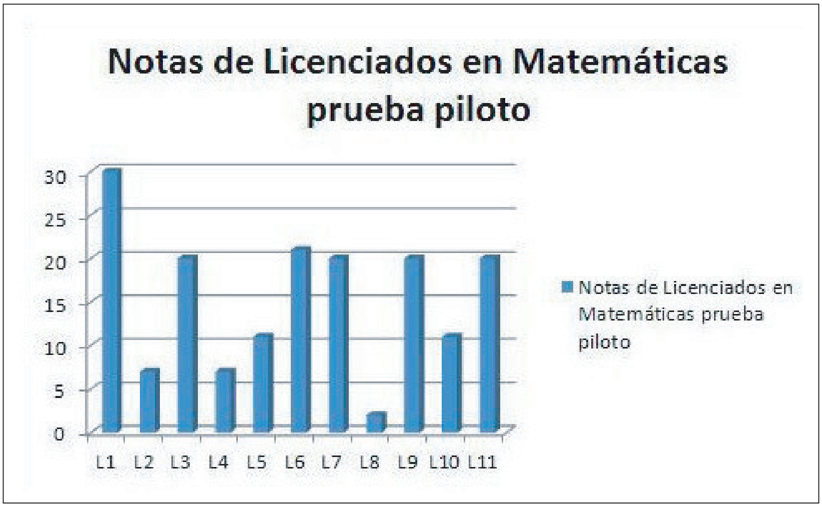


Figura 3.5: Resultados de la prueba piloto en el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

Tabla 3.9: Distribución de frecuencias de la puntuación total de los Licenciados en Matemáticas

	Estadístico
Mínimo	2
Máximo	30
Rango	28
Media	15.36
Mediana	20
Desviación estándar	8.29

De la tabla 3.6 se observa que ningún estudiantes obtuvo la puntuación máxima de 50 puntos, siendo la media de 15.36 puntos, es decir, que el porcentaje de logro corresponde a un 9 por ciento, lo que evidencia que el instrumento presentó cierto grado de dificultad para los estudiantes. En la tabla 3.10. se presentan los cuartiles correspondientes a las notas y en la figura 3.16 se presenta la distribución de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en la prueba piloto.

Tabla 3.10: Puntuación total en la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas

	Valores	**Ancho**
Mínimo	2	2
Quartil1	9	7

	Valores	Ancho
Quartil2- Mediana	20	11
Quartil3	20	0
Máximo	30	10

Se presenta en la figura 3.6 el diagrama de caja, realizado partir de la tabla 3.10 con el fin de complementar el análisis de la prueba piloto aplicada a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

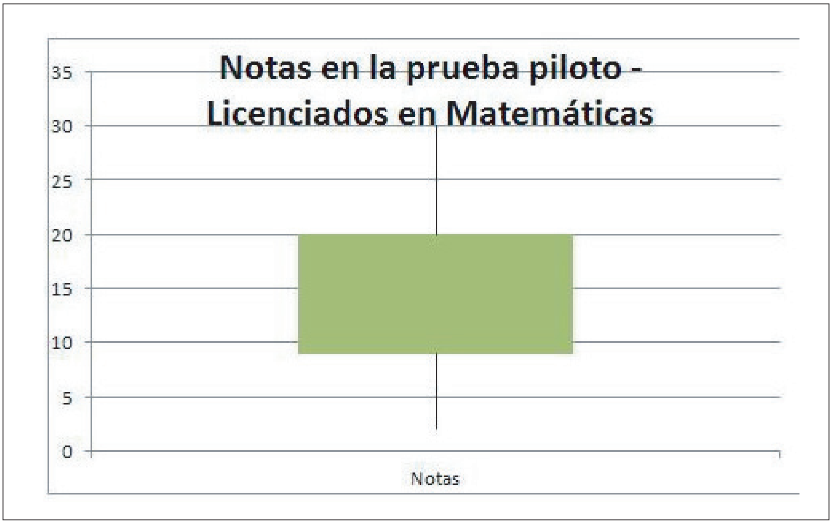


Figura 3.6: Distribución de las puntuaciones y puntuación media en la prueba piloto de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

En la figura 3.6 y en la tabla 3.10, se observa que la mediana corresponde a la nota de 20 puntos y que el 50 por ciento de las notas, se encuentran en el intervalo (9,20); el rango intercuartílico (Q3-Q1) corresponde a 11 puntos, lo que permite concluir que no se encuentran valores atípicos en la distribución de las notas.

3.4.1.1. Análisis de la fiabilidad

Con el cuestionario piloto y utilizando las respuestas dadas por los estudiantes de Licenciatura en Matemática a los siete primeros ítems, se realizó un análisis según las respuestas, ya que, ellas son observables y medibles. Así, con base en los conocimientos puestos en juego en las soluciones a las situaciones problemáticas planteadas, fue posible inferir algunos aspectos del conocimiento didáctico-matemático sobre el objeto de investigación que no se pueden observar en forma directa, pero sí en las prácticas de los estudiantes. En esta dirección, es necesario que el instrumento sea fiable, que permita realizar inferencias útiles sobre lo que se busca medir. Por esto, se analizó la fiabilidad, entendida como la estabilidad en las puntuaciones que el cuestionario proporciona si este fuera administrado en repetidas ocasiones al mismo grupo de estudiantes (Vásquez, 2014). Se utiliza el estadístico: “coeficiente alfa de Cronbach” ya que el representa una forma de acercarse a la fiabilidad. Más que la estabilidad de las medidas, el coeficiente alfa de Cronbach refleja el grado en el que covarían los ítems que constituyen el test y por tanto, es un indicador de la consistencia interna del test (Muñiz, 1994).

El Coeficiente Alfa de Cronbach, requiere de una sola administración del instrumento de medición y se aplicó a la prueba piloto: este coeficiente produce valores que oscilan entre O y 1: se trata de un índice de consistencia interna, que sirve para comprobar si el instrumento que se está evaluando recopila información defectuosa y por tanto, puede llevar a conclusiones equivocadas o si por el contrario se tiene un instrumento fiable que hace mediciones estables y consistentes. El alfa, mide la homogeneidad de las preguntas promediando todas las correlaciones entre los ítems para ver que efectivamente se parezcan. Cuanto más se acerque al valor de uno (1) mejor es la fiabilidad; la ventaja de su aplicación radica en que simplemente se aplica a la medición y se calcula directamente.

El valor obtenido de la notas del cuestionario para el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas fue de aproximadamente $\alpha = 0{,}6$. Este valor sugiere una correlación no tan fuerte; sin embargo, si se interpreta como un índice de fiabilidad el valor no es excesivamente elevado, pero si se puede considerar como suficiente para el caso, ya que el cuestionario no es homogéneo en tanto que incluye gran variedad de aspectos y contenidos a evaluar. En este aspecto, se pueden eliminar ítems en el sentido de mala discriminación lo que aumenta el valor del $\alpha = 0{,}6$.

3.4.1.2 Análisis del índice de dificultad

El índice de dificultad, valora la dificultad que conlleva la resolución de la situación problemática planteada y se define como la razón entre el “número de aciertos/ número de respuestas” (Muñiz, 1994). Dicho índice de dificultad toma valores entre 0 y 1, donde 0 indica que el subítem tiene un alto grado de dificultad, mientras que 1 indica que el subítem tiene un grado de *máxima facilidad*, siendo los índices de dificultad media los que mejor discriminan.

Para el cálculo del índice de dificultad se clasificaron las respuestas en correctas e incorrectas y parcialmente correctas, las respuestas en blanco no se consideraron; así que fue posible analizar qué situaciones problemáticas resultaron más “fáciles” o más “difíciles” para el grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Se tomó el índice de dificultad respecto a las 7 primeras preguntas, ya que, en los dos grupos según, los informes de los profesores que aplicaron la prueba; solo se alcanzó a trabajar en estas preguntas. Se presenta en la tabla 3.11 el índice de dificultad de la pregunta y el índice promedio de dificultad del ítem para los Licenciados en Matemáticas.

Tabla 3.11: Índice de dificultad de la prueba piloto para los Licenciados en Matemáticas

Índice de dificultad del cuestionario para los Licenciados en Matemáticas									
	R-Correctas		R-Incorrectas		R-Parcial-mente-C				
P1.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Índice	%
a)	6	55	5	45	0	0	0.55	55
b)	6	55	5	45	0	0	0.55	55
c)	4	36	7	64	0	0	0.36	36
d)	10	90	1	10	0	0	0.90	90
	Media	0.59						
P2.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Índice	%
a)	8	73	3	27	0	0	0.73	73
b)	8	73	3	27	0	0	0.73	73
c)	3	27	8	73	0	0	0.27	27
d)	3	27	8	73	0	0	0.27	27
	Media	0.50						
P3.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Índice	%
a)	5	45	6	55	0	0	0.45	45
b)	3	27	8	73	0	0	0.27	27
c)	0	0	11	100	0	0	0	0
d)	1	10	9	80	1	10	0.18	18
	Media	0.22						
P4.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Índice	%
a)	6	54	4	36	1	10	0.64	64
b)	0	0	11	100	0	0	0	0
c)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
d)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
	Media	0.21						
P5.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Índice	%
a)	2	18	9	82	0	0	0.18	18
b)	2	18	9	82	0	0	0.18	18
c)	2	18	9	82	0	0	0.18	18
d)	6	54	4	36	1	10	0.64	64
	Media	0.30						
	R-Correctas		R-Incorrectas		R-Parcial-mente-C			
P6.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Índice	%
a)	0	0	11	100	0	0	0	0
b)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
c)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
d)	2	18	9	82	0	0	0.18	18
	Media	0.10						
P7.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Índice	%
a)	4	36	7	64	0	0	0.36	36
b)	1	9	9	82	0	0	0.18	18
c)	1	10	10	90	0	0	0.1	10
d)	2	18	8	82	0	0	0.18	18
	Media	0.18						
	Media General	0.30						

En la figura 3.7 se observan los resultados obtenidos al agrupar los ítems del cuestionario piloto según su índice de dificultad y según las ponderaciones obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. De los 7 ítems explorados, el 43 por ciento (3) presentan una dificultad media con valores entre (0.41 - 0.60); en este punto según la literatura consultada (Muñiz, 1994), se espera que el 50 por ciento de los ítems de un cuestionario presenten un índice de dificultad media; mientras que 57 por ciento (4), resultaron con un índice de dificultad medianamente difícil y según la literatura se espera el 20 por ciento de los ítems. De otra parte, no se encuentran ítems medianamente fáciles, ni ítems fáciles según la escala de clasificación tomada para los índices de dificultad y tampoco hay ítems difíciles. Las escalas para la clasificación de los índices de dificultad pueden variar según los resultados que espera el investigador que valida el cuestionario. Para el caso se podrían omitir la pregunta 3, 4 o 6 para reducir el índice de dificultad del instrumento (preguntas difíciles).

En la tabla 3.11 y en la figura 3.7 se presentan los índices de dificultad para los distintos ítems. Se observa que el cuestionario en general presenta un nivel de dificultad que oscila entre el *10 por ciento y el 59 por ciento*; esto corresponde a preguntas medianamente difíciles, es decir, con una dificultad media. Se observó que, en general el cuestionario presentó una dificultad media, tendiente a medianamente difícil con un porcentaje del 30 por ciento, por lo que se concluye que en cierta forma no debería representar mayores dificultades a los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, ya que, este es el índice que se espera de un instrumento de evaluación, pero lo que realmente se evidencia de la aplicación del instrumento, es que este presentó dificultad para los estudiantes.

Se describen los principales hallazgos de la aplicación de la prueba piloto al grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

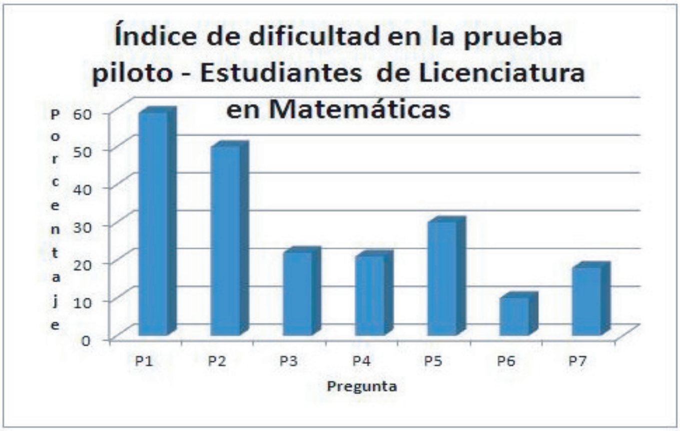


Figura 3.7: Dificultad de los ítems en la prueba piloto - estudiantes de Licenciatura en Matemáticas

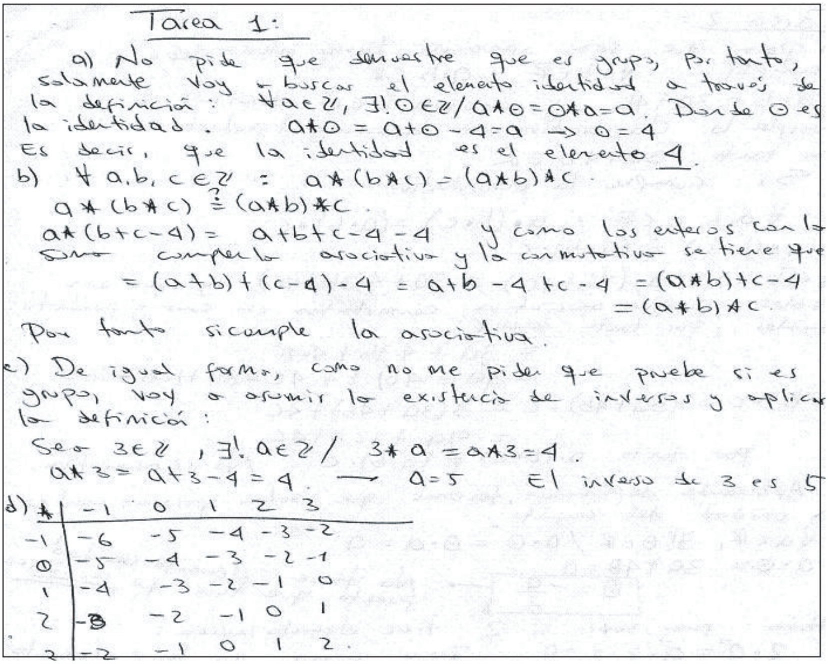
Pregunta 1

En relación con la pregunta 1 y según la tabla 3.11 donde se muestran las frecuencias y los porcentajes de respuestas se observa que el 55 por ciento de los estudiantes de Licenciatura, pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el elemento identidad en el conjunto de los $(Z,*)$; donde $a * b := a + b - 4$ y comprobar que se cumple la propiedad asociativa con esta nueva operación; además, para los estudiantes es *muy fácil* elaborar parte de la tabla de operación de los elementos del conjunto (90 por ciento) pero para los estudiantes es "medianamente difícil" identificar el inverso del elemento 3 con la operación definida en los enteros (0.36); según el rango considerado, este porcentaje se sitúa en un *nivel de dificultad media (0.31-0.4)*. Se ha decidido cambiar la pregunta 1 en su totalidad, teniendo presente el análisis de contenido del ítem y teniendo presente que se debe incluir un ítem relacionado con el contexto de Teoría de Matrices.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas a la pregunta, se infiere que el 45 por ciento de los estudiantes no pueden determinar cuál es el elemento identidad en los enteros con la operación $*$; 7 estudiantes (64) por ciento no comprenden como determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido una nueva operación y el 10 por ciento de los licenciados no comprende la operación $*$ ya que, no elaboran parte de la tabla de operaciones en el conjunto de los enteros con esta operación.

En relación con el conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido se observa del índice de dificultad de la pregunta (59 por ciento en promedio) que los estudiantes de Licenciatura tienen un *nivel de dominio medio,* respecto al significado de grupo como *Grupo abstracto* y en relación a los contenidos curriculares: *Operación binaria, Estructuras algebraicas, Ejemplos de Grupos y verificación de las propiedades de grupo.*

Se presenta el análisis a la respuesta del Licenciado en Matemática (L1) en la pregunta (figura 3.8).



Tarea 1:

a) No pide que demuestre que es grupo, por tanto, solamente voy a buscar el elemento identidad a través de la definición: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists! \odot \in \mathbb{Z} / a * \odot = \odot * a = a$. Donde $\odot$ es la identidad. $a * \odot = a + \odot - 4 = a \rightarrow \odot = 4$

Es decir, que la identidad es el elemento $\underline{4}$.

b) $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} : a*(b*c) = (a*b)*c$.

$a*(b*c) \stackrel{?}{=} (a*b)*c$.

$a*(b+c-4) = a+b+c-4-4$ y como los enteros con la suma cumple la asociativa y la conmutativa se tiene que

$= (a+b)+(c-4)-4 = a+b-4+c-4 = (a*b)+c-4$

$= (a*b)*c$.

Por tanto si cumple la asociativa.

c) De igual forma, como no me pide que pruebe si es grupo, voy a asumir la existencia de inversos y aplicar la definición:

Sea $3 \in \mathbb{Z}$, $\exists! a \in \mathbb{Z} / 3*a = a*3 = 4$.

$a*3 = a+3-4 = 4 \longrightarrow a = 5$ El inverso de 3 es 5

d)

*	-1	0	1	2	3
-1	-6	-5	-4	-3	-2
0	-5	-4	-3	-2	-1
1	-4	-3	-2	-1	0
2	-3	-2	-1	0	1
3	-2	-1	0	1	2

Figura 3.8: Respuesta a la pregunta 1 - estudiante L1

El estudiante de Licenciatura de Matemáticas, tiene todas las respuestas correctas en la pregunta 1, lo que equivale a una valoración de 10 puntos sobre 10; pero el índice de dificultad de la pregunta 1 en el grupo de Licenciados es del 59 por ciento, lo que evidencia un grado de *dificultad media* en la comprensión de la pregunta (100 por ciento) por parte del grupo.

Pregunta 2

En relación con la pregunta 2 y según la tabla 3.11 donde se muestran las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 73 por ciento de los estudiantes pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el cumplimiento de la propiedad de clausura en el conjunto de los números reales (R,•) con la nueva operación $a \bullet b := 3a + 4b$; de igual forma, los estudiantes verifican la propiedad asociativa; pero, para los estudiantes es "difícil" identificar el inverso del elemento 2, con ésta operación (0.27 de respuestas correctas) por lo que no pueden comprobar la no existencia del elemento identidad y por tanto, que no hay inversos para los elementos. *La pregunta en general, presenta un nivel de dificultad media del (50 por ciento).* En base a lo anterior, se ha decidido conservar el ítem 2 en su totalidad, incorporando solamente ciertos cambios en la redacción como concretar el subítem 2d); ya que, son deseables las preguntas de índice de dificultad media (el 50 por ciento de las preguntas deberían tener un nivel de dificultad media).

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas: para el primer subítem, el 27 por ciento de los estudiantes no determinan si la operación • en los reales cumple la propiedad de clausura y para el siguiente subítem, 3 estudiantes (27) por ciento no comprenden la propiedad asociativa de ésta operación. De igual forma, el 73 por ciento de los licenciados no identifican la no existencia del elemento identidad y por tanto, la no existencia de los elementos inversos en este conjunto de los números reales.

En relación al conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido, se observa que el índice de dificultad de la pregunta es del 50 (por ciento) por lo que los estudiantes de Licenciatura pueden resolver la tarea, identificar la no existencia del elemento identidad con un nivel de dificultad media; así, los estudiantes de Licenciatura tienen un *nivel de dominio medio* respecto al conocimiento común del contenido, al conocimiento ampliado del contenido y respecto al conocimiento especializado (2d); como la pregunta presenta un índice de dificultad media (27 por ciento) se observa en general, que los estudiantes tienen, un nivel de dominio medio, respecto a este conocimiento especializado y por tanto medianamente generalizan la propiedad al conjunto R^2 lo que equivale a decir, que para los licenciados la tarea presenta una dificultad media; que es lo que se espera de las tareas propuestas.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L11) a la pregunta 2:

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 2, tiene correctas las respuestas 2a) y 2b) (ver, figura 3.9) es decir, identifica la propiedad de clausura de los reales con la operación definida y la propiedad asociativa para la operación dada en los reales; pero no puede identificar que el elemento identidad no existe y por tanto, que los elementos inversos no existen y no puede definir una operación similar en el conjunto R^2, por tanto, la valoración de la pregunta es 5 puntos de 10 y la valoración promedio de toda la prueba

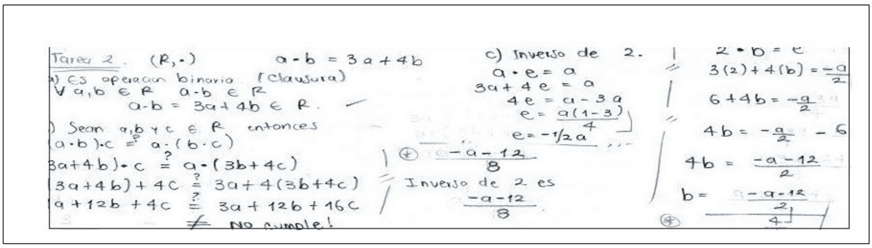


Figura 3.9: Respuesta a la pregunta 2 - estudiante L11

para el estudiante es de 20 puntos sobre 50. Pero, como el índice de dificultad de la pregunta corresponde al 50 por ciento, se evidencia que en general, la pregunta presenta una dificultad media para los estudiantes de Licenciatura (índice de dificultad en el intervalo (0.25, 0.75).

Pregunta 3

En la pregunta 3 y según la tabla 3.11 de frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 45 por ciento de los estudiantes pudieron resolver correctamente la situación problemática planteada al efectuar la adición de polinomios en el conjunto $Z_5[x]$ y determinar su cociente y el (0.27) por ciento de los estudiantes pueden determinar el residuo de esta división de polinomios. Para los Licenciados en general es "difícil" identificar el grupo $Z_5[x]$ donde se trabajan los polinomios; ya que, ningún Licenciado lo pudo identificar y el 10 por ciento puede identificar las propiedades y conceptos que se aplican para dar respuesta a las preguntas de la situación planteada. *La pregunta es medianamente difícil (22 por ciento),* para los Licenciados. Con base en lo anterior, se conserva la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad, especialmente las preguntas de dificultad media.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas, se tiene que el 55 por ciento de los estudiantes no realizó la división de polinomios en el conjunto $Z_5[x]$y por tanto, no determinaron en forma correcta el cociente; el 73 por ciento no determina el residuo de la división; el 100 por ciento de los estudiantes no identifica el grupo donde se trabaja la división de polinomios y el 80 por ciento no identifica las propiedades que debe utilizar para solucionar toda la tarea.

Respecto, al conocimiento común del contenido, este presenta un nivel de dificultad media del 36 por ciento ((a) y (b)) esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido y en cuanto conocimiento ampliado del contenido, se observa del índice de dificultad que corresponde al 22 (por ciento) que los estudiantes de Licenciatura no resuelven la tarea y no generalizan las operaciones del conjunto Z_5 siendo *medianamente difícil* para ellos el trabajo en este grupo; esto es, los estudiantes tienen un nivel de dominio bajo del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado ((c) y (d)) el índice de dificultad corresponde al 18 por ciento, por lo que resulta medianamente difícil para los estudiantes reconocer las propiedades de inverso e identidad en el conjunto Z_5 y generalizarlas al conjunto $Z_5[x]$, esto corresponde a un *nivel de dominio bajo* del conocimiento especializado (índice de dificultad $\leq 0,25$).

La respuesta del Licenciado en Matemática (L11) a la pregunta 3:

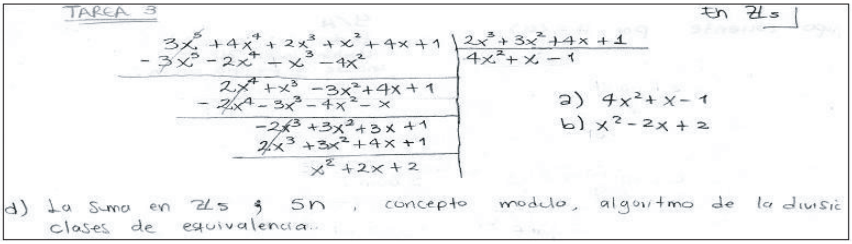


Figura 3.10: Respuesta a la pregunta 3 - estudiante L11

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 3, desarrolla en forma correcta las respuestas 3a) 3b) y 3d) (ver, tabla 3.11), es decir, realiza la operación entre polinomios en el conjunto $Z_5[x]$ identificando el cociente y el residuo; además, identifica los conceptos necesarios para desarrollar la operación entre polinomios en el conjunto dado y en aritmética módulo 5; pero no puede identificar el grupo de trabajo, es decir, el conjunto $Z_5[x]$; pero identifica claramente algunos de los conceptos y propiedades necesarias para desarrollar la tarea propuesta. La valoración de la pregunta corresponde a 7.5 de 10 puntos y la valoración promedio en toda la prueba para el estudiante es de 20 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 50 por ciento, se evidencia que la pregunta presenta una dificultad media para los otros estudiantes de Licenciatura, que es la dificultad que se espera de un ítem (índice de dificultad entre (0.25,0.75)).

Pregunta 4

En relación con la pregunta 4 y según la tabla 3.11 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 54 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al solucionar una ecuación en el conjunto definido que es nuevo para los estudiantes, este es el conjunto $(A_2,\oplus)$ de los $z-$ números; ningún estudiante identifica el elemento identidad en el conjunto; el 10 por ciento (1 estudiante) identifica el isomorfismo del conjunto con el grupo $(Z_{99},+_{99})$ y el 10 por ciento de los estudiantes identifica en este conjunto que números cumplen la propiedad de ser divisibles por 3. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 21* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta es "medianamente difícil" para los Licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems en su mayoría de dificultad media.

Respecto a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas a la pregunta, el 36 por ciento de los estudiantes no puede solucionar la ecuación en el nuevo conjunto; el 100 por ciento de los estudiantes (11) no puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 90 por ciento de los estudiantes no encuentra un grupo isomorfo al dado y no identifica la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto.

En relación con el conocimiento común del contenido de los estudiantes, se presenta un bajo nivel de dominio (del 21 por ciento); es decir, es medianamente difícil para los estudiantes, realizar las tareas en el conjunto dado; solucionar ecuaciones e identificar el elemento inverso y en cuanto al conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes, se observa nuevamente que el índice de dificultad es del 22 (por ciento) y por tanto, los estudiantes de Licenciatura no relacionan el nuevo conjunto con el conjunto conocido $\mathbb{Z}_{99}$, esto corresponde a un nivel de dominio bajo del conocimiento ampliado del contenido. En cuanto al conocimiento especializado, como el índice de dificultad es del 21 por ciento, resulta medianamente difícil para los estudiantes generalizar las propiedades del grupo $\mathbb{Z}_{99}$ al grupo $(A_2,\oplus)$ y así, según la clasificación establecida, los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado (nivel de dificultad $\leq 0,25$.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L9) a la pregunta 4 fue la siguiente:

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 4, soluciona en forma correcta la ecuación en el conjunto $(A_2,\oplus)$; identifica el conjunto de los números que son divisibles por 3, pero su justificación no es clara y no identifica el elemento identidad en el nuevo conjunto; de igual forma, no identifica un conjunto isomorfo al grupo dado. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 20 puntos sobre 50 y al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 21 por ciento, se evidencia que la pregunta es *medianamente difícil* para los estudiantes de Licenciatura.

Pregunta 5

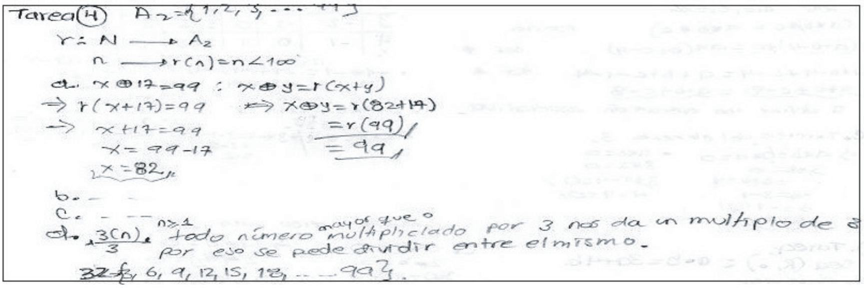

Tarea(4) $A_2=\{1,2,3,\ldots,99\}$
$r: \mathbb{N} \longrightarrow A_2$
$n \longrightarrow r(n) = n < 100$
a. $x \oplus 17 = 99$; $x \oplus y = r(x+y)$
$\Rightarrow r(x+17)=99$ $\Rightarrow x \oplus y = r(82+17)$
$\rightarrow x+17=99$ $= r(99)$
$x = 99-17$ $= 99$
$x = 82$
b. -
c. - -
d. $\frac{3(n)}{3}$ $n \geq 1$ todo número mayor que 0 multiplicado por 3 nos da un multiplo de 3 por eso se pede dividir entre el mismo.
$3\mathbb{Z}\{3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots 99\}$.

Figura 3.11: Respuesta a la pregunta 4 - estudiante L9

En relación con ésta pregunta y según la tabla 3.11 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 18 por ciento de los estudiantes pueden resolver correctamente la situación problemática planteada al dar un subgrupo de 3 elementos en el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$; de igual forma, el 18 por ciento de los estudiantes determina un subconjunto del grupo que no cumple la propiedad de ser subgrupo y para el 18 por ciento de los estudiantes, es claro que el grupo $(\mathbb{Z}_3,+_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$. *La pregunta presenta un nivel de dificultad media del 30* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta no debería presentar mayores dificultades para los licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad, especialmente con un nivel de dificultad media.

En cuanto a los *posibles errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta: el 82 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(Z_6,+_6)$, de igual forma, no determinan un subconjunto que no cumple con la propiedad de ser subgrupo y no identifican claramente si $(Z_3,+_3)$ es subgrupo del grupo $(Z_6,+_6)$; pero, solo el 36 por ciento tiene dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(Z_6,+_6)$.

En relación al conocimiento común del contenido de los estudiantes, se observa que tienen un nivel de dominio medio con un nivel de dificultad media del 30 por ciento en la pregunta en cuanto a la realización de tareas comunes en este grupo; en cuanto al conocimiento ampliado, del índice de dificultad de la pregunta es del 18 por ciento: se observa que para los estudiantes no es clara la propiedad de ser subgrupo para aplicarla en un caso específico, de igual forma, la propiedad de ser subconjunto resultando la pregunta medianamente difícil para los estudiantes de Licenciatura; esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad que presenta la pregunta es del 41 por ciento: se evidencia que existe una dificultad media en cuanto al trabajo en el grupo Z_6 y esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento especializado.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L4) a la pregunta 5:

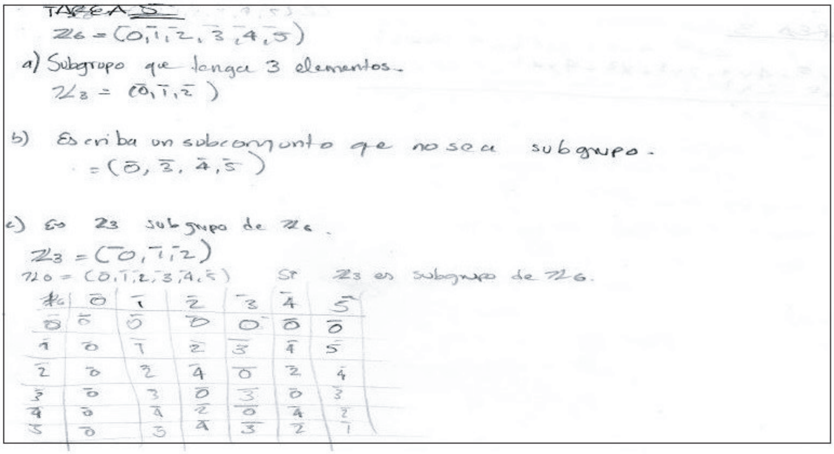


Figura 3.12: Respuesta a la pregunta 5 - estudiante L4

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas en la pregunta 5, da el subgrupo de 3 elementos en el grupo $(Z_6,+_6)$; escribe un subconjunto que no es subgrupo e identifica claramente que $(Z_3,+_3)$ no es subgrupo de $(Z_6,+_6)$; pero diferente a los otros estudiantes, no elabora en forma correcta la tabla de operaciones de los elementos del grupo. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 7 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 30 por ciento, se evidencia que la pregunta presenta una dificultad media, esto indicaría que la pregunta no presenta mayores dificultades para los estudiantes de licenciatura o que los estudiantes tienen un dominio medio en cuanto a la comprensión de la propiedad de ser subgrupo y en cuanto al trabajo con los grupos Z_n.

Pregunta 6

En relación con la pregunta 6 y según la tabla 3.11 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 10 por ciento de los estudiantes (1) identifica que el grupo D_3 es isomorfo al grupo S_3: la pregunta en este caso, resultó ambigua ya que, ella hacia referencia al subgrupo de orden 3; de igual forma, el 10 por ciento de los estudiantes

(1) identifica que el grupo D_3 y en general, los grupos D_n de simetrías de polígonos regulares no cumplen la propiedad de ser cíclicos. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 10* por ciento por lo que se puede decir, que los estudiantes no logran reconocer los conceptos y/o propiedades relacionadas con el grupo D_3; esto es, la pregunta es medianamente difícil para los estudiantes. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En relación a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta, el 100 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo $(D_3,\circ)$; de igual forma, el 90 por ciento no pueden determinar un subconjunto isomorfo al subgrupo que se pide y el 90 por ciento no tiene claro el Teorema de Lagrange, por el cual el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo $(D_3,\circ)$ de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4. Para el 82 por ciento de los estudiantes de Licenciatura, no es claro que en general los grupos $(D_n,\circ)$ no cumplen la propiedad de ser grupo cíclicos.

En cuanto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (ítem (a)): como el nivel de dificultad corresponde al 0, esto significa que los estudiantes no logran reconocer los subgrupos del grupo $(D_3,\circ)$ siendo la pregunta muy "difícil" para los estudiantes: esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento común del contenido. En cuanto al conocimiento ampliado, como el índice de dificultad es del 13 por ciento, esto indica que para los estudiantes no es claro cuales son los subgrupos del grupo $(D_3,\circ)$ esto corresponde a una pregunta, medianamente difícil para el estudiante con un bajo nivel de dominio del conocimiento ampliado; no es claro, el teorema de Lagrange para aplicarlo a este grupo particular ni la propiedad de ser un grupo cíclico y en cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 13 por ciento se evidencia que los estudiantes no tienen un conocimiento claro del grupo $(D_3,\circ)$ y por tanto, de sus propiedades, lo que corresponde a bajo nivel de dominio del conocimiento especializado del contenido.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L1) a la pregunta 6:

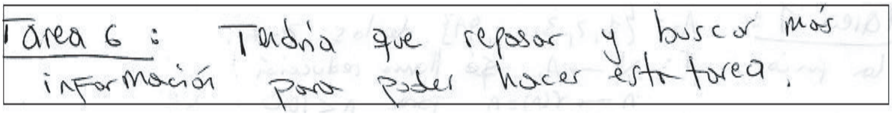

Tarea 6 : Tendría que repasar y buscar más información para poder hacer esta tarea.

Figura 3.13: Respuesta a la pregunta 6 - estudiante L1

Este estudiante de Licenciatura de Matemáticas es el único que da una respuesta, en la cual afirma que tiene que repasar el estudio de este grupo particular $(D_3,\circ)$. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 30 puntos sobre 50, siendo la mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 10 por ciento, se evidencia que los estudiantes no reconocen conceptos y/o propiedades del grupo $(D_3,\circ)$; este índice de dificultad indica que la pregunta es medianamente difícil para los estudiantes, pero se tiene presente que se relaciona con el conocimiento de un grupo particular; lo que indica un bajo nivel de dominio respecto al conocimiento de los grupos $(D_n,\circ)$.

Pregunta 7

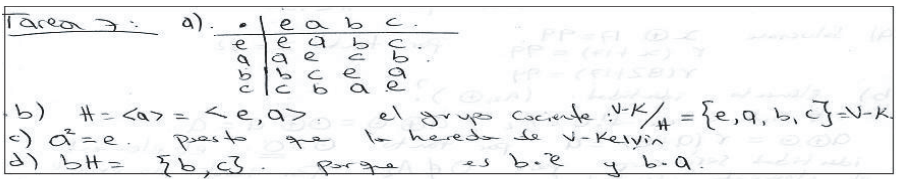
En relación con la pregunta 7 y según la tabla 3.11 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 36 por ciento de los estudiantes (4) construye la tabla de operación del grupo V_4 o el grupo $k-4$ de Klein; el 9 por ciento, realiza el grupo cociente determinando el subgrupo $H=\langle a\rangle$; el 10 por ciento reconoce la propiedad del subgrupo de ser normal para realizar un grupo cociente y el 18 por ciento de los estudiantes determina los elementos de la clase bH. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 18* por ciento por lo que se puede decir, que resulta medianamente difícil para los Licenciados. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad.

En cuanto a los *posibles errores y dificultades* presentes en las respuestas de la pregunta, el 64 por ciento de los estudiantes no reconocen la tabla de operación del grupo V_4; de igual forma, el 82 por ciento no puede construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H=\langle a\rangle$; el 90 por ciento no tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal, para determinar el grupo cociente y el 82 por ciento de los estudiantes de Licenciatura no reconocen una clase lateral izquierda.

En relación al conocimiento común del contenido de los estudiantes (ítem (a)), la pregunta presenta un nivel de dificultad del 36 por ciento, es decir, que existe una difícil media para los estudiantes, esto corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido; en cuanto al conocimiento ampliado, del índice de dificultad del 16 por ciento, se evidencia que el estudiante no construye el grupo cociente; de igual forma, en cuanto al conocimiento especializado, no tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal para aplicarla a casos particulares y de igual forma, no construye una clase lateral izquierda por el subgrupo en un grupo específico, esto corresponde a un bajo nivel de dominio del conocimiento especializado del contenido.

La respuesta del Licenciado en Matemática (L1) a la pregunta 7.

El estudiante de Licenciatura de Matemáticas reconoce el grupo V_4 de Klein; construye el grupo cociente para el subgrupo dado; lista los elementos de la clase izquierda *bH*; da una propiedad del grupo, pero no es la propiedad del subgrupo para construir el grupo cociente. La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 30 puntos sobre 50 siendo la mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 18 por ciento, se evidencia que los estudiantes de licenciatura no reconocen el concepto de normalidad y grupo cociente; el índice de dificultad de la pregunta en general es elevado: del 18 por ciento, es decir, la pregunta resulta medianamente difícil para los Licenciados, lo que corresponde a un nivel de dominio bajo en cuanto al conocimiento del grupo V_4 de Klein.



Tarea 7: a).

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b) $H = \langle a \rangle = \langle e, a \rangle$. el grupo cociente $V\text{-}K/_H = \{e, a, b, c\} = V\text{-}K$

c) $a^2 = e$. puesto que la hereda de V-Kelvin

d) $bH = \{b, c\}$. porque es $b \cdot e$ y $b \cdot a$.

Figura 3.14: Respuesta a la pregunta 7 - estudiante L1

Finalmente, como conclusión al análisis del índice de dificultad en la prueba piloto para el grupo de estudiantes de licenciatura, se observa que en general, el cuestionario presenta una *dificultad media* (0.30) para los estudiantes, como se muestra en la tabla 3.11, siendo los subítems que mayor dificultad presentaron el 1c), 2c), 2d), 3b), 3c), 3d), 4b), 4c), 4d), 5a), 5b), 5c), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c) y 7d). Del índice de dificultad de las preguntas del cuestionario piloto para los estudiantes de Licenciatura en matemáticas, se concluye que la pregunta 6 es la que presenta mayor índice de dificultad: del 10 por ciento, la pregunta 4 y 7 tienen un índice de dificultad del 21 por ciento, la pregunta 3 un índice de dificultad del 23 por ciento y la pregunta 5 un índice de dificultad del 30 por ciento y las preguntas 1 y 2 un índice de 59 y 50 por ciento respectivamente. De las 7 preguntas analizadas solo la pregunta 6 resulta medianamente *difícil* y en general, ninguna pregunta presenta un *grado máximo de facilidad*. Se tiene en cuenta que se desearía para un instrumento un índice de dificultad media y que los índices de dificultad no se encuentren en los extremos de la escala; así, se de la figura 8.17 se evidencia que las preguntas P1 y P2 presentan un índice de dificultad media (25-75 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y las otras cinco preguntas resultaron ser medianamente difíciles para los Licenciados ($\leq$ 25 por ciento).

La pregunta con mayor índice de dificultad para los Licenciados en Matemáticas es la pregunta 6.

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) ¿De un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique

b)¿A que grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique

c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(\mathbb{Z}_4,+_4)$? Justifique

d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique

Se presenta, a continuación el análisis cuantitativo de la prueba piloto para el segundo grupo de estudiantes de formación matemática (estudiantes de Matemáticas).

3.4.2. Análisis cuantitativo de la prueba piloto en el grupo de estudiantes de Matemáticas

En primer lugar, se presentan en la tabla 3.12, las puntuaciones en la prueba piloto de los estudiantes de Matemáticas; luego, se agrupan los datos para inferir conclusiones respecto a ellos y finalmente, se analiza en la tabla 3.17. el índice de dificultad de la prueba para este segundo grupo de estudiantes.

Tabla 3.12: Resultados de la prueba piloto - Matemáticos

Resultados de la prueba piloto - Matemáticos																					
M1																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	0	c	0	c	1.0	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		7.5		7.5		2.5		8.5		0		10		5		0		0		0
N	=	51																		=	36
M2																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	2.5	a	2.0	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		10		10		0		10		10		4.5		0		0		0		0
N	=	54.5																		=	39
M3																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	0	c	2.5	c	2.5	c	0	c	0	c	0
d	0	d	2.5	d	0	d	2.0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0
	7.5		10		7.5		6.5		10		0		10		10		0		0		0
N	=	61.5																		=	44
M4																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	0	c	0
d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		10		10		10		2.5		10		10		0		2.5		0		0
N	=	65																		=	46
M5																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	0	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	0	b	2.5	b	0	b	0	b	0	b	0
c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	2.5	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0
d	2.5	d	2.5	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	0	d	0	d	0	d	0
	10		10		10		5		10		0		10		0		0		0		0
N	=	55																		=	39
M6																					
1	val	2	val	3	val	4	val	5	val	6	val	7	val	8	val	9	val	10	val	11	val
a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	2.5	a	0	a	2.5	a	2.5	a	0	a	0	a	0
b	2.5	b	2.5	b	2.5	b	0	b	2.5	b	0	b	2.5	b	2.5	b	0	b	0	b	0
c	2.0	c	2.5	c	0	c	0	c	2.5	c	0	c	2.5	c	0	c	0	c	0	c	0
d	0	d	2.0	d	0	d	0	d	2.5	d	0	d	2.5	d	2.5	d	0	d	0	d	0
	7.0		9.5		5		2.5		10		0		10		7.5		0		0		0
N	=	51.5																		=	37

Tabla 3.13: Resultados de Matemáticos

Estudiante	Valoración
M1	36
M2	39
M3	44
M4	46
M5	39
M6	37

Tabla 3.14: Distribución de frecuencias para la puntuación total de los Matemáticos

Intervalos de puntuación	Frecuencia absoluta	Porcentaje
0-5	0	0
5-10	0	0
10-15	0	0
15-20	0	0
20-25	0	0
25-30	0	0
30-35	0	0
35-40	4	66
40-45	1	17
45-50	1	17

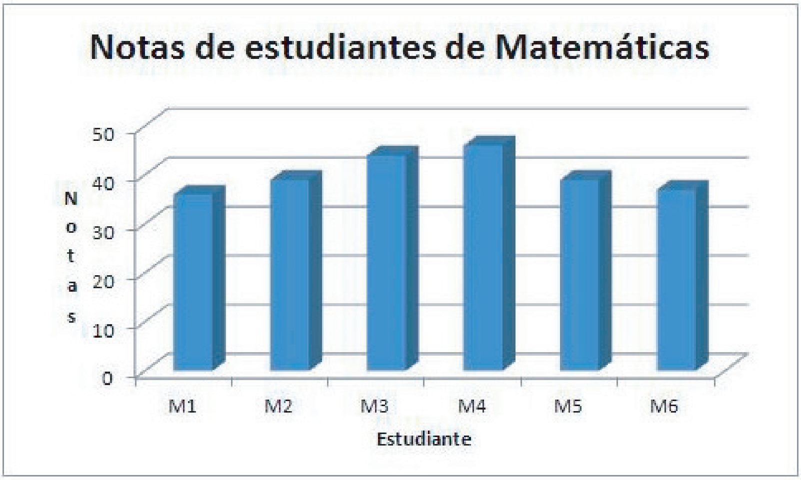


Figura 3.15: Resultados de la prueba piloto a los Matemáticos

Según la tabla 3.14 y 3.15 de frecuencias se observa que el 66 por ciento *de los estudiantes de Matemáticas* obtiene una puntuación menor a 40 puntos en la prueba piloto, lo que podría mostrar *cierto grado de facilidad* del instrumento para estos estudiantes (ver, figura 3.15). Se presenta en la tabla 3.15 y 3.16 algunos estadísticos que permiten emitir juicios sobre las valoraciones de los estudiantes de Matemáticas.

Tabla 3.15: Distribución de frecuencias para la puntuación total de los Matemáticos

	Estadístico
Mínimo	36
Máximo	46
Rango	10
Media	40
Mediana	39
Desviación estándar	4

De la tabla 3.12 y figura 3.15 se observa que ningún estudiante obtuvo la puntuación máxima de 50 puntos, siendo la media de 40 puntos sobre 50, es decir, que el porcentaje de logro corresponde al 100 por ciento, lo que evidencia que el instrumento resultaría "fácil" para estos estudiantes. En la tabla 3.16. se presentan los cuartiles correspondientes a las notas y en la figura 3.16. se presenta la distribución de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Matemáticas en la prueba piloto según los cuartiles correspondientes.

Tabla 3.16: Puntuación total en la prueba piloto de los Matemáticos

	Valores	**Ancho**
Mínimo	36	36
Quartil1	38	2
Quartil2- Mediana	39	2
Quartil3	43	4
Máximo	46	3

Se presenta a continuación, el diagrama de caja a partir de la tabla 3.16 para complementar el análisis a la prueba piloto de los estudiantes de Matemáticas.

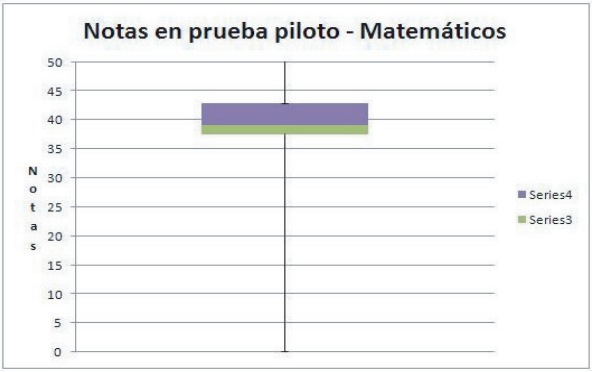


Figura 3.16: Distribución de las puntuaciones y puntuación media en la prueba piloto de los Matemáticos

Según la figura 3.16 y tabla 3.16 se observa que la mediana corresponde a una puntuación de 39 puntos y que el 50 por ciento de las notas se encuentran en el intervalo (38,43) y el 50 por ciento de los estudiantes obtuvieron una nota menor a 39 y el 75 por ciento obtienen una nota menor a 43; el rango intercuartílico (Q3-Q1) corresponde a 5.25 puntos, lo que permite concluir que no se encuentran valores atípicos en la distribución de las notas.

3.4.2.1 Análisis de la fiabilidad

Para esta medida, se utilizó el coeficiente alfa de Cronbach, al igual que para el grupo de licenciados; ya que este constituye una forma de acercarse a la fiabilidad (Muñiz, 1994).

El alfa mide la homogeneidad de las preguntas promediando todas las correlaciones entre los ítems para ver que efectivamente se parecen. Cuanto más se acerque al valor uno (1) mejor es la fiabilidad. El valor obtenido en el grupo de estudiantes de Matemáticas es de $\alpha= 0.54$, al calcular el índice de las tres primeras preguntas que se correlacionan. En el caso de las siete preguntas, el coeficiente $\alpha = 0.88$ que denota un alto grado de consistencia interna del examen para las 7 preguntas. La confiabilidad aumenta al eliminar las preguntas en el sentido de mala discriminación.

3.4.2.2 Análisis del índice de dificultad

Para el cálculo del índice de dificultad se clasifican las respuestas en correctas e incorrectas y parcialmente correctas, las respuestas en blanco no se consideran; así, se pueden analizar qué situaciones problemáticas resultaron más fáciles o más difíciles para este grupo de estudiantes de Matemáticas. Se toma el índice de dificultad para 7 preguntas, ya que, en los dos grupos y según los informes de los docentes que aplicaron la prueba los estudiantes, solo alcanzaron a trabajar estas siete preguntas.

Se presenta en la tabla 3.17 el índice de dificultad por pregunta y el índice promedio de dificultad del instrumento piloto.

Tabla 3.17: Índice de dificultad de la prueba piloto para los Matemáticos

Índice de dificultad del cuestionario para los Matemáticos								
	R-Correctas		**R-Incorrectas**		**R-Parcial-mente-C**			
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	100	0	0	0	0	1	100
b)	6	100	0	0	0	0	1	100
c)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
d)	4	67	2	33	0	0	0.67	67
	Media	0.88						
P2.	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Índice	%
a)	6	100	0	0	0	0	1	100
b)	6	100	0	0	0	0	1	100
c)	6	100	0	0	0	0	1	100
d)	4	66	1	17	1	17	0.85	83
	Media	0.96						
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	100	0	0	0	0	1	100
b)	6	100	0	0	0	0	1	100
c)	4	67	2	33	0	0	0.67	67
d)	4	67	1	17	1	17	0.83	83
	Media	0.88						
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
b)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
c)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
d)	1	17	5	83	0	0	0.17	17
	Media	0.42						
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	6	100	0	0	0	0	1	100
b)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
c)	4	66	1	17	1	17	0.83	83
d)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
	Media	0.87						
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
b)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
c)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
d)	2	33	4	67	0	0	0.33	33
	Media	0.33						
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Índice**	**%**
a)	5	83	0	0	1	17	1	100
b)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
c)	5	83	1	17	0	0	0.83	83
d)	6	100	0	0	0	0	1	100
	Media	0.92						

En la figura 3.18 se observan los resultados obtenidos al agrupar los ítems del cuestionario piloto de acuerdo a su índice de dificultad y según las ponderaciones obtenidas por los estudiantes de Matemáticas. De los 7 ítems explorados, 2 (29 por ciento) se clasifican como preguntas de dificultad media con valores de 0.33 a 0.42; 4 se clasifica como medianamente fáciles (57 por ciento) y 1 se clasifica como fácil (14 por ciento) con un índice de 0.96; no hay ítems medianamente difíciles, ni ítems difíciles, para los estudiantes de Matemáticas; tampoco hay índices con valores extremos. Se espera de un cuestionario que el 50 por ciento de las preguntas presenten una dificultad media; el 20 por ciento sean medianamente fáciles; el 20 por ciento medianamente difíciles; el 5 por ciento fáciles y el 5 por ciento difíciles.

En la tabla 3.17 y figura 3.18 se presentan los índices de dificultad para los distintos ítems. Se observa que el cuestionario en general, presenta un nivel de dificultad que oscila entre el 33 por ciento y el 96 por ciento, con un promedio del 75 por ciento, por lo que se concluye que el instrumento representa una dificultad media tendiente a medianamente fácil, para los estudiantes de Matemáticas según la escala establecida. Se toma una sola escala de clasificación para el índice de dificultad del instrumento para los dos grupos de estudiantes de formación matemática.

Se describen los principales hallazgos de la aplicación de la prueba piloto al grupo de estudiantes de Matemáticas.

Pregunta 1

En relación con la pregunta 1 y según la tabla 3.17 se observa que el 100 por ciento de los estudiantes de Matemáticas, pueden resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el elemento identidad en el conjunto de los $(Z, *)$ donde $a * b := a + b - 4$ y comprobar que se cumple la propiedad asociativa con esta nueva operación; además, para los estudiantes tiene una dificultad media el elaborar parte de la tabla de operación de los elementos del conjunto (67 por ciento) y es “medianamente fácil” identificar el inverso del elemento 3, con esta operación definida en los enteros (83); el nivel de dificultad del ítem corresponde al 83 por ciento que según el rango considerado, así, la pregunta presenta un

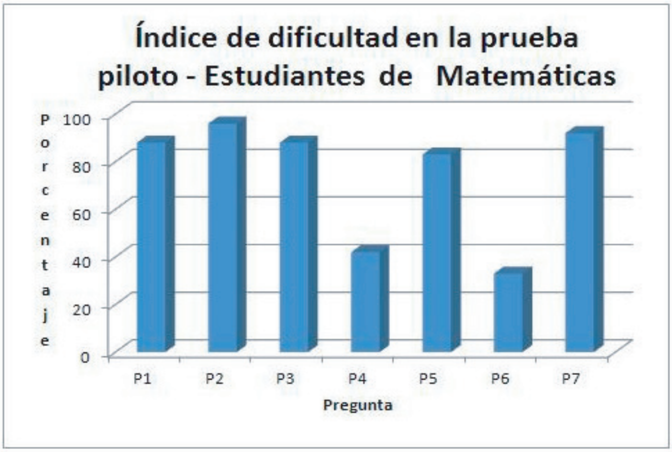


Figura 3.17: Preguntas e índice de dificultad - Estudiantes de Matemáticas

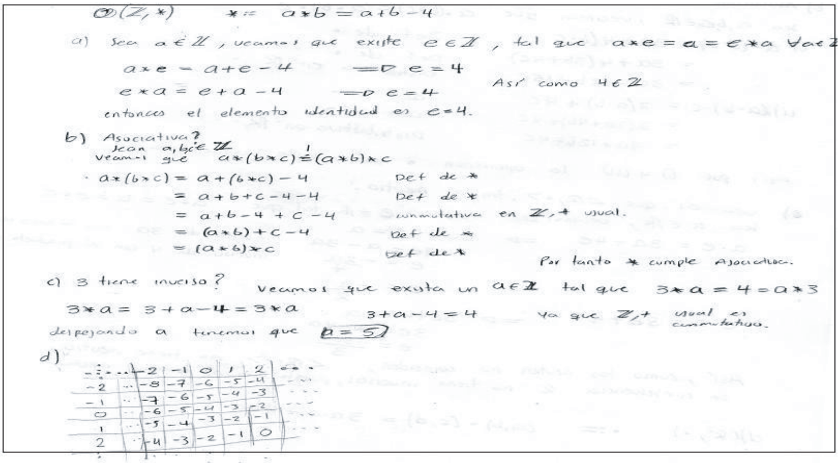
nivel medianamente fácil para éstos estudiantes. Se ha decidido cambiar la pregunta 1 en su totalidad, teniendo presente el análisis de contenido del ítem y teniendo presente que se debe eliminar un ítem para incluir otro relacionado con el contexto de Teoría de Matrices.

En lo que se refiere a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes de matemáticas no pueden determinar el inverso de un elemento en el conjunto de los enteros donde se ha definido una nueva operación y el 33 por ciento de los estudiantes no comprende la operación $*$; ya que, no elaboran parte de la tabla de operaciones en el conjunto de los enteros con esta operación.

En lo que se refiere al conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido se observa del índice de dificultad de la pregunta (88 por ciento) que ella es medianamente fácil y los estudiantes de matemáticas tienen un alto dominio de conocimiento común, ampliado y especializado del contenido, respecto al significado de grupo como *Grupo abstracto* y en cuanto a los contenidos curriculares de: *Operación binaria, Estructuras algebraicas, Ejemplos de Grupos y verificación de las propiedades de grupo.* Específicamente, en lo que respecta al grupo $(\mathbb{Z},*)$.

Se presenta la respuesta del Matemático (M1) a la pregunta 1 (Figura 3.18):

El estudiante de Matemáticas en la pregunta 1, tiene todas las respuestas correctas (ver, tabla 3.17) lo que equivale a una valoración de 10 puntos sobre 10 y como el índice de dificultad de la pregunta en el grupo de Matemáticos es del 88 por ciento, se evidencia un nivel *medianamente fácil* respecto a la comprensión de toda la pregunta (100 por ciento) por los estudiantes.



$(\mathbb{Z},*)$ $* := a*b = a+b-4$

a) Sea $a\in\mathbb{Z}$, veamos que existe $e\in\mathbb{Z}$, tal que $a*e = a = e*a$ $\forall a\in\mathbb{Z}$

$a*e = a+e-4 \Rightarrow e=4$

$e*a = e+a-4 \Rightarrow e=4$ Así como $4\in\mathbb{Z}$

entonces el elemento identidad es $e=4$.

b) Asociativa? Sean $a,b,c\in\mathbb{Z}$ veamos que $a*(b*c) \overset{!}{=} (a*b)*c$

$a*(b*c) = a+(b*c)-4$ Def de $*$

$= a+b+c-4-4$ Def de $*$

$= a+b-4+c-4$ conmutativa en $\mathbb{Z},+$ usual.

$= (a*b)+c-4$ Def de $*$

$= (a*b)*c$ Def de $*$

Por tanto $*$ cumple Asociativa.

c) 3 tiene inverso? Veamos que exista un $a\in\mathbb{Z}$ tal que $3*a = 4 = a*3$

$3*a = 3+a-4 = 3*a$ $3+a-4=4$ ya que $\mathbb{Z},+$ usual es conmutativa.

despejando a tenemos que $\boxed{a=5}$

d)

$*$	...	-2	-1	0	1	2	...
-2	...	-8	-7	-6	-5	-4	...
-1	...	-7	-6	-5	-4	-3	...
0	...	-6	-5	-4	-3	-2	...
1	...	-5	-4	-3	-2	-1	...
2	...	-4	-3	-2	-1	0	...

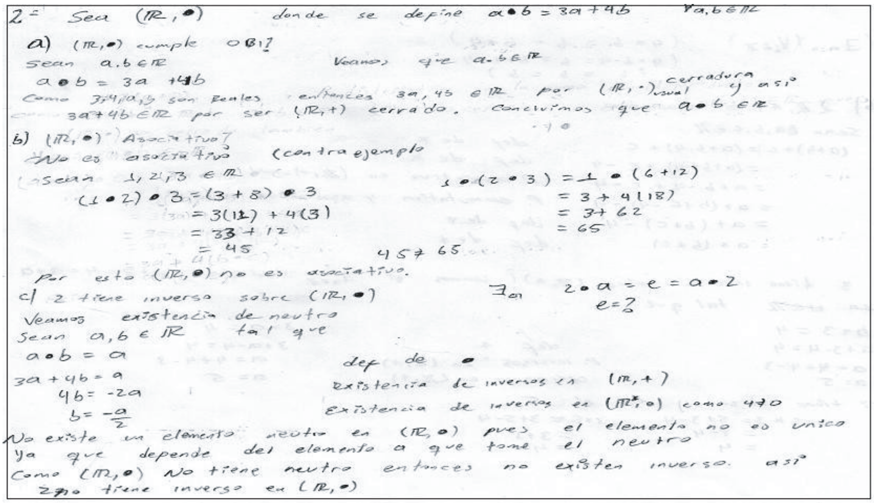
Figura 3.18: Respuesta a la pregunta 1 - estudiante M1

Pregunta 2

En relación con la pregunta 2 y según la tabla 3.17 donde se muestran las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al identificar el cumplimiento de la propiedad de clausura en el conjunto de los números reales (R,•) con una nueva operación $a \bullet b := 3a + 4b$; de igual forma, los estudiantes pueden comprobar que se cumple la propiedad asociativa e identifican el inverso del elemento 2 con esta operación (100 por ciento de respuestas correctas) por lo que comprueban la no existencia del elemento identidad y por tanto, la no existencia de inversos para los elementos. *La pregunta presenta un nivel de mediana facilidad (96 por ciento)*. En base a lo anterior, se ha decidido conservar el ítem 2 en su totalidad, incorporando solamente ciertos cambios en la redacción y concretar el subítem 2d).

En lo que se refiere a los posibles errores y dificultades presentes en las respuestas para el primer subítem, solo el 17 por ciento de los estudiantes de Matemáticas no logran definir una operación similar en el conjunto (R^2,•), es decir, una operación donde no existe el elemento identidad.

La respuesta del Matemático (M2) a la pregunta 2 corresponde a (ver, figura 3.19):


2= Sea $(\mathbb{R}, \bullet)$ donde se define $a \bullet b = 3a + 4b$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$

a) $(\mathbb{R}, \bullet)$ cumple OBI?

Sean $a.b \in \mathbb{R}$ Veamos que $a \bullet b \in \mathbb{R}$

$a \bullet b = 3a + 4b$

Como 3,4, a, b son Reales entonces $3a, 4b \in \mathbb{R}$ por $(\mathbb{R}, \cdot)$ cerradura usual y así $3a + 4b \in \mathbb{R}$ por ser $(\mathbb{R}, +)$ cerrado. Concluimos que $a \bullet b \in \mathbb{R}$

b) $(\mathbb{R}, \bullet)$ Asociativo?

No es asociativo (contra ejemplo)

Sean $1, 2, 3 \in \mathbb{R}$

$(1 \bullet 2) \bullet 3 = (3 + 8) \bullet 3 = 3(11) + 4(3) = 33 + 12 = 45$

$1 \bullet (2 \bullet 3) = 1 \bullet (6 + 12) = 3 + 4(18) = 3 + 62 = 65$

$45 \neq 65$

Por esto $(\mathbb{R}, \bullet)$ no es asociativo.

c) 2 tiene inverso sobre $(\mathbb{R}, \bullet)$ $\exists a$ $2 \bullet a = e = a \bullet 2$ $e = ?$

Veamos existencia de neutro

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$a \bullet b = a$ def de •

$3a + 4b = a$

$4b = -2a$

$b = -\frac{a}{2}$

existencia de inversos en $(\mathbb{R}, +)$

Existencia de inversos en $(\mathbb{R}^*, \bullet)$ como $4 \neq 0$

No existe un elemento neutro en $(\mathbb{R}, \bullet)$ pues el elemento no es único ya que depende del elemento a que tome el neutro

Como $(\mathbb{R}, \bullet)$ No tiene neutro entonces no existen inverso. así 2 no tiene inverso en $(\mathbb{R}, \bullet)$

Figura 3.19: Respuesta a la pregunta 2 - estudiante M2

Este estudiante de Matemáticas en la pregunta 2, tiene correctas todas las respuestas (ver, tabla 3.17), es decir, identifica la propiedad de clausura de los reales con la operación definida; que la propiedad asociativa no se cumple para la operación definida en los reales; que el elemento identidad no existe y por tanto, los elementos inversos no existen y define una operación similar en el conjunto R^2, por tanto, la valoración de la pregunta es de 10 puntos de 10 y la valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 36 puntos sobre 50. Pero, del índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 96 por ciento, evidencia que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes de Matemáticas.

Pregunta 3

En relación con la pregunta 3 y según la tabla 3.17 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes pudo resolver correctamente la situación problemática planteada, al efectuar la adición de polinomios en el conjunto $Z_5[x]$ y determinar el cociente y el residuo de esta división de polinomios. Para los Matemáticos tiene una "dificultad media" (67) identificar el grupo $Z_5[x]$ donde se trabajan los polinomios y el 67 por ciento puede identificar las propiedades y conceptos que aplica para dar respuesta a las preguntas de la situación planteada. *La pregunta es medianamente fácil (88 por ciento),* para los Matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En cuanto a los errores y dificultades presentes en las respuestas a la pregunta, el 33 por ciento, de los estudiantes, no identifica el grupo donde se trabaja la división de polinomios y solo el 17 por ciento no identifica las propiedades que debe utilizar para solucionar toda la tarea.

En relación con el conocimiento común del contenido, este presenta un nivel de dominio alto correspondiente al 100 por ciento ((a) y (b)) y para el conocimiento ampliado del contenido, se observa del índice de dificultad del 88 (por ciento) que los estudiantes de matemáticas, resuelven la tarea y generalizan las operaciones del conjunto Z_5, siendo "fácil" para ellos trabajar en este grupo; esto corresponde, a un alto nivel de dominio de este conocimiento ampliado del contenido. En cuanto al conocimiento especializado ((c) y (d)) el índice de dificultad media del 67 por ciento, indica que no presenta problema para los estudiantes de matemáticas reconocer las propiedades de inverso e identidad en el conjunto Z_5 y generalizarlas al conjunto $Z_5[x]$; presentando en general, un nivel de dominio medio del conocimiento especializado del contenido.

La respuesta del Matemático (M3) a la pregunta 3 se presenta en la figura 3.20.

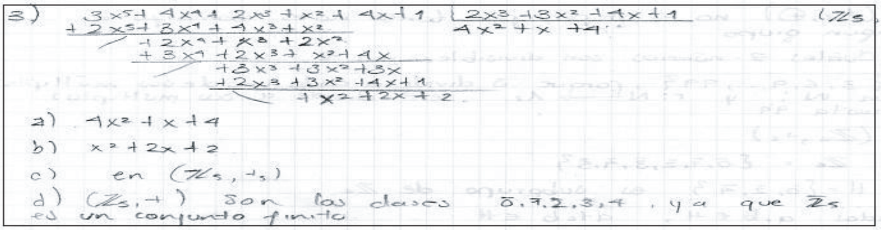


Figura 3.20: Respuesta a la pregunta 3 - estudiante M3

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 3, desarrolla en forma correcta todas las preguntas (ver, tabla 3.17), es decir, realiza la operación entre polinomios en el conjunto $Z_5[x]$ identificando el cociente y el residuo; además, identifica los conceptos necesarios para desarrollar la operación entre polinomios en el conjunto dado y en aritmética módulo 5, pero no identifica el grupo de trabajo, es decir, el conjunto Z $_5[x_]$ esto es, identifica claramente algunos de los conceptos y propiedades necesarias para desarrollar la tarea propuesta.

La valoración de la pregunta corresponde a 7.5 de 10 puntos y la valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 44 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 88 por ciento, se evidencia que la pregunta no presenta dificultad para los otros estudiantes de matemáticas, siendo medianamente fácil.

Pregunta 4

En relación con la pregunta 4 y según la tabla 3.17 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 83 por ciento de los estudiantes puede resolver correctamente la situación problemática planteada, al solucionar una ecuación en un conjunto nuevo para los estudiantes; este es el conjunto $(A_2,\oplus)$ de los $z-$ números; el 33 por ciento puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 3 por ciento relaciona el conjunto con el conjunto $Z_{99},+_{99}$ y el 17 por ciento de los estudiantes identifica en este conjunto que números cumplen la propiedad de ser divisibles por 3. *El nivel de dificultad es del 42* por ciento por lo que se puede decir, que la pregunta presenta una "dificultad media" para los matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En cuanto a los *errores y dificultades* presentes en las respuestas a la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes no puede solucionar la ecuación en el nuevo conjunto; el 67 por ciento de los estudiantes (4) no puede identificar el elemento identidad en este conjunto; el 67 por ciento de los estudiantes no encuentra un grupo isomorfo al dado y el 83 por ciento (5) no identifican la propiedad de ser divisible por 3 en el nuevo conjunto.

El conocimiento común del contenido de los estudiantes, presentan un nivel de dominio medio (42 por ciento), es decir, que no presenta mayor dificultad para los matemáticos realizar las tareas en el conjunto dado; solucionar ecuaciones e identificar el elemento inverso y en cuanto conocimiento ampliado del contenido, se observa nuevamente del índice de dificultad del 43 (por ciento) que para los estudiantes no presenta mayores dificultades relacionar el nuevo conjunto con el conjunto conocido de $\mathbb{Z}_{99}$, es decir, hay un nivel de dominio medio del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 42 por ciento, se evidencia que los estudiantes tienen un nivel de dominio medio para generalizar las propiedades del grupo $\mathbb{Z}_{99}$ al grupo $(A_2,\oplus)$.

La respuesta del matemático (M5) a la pregunta 4 corresponde a (Figura 3.21.):

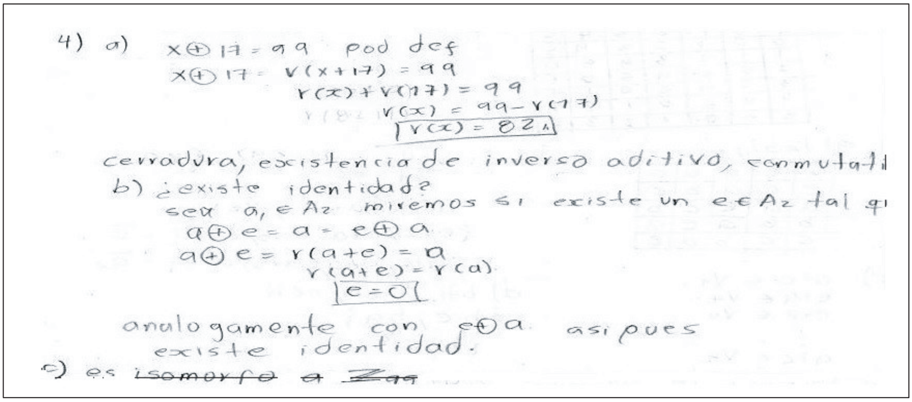


Figura 3.21: Respuesta a la pregunta 4 - estudiante M5

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 4, soluciona en forma correcta la ecuación en el conjunto $(A_2,\oplus)$; e identifica que el grupo $(A_2,\oplus)$ es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_{99}$; pero, no identifica el elemento identidad . La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 39 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 42 por ciento, se evidencia una dificultad media en general para los estudiantes de Matemáticas.

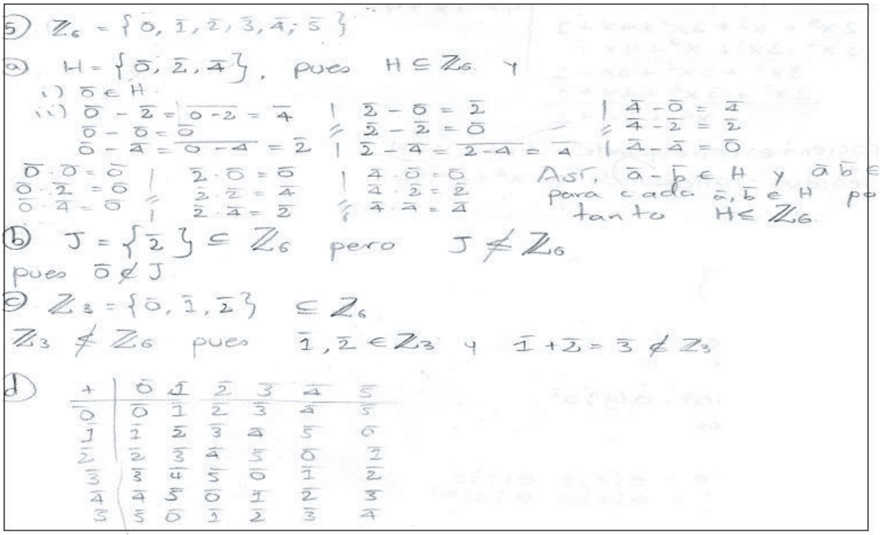
Pregunta 5

Según la tabla 3.17 de frecuencias y porcentajes a las respuestas, se observa que el 100 por ciento de los estudiantes puede resolver la situación problemática planteada en la pregunta al dar un subgrupo de 3 elementos del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$; de igual forma, el 83 por ciento de los estudiantes puede determinar un subconjunto del grupo que no cumple la propiedad de ser subgrupo y para el 66 por ciento de los estudiantes es claro que el grupo $(\mathbb{Z}_3,+_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$; el 83 por ciento de los estudiantes elabora la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$. *El nivel de dificultad de la pregunta es del 87* por ciento por lo que se puede establecer, que la pregunta no presenta dificultad para los matemáticos (medianamente fácil). Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

En relación con los errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, para el 17 por ciento de los estudiantes no determinan un subconjunto que no cumple con la propiedad de ser subgrupo y no identifican claramente que $(\mathbb{Z}_3,+_3)$ no es subgrupo del grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$; de igual forma, solo el 17 por ciento tiene dificultad para elaborar la tabla de operación en el grupo $(\mathbb{Z}_6,+_6)$.

Respecto al conocimiento común del contenido de los estudiantes, este presenta un alto nivel de dominio (87 por ciento), es decir, que la pregunta resultó medianamente fácil para los matemáticos en cuanto a la realización de tareas comunes con el grupo dado; en cuanto al conocimiento ampliado del contenido del índice de dificultad del 83 por ciento se evidencia que los estudiantes de matemática comprenden la propiedad de ser subgrupo y la aplican a casos específicos, de igual forma, la propiedad de ser subconjunto; es decir, presentan un nivel de dominio alto del conocimiento ampliado. En cuanto al conocimiento especializado del índice de dificultad media de la pregunta del 75 por ciento; los estudiantes presentan un nivel de dominio medio, por lo que resulta claro para los estudiantes, identificar los subgrupos y elaborar la tabla de operaciones de los grupos $\mathbb{Z}_n$.

La respuesta del estudiante de matemáticas (M6) a la pregunta 5 se presenta en la figura 3.23.



5) $\mathbb{Z}_6 = \{\bar0, \bar1, \bar2, \bar3, \bar4, \bar5\}$

a) $H = \{\bar0, \bar2, \bar4\}$, pues $H \subseteq \mathbb{Z}_6$ y

i) $\bar0 \in H$.

ii) $\bar0 - \bar2 = \overline{0-2} = \bar4$ | $\bar2 - \bar0 = \bar2$ | $\bar4 - \bar0 = \bar4$

$\bar0 - \bar0 = \bar0$ | $\bar2 - \bar2 = \bar0$ | $\bar4 - \bar2 = \bar2$

$\bar0 - \bar4 = \overline{0-4} = \bar2$ | $\bar2 - \bar4 = \overline{2-4} = \bar4$ | $\bar4 - \bar4 = \bar0$

$\bar0 \cdot \bar0 = \bar0$ | $\bar2 \cdot \bar0 = \bar0$ | $\bar4 \cdot \bar0 = \bar0$

$\bar0 \cdot \bar2 = \bar0$ | $\bar2 \cdot \bar2 = \bar4$ | $\bar4 \cdot \bar2 = \bar2$

$\bar0 \cdot \bar4 = \bar0$ | $\bar2 \cdot \bar4 = \bar2$ | $\bar4 \cdot \bar4 = \bar4$

Así, $\bar a - \bar b \in H$ y $\bar a \bar b \in$ para cada $\bar a, \bar b \in H$ po tanto $H \leq \mathbb{Z}_6$

b) $J = \{\bar2\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ pero $J \not\leq \mathbb{Z}_6$ pues $\bar0 \notin J$

c) $\mathbb{Z}_3 = \{\bar0, \bar1, \bar2\} \subseteq \mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_3 \not\leq \mathbb{Z}_6$ pues $\bar1, \bar2 \in \mathbb{Z}_3$ y $\bar1 + \bar2 = \bar3 \notin \mathbb{Z}_3$

d)

+	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar5$
$\bar0$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar5$
$\bar1$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar5$	$\bar6$
$\bar2$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar5$	$\bar0$	$\bar1$
$\bar3$	$\bar3$	$\bar4$	$\bar5$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$
$\bar4$	$\bar4$	$\bar5$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$
$\bar5$	$\bar5$	$\bar0$	$\bar1$	$\bar2$	$\bar3$	$\bar4$

Figura 3.22: Respuesta a la pregunta 5 - estudiante M6

Este estudiante de matemáticas en la pregunta 5, da el subgrupo de 3 elementos en el grupo ($\mathbb{Z}_6$,$+_6$), escribe un subconjunto que no es subgrupo; identifica claramente que ($\mathbb{Z}_3$,$+_3$) no es subgrupo de ($\mathbb{Z}_6$,$+_6$) y elabora en forma correcta la tabla de operaciones de los elementos del grupo. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 37 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta que corresponde al 83 por ciento, se evidencia que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes de matemáticas.

Pregunta 6

En relación con la pregunta 6 y según la tabla 3.17 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 33 por ciento de los estudiantes (2 estudiantes,) identifican el grupo D_3 como isomorfo al grupo S_3: la pregunta en este caso, fue ambigua ya que, ella hacia referencia al subgrupo de orden 3; de igual forma, el 33 por ciento de los estudiantes identifican que el grupo D_3 y en general, los grupos D_n de simetrías de los polígonos regulares no cumplen la propiedad de ser cíclicos. El nivel de dificultad de la pregunta fue del 33 por ciento, por lo que se puede decir, que los estudiantes tienen una dificultad media para reconocer los conceptos y propiedades relacionadas con el grupo D_3. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

Respecto a los errores y dificultades se concluye que el 67 por ciento de los estudiantes no reconocen los subgrupos de orden 3 del grupo (D_3,o); de igual forma, no determinan un subconjunto isomorfo al subgrupo de orden 3 que se pide y el 67 por ciento no tiene claro el Teorema de Lagrange por el cual se establece que el orden del subgrupo divide al orden del grupo y por tanto, que el grupo (D_3,o) de orden 6 no puede tener un subgrupo de orden 4. Finalmente, para el 67 por ciento de los estudiantes de matemáticas, no es claro que en general, los grupos (D_n,o) no cumplen la propiedad de ser cíclicos.

En cuanto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (a), este presenta un nivel de dificultad media del 33 por ciento, es decir, que en general, la pregunta no debería representar mayores dificultades para los matemáticos, esto corresponde a reconocer los subgrupos del grupo (D_3,o). Se observa entonces, un nivel de dominio medio del conocimiento común del contenido; en cuanto al conocimiento ampliado el índice de dificultad del 33 por ciento, indica que el estudiante posee un nivel de dominio medio sobre los subgrupos del grupo (D_3,o); de igual forma, del teorema de Lagrange para aplicarlo a este grupo particular y de la propiedad de ser un grupo cíclico; en cuanto al conocimiento especializado, del índice de dificultad del 33 por ciento, se observa que los estudiantes de matemáticas tienen un nivel de dominio medio del grupo (D_3,o) y de sus propiedades.

La respuesta de estudiante de matemática (M4) a la pregunta 6 corresponde a (Figura 3.23):

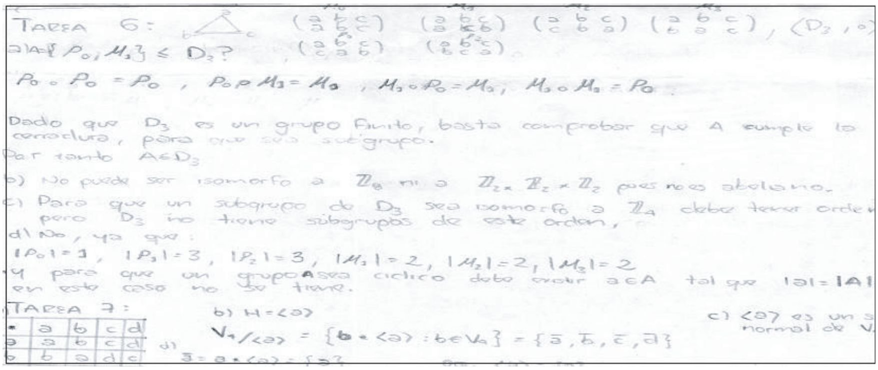


Figura 3.23: Respuesta a la pregunta 6 - estudiante M4

El estudiante de matemáticas da respuesta correcta a la pregunta en todos sus subítems; esto es, da un subgrupo del grupo D_3 de simetrías del triángulo rectángulo; establece que este grupo no es isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_8$ que no es la pregunta que se formula y reconoce el teorema de Lagrange al afirmar que el grupo D_3 no puede tener un subgrupo isomorfo de orden 4; finalmente, identifica que el grupo no es cíclico hallando los subgrupos cíclicos. La valoración promedio de toda la prueba del estudiante es de 46 puntos sobre 50 siendo la mayor puntuación entre los estudiantes. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 33 por ciento, se evidencia que para los estudiantes de matemáticas, la tarea presenta una dificultad media; pero en general, un índice de dificultad media es lo que se desea para las preguntas que conforman un cuestionario e indica que la pregunta no debería presentar mayores dificultades para los estudiantes; en este caso, el reconocer los conceptos y propiedades del grupo $(D_3, \circ)$.

Pregunta 7

En relación con la pregunta 7 y según la tabla 3.17 donde se presentan las frecuencias y porcentajes de respuestas, se observa que el 83 por ciento de los estudiantes (5) construyen la tabla de operación del grupo V_4 o el grupo $k-4$ de Klein; realizan el grupo cociente determinando el subgrupo $H = \langle a \rangle$; reconocen la propiedad del subgrupo de ser normal para realizar un grupo cociente y el 100 por ciento de los estudiantes, lista los elementos de la clase bH. El nivel de dificultad de la pregunta es del 92 por ciento, por lo que se puede decir, que resulta *medianamente fácil* para los matemáticos. Con base en lo anterior, se decide conservar la pregunta en su totalidad, ya que, para que un instrumento se encuentre bien equilibrado, este debe estar formado por ítems con diferentes niveles de dificultad.

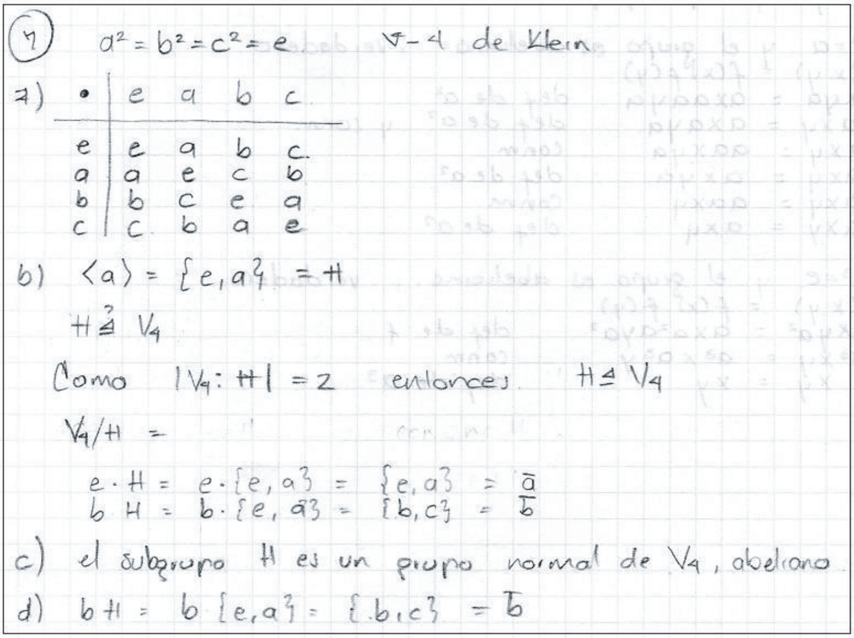
En cuanto a los errores y dificultades presentes en las respuestas de la pregunta, el 17 por ciento de los estudiantes no puede construir el grupo cociente determinado por el subgrupo $H = \langle a \rangle$ y no tienen presente la propiedad del subgrupo de ser normal para determinar el grupo cociente.

Respecto al conocimiento común del contenido de los estudiantes (a); la pregunta presenta un nivel de dificultad del 83 por ciento, es decir, que la pregunta es medianamente fácil para los estudiantes, esto corresponde a un alto nivel de dominio. En cuanto al conocimiento ampliado, el índice de dificultad del 88 por ciento aproximado, indica un nivel de dominio alto en cuanto a que el estudiante construye el grupo cociente; de igual forma, tiene presente la propiedad del subgrupo de ser normal para aplicarla a casos particulares y en la misma dirección, construye una clase lateral izquierda por el subgrupo en un grupo específico; así, los matemáticos tienen un alto nivel de dominio del conocimiento especializado respecto a los conceptos mencionados en la pregunta.

La respuesta de estudiante de matemática (M3) a la pregunta 7 corresponde a (ver, figura 3.24).

Este estudiante de matemáticas reconoce el grupo V_4 de Klein; construye el grupo cociente para el subgrupo dado; lista los elementos de la clase izquierda *bH*; da la propiedad del subgrupo de ser normal para construir el grupo cociente; construye el grupo cociente. La valoración promedio de toda la prueba para el estudiante es de 44 puntos sobre 50. Al analizar el índice de dificultad de la pregunta, que corresponde al 92 por ciento; se evidencia que los estudiantes de matemáticas reconocen los conceptos de normalidad y grupo cociente; el índice de dificultad de la pregunta evidencia que en general es medianamente fácil para los matemáticos trabajar con grupos cocientes.

Como conclusión del análisis al índice de dificultad de la prueba piloto aplicada al grupo de estudiantes de Matemáticas, se observa que en general, el cuestionario presenta una dificultad media (0.75) para los Matemáticos, como se muestra en la tabla 8.20 siendo los subítems que mayor dificultad presentaron el 4d) con un nivel de dificultad del 17 por ciento y los subítems 4b) 4c) 6a) 6b) 6c) 6d) con un índice de dificultad del 33 por ciento presentando estas preguntas una dificultad media. Del índice de dificultad de las preguntas, para los estudiantes de Matemáticas, se concluye al igual que para los licenciados, que la pregunta 6 es la que presenta el mayor índice de dificultad, en este caso del 33 por ciento; la pregunta 4, un índice de dificultad del 42 por ciento; la pregunta 5,3,1,7 resultaron medianamente fáciles para los matemáticos y la pregunta 2 con un índice del 96 por ciento resultó fácil. De las 7 preguntas analizadas la pregunta 6 resulta con una dificultad media que es lo que se espera de las preguntas de un cuestionario (que el 50 por ciento de las preguntas del cuestionario presenten una dificultad media) y en general, ninguna pregunta presenta un *grado de máxima facilidad*.


(7) $a^2 = b^2 = c^2 = e$ V-4 de Klein

a)

$\cdot$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

b) $\langle a \rangle = \{e, a\} = H$

$H \overset{?}{\trianglelefteq} V_4$

Como $|V_4 : H| = 2$ entonces $H \trianglelefteq V_4$

$V_4/H =$

$e \cdot H = e \cdot \{e, a\} = \{e, a\} = \bar{a}$

$b\, H = b \cdot \{e, a\} = \{b, c\} = \bar{b}$

c) el subgrupo H es un grupo normal de V_4, abeliano

d) $bH = b\{e, a\} = \{b, c\} = \bar{b}$

Figura 3.24: Respuesta a la pregunta 7 - estudiante M3

3.4.3. Análisis cualitativo de la prueba piloto

A partir de las respuestas dadas por los estudiantes de formación matemática en la prueba piloto, se observaron algunos aspectos importantes para el proceso de construcción del instrumento: el tiempo de aplicación de la prueba piloto fue insuficiente para abordar las 11 preguntas del cuestionario, por tal motivo en primer lugar, se cambia la pregunta 1 (medianamente fácil) por otra pregunta relacionada con el significado del objeto grupo en el contexto de “Teoría de Matrices” y las preguntas se reorganizan para llegar a un análisis de las preguntas 8,9 y 10 que quedaron faltando.

Se reorganiza el cuestionario para su versión final con el objetivo de analizar las preguntas 8, 9, 10 y 11 y poder concluir si realmente el tiempo de 2 horas no es suficiente o por el contrario las preguntas presentan un índice de dificultad alto para los estudiantes. En esta dirección, las últimas preguntas se ubican en primer lugar en el cuestionario y adicionalmente se revisan las preguntas, teniendo presente los aportes de los expertos, en lo que se relaciona con aspectos técnicos que permitan la comprensión y claridad de las preguntas.

Se presentan las tareas de la versión piloto y las tareas definitivas, luego de los análisis cuantitativos y cualitativos presentados y teniendo presente el análisis cualitativo según el juicio de expertos en Álgebra Abstracta.

Tarea antigua

TAREA 6. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) De un ejemplo de un subgrupo de D_3? Justifique

b) A que grupo familiar puede ser isomorfo? Justifique

c) Existe un subgrupo de D_3 isomorfo a $(Z_4,+_4)$? Justifique

d) El grupo D_3 es cíclico ? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 1. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3. Justifique

b) ¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique

c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(Z_4,+_4)$? Justifique

d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique

Tarea antigua

TAREA 10. Sea el grupo S_4 definido en los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función; si $\alpha \in S_4$ se define $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ Si se cumple la condición: $\alpha f = f$ se dice que f es invariante.

a) ¿Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) Encuentre un $\alpha \in S_4$ al que f sea invariante. Justifique

c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$

De un polinomio simétrico. Justifique

d) Exprese los coeficientes de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ en función de sus raíces x_1,x_2. Justifique

Tarea reformulada

TAREA 2. Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ se dice que f es un invariante del grupo S_4. a) ¿Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 {}_{+}x_3x_4$ una función invariante? Justifique b) ¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a f invariante? Justifique c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. De un polinomio simétrico. Justifique d) Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine b,c en función de sus raíces x_1,x_2. Justifique

Tarea antigua

TAREA 9. Determine el subconjunto de S_4 que: a) Deja invariante el número 2. b) El subconjunto anterior es un subgrupo. Tiene algún nombre especial ? Justifique c) El subconjunto que deja invariante el 2 y el 4. Tiene algún nombre especial? Justifique d) Como define en este ejercicio la propiedad de ser invariante. Exprésela mediante una fórmula? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 3. Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$. a) Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2. Justifique b) El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique c) El subconjunto de permutaciones del grupo S_4 que deja invariante a la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ Justifique d) ¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique

Tarea antigua

TAREA 11. El grupo de permutaciones de $n-$ símbolos se denomina regular, si cada uno de sus elementos excepto la identidad, mueve todos los $n-$ símbolos.

a) Encuentre el grupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) Cuál es el orden de cada uno de los elementos de ese grupo. Justifique

c) Es conmutativo el grupo? Justifique

d) A que otro grupo puede ser isomorfo ? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 4. El subgrupo de permutaciones regular de $n-$ símbolos, mueve los $n-$ símbolos excepto la identidad.

a) Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) ¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique

c) ¿El subgrupo es conmutativo? Justifique

d) ¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado a)? Justifique

Tarea antigua

TAREA 3. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ por el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ en el conjunto $(Z_5,+_5)$

a) El cociente corresponde a ? Justifique

b) El residuo corresponde a? Justifique

c) En que grupo se esta trabajando? Justifique

d) Qué propiedades o conceptos de la Teoría de Grupos aplica para dar respuesta a las preguntas anteriores?

Tarea reformulada

TAREA 5. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$.

Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto: $(Z_5,+_5)$. a) ¿El cociente corresponde a? Justifique

b) ¿El residuo corresponde a? Justifique

c) ¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique

d) ¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique

Tarea antigua

TAREA 4. Dado el conjunto $A_2 = \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números, la función $r : \mathrm{N} \to A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 se llama reducción, tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$, así se tiene que por ejemplo: $r(214_) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$ Además se define en el conjunto A_2 la operación $x \oplus y = r(x + y)$.

a) Solucione $x \oplus 17 = 99$, que propiedades de grupo, utiliza para dar solución a la ecuación? Justifique

b) Existe el elemento identidad en $(A_2,\oplus\ )$? Justifique

c) A que grupo es isomorfo $(A_2,\oplus\ )$? Justifique

d) Cuáles $z-$ números son divisibles por 3 ? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 6. Dado el conjunto $A_2 := \{1,2,3,...,99\}$ de los $z-$ números y la función $r : \mathrm{N} \to A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r, por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$.

Se define además, en el conjunto A_2 la operación $x \oplus y = r(x + y)$.

a) Solucione $x \oplus 17 = 99$ y diga que propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.

b) ¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\oplus)$? Justifique

c) ¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2,\oplus)$? Justifique

d) ¿Qué $z-$ números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2,\oplus)$? Justifique

Tarea antigua

TAREA 8. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

Tarea reformulada

TAREA 7. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

Tarea antigua

TAREA 1. En el conjunto $(Z,*)$ de los números enteros se define $a * b = a + b - 4$

a) Existe el elemento identidad? Justifique

b) $*$ define una operación asociativa? Justifique

c) Existe el inverso del elemento 3? Justifique

d) Elabore parte de la tabla de la operación en el conjunto para {...,_1,0,1,2,3,...}

Tarea que se cambia por

TAREA 8. Sea $G = \langle A,B \rangle \leq GL(2,\mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$Y\ B =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los elementos de G. Justifique

b) ¿G es grupo abeliano? Justifique

c) ¿Determine el subgrupo de orden 2? Justifique

d) ¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique

Análisis al ítem

La tarea se seleccionó del texto "An Introduction to the Theory of Groups" (Rotman, 1995) en el capítulo 2, correspondiente a la lección: Cyclic Groups y permite explorar el objeto grupo, en el contexto de Conjunto de Matrices: atendiendo a la sugerencia de los expertos, se incluyó un ítem relacionado con el significado de Grupo de Matrices.

Solución a la tarea

a) Determine los elementos de G. Justifique

Dada la matriz $A =$
$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $A^2 =$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= -I$

$A^3 =$
$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$= -A$

$A^4 =$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I$ (identidad)

$B^2 =$
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$= -I = A^2$

$B^3 =$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$= -B$

$B^4 =$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I$

$AB =$
$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$BA =$
$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

$= -AB$

$A^2B =$
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$=-B = BA^2$

Luego, $G = \{A, B, A^2 = -I, A^3 = -A, A^4 = I, B^3 = -B, AB, BA = -AB = A^3B\}$ es de orden 8

b) ¿G es grupo abeliano? Justifique. No, porque $AB \neq BA$ como se muestra en 1a)

c) Determine el subgrupo de orden 2. Justifique: $H = \{I, A^2\}$ se tiene que $A^2A^2 = A^4 = I$

d) ¿Cuál es la operación en $GL(2,\mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique

La operación en el grupo lineal $GL(2,\mathbb{C})$ es el producto usual de matrices e induce el mismo producto en G.

A continuación, se analiza la tarea respecto a los criterios para la selección de las tareas (investigador).

Criterio1: significados del objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Permutación	NA	NA	NA	NA
Aritmética modular	NA	NA	NA	NA
Teoría de las ecuaciones algebraicas	NA	NA	NA	NA
Teoría de Galois	NA	NA	NA	NA
Teoría de Matrices	4	4	4	4
Grupo Abstracto	4	4	4	4

Para el caso se tiene que: NA-No aplica; NR-Nivel de relevancia en una escala de 1 a 5: el valor de 1 corresponde a nada relevante y el de 5 totalmente relevante, además la sigla NA corresponde a no aplica.

Con la tarea, se busca evidenciar un conocimiento matemático necesario para la resolución de la situación problemática planteada correspondiente a: la comprensión que tiene el estudiante de formación matemática del producto usual de matrices para determinar los elementos del grupo, con el subítem (a); el no cumplimiento de la propiedad conmutativa en general para las matrices, con el subítem (b); el orden de un elemento para determinar el subgrupo de orden 2, en el subítem (c) y la identificación de la operación binaria de producto usual de matrices en el grupo lineal de Matrices, constituido por matrices con determinante distinto de cero y la comprensión del estudiante respecto a que el subgrupo toma la operación del Grupo. Además, se busca evidenciar una comprensión respecto al significado del objeto matemático correspondiente a la configuración de: *Teoría de Matrices - Grupos de Matrices* con un nivel de relevancia de 4 según el juicio del investigador y de igual forma, el significado de Grupo en el contexto de Grupo abstracto.

Criterio 2: contenido curricular: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Operación binaria	4	4	4	4
Estructuras algebraicas	1	1	4	4
Grupo, ejemplos y contraejemplos	4	4	4	4
Subgrupo	4	2	4	4
Orden del grupo	1	1	4	1
Propiedad de Grupo	1	4	1	1

En cuanto al contenido curricular, la tarea corresponde al tema de *operación binaria*, con un nivel de relevancia de 4 en promedio, en los subítems (a),(b),(c) y (d); al tema de *estructuras algebraicas*, con un nivel de relevancia de 4, en los subítems (a),(b); ya que, en los subítems se analizan la propiedad que tiene G de ser subgrupo; al tema de *Grupo, ejemplos y contraejemplos* con un nivel de relevancia de 4; ya que, en los subítems (a), (c) y (d), se pregunta por la operación en el grupo $GL(2, \mathbb{C})$; al tema de orden del grupo y orden del elemento ya que en el subítem (a) se preguntan los elementos del grupo y en el subítem (c) se pregunta por el subgrupo de orden 2, finalmente al tema propiedades del grupo, al preguntar en el subítem (b) si el grupo es Abeliano.

Criterio 3: categorías del CDM: objeto Grupo	**NR(1-5) a)**	**NR(1-5) b)**	**NR(1-5) c)**	**NR(1-5) d)**
Conocimiento común del contenido	5	5	1	1
Conocimiento ampliado del contenido	1	1	5	1
Conocimiento especializado del contenido	1	1	1	5

Respecto a las categorías del modelo del Conocimiento Didáctico -Matemático (CDM) que se buscan evidenciar con la tarea y según el criterio del investigador, la tarea permite evidenciar un conocimiento común del contenido, con un nivel de relevancia de 5 según el subítem (a) al determinar los elementos del grupo e identificar el no cumplimiento de la propiedad conmutativa en el grupo; un conocimiento ampliado del contenido, con un nivel de relevancia de 5 respecto a la determinación del subgrupo de orden 2 y un conocimiento especializado con un nivel de relevancia 5 respecto al subítem (d) al identificar la operación en el grupo $GL(2, \mathbb{C})$ y la operación que se induce en el subgrupo G.

Tarea antigua

TAREA 2. Sea $(R,\bullet)$ el conjunto de los números reales, se define $a \bullet b = 3a + 4b$

a) La operación es binaria interna, esto es, se cumple la propiedad de clausura ? Justifique

b) La operación es asociativa? Justifique

c) Existe el inverso del elemento 2 ? Justifique

c) En $(R^2,\bullet)$ cómo se podría definir una operación en forma similar a la propuesta, y que significado tendría según otras asignaturas del programa?

Tarea reformulada

TAREA 9. Sea $(R,\bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$
a) ¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique
b) ¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique
c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique
d) En el conjunto R^2 defina una operación en la cual no exista el elemento identidad. Justifique

Tarea antigua

TAREA 5. Sea el conjunto $(Z_6,+_6)$ el conjunto de los enteros módulo 6.
a) De un subgrupo que tenga 3 elementos? Justifique
b) Escriba un subconjunto que no sea subgrupo? Justifique
c) Es Z_3 subgrupo de Z_6 ? Justifique
d) Elabore la tabla de operación del conjunto?

Tarea reformulada

TAREA 10. Sea el grupo $(Z_6,+_6)$ de los enteros módulo 6.
a) Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique
b) Escriba un subconjunto de $(Z_6,+_6)$ que no sea subgrupo. Justifique
c) ¿Es Z_3 un subgrupo de Z_6? Justifique
d) Elabore la tabla de operación para el conjunto $(Z_6,+_6)$

Tarea antigua

TAREA 7. Sea el grupo $V-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e$.
a) Construya la tabla para la operación multiplicativa de este grupo.
b) Construya el grupo cociente por $H = \langle a \rangle$? Justifique
c) Qué condición cumple el subgrupo H ? Justifique
d) Liste los elementos de la clase bH ? Justifique

Tarea reformulada

TAREA 11. Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.

b) Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique

c) ¿Qué condición cumple el subgrupo H para determinar el grupo cociente? Justifique

d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique

Finalmente, luego de realizar los análisis a las preguntas y respuestas del cuestionario piloto y tomando en consideración la información obtenida de la revisión del instrumento mediante el juicio de expertos y la aplicación piloto del cuestionario, se obtiene la versión definitiva del cuestionario que permitió evaluar los conocimientos didáctico-matemáticos de los estudiantes de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo.

3.5. Versión final del instrumento *CDM-Grupo*

Se presenta en la tabla 3.18 la distribución de las tareas del cuestionario final, luego de los análisis minuciosos respecto al juicio de los expertos; el criterio del investigador y la revisión de los resultados de la prueba piloto. Las tareas se reorganizaron tratando de ubicar en primer lugar, aquellas que no se alcanzaron a analizar (por el tiempo) y a partir del análisis a los subítems en busca de claridad y tratando de simplificar las tareas del cuestionario para adecuarlas al tiempo de 2 horas.

Tabla 3.18: Organización de tareas del cuestionario *CDM-Grupo*

TAREA NUEVA	TAREA ANTIGUA
1	6
2	10
3	9
4	11
5	3
6	4
7	8
8	1* (se cambia)
9	2
10	5
11	7

TAREA 1. Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.

a) Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3. Justifique

b) ¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique

c) ¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(Z_4,+_4)$? Justifique

d) ¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique

TAREA 2. Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ se dice que f es un invariante del grupo S_4.

a) ¿Es $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique

b) ¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a f invariante? Justifique

c) Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. Dé un polinomio simétrico. Justifique

d) Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine b,c en función de sus raíces x_1, x_2. Justifique

TAREA 3. Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$.

a) Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2. Justifique

b) El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique

c) El subconjunto de permutaciones del grupo S_4 que deja invariante a la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ Justifique

d) ¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique

TAREA 4. El subgrupo de permutaciones regular de $n-$ símbolos, mueve los $n-$ símbolos excepto la identidad.

a) Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique

b) ¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique

c) ¿El subgrupo es conmutativo? Justifique

d) ¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado a)? Justifique

TAREA 5. Divida el polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$.

Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto: $(Z_5,+_5)$.

a) ¿El cociente corresponde a? Justifique

¿El residuo corresponde a? Justifique

¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique

¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique

TAREA 6. Dado el conjunto $A_2 := \{1, 2, 3,...,99\}$ de los z– números y la función $r : \mathrm{N} \to A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n < 100$ y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r, por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52+98) = r(150) = r(1+50) = r(51) = 51$.

Se define además, en el conjunto A_2 la operación $x \oplus y = r_{(}x + y_{)}$.

Solucione $x \oplus 17 = 99$ y diga qué propiedades utiliza para dar solución a la ecuación.

¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\oplus)$? Justifique

¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2,\oplus)$? Justifique

¿Qué $z\_$ números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2,\oplus)$? Justifique

TAREA 7. Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).

a) El grupo es Abeliano.

b) $a = e$

c) $a^2 = a$ y el grupo es abeliano.

d) $a^3 = e$ y el grupo es abeliano

TAREA 8. Sea $G = \langle A,B \rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$Y\ B =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine los elementos de G. Justifique

b) ¿G es grupo abeliano? Justifique

c) ¿Determine el subgrupo de orden 2? Justifique

d) ¿Cuál es la operación en $GL(2, \mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique

TAREA 9. Sea $(R, \bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$

a) ¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique

b) ¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique

c) ¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique

d) En el conjunto R^2 defina una operación en la cual no exista el elemento identidad. Justifique

TAREA 10. Sea el grupo $(Z_6,+_6)$ de los enteros módulo 6.

a) Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique

b) Escriba un subconjunto de $(Z_6,+_6)$ que no sea subgrupo. Justifique

c) ¿Es Z_3 un subgrupo de Z_6? Justifique

d) Elabore la tabla de operación para el conjunto $(Z_6,+_6)$

TAREA 11. Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.

a) Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.

b) Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique

c) ¿Qué condición cumple el subgrupo H para determinar el grupo cociente? Justifique

d) Liste los elementos de la clase bH. Justifique

Capítulo 4

Tercer Resultado: Evaluación del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática

4.1. Introducción

El capítulo anterior, constituye el segundo punto de partida para evaluar la faceta epistémica del Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática, relacionados con el objeto Grupo: conocimiento que se ha potenciado y en algunos casos desarrollado en el proceso de formación universitaria.

En este capítulo, se analizan los resultados de la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo*. Se analizan las respuestas dadas por 36 estudiantes de formación matemática a las situaciones problemáticas planteadas en el cuestionario: 16 estudiantes de Licenciatura, grupo G1; 16 estudiantes de Licenciatura del grupo G2 y 4 de Matemáticas. Se presenta en el capítulo el análisis de los conocimientos didácticos-matemáticos puestos en juego en la resolución de las situaciones problemáticas planteadas. Para el análisis de los resultados, se divide el capítulo en tres secciones: en la primera parte, se realiza una presentación; en la segunda, se describen los aspectos relacionados con la metodología y los sujetos participantes, los materiales y procedimientos empleados para la aplicación del cuestionario y finalmente, en la tercera sección, se realiza el análisis de tipo cuantitativo-cualitativo (mixto) de los resultados de la aplicación del cuestionario, junto con el análisis de la puntuación total y del índice de dificultad de los ítems. Se finaliza con un análisis detallado, desde una perspectiva mixta (cualitativo-cuantitativo) de algunos de los aspectos del conocimiento didáctico-matemático que se pretenden evaluar con los ítems y subítems que componen el cuestionario.

4.2. Método

La presente investigación es de tipo exploratorio-descriptivo, con un enfoque metodológico de tipo mixto (Hart, Smith, Swars & Smith, 2009; Johnson & Onwuegbuzie, 2004) al considerar el análisis de variables cuantitativas por medio de la variable "grado de corrección de las respuestas: correctas, parcialmente correctas e incorrectas" y cualitativas por medio del análisis de las configuraciones puestas en juego por los estudiantes de formación matemática al desarrollar las situaciones problemáticas planteadas, que permitieron evaluar y caracterizar ciertos aspectos del Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes, según el modelo del CDM en el enfoque EOS (Godino, 2009).

4.3. Población

El cuestionario se aplicó a 36 estudiantes de formación matemática de una universidad Colombiana, que cursaban la asignatura de Teoría de Anillos (Licenciatura y Matemáticas) al finalizar el segundo semestre académico del 2015. Para los estudiantes de licenciatura se tomaron dos grupos el G1 con 16 estudiantes y el grupo G2 con 16 estudiantes (estos grupos corresponden a dos programas distintos el primero de jornada nocturna y el segundo de jornada diurna) y el grupo G3 de Matemáticas conformado por 6 estudiantes; en este caso, solo 4 estudiantes presentaron la prueba, ya que 2 estudiantes no asistieron el día de la aplicación del cuestionario.

Los datos se obtienen mediante la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo* cuyo proceso de diseño y construcción se describió en el capítulo anterior: el primer paso, fue la aplicación del cuestionario inicial que aportó una primera aproximación al estudio del Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes y de sus dificultades; de igual forma, se trabajó el cuestionario con expertos y finalmente, atendiendo a las recomendaciones de los expertos se realizaron los ajustes pertinentes al cuestionario piloto, de donde se obtuvo el cuestionario final.

Algunas de las diferencias entre las versiones se encuentran en el cambio del orden en que se presentaron los ítems; ya que, según las argumentaciones de los estudiantes, el tiempo para la prueba piloto era insuficiente y por tanto, trabajaron solo las primeras 7 preguntas. También se tuvo presente el juicio de los expertos en la búsqueda de claridad y concisión de los ítems y subítems. Así, en la versión final, los últimos ítems que no se analizaron (8,9,10,11) y que se deseaban analizar para complementar los resultados de la primera aplicación, se colocaron en primer lugar: se buscaba además, identificar la causa de no responder las preguntas mencionadas, ya que podían ser diversas.

4.4. Material y procedimientos

La toma de datos para el cuestionario final estuvo a cargo de dos profesores de la Escuela de Matemáticas y Estadística, los cuales orientaban los cursos de Teoría de

Anillos. Dentro del cuestionario se describe el objetivo de la prueba que corresponde a analizar diferentes aspectos del programa Teoría de Grupos, en la búsqueda de mejoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje del objeto matemático. En el cuestionario se especificaba que este no tenía ningún efecto sobre la nota de la asignatura y que las respuestas eran confidenciales, con el único propósito de utilizarlas en la investigación sobre el objeto Grupo y el conocimiento de los estudiantes. Se entregaron los pliegos del cuestionario *CDM-Grupo* a cada estudiante, con un tiempo de 2 horas. Adicionalmente, en el pliego se solicitaba explicar y argumentar en forma clara y ordenada cada una de las respuestas, además de escribir las dificultades que se les presentaban respecto al contenido matemático con los subítems: en esta ocasión los estudiantes no manifestaron que el tiempo era insuficiente.

4.5. Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación-matemática para la enseñanza del objeto Grupo

Se presenta un análisis mixto de tipo cuantitativo-cualitativo, de los resultados de los 36 estudiantes de formación matemática. Para esta presentación se organiza el apartado en dos secciones: la primera, donde se realiza el estudio cuantitativo de los resultados y la segunda, que corresponde al análisis mixto. Para estos análisis, se codifica la variable cuantitativa "grado de corrección de las respuestas" donde se asignan las puntuaciones de "25," si la respuesta es correcta; entre "0-25," si la respuesta es parcialmente correcta y "0," si la respuesta es incorrecta. La variable cualitativa que corresponde a la "configuración epistémica" activada en el estudiante al desarrollar la práctica matemática, permitió analizar el tipo de conocimiento puesto en juego por el estudiante al desarrollar la situación-problemática planteada: esta variable se analizó de acuerdo a los objetos matemáticos primarios puestos en juego por el estudiante al desarrollar las prácticas matemáticas: se categorizaron las respuestas de los estudiantes y a partir de éstas categorías se llegó al análisis de los conocimientos de los estudiantes sobre el contenido matemático y la determinación de algunas de las dificultades evidenciadas en las respuestas de los subítems que dieron lugar a respuestas parcialmente incorrectas o incorrectas.

4.5.1. Análisis de la puntuación total del cuestionario CDM-Grupo

En la tabla 4.1 se presentan las valoraciones de los tres grupos de estudiantes de formación matemática: el grupo G1 de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno); el grupo G2 de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa diurno) y el grupo G3 de Matemáticas. Las 11 preguntas proporcionan un total de 1100 puntos, el cual se divide la puntuación por 20 para obtener 55 puntos que correspondería a la máxima puntuación de la prueba (en el contexto universitario Colombiano, las puntuaciones de las pruebas toman valores entre 0 y 50 puntos por lo tanto, se hace la conversión respectiva).

Tabla 4.1: Puntuación para el cuestionario *CDM-Grupo*

G1	Puntaje	Total (55)	G2	Puntaje	Total (55)	G3	Puntaje	Total (55)
LM11	80	4	LM21	335	17	M1	220	11
LM12	60	3	LM22	260	13	M2	370	19
LM13	175	9	LM23	310	16	M3	305	15
LM14	105	5	LM24	275	14	M4	210	11
LM15	125	6	LM25	70	4			
LM16	35	2	LM26	95	5			
LM17	175	9	LM27	75	4			
LM18	90	5	LM28	45	2			
LM19	120	6	LM29	45	2			
LM110	90	5	LM210	170	9			
LM111	105	5	LM211	145	7			
LM112	50	3	LM212	140	7			
LM113	55	2	LM213	185	9			
LM114	145	7	LM214	235	12			
LM115	165	8	LM215	255	13			
LM116	125	6	LM216	195	10			

En la tabla 4.2, se presenta el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno) grupo G1, en el cuestionario *CDM-Grupo* sobre el conocimiento didáctico-matemático del objeto Grupo. A partir de esta tabla, se observó que los puntajes totales oscilaron entre 2 y 9 puntos, de lo cual se deduce que ningún estudiante de Licenciatura respondió en forma correcta todo el cuestionario. Se observa además, que la puntuación media es de 5.4 puntos (menos del 10% del puntaje máximo), lo cual es un puntaje demasiado bajo si las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos.

Tabla 4.2: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G1 de Licenciatura

G1-Licenciatura	Estadístico
Media	5.4
Mediana	5
Moda	5
Desv. Típica	2.13
Varianza	4.234
Asimetría	0.293
Curtosis	-0.636

G1-Licenciatura	Estadístico
Mínimo	2
Máximo	9
Rango	7
Recuento	16
Percentiles: 25 50 75	 3.750 5 6.25

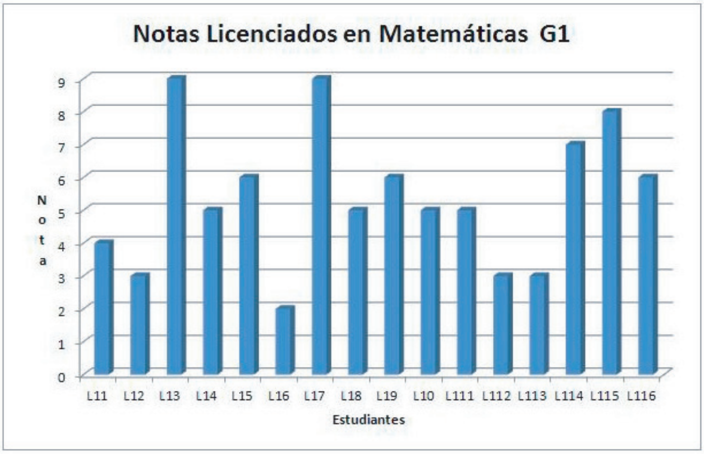


Figura 4.1: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G1 de Licenciatura

Los estadísticos descriptivos de la tabla 4.2 y figura 4.1 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es de 5 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher correspondiente a 0.293 pone de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales arriba de la media.

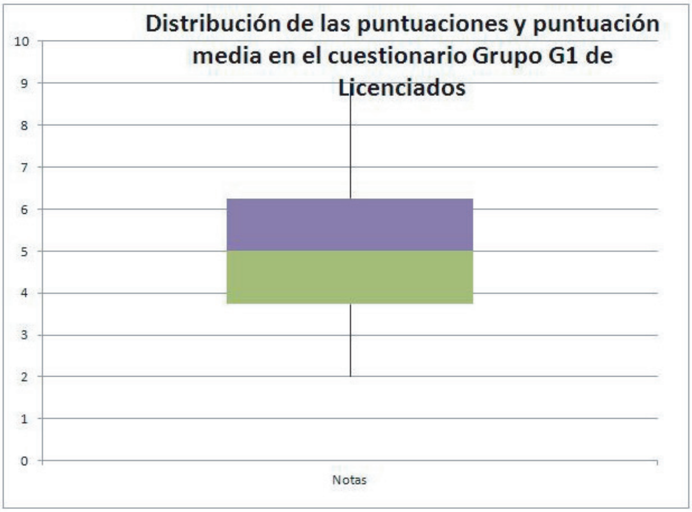


Figura 4.2: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G1 de Licenciatura

En el diagrama de caja de la figura 4.2 se observa que más del 25 por ciento de los estudiantes de Licenciatura del grupo G1, obtienen una puntuación mayor a 3.8 puntos de un total de 55 puntos; más del 50 por ciento obtienen una puntuación de 5 puntos y más del 75 por ciento obtienen una puntuación de 6.3 puntos. De otro lado, como la amplitud del bigote inferior es más corta que la del superior, las puntuaciones se encuentran más concentradas en el 25 por ciento de los datos: estos se encuentran en el intervalo (V_{min}, Q_1), es decir, entre (2.0, 3.8).

En la misma dirección, se presenta en la tabla 4.3 y en la figura 4.3 el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa diurno) del grupo G2 al cuestionario *CDM-Grupo,* sobre el conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo. A partir de la tabla, se observa que los puntajes totales oscilan entre 2 y 17 puntos, de lo cual se deduce al igual que en el caso del grupo anterior G1, que ningún estudiante de Licenciatura respondió en forma correcta todo el cuestionario. En contraste, en la prueba piloto un estudiante de Licenciatura obtuvo la mayor nota que corresponde a 30 puntos de 50. Se observa además, que la puntuación media es de 9 puntos lo cual es demasiado bajo; ya que, las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos y además, en la puntuación se consideran preguntas correctas y parcialmente correctas.

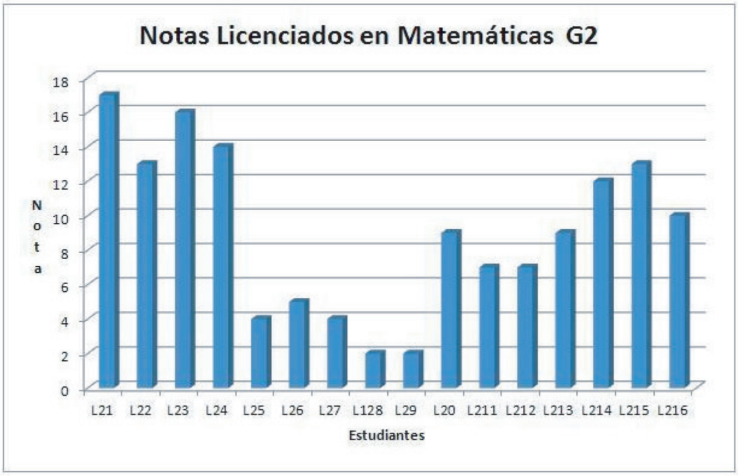


Figura 4.3: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G2 de Licenciatura

Tabla 4.3: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G2 de Licenciatura

G2-Licenciatura	Estadístico
Media	9
Mediana	9
Moda	13
Desv. Típica	4.844
Varianza	22
Asimetría	0.0804
Curtosis	-1.1656
Mínimo	2
Máximo	17
Rango	15
Recuento	16
Percentiles 25 50 75	 4.750 9 13

Los estadísticos descriptivos de la tabla 4.3 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es el de 13 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher que es de 0.0804, deja de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales a la derecha de la media, es decir, que los puntajes totales se distribuyen unilateralmente.

Del diagrama de caja de la figura 4.4 se observa que más del 25 por ciento de los estudiantes de Licenciatura del grupo G2, obtienen una puntuación mayor a 5 puntos aproximadamente, de un total de 55 puntos; más del 50 por ciento de los estudiantes de Licenciatura obtiene una puntuación mayor a 9 puntos y más del 75 por ciento de los estudiantes de Licenciatura obtiene una puntuación mayor a 13 puntos del total de 55 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 24% de la puntuación total). Por otro lado, la amplitud del bigote inferior también, es más corta que la del superior, por lo cual, las puntuaciones se encuentran más concentradas en el 25 por ciento de los datos que se encuentran entre el intervalo (V_{min},Q_1), esto es, entre (2,0,4,75).

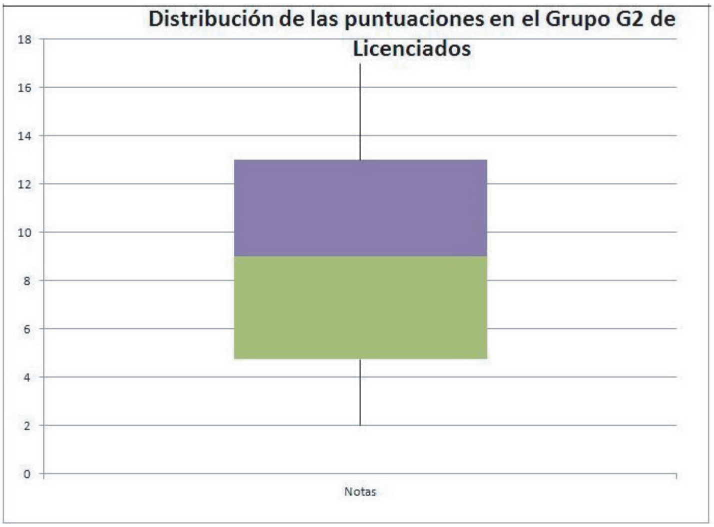


Figura 4.4: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G2 de Licenciados

En la tabla 4.4 y en la figura 4.5 se muestra el resumen estadístico de los puntajes obtenidos por los estudiantes de Matemáticas (programa diurno) grupo G3, al cuestionario *CDMGrupo* sobre el conocimiento didáctico-matemático relacionado con el objeto Grupo. A partir de la tabla, se observa que los puntajes totales oscilaron entre 11 y 19 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 34% del puntaje total), de lo cual se deduce, al igual que en el caso del grupo G1 y G2 de Licenciatura, que ningún estudiante respondió en forma correcta todo el cuestionario. En contraste, en la prueba piloto los estudiantes de Matemáticas obtuvieron las notas de 36, 37, 39, 39, 44 y 46 (alcanzando el 92% del puntaje total de la prueba). Se observó además, que la puntuación media fue de 14 puntos, la cual es demasiado baja (no alcanza el 26% del total de la prueba) al considerar que las puntuaciones totales varían entre 0 y 55 puntos y además que para la puntuación total se consideraron preguntas correctas y parcialmente correctas.

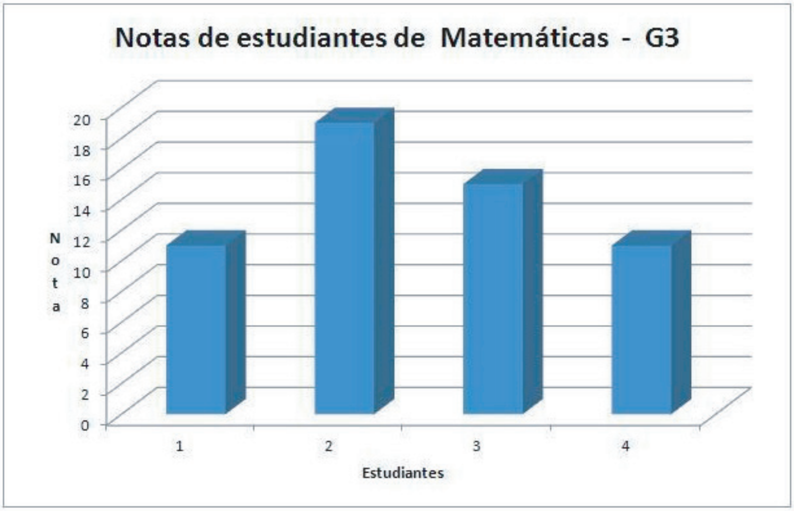


Figura 4.5: Distribución de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G3 de Matemáticos

Tabla 4.4: Estadísticos descriptivos de la puntuación en el grupo G3 de Matemáticos

G3-Matemáticos	Estadístico
Media	14
Mediana	13
Moda	11
Desv. Típica	3.830
Varianza	11
Asimetría	0.8545
Curtosis	-1.289
Mínimo	11
Máximo	19
Rango	8
Recuento	4
Percentiles 25 50 75	 11 13 16

Los estadísticos descriptivos de la tabla 4.4 muestran que el puntaje de mayor frecuencia es el de 11 puntos y el coeficiente de asimetría de Fisher de 0.8545, deja de manifiesto la existencia de una mayor concentración de los puntajes totales arriba de la media.

Del diagrama de caja de la figura 4.6 se observa que más del 25 por ciento de los Matemáticos del grupo G3, obtuvieron una puntuación mayor a 11 puntos de un total de 55 puntos (puntuación demasiado baja ya que no alcanza el 20% de la puntuación total; más del 50 por ciento de los Matemáticos obtienen una puntuación de 13 puntos y más del 75 por ciento obtiene una puntuación mayor a 16 puntos de un total de 55 puntos (demasiado baja ya que no alcanza el 29% de la puntuación total). Por otro lado, la amplitud del bigote inferior es más corta que la del superior, por lo cual, las puntuaciones se encuentran más concentradas en el 25 por ciento de los datos que se encuentran entre el intervalo (V_{min},Q_1) esto es, entre (11,19).

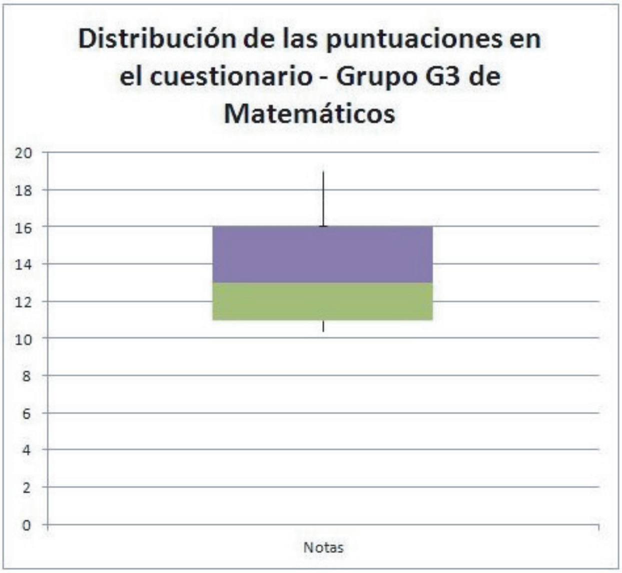


Figura 4.6: Diagrama de caja de las puntuaciones totales y puntuación media en el grupo G3 de Matemáticos

4.5.2. Análisis del índice de dificultad a las preguntas del cuestionario

Se presenta en la tabla 4.5 las frecuencias de las puntuaciones obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1 (programa nocturno).

Tabla 4.5: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G1

Puntuaciones totales del cuestionario:Grupo G1 de Licenciatura						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	5	31.25	1	6.25	10	62.5
b)	3	18.75	4	25	9	56.25
c)	4	25	9	56.25	3	18.75
d)	2	12.5	1	6.25	13	81.25
P2.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	16	100
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	5	31.25	10	62.5
b)	5	31.25	1	6.25	10	62.5
c)	0	0	0	0	16	100
d)	4	25	0	0	12	75
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	1	6.25	15	93.75
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	16	100
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P8.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	1	6.25	15	93.75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P9.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	2	12.5	2	12.5	12	75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P10.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	5	31.25	0	0	11	68.75
b)	6	37.5	1	6.25	9	56.25
c)	1	6.25	0	0	15	93.75
d)	9	56.25	0	0	7	43.75
P11.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	7	43.75	0	0	9	56.25
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	1	6.25	0	0	15	93.75

A continuación, se resume el índice de dificultad de cada una de las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* para el grupo G1 de Licenciatura en Matemáticas.

Tabla 4.6: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G1

P1.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P7.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	37.5		a)	6.25
	b)	43.75		b)	0
	c)	81.25		c)	0
	d)	18.75		d)	0
	media	**45.31**		**media**	**1.56**
P2.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P8.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	0		a)	6.25
	b)	0		b)	6.25
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	**0**		**media**	**3.125**
P3.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P9.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	37.5		a)	6.25
	b)	37.5		b)	25
	c)	0		c)	0
	d)	25		d)	0
	media	**25**		**media**	**7.81**
P4.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P10.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	12.5		a)	31.25
	b)	0		b)	43.75
	c)	0		c)	6.25
	d)	6.25		d)	56.25
	media	**4.68**		**media**	**34.37**
P5.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P11.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	0		a)	43.75
	b)	0		b)	0
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	**0**		**media**	**10.93**
P6.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**			
	a)	6.25			
	b)	0			
	c)	0			
	d)	0			
	media	**1.56**			

Se tiene al igual que para la prueba piloto, la escala para el análisis del índice de dificultad de las preguntas:

Índice de dificultad de 0: ítem de alto-máximo grado de dificultad

Índice de dificultad ≤ 0,05: ítem difícil

(0,05−0,25$_{)}$: ítem medianamente difícil

(0,25−0,75]**: ítem de dificultad media** (0,75−0,95]: ítem medianamente fácil

> 0,95: ítem fácil

1 : ítem de un grado máximo de facilidad.

En la figura 4.7 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo a su índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1. De los 11 ítems explorados, 2 (P2, P5), que corresponden al 18 por ciento, son preguntas que presentan un máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (programa nocturno); 4 preguntas (P4, P6, P7, P8), que representan el 36 por ciento aproximado de los ítems, son difíciles; las 3 preguntas (P3, P9, P11), son medianamente difíciles (27.3 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y 2 preguntas (P1 y P10), tienen una **dificultad media** para los estudiantes de Licenciatura. En este caso no hay ítems medianamente fáciles, ni fáciles, para los estudiantes; tampoco hay preguntas con índices de un grado máximo de facilidad. Se esperaría en general de un cuestionario de evaluación, que el 50 por ciento de las preguntas presentaran una dificultad media; el 20 por ciento fueran medianamente fáciles; el 20 por ciento medianamente difíciles; el 5 por ciento fáciles y el 5 por ciento difíciles.

En la tabla 4.7 se muestran las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G2 (programa diurno) en el cuestionario.

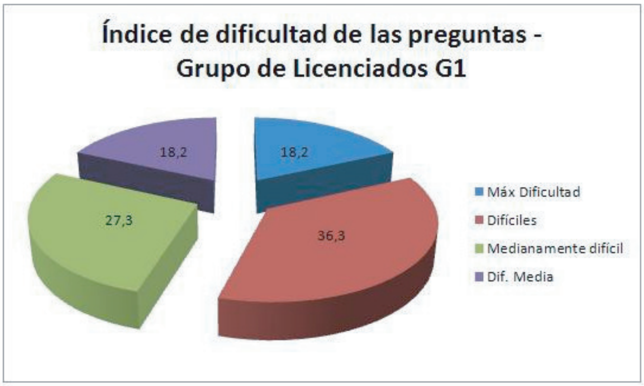


Figura 4.7: Dificultad de los ítems: Estudiantes de Licenciatura - G1

Tabla 4.7: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G2

Puntuaciones totales del cuestionario: Grupo G2 de Licenciatura						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	14	87.5	0	0	2	12.5
b)	8	50	0	0	8	50
c)	9	56.25	6	37.5	1	6.25
d)	7	43,75	1	6.25	8	50
P2.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	0	0	0	0	16	100
c)	3	18.75	0	0	13	81.25
d)	0	0	3	18.75	13	81.25
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	4	25	12	75
b)	0	0	4	25	12	75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	1	6.25	15	93.75
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	6.25	0	0	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	1	6.25	0	0	15	93.75
d)	1	6.25	0	0	15	93.75
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	3	18.75	0	0	13	81.25
b)	0	0	0	0	16	100
c)	3	18.75	0	0	13	81.25
d)	2	12.5	0	0	14	87.5
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	2	12.5	14	87.5
b)	1	6.25	2	12.5	13	81.25
c)	2	12.5	1	6.25	13	81.25
d)	0	0	3	18.75	13	81.25
P8.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	1	6.25	15	93.75
b)	0	0	0	0	16	100
c)	0	0	0	0	16	100
d)	0	0	0	0	16	100
P9.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	5	31.25	4	25	7	43.75
b)	8	50	2	12.5	6	37.5
c)	0	0	3	18.75	13	81.25
d)	0	0	2	12.5	14	87.5
P10.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	3	18.75	0	0	13	81.25
b)	6	37.5	1	6.25	9	56.25
c)	0	0	0	0	16	100
d)	7	43.75	1	6.25	8	50
P11.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	7	43.75	0	0	9	56.25
b)	1	6.25	0	0	15	93.75
c)	0	0	0	0	16	100
d)	1	6.25	0	0	15	93.75

En la tabla 4.8 se presenta el índice de dificultad para cada una de las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* en el grupo G2 de Licenciatura en Matemáticas.

En la figura 4.8 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo al índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G2. De los 11 ítems explorados, 3 preguntas (P4, P5, P8), que representan el 27 por ciento aproximado de los ítems, fueron difíciles para los estudiantes de Licenciatura (programa diurno); 5 preguntas (P2, P3, P6, P11), fueron medianamente difíciles (45 por ciento) para los estudiantes de Licenciatura y 2 preguntas, que corresponden al 18 por ciento (P9 y P10), presentaron una **dificultad media**. No hay ítems con un grado máximo de dificultad, ni medianamente fáciles, tampoco fáciles; de igual forma, no hay preguntas con índices de un de grado máxima facilidad.

Tabla 4.8: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Licenciatura-G2

P1.	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**	**P7.**	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**
	a)	87.5		a)	12.5
	b)	50		b)	18.75
	c)	93.75		c)	18.75
	d)	50		d)	18.75
	media	**70.31**		**media**	**17.18**
P2.	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**	**P8.**	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**
	a)	0		a)	6.25
	b)	0		b)	0
	c)	18.75		c)	0
	d)	18.75		d)	0
	media	**9.37**		**media**	**1.56**
P3.	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**	**P9.**	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**
	a)	25		a)	56.25
	b)	25		b)	62.5
	c)	0		c)	18.75
	d)	6.25		d)	12.5
	media	**14.06**		**media**	**37.5**
P4.	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**	**P10.**	Ítem	**Índiced e dificultad %**
	a)	6.25		a)	18.75
	b)	0		b)	43.75
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	50
	media	**1.56**		**media**	**37.5**
P5.	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**	**P11.**	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**
	a)	6.25		a)	43.75
	b)	0		b)	6.25
	c)	6.25		c)	0
	d)	6.25		d)	6.25
	media	**4.68**		**media**	**14.06**
P6.	**Ítem**	**Índiced e dificultad %**			
	a)	18.75			
	b)	0			
	c)	18.75			
	d)	12.5			
	media	**12.5**			

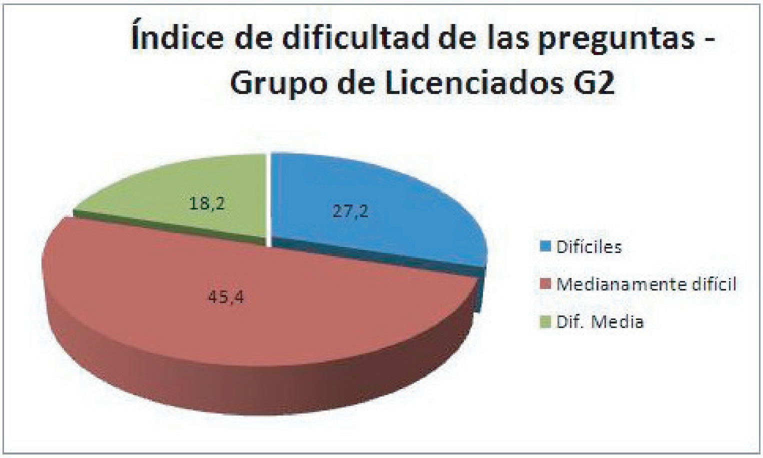


Figura 4.8: Dificultad de los ítems: Estudiantes de Licenciatura - G2

En la tabla 4.7 se muestran las frecuencias de las puntuaciones totales obtenidas por los estudiantes de Matemáticas - grupo G3 (programa diurno) en el cuestionario.

Tabla 4.9: Puntuaciones y Frecuencias en el cuestionario *CDM-Grupo*: Matemáticos-G3

Puntuaciones totales del cuestionario: Grupo G3 de Matemáticos						
Ítem	**R-Correctas**		**R-Parcial-mente-C**		**R-Incorrectas**	
P1.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	4	100	0	0	0	0
b)	4	100	0	0	0	0
c)	4	100	0	0	0	0
d)	4	100	0	0	0	0
P2.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	1	25	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P3.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	4	100	0	0
b)	2	50	2	50	0	0
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	4	100	0	0
P4.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P5.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P6.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	3	75	0	0	1	25
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	1	25	0	0	3	75
P7.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	1	25	0	0	3	75
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	1	25	0	0	3	75
P8.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	0	0	0	0	4	100
b)	0	0	0	0	4	100
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100
P9.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	2	50	0	0	2	50
b)	1	25	0	0	3	75
c)	1	25	0	0	3	75
d)	0	0	0	0	4	100
P10.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	2	50	0	0	2	50
b)	2	50	0	0	2	50
c)	0	0	1	25	3	75
d)	2	50	0	0	2	50
P11.	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**	**Frecuencia**	**%**
a)	2	50	0	0	2	50
b)	1	25	0	0	3	75
c)	0	0	0	0	4	100
d)	0	0	0	0	4	100

Se presenta el índice de dificultad para las 11 preguntas del cuestionario *CDM-Grupo* en el grupo G3 de estudiantes de Matemáticas.

Tabla 4.10: Índice de dificultad de las preguntas del cuestionario *CDM-Grupo*: Matemáticos-G3

P1.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P7.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	25		a)	6.25
	b)	25		b)	6.25
	c)	25		c)	0
	d)	25		d)	6.25
	media	**25**		**media**	4.68
P2.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P8.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	0		a)	0
	b)	6.25		b)	0
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	**1.56**		**media**	**0**
P3.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P9.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	25		a)	12.5
	b)	25		b)	6.25
	c)	0		c)	6.25
	d)	25		d)	0
	media	**12.5**		**media**	**6.25**
P4.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P10.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	0		a)	12.5
	b)	0		b)	12.5
	c)	0		c)	6.25
	d)	0		d)	12.5
	media	**0**		**media**	**10.93**
P5.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**	**P11.**	**Ítem**	**Índice de dificultad %**
	a)	0		a)	12.5
	b)	0		b)	6.25
	c)	0		c)	0
	d)	0		d)	0
	media	**0**		**media**	**4.68**
P6.	**Ítem**	**Índice de dificultad %**			
	a)	18.75			
	b)	6.25			
	c)	0			
	d)	6.25			
	media	**7.81**			

En la figura 4.9 se observan los resultados al agrupar los ítems del cuestionario de acuerdo al índice de dificultad y según los puntajes obtenidos por los estudiantes de Matemáticas - grupo G3. De los 11 ítems explorados, 3 preguntas (P4, P5, P8), presentaron un grado máximo de dificultad para los estudiantes de Matemáticas (27 por ciento aproximado); 3 preguntas (P2, P7, P11), que representan el 27 por ciento aproximado de los ítems, fueron

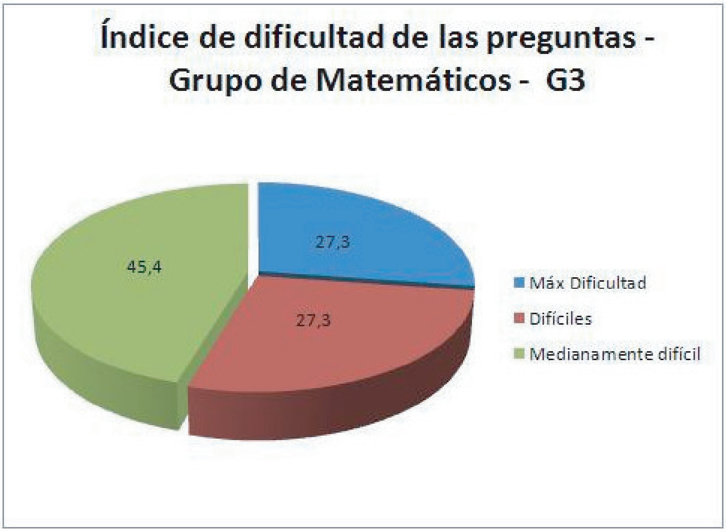


Figura 4.9: Dificultad de los ítems: estudiantes de Matemáticas - G3

difíciles para los Matemáticos; 5 preguntas (P1, P3, P6, P9, P10), fueron medianamente difíciles (45 por ciento). No hay ítems con dificultad media, ni medianamente fáciles, tampoco fáciles y de igual forma, no se presentaron índices con un grado de máxima facilidad.

Se presenta en la tabla 4.11, el índice de dificultad del cuestionario *CDM-Grupo* para los tres grupos de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (G1 y G2) y el grupo G3 de estudiantes de Matemáticas.

Tabla 4.11: Índice de dificultad del cuestionario *CDM-Grupo*

Índice de dificultad del cuestionario CDM-Grupo						
Pregunta	**Licenciatura-G1**	**Porcentaje**	**Licenciatura-G2**	**Porcentaje**	**Matemáticas-G3**	**Porcentaje**
P1	0.4531	45.31	0.7036	70.36	0.25	25
P2	0	0	0.0937	9.37	0.0156	1.56
P3	0.25	25	0.14	14	0.125	12.5
P4	0.0468	4.68	0.0156	1.56	0	0
P5	0	0	0.0468	4.68	0	0
P6	0.0156	1.56	0.125	12.5	0.0781	7.81
P7	0.0156	1.56	0.1718	17.18	0.0468	4.68
P8	0.03125	3.125	0.0156	1.56	0	0
P9	0.0781	7.81	0.375	37.5	0.0625	6.25
P10	0.3437	34.37	0.375	37.5	0.1093	10.93
P11	0.1093	10.93	0.1406	14.06	0.0468	4.68
	Media	**16.21**	**Media**	**20.02**	**Media**	**6.67**

En la tabla 4.11 se observa que para los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas del grupo G1, la mayoría de los ítems (el 55 por ciento aproximado) presentaron una **dificultad alta** del 0 por ciento: el grado de dificultad se relaciona con el bajo nivel de dominio del Conocimiento del Contenido sobre el objeto Grupo. En general el índice de dificultad del cuestionario final corresponde en promedio al 14% resultando medianamente difícil para todos los estudiantes.

Se presenta el análisis de uno de los ítems con mayor grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura del grupo G1.

Subítem 2a):

Según la tabla 4.15, este ítem permite la valoración del conocimiento ampliado del contenido y del conocimiento especializado del contenido, respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4,\circ)$ resultando así, de máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar si la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ es invariante en el grupo dado. Ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Se observa de la tabla 4.6 que el ítem que presentó menor dificultad en este grupo G1, (81 por ciento, aproximado) fue el ítem 1c) que se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo Z_4 de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo dado.

Analizando el grupo G2 y según la tabla 4.8 se presenta uno de los ítems con dificultad alta: dificultad del 0 por ciento (el 30 por ciento aproximado de los estudiantes). Este grado de dificultad se relacionan con un bajo nivel de dominio del Conocimiento del Contenido respecto al objeto Grupo.

Subítem 2a):

Según la tabla 4.15 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4,\circ)$ resultando así, en máximo grado de dificultad para los estudiantes de Licenciatura determinar si la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, es un invariante del grupo dado, ya que, ninguno de los estudiantes respondió en forma correcta.

Para el grupo de Licenciatura G2, finalmente, se observó de la tabla 4.8 que el ítem que presentó menor dificultad (94 por ciento, aproximado) al igual que para el grupo de Licenciatura G1, es el ítem 1c) que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo Z_4 de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo de simetrías dado.

Continuando con el análisis, en la tabla 4.10 se observa que para los estudiantes de Matemáticas del grupo G3, uno de los ítems que presentó un nivel de dificultad alto para este caso, del 0 por ciento, para el 48 por ciento aproximado de los estudiantes que se relacionan con nivel de dominio bajo del Conocimiento del Contenido del objeto Grupo corresponden a:

Subítem 2a):

Que según la tabla 4.15 se relaciona con el conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido respecto al grupo de permutaciones de cuatro elementos $(S_4,\circ)$, resultando así, en máximo grado de dificultad para los Matemáticos determinar si la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, es un invariante del grupo dado, ya que, ninguno de estos estudiantes respondió en forma correcta.

Para este grupo de estudiantes de Matemáticas G3, finalmente, se observa en la tabla 4.10 que uno de los subítems que presentó menor grado dificultad (para el 25 por ciento, aproximado de los estudiantes) corresponden a:

Subítem 1a):

Que se relaciona con el conocimiento común del contenido sobre el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con la determinación de un subgrupo del grupo de simetrías; *subítem 1b)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con determinar un grupo isomorfo al subgrupo del grupo de simetrías dado en el subítem anterior; *subítem 1c)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con el teorema de Lagrange, al determinar que el grupo de simetrías no puede tener un subgrupo isomorfo al grupo Z_4 de los enteros módulo 4, ya que, cuatro no es un divisor de seis que es el orden del grupo de simetrías dado; *subítem 1d)* que corresponde al conocimiento ampliado del contenido y conocimiento especializado del contenido sobre el grupo $(D_3,\circ)$, de simetrías del triángulo rectángulo y se relaciona con justificar porque el grupo de simetrías no es un grupo cíclico.

Como conclusión, se presenta en la tabla 4.12 los *subítems de mayor dificultad* para los dos grupos de Licenciatura:

Tabla 4.12: Subítems de mayor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1 y G2 de Licenciatura

Licenciatura - G1 y G2	Categoría del CDM
2a)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
2b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
3c)	Conocimiento ampliado
4b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
4c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
5b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
6b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8d)	Conocimiento especializado
11c)	Conocimiento ampliado

En la misma dirección, se presenta en la tabla 4.13 los *subítems de mayor grado de dificultad* para los tres grupos de estudiantes.

Tabla 4.13: Subítems de mayor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1, G2, G3

Licenciatura - G1 y G2; Matemáticas - G3	Categoría del CDM
2a)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
3c)	Conocimiento ampliado
4b)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
4c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
5b)	Conocimiento común
	Conocimiento ampliado
8c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado
8d)	Conocimiento especializado
11c)	Conocimiento ampliado

Finalmente, se presenta en la tabla 4.14 el *subítem de menor grado de dificultad* respecto a los tres grupos de estudiantes.

Tabla 4.14: Subítems de menor grado de dificultad en el cuestionario *CDM-GRUPO* grupos G1, G2, G3

Licenciatura - G1 y G2; Matemáticas - G3	Categoría del CDM
1c)	Conocimiento ampliado
	Conocimiento especializado

Se observa de las tablas 4.6, 4.8 y 4.10 que el cuestionario presentó un nivel de dificultad alto, respecto a las preguntas o ítems: en el grupo G1 de Licenciatura tomó valores entre el 1.56 y el 45 por ciento aproximado resultando *medianamente difícil* (dificultad del 16 por ciento) para este grupo de estudiantes. En el grupo G2 tomó valores entre el 10.56 y 70.31 por ciento, con una dificultad del 20 por ciento aproximada, esto es, el cuestionario también resultó *medianamente difícil* para este grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas. Finalmente, en el grupo G3 de Matemáticas, tomó valores entre el 0 y el 25 por ciento, siendo también, *medianamente difícil* para los estudiantes.

En conclusión, según la tabla 4.11, el cuestionario presentó en promedio un nivel de dificultad del 14 por ciento, luego de la reorganización de las preguntas, resultando medianamente difícil, para los estudiantes de formación matemática; pero según el diseño de cuestionarios, estas preguntas se pueden seleccionar de forma que se ajusten a un nivel de dificultad medio, que es lo que se desea de los cuestionario de evaluación. El objetivo de esta evaluación no se relacionaba con la determinación de un nivel de dificultad determinado para el instrumento (importante para una prueba homogénea); al contrario, el objetivo de la investigación involucraba otros aspectos más relevantes, como la identificación de las dificultades de los estudiantes con el objeto matemático y el análisis a las categorías del CDM en su faceta epistémica (relaciona con los conocimientos acerca del contenido matemático para el objeto de investigación); por tanto, lo importante del análisis del índice de dificultad al instrumento es que permite la identificación de las dificultades reales de los estudiantes con el objeto de investigación y en esta dirección se pueden a proponer mejoras en el proceso de enseñanza de los estudiantes.

4.5.3. El Conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática

En las secciones anteriores se analizó cuantitativamente el cuestionario *CDM - Grupo,* según la variable "grado de corrección de las respuestas" de esta forma, se estudiaron los aspectos: distribución de las puntuaciones totales y el índice de dificultad de los subítems sin profundizar en los aspectos relacionados con los tipos de conocimientos del contenido relacionados con el objeto Grupo y la identificación de las dificultades y errores que se presentaron en las respuestas de los estudiantes de formación matemática.

En esta dirección, como el conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto grupo, no es un conocimiento observable en forma directa, se puede inferir de las prácticas que realizan (visión pragmatista del EOS) al dar respuesta a cada una de las preguntas que componen el cuestionario *CDM-Grupo,* las cuales son observables (Godino, 1996; Vásquez, 2014).

En la búsqueda del logro del objetivo general para la investigación que corresponde a: *Evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, para determinar si se ha generado un conocimiento común y un conocimiento ampliado como bases del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza idónea del objeto Grupo* y bajo los supuestos pragmatistas del marco teórico de la investigación, se presenta el análisis a algunas de las respuestas de los estudiantes, pero en las conclusiones sobre el CDM, se trabajan todos los análisis efectuados según las tres categorías del conocimiento sobre el contenido matemático (Godino, 2009, Pino-Fan, Godino & Font, 2013a, 2013b; Vásquez, 2014).

Para el análisis cuantitativo de las respuestas de los estudiantes de formación matemática se consideró la variable cuantitativa "grado de corrección" la cual toma los valores de: 25 si la respuesta era correcta, entre (0,25) si la respuesta es parcialmente correcta y 0 si la respuesta es incorrecta o no se responde.

Para el análisis cualitativo, se analizaron las respuestas de los estudiantes agrupando aquellas que eran similares, para llegar a una categorización por medio de un proceso inductivo característico del análisis cualitativo de datos (Buendía, Colás & Hernández, 1998; Vásquez, 2014). Luego de establecer las principales categorías de las respuestas, se realizó el análisis de los conocimientos puestos en juego en las respuestas, así como de las dificultades que dieron lugar a respuestas parcialmente correctas o incorrectas. A partir de este análisis, se obtiene una información descriptiva para cada una de las respuestas, lo que permite describir algunos de los errores y dificultades en las argumentaciones presentes y así del conocimiento didáctico-matemático en relación con el objeto grupo.

Tabla 4.15: Categorías del CDM

Tarea	**Subítems**	**Consigna**	**Categoría del CDM**
	TAREA 1.	Sea D_3 el conjunto de simetrías del triángulo equilátero.	
	(a)	Dé un ejemplo de un subgrupo de D_3 Justifique	Conocimiento común
	(b)	¿A qué grupo puede ser isomorfo, el subgrupo de la pregunta anterior? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	¿Existe un subgrupo de D_3 isomorfo al grupo $(Z_4,+_4)$? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	¿El grupo D_3 es cíclico? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	**Subítems**	**Consigna**	**Categoría del CDM**
	TAREA 2.	Sea el grupo S_4 de permutaciones de los elementos $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ y sea $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una función tal que si para todo $\alpha \in S_4$ se cumple que $\alpha f(x_1,x_2,x_3,x_4) := f(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)},x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)})$ se dice que f es un invariante del grupo S_4.	
	(a)	¿Es $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$ una función invariante? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(b)	¿Qué elementos $\alpha \in S_4$ dejan a f invariante? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	Un polinomio f se llama simétrico si para toda permutación α se cumple que $\alpha f = f$. Dé un polinomio simétrico. Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	(d)	Para la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ determine b,c en función de sus raíces x_1,x_2. Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 3.	Considere el grupo S_4 de permutaciones de los cuatro elementos $\{1,2,3,4\}$.	
	(a)	Determine el subconjunto de S_4 que deja invariante el número 2. Justifique	Conocimiento común
	(b)	El subconjunto que deja invariante al 2 y al 4. Justifique	Conocimiento ampliado
	(c)	El subconjunto de permutaciones del grupo S_4 que deja invariante a la función $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2+x_3x_4$ Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	¿Los subconjuntos anteriores son subgrupos? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 4.	El subgrupo de permutaciones regular de $n-$ símbolos, mueve los $n-$ símbolos excepto la identidad.	
	(a)	Encuentre el subgrupo regular de cuatro símbolos. Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(b)	¿Qué nombre recibe este subgrupo? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	¿El subgrupo es conmutativo? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	¿A qué grupo puede ser isomorfo el subgrupo del enunciado (a)? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 5.	Divida el polinomio $3x^5 +4x^4 +2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$. Los coeficientes de los polinomios pertenecen al conjunto $(Z_5,+_5)$.	
	(a)	¿Elcocientecorrespondea?Justifique	Conocimiento ampliado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	(b)	¿El residuo corresponde a? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(c)	¿En qué grupo se trabaja la división de los coeficientes? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	¿Qué propiedades o conceptos de Teoría de grupos, aplicó para dar respuesta a las preguntas anteriores? Justifique	Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 6.	Dado el conjunto $A_2 := \{1,2,3,\ldots,99\}$ de los $z-$ números y la función $r : \mathrm{N} \to A_2$ que reduce un número natural a un número del conjunto A_2 tal que $r(n) = n$ para $n <$ 100 y para $n > 100$ se separan las cifras de a dos de derecha a izquierda, luego, se suman las cantidades y al resultado se le aplica nuevamente r, por ejemplo: $r(214) = r(2+14) = r(16) = 16$; $r(5298) = r(52 + 98) = r(150) = r(1+50) = r(51) =$ 51. Se define además, en el conjunto A_2 la operación $x \oplus y = r(x + y)$.	
	(a)	Solucione $x \oplus 17 = 99$ y diga que propiedades utiliza para dars olución a la ecuación.	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(b)	¿Existe el elemento identidad en $(A_2,\oplus)$? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	¿A qué grupo conocido, puede ser isomorfo $(A_2,\oplus)$? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	¿Qué $z\_$ números son divisibles por 3 en el conjunto $(A_2,\oplus)$? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 7.	Sea $(G,\cdot)$ un grupo con elemento identidad e. La función $f : G \to G$ tal que $x \to axa^2$ para cada $x \in G$ y para un elemento fijo $a \in G$. Se tiene que f es un homomorfismo si cumple: (conteste Verdadero o Falso y justifique).	
Tarea	**Subítems**	**Consigna**	**Categoría del CDM**

	(a)	El grupo es Abeliano.	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(b)	$a = e$	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(c)	$a^2 = a$ y el grupo es abeliano.	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado
	(d)	$a^3 = e$ y el grupo es abeliano	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
			Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 8.	Sea $G = \langle A,B\rangle \leq GL(2, \mathbb{C})$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	
	(a)	Determine los elementos de G. Justifique	Conocimiento común
	(b)	¿G es grupo abeliano? Justifique	Conocimiento común
	(c)	Determine el subgrupo de orden 2. Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	¿Cuál es la operación en $GL(2, \mathbb{C})$ y cuál es la operación en G? Justifique	Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 9.	Sea $(R,\bullet)$ el conjunto de los números reales y se define la operación $\bullet$ por: $a \bullet b = 3a + 4b$	
	(a)	¿La operación $\bullet$ cumple la propiedad de clausura? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(b)	¿La operación $\bullet$ es asociativa? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
	(c)	¿Existe el inverso del elemento 2? Justifique	Conocimiento común
			Conocimiento ampliado
Tarea	**Subítems**	**Consigna**	**Categoría del CDM**

	(d)	¿En el conjunto R^2 defina una operación en la cual no exista el elemento identidad? Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 10.	Sea el grupo $(Z_6,+_6)$ de los enteros módulo 6.	
	(a)	Dé un subgrupo con 3 elementos. Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado
	(b)	Escriba un subconjunto de $(Z_6,+_6)$ que no sea subgrupo. Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(c)	¿Es Z_3 un subgrupo de Z_6? Justifique	Conocimiento común Conocimiento ampliado Conocimiento especializado
	(d)	Elabore la tabla de operación para el conjunto $(Z_6,+_6)$	Conocimiento común Conocimiento especializado

Tarea	Subítems	Consigna	Categoría del CDM
	TAREA 11.	Sea el grupo $k-4$ de Klein, dado por la relación $a^2 = b^2 = c^2 = e^2 = e$.	
	(a)	Construya la tabla para la operación multiplicativa del grupo.	Conocimiento común
	(b)	Construya el grupo cociente con $H = \langle a \rangle$ Justifique	Conocimiento ampliado
	(c)	¿Qué condición cumple el subgrupo H para determinar el grupo cociente? Justifique	Conocimiento ampliado
	(d)	Liste los elementos de la clase bH. Justifique	Conocimiento ampliado Conocimiento especializado

4.5.3.1. Análisis del Conocimiento Común del Contenido

Según Godino (2009) y Vásquez (2014), el conocimiento común del contenido se relaciona con los conocimientos matemáticos que no son propios de la enseñanza y que posee cualquier persona para resolver situaciones-problemáticas propias de un nivel educativo, en este caso el nivel universitario y en relación con el objeto Grupo. Para analizar el conocimiento común del contenido de los estudiantes de formación matemática se diseñaron los subítem (ver, tabla 4.15); **1a), 2d), 3a), 4a), 5b), 6a), 6b), 6c), 6d,7a), 7b), 7c), 7d), 8a), 8b), 9a), 9b), 9c), 9d), 10a), 10b), 10c), 10d) y 11a)** que representan el 55 por ciento de los subítems del cuestionario (44 en total).

Según Godino, Batanero & Font (2007), este conocimiento no es observable, pero se analiza del conjunto de prácticas realizadas por los estudiantes, al dar respuesta a las situaciones problemáticas que se le plantean y obtener así, algunos indicadores empíricos, que permiten evaluar el conocimiento común del contenido (Vásquez, 2014). En esta dirección, se presentan en la figura 4.10 y según la tabla 4.15 los subítems que permitieron evaluar la categoría del conocimiento común del contenido de los estudiantes de formación matemática.

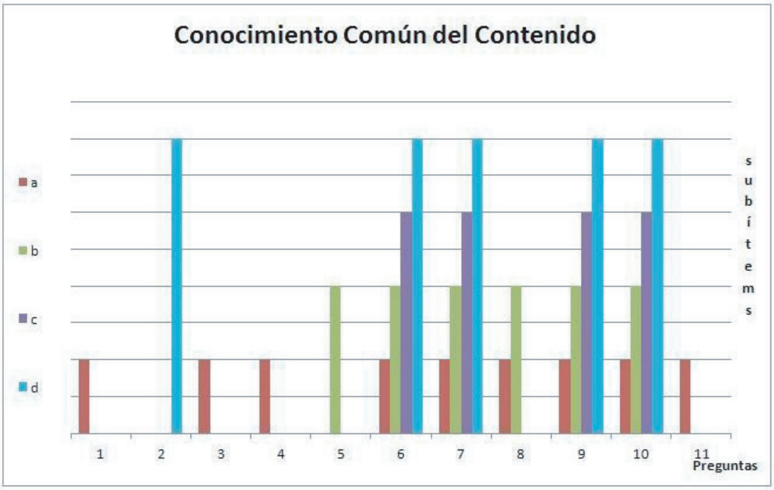


Figura 4.10: Subítems del Conocimiento Común del Contenido

En esta dirección, se presenta el análisis de algunos de los subítems que permitieron evaluar el Conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009) de los estudiantes de Formación Matemática, en la categoría del *Conocimiento Común del Contenido -CCC* y en relación con el objeto matemático Grupo, según la aplicación del cuestionario *CDM-Grupo*.

Análisis del subítem 1a)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, específicamente, sobre los subgrupos del grupo; para lo cual se solicitó a los estudiantes dar un ejemplo de un subgrupo del grupo y justificar (bajo algún criterio conocido), por qué el subconjunto dado es subgrupo.

Tabla 4.16: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 1a)

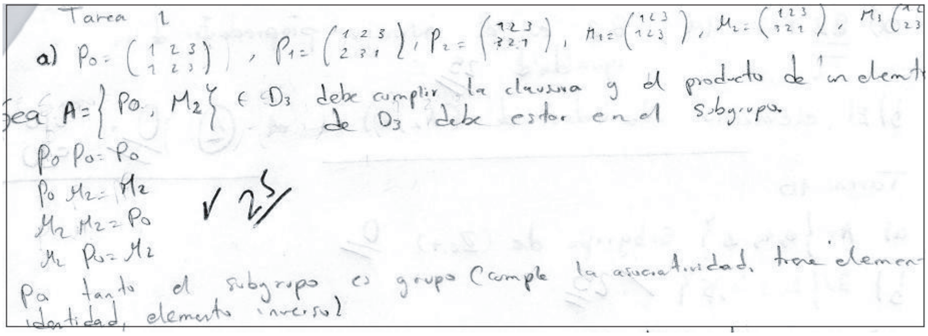
Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observó de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que del 93.75 por ciento de los estudiantes que dieronrespuestaalsubítem,solo el 31.25 por ciento lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 4.7, se observó de las respuestas, que los **estudiantes no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes dieron respuesta al subítem, el 88 por ciento aproximado, lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 4.9, se observó de las respuestas, que los estudiantes **no tuvieron dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento de los estudiantes (4) dieron respuesta al subítem, en forma correcta.

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas de los estudiantes de formación matemática, se muestra en la tabla 4.15 la clasificación de las respuestas que permitieron inferir algunos de los aspectos relacionados con la comprensión del estudiante, de los subgrupos del grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero.

Tabla 4.17: Tipos de respuestas al subítem 1a)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
Respuesta 1: El subgrupo del grupo $(D_3, \circ)$ corresponde a: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	5 estudiantes que representan el 14 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática: 4 estudiantes del grupo $G1$ representan el 25 por ciento del grupo y el 11.1 por ciento de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento en el grupo $G3$ y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican, probando la propiedad de clausura, asociatividad, existencia del elemento identidad y de los inversos.
Respuesta 2: El subgrupo del grupo $(D_3, \circ)$ corresponde a $\{A, B, C\}$ $A=$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B=$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $C=$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	2 estudiantes que representan el 6 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante del grupo G1 que corresponden al 6.25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática; 1 estudiante de Matemáticas que representa el 25 por ciento de los estudiantes del grupo y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican, probando la propiedad de clausura.
Respuesta 3: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	1 estudiante, que representa el 6.25 por ciento en el grupo $G1$ y el 3 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica, probando la propiedad de clausura con los elementos del subconjunto.
Respuesta 4: $\langle \rho_0 \rangle = \{\rho_0\}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	5 estudiantes del grupo $G2$ que representan el 31 por ciento y el 14 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican, argumentando que los generadores del grupo son subgrupos del grupo; un subgrupo es el generado por la identidad.
Respuesta 5: El centralizador para de la permutación identidad $C(R_0)$.	2 estudiantes del grupo G3 que representan el 50 por ciento en el grupo y el 5.5 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican, argumentando que R_0 conmuta con todos los elementos de D_3; que R_0 es el centralizador de D_3.
Respuesta 6: $\{R_0, R_1, R_2\}$ las rotaciones respecto al eje de simetría	2 estudiantes del grupo G3 que representan el 50 por ciento y el 5.5 por ciento de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con la propiedad de clausura para los elementos en el segundo caso; el primer estudiante no justifica.

A continuación, se presenta en la figura 4.11 la respuesta del estudiante de Licenciatura en Matemáticas, LM15 del grupo G1.


Tarea 1

Sea $A = \{\rho_0, \mu_2\} \in D_3$ debe cumplir la clausura y el producto de un elemento de D_3 debe estar en el subgrupo.

$\rho_0 \rho_0 = \rho_0$

$\rho_0 \mu_2 = \mu_2$

$\mu_2 \mu_2 = \rho_0$

$\mu_2 \rho_0 = \mu_2$

Por tanto el subgrupo es grupo (cumple la asociatividad, tiene elemento identidad, elemento inverso)

Figura 4.11: Respuesta al subítem 1a -CCC- estudiante LM15

En cuanto al Conocimiento Común del Contenido del estudiante de Licenciatura en Matemáticas LM15, se evidencia la comprensión del grupo $(D_3,\circ)$de simetrías del triángulo equilátero al presentar sus elementos y en cuanto a los subgrupos del grupo, al probar que el conjunto $\{\rho,\mu\}$ forma subgrupo. De la tabla 4.5 de respuestas y del grado de corrección de las preguntas, se observa que en general los estudiantes tiene una comprensión de los subgrupos del grupo $(D_3,\circ)$.

Análisis del subítem 2d)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes.

Tabla 4.18: Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática - subítem 2d)

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observó de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 4.7, se observó de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 18.75 por ciento de los estudiantes (3) dieron respuesta al subítem, el 18.75 por ciento lo hizo en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 4.9, se observó de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, ningún estudiante (4) lo hizo en forma correcta.

Después de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas que permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes de la relación existente entre las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ y sus coeficientes se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 4.19.

Tabla 4.19: Tipos de respuestas subítem 2d)

Conocimiento Común del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
Respuesta 1: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $c = (x^2 a + b)^2 \pm b^2 + 4a$	1 estudiante del grupo *G*1 que corresponde al 6.25 por ciento en el grupo y al 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 2: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\frac{-bx \pm \sqrt{(-bx)^2-4x^2c}}{2x^2}$ $\frac{(-bx_2) \pm \sqrt{(bx_1)^2-4x_1^2c}}{2x_1^2}$	1 estudiante del grupo *G*1 que corresponde al 6.25 por ciento en el grupo y al 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 3: $(x + x_1)(x + x_2) = 0$ donde $x_1 x_2 = c$ $x_1 + x_2 = b$ $x_1 = -x$ $x_2 = -x$ $(-x)(-x) = c$ $x^2 = c$ $-x + -x = b$ $-2x = b$	3 estudiantes del grupo *G*2 que corresponden al 19 por ciento del grupo y al 8 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con el procedimiento.
Respuesta 4 : No se entiende el enunciado; no entendí	3 estudiantes del grupo *G*1 que corresponden al 19 por ciento aproximado del grupo y al 8 por ciento del grupo de estudiantes de formación matemática.

En la figura 4.12 se presenta la respuesta de un estudiante de Licenciatura del grupo G2.

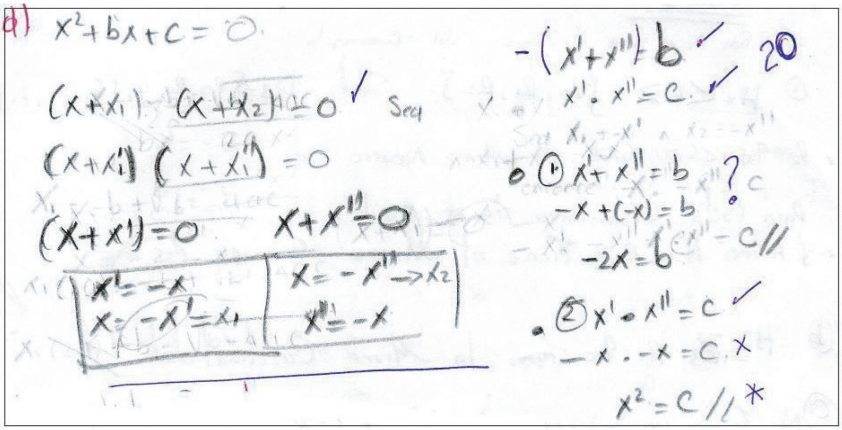


Figura 4.12: Respuesta al subítem 2d -CCC- estudiante LM32

En cuanto al Conocimiento Común del Contenido, del estudiante LM32, se evidencia de la notación y las representaciones de las raíces de la ecuación, la comprensión del estudiante de la relación entre las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$ y de sus coeficientes, aunque la misma notación presenta dificultades al estudiante, al llamar por un lado x_1 una raíz y por otra parte la llama x' igual sucede con la segunda raíz. En cuanto a las dificultades de los estudiantes se observa de las tablas 4.1 y 4.11 que solo el 8% de los estudiantes de formación matemática comprenden la relación entre los coeficientes de una ecuación de segundo grado y sus raíces.

4.5.3.2. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Común del Contenido

A partir del análisis efectuado en la sección anterior, se considera que en general los estudiantes de formación matemática, presentan grandes debilidades, en relación con el conocimiento común del contenido, ya que, presentan un conocimiento deficiente, según la escala establecida para los niveles de dominio del conocimiento, cuando se analizan las prácticas algebraicas. Estos niveles de dominio se tomaron en relación con el índice de dificultad de cada una de las preguntas: en esta dirección, el CCC de los estudiantes resultó en algunos casos muy deficiente para la mayoría de los subítems que permitieron evaluar este conocimiento sobre el objeto Grupo, a excepción de los siguientes subítems, lo cual se considera como un conocimiento común básico del contenido (se observa nuevamente que las últimas preguntas que se reorganizaron de la prueba piloto resultaron nuevamente con niveles de dificultad media que es lo que se espera de los cuestionarios de evaluación):

Subítem 1a) mide un nivel básico (medianamente fácil o pregunta fácil según la escala de clasificación para medir el índice de dificultad de la pregunta) el cual les permite determinar un subgrupo del grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero, aunque para el grupo de Licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 31 por ciento aproximado.

Subítem 10b) mide un nivel básico al relacionarse de igual forma, con los subconjuntos del grupo $(Z_6,+_6)$ de los enteros módulo 6, que no cumplen con la propiedad de ser subgrupo.

Subítem 10d) corresponde a un nivel básico al solicitar la tabla de operación para los elementos del grupo $(Z_6,+_6)$. Los otros subítems que miden este tipo de conocimiento presentan un muy bajo porcentaje de respuestas correctas como se evidencia en el análisis de los subítems del apartado anterior.

En la figura 4.13 se muestran los porcentajes de las respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de formación matemática, de acuerdo con la variable *grado de corrección* de los subítems que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido. Se observa que para este tipo de conocimiento predominaron en los tres grupos las *respuestas incorrectas,* ya que, en promedio por subítems, las respuestas correctas para el subítem 1a) corresponde al 73% en promedio aproximado: para el subítem 10b) el 42% aproximado y para el subítem 10d) el 50%, pero en general, considerando los tres grupos y según los subítems que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido, las *respuestas correctas no superaron el 15 por ciento*.

En la figura 4.14 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el conocimiento común del contenido, correspondiente a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas parcialmente correctas, en promedio es muy poco y corresponde al 5.5 por ciento.

Según la figura 4.13 y 4.14 para el grupo de Licenciatura - G1, las *preguntas correctas* no superaron el 11 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, el porcentaje de respuestas correctas no superó el 16 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de matemáticas, este porcentaje de respuestas correctas no superó el 26 por ciento: se observa que en este tipo de conocimiento común predominaron en los tres grupos, las respuestas incorrectas, ya que en el promedio general de los subítems que permitieron evaluar el conocimiento común del contenido, el porcentaje de respuestas correctas no supera el 18 por ciento.

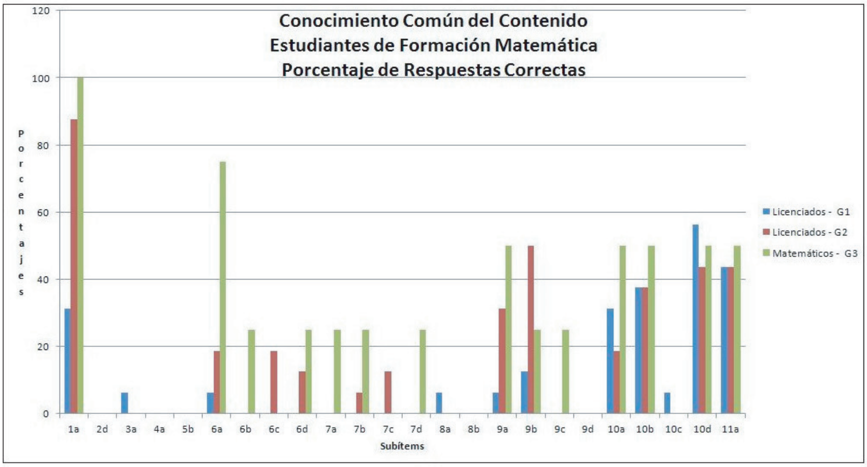


Figura 4.13: Conocimiento Común del Contenido - respuestas correctas

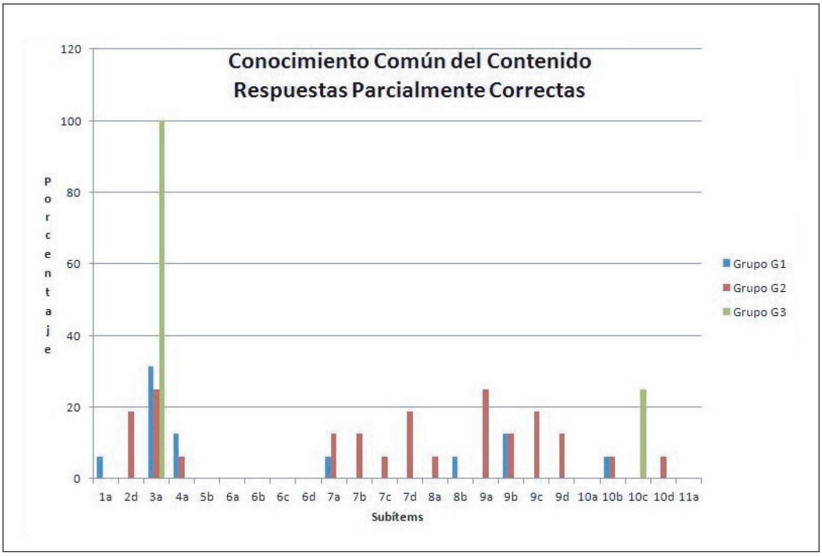


Figura 4.14: Conocimiento Común del Contenido - respuestas parcialmente correctas

En esta dirección, el porcentaje de las preguntas parcialmente correctas (ver, figura 4.14) es muy bajo (5.5% en promedio): en el grupo de Licenciatura G1, el aporte es de 3.4% en respuestas parcialmente correctas; en el grupo de Licenciatura G2 de un 7.8% y en el grupo de Matemáticos G3 el porcentaje corresponde a 5.5% en promedio: por tanto, este aporte no proporciona mayor información en la valoración de la categoría del Conocimiento Común del contenido, ya que, en general, este no supera el 23 por ciento (corresponde al 22 por ciento). En este sentido, se deben diseñar estrategías que permitan potenciar el CCC en los estudiantes de formación matemática, en especial se deben introducir en los cursos de Teoría de Grupos todos los significados del objeto Grupo, determinados a partir del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico para introducir la metodología propuesta por la fenomenología (Freudenthal) en busca de sentido para el objeto grupo.

4.5.3.3. Análisis del Conocimiento Ampliado del Contenido

Este tipo de conocimiento al igual que el Conocimiento Común del Contenido, se relaciona con los conocimientos matemáticos del estudiante que no se direccionan necesariamente a la enseñanza. El Conocimiento Ampliado del Contenido-CAC se refiere a los conocimientos matemáticos más avanzados en el currículo que el profesor debe poseer en relación con un determinado tema: para el caso, corresponde a conocimientos sobre el objeto Grupo. Por tanto, se espera que el profesor universitario de Teoría de Grupos, adquiera en su preparación universitaria, una comprensión de las propiedades de los grupos, para aplicarlas luego a cualquier conjunto dado, en el cual se define una operación binaria interna y con la finalidad de orientar a sus estudiantes en la realización de las diferentes situaciones problemáticas que se proponen en los libros de texto de la asignatura de Teoría de Grupos.

Para analizar el Conocimiento Ampliado del Contenido que poseen los estudiantes de formación matemática, se analizaron subítems que permitieron evaluar algunos de los aspectos de este conocimiento didáctico-matemático, sobre el objeto de investigación. Según la tabla 4.15 y el cuestionario final, se tienen las siguientes consignas respecto al conocimiento del objeto Grupo de los estudiantes de formación matemática (ver, figura 4.15): **1b), 1c), 1d), 2a), 2b), 2c), 2d), 3b), 3c), 3d), 4a), 4b), 4c), 4d), 5a), 5b), 5c), 5d), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c), 7d), 8c), 9a), 9b), 9c), 9d), 10a), 10b), 10c), 11b), 11c) y 11d)** que constituyen el 84 por ciento de los subítems del cuestionario *CDM-Grupo* (de 44 subítems).

Según Godino, Batanero & Font (2007) este conocimiento, al igual que el conocimiento común del contenido, no se puede observar, pero se pueden utilizar las prácticas realizadas por los estudiantes al dar respuesta a las situaciones problemáticas que se les plantean y obtener así algunos indicadores empíricos, que permitan evaluar el conocimiento ampliado del contenido (Vásquez, 2014). En esta dirección, se presentan algunos análisis a las respuestas que se relacionan con la categoría de conocimiento ampliado del contenido.

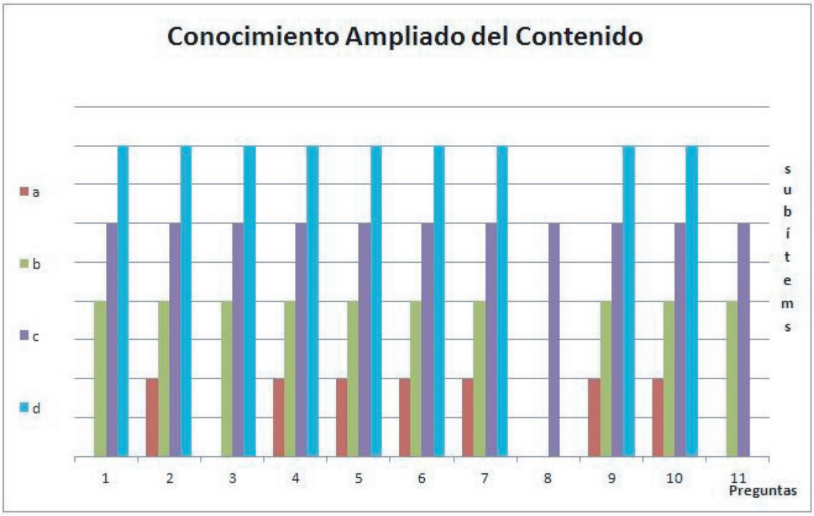


Figura 4.15: Subítems del Conocimiento Ampliado del Contenido

Análisis del subítem 5

Con este ítem se buscaba evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre el grupo $(Z_5[x],+_5)$ de polinomios con coeficientes en el grupo $(Z_5[x],+_5)$.

Análisis del subítem 5a)

Con este subítem se buscba evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(Z_5[x],+5)$ del polinomio $3x^5 +4x^4 +2x^3 + x2 +4x +1$ en el polinomio $2x^3 +3x^2 +4x +1$ y la determinación del cociente.

Tabla 4.20: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16 estudiantes)por ciento de los estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma incorrecta	Según la tabla 4.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 porciento de los estudiantes(16) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma incorrecta.	Según la tabla 4.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Luego de analizar las prácticas matemáticas presentes en las respuestas, se llegó a la clasificación que se muestra en la tabla 4.21. Estas prácticas permitieron indagar sobre la comprensión de los estudiantes de formación matemática en relación con la división del polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y en el grupo $(Z_5[x], +_5)$ para determinar el cociente de la división.

Tabla 4.21: Tipos de respuestas al subítem 5a)

Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática	Porcentajes
Respuesta 1: $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x$	2 estudiantes del grupo G1 que representan el 12.5 por ciento del grupo y al 6 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifican con el procedimiento para hallar el cociente.
Respuesta 2: $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$	3 estudiantes que representan el 19 por ciento aproximado de los estudiantes del Grupo G1 y el 8 por ciento aproximado, de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el cociente.
Respuesta 3 : 1	1 estudiante del grupo G2 que representa el 6.25 por ciento del grupo y al 3 por ciento aproximado, del grupo de estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento.
Respuesta 4: $1 + x$	1 estudiante que corresponde al 6 por ciento aproximado, de los estudiantes del Grupo G2 y el 3 por ciento aproximado de los estudiantes de formación matemática.
	Justifica con el procedimiento para hallar el cociente.

A continuación se presenta en la figura 4.16, la respuesta del estudiante de Licenciatura LM29.

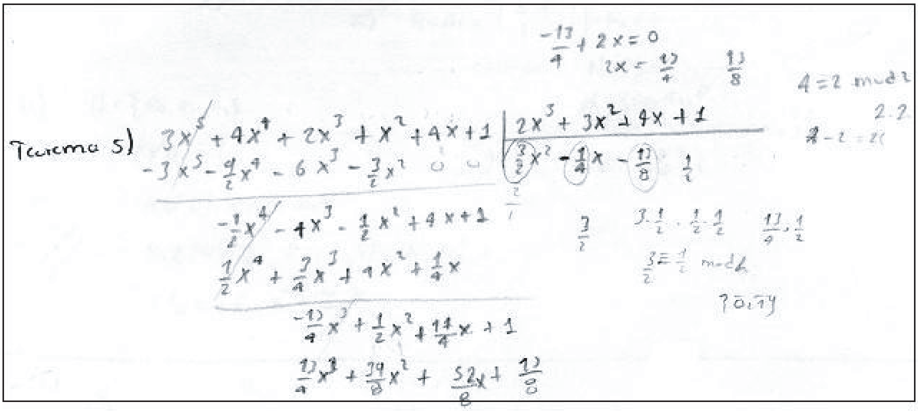


Figura 4.16: Respuesta al subítem 5a -CAC- estudiante LM29

En relación con el Conocimiento Ampliado del Contenido del estudiante LM29, se evidencia que el estudiante no comprende la operación de división en el grupo $(Z_5[x],+_5)$ del polinomio $3x^5+4x^4+2x^3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ para determinar el cociente. En general se establece de las tablas 4.5, 4.7 y 4.9, que los estudiantes de formación matemática no comprenden la división de polinomios en el grupo $(Z_5[x],+_5)$ ya que operan en el grupo (Q,+). En esta dirección se establece que los estudiantes tienen un bajo nivel de dominio de la división en el grupo $(Z_5[x],+_5)$ resultando la pregunta difícil para ellos.

Análisis del subítem 5b)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento *común del contenido y el conocimiento ampliado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática sobre la división en el grupo $(Z_5[x],+_5)$ del polinomio $3x^5+4x^4+2x3+x^2+4x+1$ en el polinomio $2x^3+3x^2+4x+1$ y la determinación del residuo.

Tabla 4.22: Conocimiento ampliado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 (16estudiantes)porcientodelos estudiantes que dieron respuesta lo hicieron en forma incorrecta	Según la tabla 4.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 porcientodelosestudiantes(16) que dieron respuesta al subítem, lo hicieron en forma incorrecta.	Según la tabla 4.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento (4 estudiantes) respondieron en forma incorrecta.

Respecto al Conocimiento Común del Contenido y al Conocimiento Ampliado del Contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de las tablas 4.5, 4.7, 4.9 y 4.22, que los estudiantes no comprenden la división de polinomios en el grupo $(Z_5[x],+_5)$ donde se solicita dividir el polinomio $3x^5 + 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 1$ en el polinomio $2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ y determinar el residuo. En general para los estudiantes de formación matemática resulta difícil dividir polinomios en el grupo $(Z_5[x],+_5)$ y por tanto se establece que ellos tienen un bajo nivel de dominio respecto a la división de polinomios en el grupo dado.

4.5.3.4. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido

A partir del análisis realizado al CAC, se considera que en general los estudiantes de formación matemática, presentan *grandes debilidades* al igual que con el conocimiento común, ya que, presentan un conocimiento deficiente y en algunos casos muy deficiente respecto al nivel de dificultad determinado del cuestionario final, donde desarrollaron situaciones problemáticas relacionadas con el Conocimiento Ampliado del Contenido (ver, Figura 4.17 y 4.18): la mayoría de los subítems que permiten evaluar este conocimiento resultaron difíciles para los estudiantes (menos del 25% en el nivel de dificultad) a excepción de los siguientes subítems que se consideran como un conocimiento ampliado básico de los estudiantes de formación matemática:

Subítem 1b) que corresponde a un nivel medio del conocimiento, al determinar un subgrupo de grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero y determinar un grupo al cual puede ser isomorfo. En el grupo de Licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 18.75 por ciento (3 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2, al 50 por ciento (8 estudiantes) y en grupo de Matemáticos, el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general de 56.25 en el subítem (dificultad media que es lo que se espera de un ítem de evaluación).

Subítem 1c) que corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento, al determinar que el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no tiene un subgrupo isomorfo al grupo $(Z_4;+_4)$ de los enteros módulo 4, al aplicar el Teorema de Lagrange. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 56.25 por ciento (9 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2 al 37.5 por ciento (6 estudiantes) y en grupo de Matemáticos al 0 por ciento para un promedio general de 42% (dificultad media del ítem relacionada con un nivel medio de dominio del conocimiento Ampliado).

Análisis del subítem 1d) que corresponde a un nivel de dominio medio del conocimiento, al determinar que el grupo $(D_3,\circ)$ de simetrías del triángulo equilátero no cumple la propiedad de ser cíclico. En el grupo de Licenciatura - G1 este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 12.5 por ciento (2 estudiantes), en el grupo de estudiantes de licenciatura G2 al 43.75 por ciento (7 estudiantes) y en grupo de Matemáticos el 100 por ciento (4) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 52 por ciento en el subítem (dificultad media, que es lo que se espera en un ítem de evaluación).

Análisis del subítem 10d) que corresponde a un nivel medio de dominio del conocimiento Ampliado de los estudiantes, al construir la tabla de operación para los elementos del grupo (Z_6,$+_6$) de los enteros módulo 6. En el grupo de los estudiantes de licenciatura - G1, este porcentaje de respuestas correctas corresponde al 56.25 por ciento (9 estudiantes), en el grupo de Licenciatura G2, al 43.75 por ciento (7 estudiantes) y en grupo de Matemáticos, el 50 por ciento (2) de los estudiantes respondió en forma correcta, para un promedio general del 50 por ciento en el subítem (dificultad media del ítem).

En la figura 4.18 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el Conocimiento Ampliado del contenido, que corresponden a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas en promedio es muy bajo, ya que, corresponde al 8 por ciento aproximado, siendo representativo el subítem 1c) con el 46%; 10b) con el 42 por ciento y el 10d) con el 50 por ciento aproximado: en el grupo G1 el porcentaje de respuestas parcialmente correctas es del 7%; en el grupo G2 del 9 por ciento y de igual forma en el grupo de Matemáticos.

Como conclusión, se deduce de la figura 4.17 y 4.18 que en el grupo de Licenciatura - G1, las preguntas correctas no superaron el 7.2 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, este porcentaje no superó el 12 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de Matemáticas este porcentaje no superó el 22 por ciento: así, en general el porcentaje de respuestas correctas no superó el 14 por ciento aproximado. En la figura 4.17 se muestran los porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de Formación matemática de acuerdo a la variable *grado de corrección* de los subítems que permitieron evaluar la categoría del CAC. Se observa que para este conocimiento, predominan en los tres grupos, las respuestas incorrectas; con las excepciones del subítem 1c) donde el porcentaje corresponde al 46%; en el subítem 10b) el 42% aproximado y en el subítem 10d) el 50%, pero en promedio y considerando los tres grupos de estudiantes las respuestas correctas no superaron el 14 por ciento y las respuestas parcialmente correctas no superaron el 8 por ciento, así, la categoría del conocimiento ampliado del contenido, el porcentaje de respuestas "correctas y parcialmente correctas" no superó el 22 por ciento, al igual que en la categoría del conocimiento común del contenido.

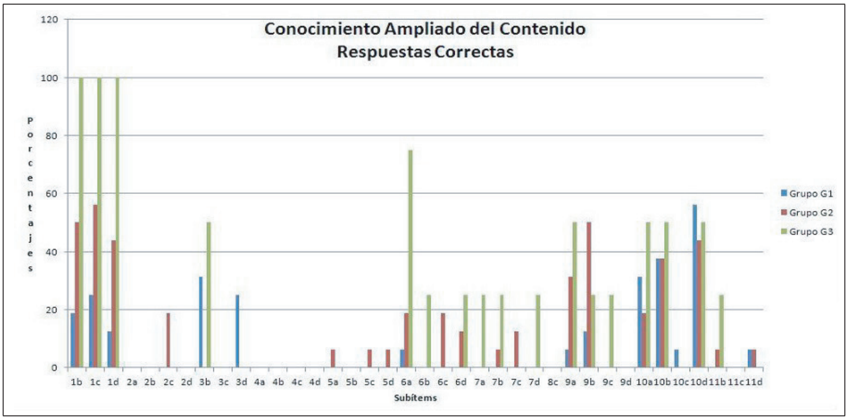


Figura 4.17: Conocimiento Ampliado del Contenido - respuestas correctas

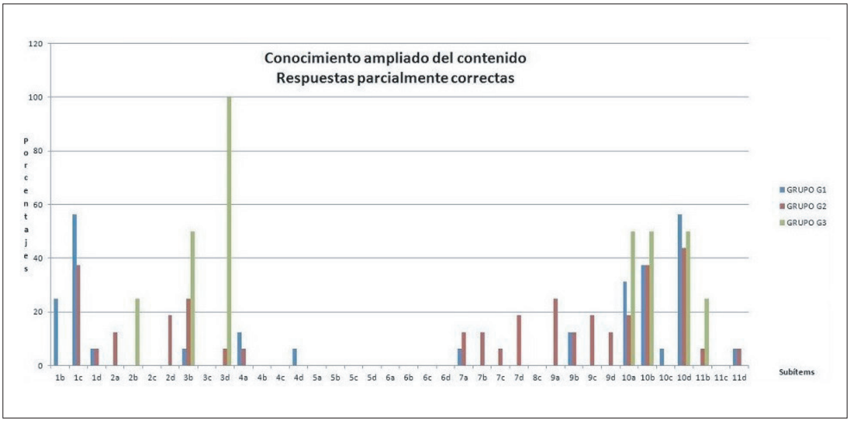


Figura 4.18: Conocimiento Ampliado del Contenido - respuestas parcialmente correctas

9.5.3.5. Análisis del Conocimiento Especializado del Contenido

Este conocimiento según Pino-Fan, Godino & Font (2013a, 2013b), corresponde al conocimiento extra, que distingue al profesor de otros profesionales que no son profesores pero que tienen una preparación afín en matemáticas: se refiere al conocimiento especializado del contenido matemático en cuestión, para el cual es necesario que el profesor tenga en cuenta tanto la diversidad de significados y la diversidad de objetos y procesos que conllevan dichos significados (Vásquez, 2014).

Para evaluar el conocimiento especializado del contenido, se tiene presente la reflexión epistémica de los estudiantes de formación matemáticas sobre los conceptos o propiedades que se ponen en juego en la solución de la situaciones problemáticas planteadas. Para esto, se diseñaron distintas situaciones problemáticas que daban respuesta a la pregunta ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas utiliza para dar solución al problema planteado?. De acuerdo con Godino (2009), para responder a este tipo de pregunta, los estudiantes de formación matemática (futuros profesores) tienen que identificar los distintos conceptos o propiedades involucrados en la solución de la situación problemática planteada.

En esta dirección, para analizar el conocimiento especializado del contenido sobre el objeto Grupo que poseen los estudiantes de formación matemática, se diseñaron subítems donde se pregunta por los conceptos o propiedades para solucionar una situación problemática y corresponden a los subítems: **1a), 1b), 1c), 1d), 3d), 4a), 4b), 4c), 4d), 5c), 5d), 6a), 6b), 6c), 6d), 7a), 7b), 7c), 7d), 8d), 9d), 10b), 10c), 10d)** (55% de las preguntas del cuestionario).

Al igual que con el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido, este conocimiento no se puede observar, pero se pueden utilizar las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes para dar respuesta a las situaciones problemáticas planteadas y obtener de esta forma, algunos indicadores empíricos, que permitieron evaluar el CEC, al igual que el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido (Godino, Batanero & Font (2007); Vásquez, (2014).

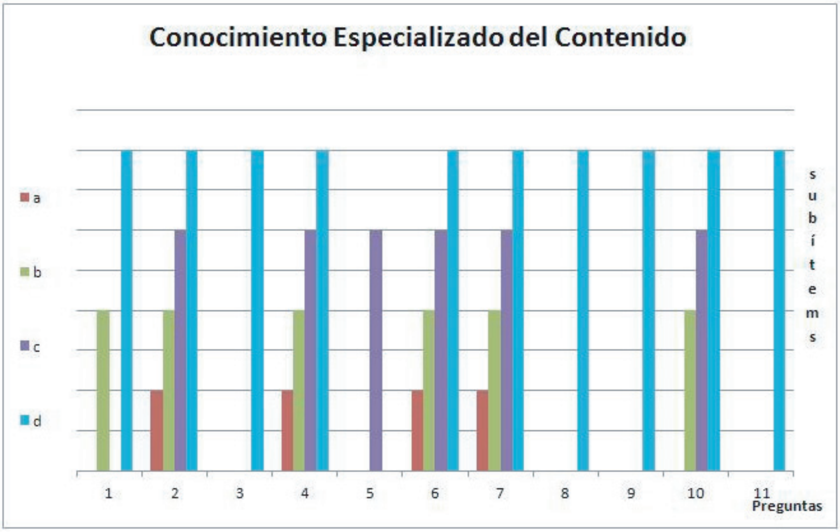


Figura 4.19: Subítems del Conocimiento Especializado del Contenido

En esta dirección, se presenta el análisis de algunos de los subítems, que se relacionan con la categoría de conocimiento especializado del contenido.

Análisis del subítem 10

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo (Z_6,$+_6$) de los enteros módulo 6.

Análisis del subítem 10b)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo (Z_6,$+_6$) de los enteros módulo 6, al determinar un subconjunto que no fuera subgrupo.

Tabla 4.23: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situaciónproblemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correctay 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 4.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron dificultades** para resolver la situaciónproblemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes que dieron respuesta, 6 (37.5 por ciento) lo hicieron en forma correctay 1 (6.25 por ciento) en forma parcialmente correcta.	Según la tabla 4.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron dificultades** para resolver la situaciónproblemática, ya que, el 50 por ciento (2 estudiantes) respondieron en forma correcta.

Respecto al Conocimiento Común; el Conocimiento Ampliado y el Especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática, se observa de las tablas 4.5, 4.7, 4.9 y 4.23 que para los estudiantes la propiedad de ser subconjunto y no ser subgrupo en el grupo (Z_6,$+_6$) de los enteros módulo 6, resultó de una dificultad media, por tanto se establece un nivel de dominio medio del conocimiento especializado respecto a la propiedad de ser un subconjunto pero no subgrupo del grupo. Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo (Z_6,$+_6$).

Análisis del subítem 10c)

Con el ítem se buscaba evaluar *el conocimiento común; el conocimiento ampliado y el especializado del contenido,* en relación con la comprensión de los estudiantes de formación matemática del grupo (Z_6,$+_6$) de los enteros módulo 6 y determinar que el grupo Z_3 no es un subgrupo del grupo Z_6.

Tabla 4.24: Conocimiento especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática

Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G1	Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas - G2	Estudiantes de Matemáticas - G3
Según la tabla 4.5, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 (16 estudiantes) por ciento de los estudiantes dieron respuesta a la pregunta 1 (6.25 por ciento) lo hizo en forma correcta.	Según la tabla 4.7, se observa de las respuestas, que los **estudiantes tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, el 100 por ciento de los estudiantes (16) dieron respuesta al subítem, en forma incorrecta.	Según la tabla 4.9, se observa de las respuestas, que los estudiantes **tuvieron grandes dificultades** para resolver la situación problemática, ya que, del 100 por ciento (4) de los estudiantes que respondieron la pregunta solo 1 (25 por ciento) lo hizo en forma parcialmente correcta.

4.5.3.6. Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Especializado del Contenido

Se considera que en general, los tres grupos de estudiantes de formación matemática, presentan *grandes debilidades* en relación con el conocimiento especializado del contenido al igual que con el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido, ya que, presentan un conocimiento deficiente y en algunos casos muy deficiente, de la mayoría de los subítems que permitieron evaluar esta categoría del conocimiento didáctico-matemático, a excepción de los siguientes subítems que se consideran como un conocimiento especializado básico, de los estudiantes de formación matemática, lo que corresponde a un nivel de dominio medio: **Subítem 1a), 1b), 1c) y 1d)**.

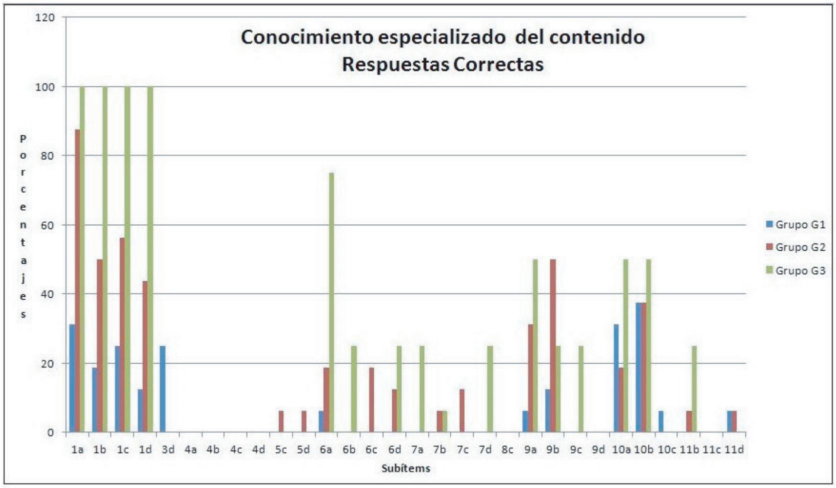


Figura 4.20: Conocimiento Especializado del Contenido - respuestas correctas

En la figura 4.21 se presentan las respuestas parcialmente correctas de los subítems relacionados con el conocimiento especializado del contenido, que corresponden a los tres grupos de estudiantes de formación matemática. El aporte de estas preguntas, en promedio es muy poco y corresponde al 5 por ciento aproximado en general, siendo representativo el subítem 1c) con un 31% y el 3d) con un 35 por ciento aproximado, pero en promedio, con este aporte, la categoría del conocimiento especializado del contenido en los estudiantes de formación matemática no supera el 22 por ciento, aproximado.

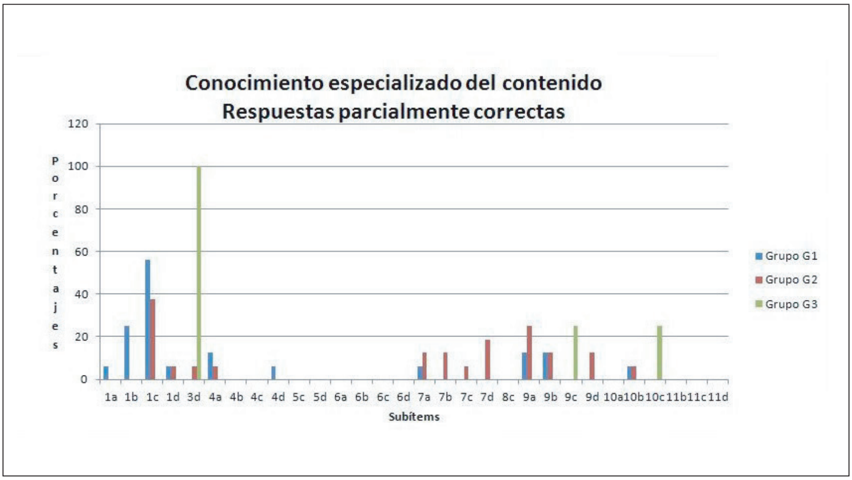


Figura 4.21: Conocimiento Especializado del Contenido - respuestas parcialmente correctas

Como conclusión, se infiere de la figura 4.20 y 4.21 que en el grupo de Licenciatura-G1, las preguntas correctas no superaron el 7.29 por ciento aproximado; en el segundo grupo de Licenciatura, el porcentaje de respuestas correctas no superó el 16 por ciento aproximado y en el grupo de estudiantes de Matemáticas este porcentaje de respuestas correctas no superó el 27 por ciento. En la figura 4.20 se muestran los porcentajes de respuestas correctas para cada uno de los grupos de estudiantes de formación matemática de acuerdo con la variable *grado de corrección* de los subítems que evalúan el conocimiento especializado del contenido. Se observa que para este tipo de conocimiento, predominaron en los tres grupos, las respuestas incorrectas, ya que, en promedio por subítems, las respuestas correctas para el subítem 1a) corresponden al 73% en promedio aproximado; para el subítem 1b) el 56% aproximado; para el 1c) el 60% aproximado y para el subítem 10b) el 42%, pero el promedio general para los tres grupos de estudiantes y según los subítems que evalúan el conocimiento especializado del contenido, las respuestas correctas no superaron el 17.01 por ciento (en esta dirección las preguntas resultaron difíciles según la escala establecida para el índice de dificulta de las preguntas) y en general las respuestas correctas y las parcialmente correctas no superaron el 22 por ciento aproximado al igual que para la categoría del conocimiento común del contenido y la del conocimiento ampliado del contenido.

Capítulo 5

Conclusiones generales

5.1. Introducción

Se describen los resultados de los estudios realizados para el logro de cada una de las fases de la investigación que condujeron al logro del objetivo general del estudio, el cual buscaba evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático de los estudiantes de formación matemática, en relación con el objeto Grupo, para determinar si se había generado o potenciado, un conocimiento común y un conocimiento ampliado del contenido como base del conocimiento especializado, necesario para la enseñanza universitaria idónea del objeto Grupo.

5.2. Primera fase de la investigación

En la *primera fase de investigación,* se realizaron las actividades conducentes al logro del objetivo específico (1) que daba respuesta a la pregunta ¿Cuál es el significado global del objeto matemático Grupo? y corresponde a la determinación de los significados parciales del objeto de investigación los cuales emergen precisamente del "estudio histórico, epistemológico y fenomenológico".

Los significados identificados según las etapas de evolución del objeto grupo, emergen según la figura 2.6. la cual se determina a partir de la identificación de las configuraciones epistémicas de cada etapa de evolución de la estructura grupo.

5.3. Segunda fase de la investigación

En la *segunda fase de la investigación*, se realizaron las actividades conducentes al logro de los objetivos específicos: (2) Reconstrucción del significado global de referencia del objeto grupo; (3) Caracterización del significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto sugeridos para los programas de la asignatura Teoría de grupos (4 libros) y (4) Caracterización del significado del objeto Grupo, pretendido por los programas de la asignatura de Teoría de Grupos para los estudiantes de formación matemática.

Para la reconstrucción del significado global del objeto grupo, se describieron los significados parciales que emergen de la caracterización (prácticas matemáticas, configuración de objetos y procesos que se activan en dichas prácticas) los cuales se determinaron a partir del "estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, el cual proporcionó la información sobre el proceso de evolución del objeto Grupo a lo largo de la historia; de igual forma se analizaron las problemáticas más relevantes que dieron origen a las configuraciones epistémicas identificadas. Con este estudio se evidencia en primer lugar, la complejidad del objeto matemático Grupo, el cual presenta serias dificultades a los estudiantes; tanto en el proceso de aprendizaje, como con el de enseñanza.

Como conclusión del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico, emerge el significado epistémico - global del objeto Grupo que corresponde a: Un grupo $(G,*)$ es un conjunto G, cerrado bajo una operación $*$ donde se cumplen los siguientes axiomas:

1) *Para todo* $a,b,c \in G$ *se tiene:* $(a * b)*c = a *(b *c)$. *Asociatividad de* $*$.
2) *Existe un elemento* $e \in G$ *tal que para todo* $x \in G$, $e * x = x * e = x$. *Elemento identidad* e *para* $*$.
3) *Para cada* $a \in G$, *existe un elemento* $a' \in G$ *tal que* $a * a' = a' a = e$ *Inverso* a' *de* a.

5.3.1. Caracterización del significado del objeto grupo pretendido por los programas de estudio

Del análisis de los contenidos mínimos del programa de Teoría de Grupos para los estudiantes de *Licenciatura*, se observa en la unidad (1) del programa curricular, que el *significado* "institucional - referencia" (corresponde al subsistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas que son considerados en la institución como adecuadas y características para resolver problemas pretendidos del objeto matemático), corresponde al significado de Grupo como *Grupo Abstracto,* el cual hace referencia al conjunto donde se define una operación binaria que cumple con los axiomas de: clausura de la operación definida, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos en el conjunto, para cada elemento del conjunto. Este significado corresponde al significado Global del objeto matemático.

Otro significado "institucional" que se pretende y que se infiere de la unidad (5) del programa para los estudiantes de formación matemática, corresponde al significado de Grupo como *Conjunto de Permutaciones*. En esta unidad se establece el estudio de los grupos alternantes, los grupos de permutaciones S_n y se estudian los grupos Diédricos D_n como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo S_n de permutaciones de elementos de un conjunto finito.

De igual forma, del programa de Teoría de Grupos,se evidencia que los significados pretendidos para el objeto matemático según los **contenidos mínimos** presentados corresponden a: Grupo, en el contexto de *Grupo Abstracto* y Grupo como *Conjunto de permutaciones* de elementos de un conjunto finito. Sin embargo, la resolución 2769 de 2003 dada por el Ministerio de Educación Nacional para los programas de ciencias naturales, ubica a la Teoría de Grupos dentro del área disciplinaria "fundamentada en la apropiación por parte del estudiante de los contenidos y métodos de su disciplina que le permitan participar en labores investigativas fundamentadas en la *epistemolog*ía y en las prácticas científicas propias de su campo". En este sentido, la **epistemología,** como rama de la filosofía interesada por el conocimiento científico, plantea cuestiones fundamentales de las que se deduce que *el estudiante de Matemáticas y de Licenciatura* debería dar respuesta a preguntas tales como: ¿Cuáles son los orígenes del conocimiento científico? (¿empírico? ¿racional?), ¿Cuáles son los criterios de validez del conocimiento científico? (¿Capacidad de predecir sucesos? ¿Consistencia lógica?), ¿Cuál es el carácter del proceso de desarrollo del conocimiento científico? (¿Acumulación y continuidad? ¿Períodos de ciencia normal, revoluciones científicas y discontinuidad? ¿Desplazamiento y refinamiento de programas científicos?

La preguntas propuestas, se formulan en términos generales o específicas con respecto a algún dominio particular del conocimiento científico como las matemáticas y aún más específico como en el caso de la Teoría de Grupos y específicamente para el objeto Grupo: cuestiones tales como ¿Cuáles son las fuentes del significado de ese conocimiento? ¿Cómo se constituye el significado del objeto matemático? (Sierpinska, A. & Lerman, S., 1996, p. 829). Así, de los lineamientos dados por el Ministerio de Educación Nacional, se concluye, que el estudiante de Matemáticas y de Licenciatura, debe tener un conocimiento del objeto Grupo de los diversos contextos de su uso, esto es, como *conjunto de Permutaciones, en aritmética modular, en Teoría de ecuaciones algebraicas, en Teoría de Matrices y en su significado Abstracto e incluso sobre el Grupo de Galois, Grupos de Klein, Grupos de Lie, Grupos cristalográficos, Grupos Puntuales y Grupos aplicados a la Física, entre otros.*

5.3.2. Significado del objeto grupo pretendido por los libros de texto

El significado del objeto grupo pretendido por los cuatro libros de textos analizados para la asignatura Teoría de Grupos corresponden a:

El texto de Gallian (1990), introduce el objeto Grupo: primero, como un conjunto especial, donde se define una operación que cumple ciertas *propiedades* algebraicas; es decir, se introduce el objeto en su *significado Abstracto*. En la lección que se analizó también se observó que uno de los significados dados al objeto matemático corresponde, al *significado en Aritmética Modular de los conjuntos* Z_n. Y en la siguiente lección del texto, se introduce el objeto grupo a partir del estudio de los "Grupos de Simetrías de polígonos regulares - D_n" es decir desde su significado como *Conjunto de Permutaciones,* que corresponde históricamente al primer significado dado al objeto matemático.

Por su parte, el *texto* de Herstein (1999), introduce el objeto grupo a partir del estudio del conjunto $A_{(S)}$ con S un conjunto finito y que para el caso, se nota como el grupo S_n o grupo de Simetrías o de permutaciones de grado n, al igual que el texto anterior para finalmente, introducir el objeto en su significado Abstracto.

El *texto* de Lezama (2012), introduce el objeto matemático, a partir del estudio de las *propiedades* que cumple la operación definida en el conjunto; así, se inicia con el estudio de las estructuras algebraicas: pirmero como un semigrupo (cuando la operación $*$ es asociativa) y en la medida que la operación $*$ va adquiriendo más propiedades, dicha *estructura* se va haciendo más rica y las posibilidades de operar en el conjunto denominado G se hacen mayores (Lezama, 2012); así, si en el semigrupo además existe un elemento identidad respecto a la operación $*$ entonces, el conjunto adquiere la estructura de Monoide y a partir del Monoide en la lección 2, se introduce el *objeto* de Grupo en su *significado de Grupo Abstracto*. Se observa que también se propone el estudio del objeto matemático a partir del conjunto de aplicaciones $Apl(X)$ con la operación compuesta como una *situación problemática* con estructura de semigrupo y a partir de este conjunto se introduce el significado de grupo como *Grupo de Permutaciones* al trabajar con el conjunto de las funciones biyectivas y la operación compuesta en las funciones.

Finalmente, el *texto* de Caicedo (2003), introduce el objeto Grupo al igual que el texto de Lezama, a partir de la determinación de las *propiedades* que tiene la operación definida en el conjunto: para este caso los conjuntos numéricos con las operaciones usuales; especialmente, se estudia el conjunto de los números enteros con la suma y el conjunto de los reales positivos con el producto verificando las cuatro propiedades o axiomas de grupo.

Aquí se introduce el objeto Grupo en su *significado abstracto* como un conjunto con una operación que cumple las propiedades de: clausura, asociatividad, existencia de un elemento identidad y existencia de elementos inversos para cada elemento del conjunto. De igual forma, se introduce el objeto Grupo desde su significado como *Conjunto de Permutaciones* al definir el conjunto $B(S)$ de funciones biyectivas con la operación compuesta de funciones al igual que el texto de Lezama.

Así, en general se observa que en los cuatro textos se introduce el objeto grupo desde el estudio de los *Grupos de Permutaciones*, definido por el conjunto de funciones biyectivas de un conjunto en sí mismo y en este punto se establece la importancia del estudio de estos grupos S_n de orden n y de los grupos D_n de simetrías de los polígonos regulares como subgrupos isomorfos a subgrupos del grupo. Además, se observó que el significado pretendido por los textos para el objeto Grupo, corresponde finalmente al *significado de Grupo Abstracto*.

Como conclusión al análisis de textos, se evidencia que no se introducen los significados de grupo como: Grupo de Galois, Grupo de Lie, Grupos de Klein, Grupos

Cristalográficos, Grupos puntuales y algunos de los grupos aplicados en la Física, dejando estos tópicos en algunos casos como materias de profundización como para el caso de los Grupos de Galois, sin llegar a abordar los otros grupos.

5.4. Tercera fase de la investigación

La *tercera fase de la investigación* correspondió a las actividades orientadas al logro de los objetivos específicos: (5) Selección de las tareas para evaluar el conocimiento común, ampliado y especializado del contenido de los estudiantes de formación matemática; (6) Diseño e implementación del cuestionario piloto para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los estudiantes de formación matemática respecto al objeto Grupo; (7) Implementación del cuestionario *CDM-Grupo* para evaluar el conocimiento común, el conocimiento ampliado: como bases de un conocimiento especializado de los estudiantes de formación matemática y finalmente, (8) Análisis de las categorías del CDM en su dimensión epistémica.

5.4.1. Caracterización de la faceta epistémica del CDM

Se planteó como uno de los objetivos de la investigación, la caracterización de las categorías del conocimiento común y conocimiento ampliado del contenido, como conocimientos bases para potenciar el desarrollo de un conocimiento especializado del contenido necesario para la labor de la enseñanza del objeto matemático. Según Godino, (2009); Pino-Fan, (2013), Vásquez, (2014) **el conocimiento común del contenido** se relaciona con los conocimientos matemáticos que no son propios de la enseñanza; que posee cualquier persona para resolver situaciones-problemáticas propias del nivel educativo, en este caso del nivel universitario y en relación con el objeto Grupo.

Como conclusión, se establece que el conocimiento común del contenido, se relaciona con el desarrollo de procesos del pensamiento algebraico avanzado de los estudiantes; este desarrollo del pensamiento matemático es uno de los objetivos que se buscan en la educación de los primeros grados hasta el nivel superior: en la educación universitaria, procesos como abstraer, generalizar, sintetizar, representar, definir, refutar, entre otros, toman gran relevancia.

De igual forma, en la categoría del **conocimiento ampliado del contenido;** que se relaciona con los conocimientos matemáticos del estudiante que *no se direccionan necesariamente a la enseñanza* y que también se relacionan con el desarrollo de procesos del pensamiento algebraico avanzado, teniendo presente que las prácticas desarrolladas por los estudiantes corresponden a prácticas algebraicas y este desarrollo del pensamiento es o debe ser uno de los objetivos pretendidos en la Educación Superior. Es claro, que este conocimiento se relaciona con conocimientos matemáticos más avanzados del currículo que se deben potenciar para establecer conexiones con otros temas, por tanto, se espera que se puedan potenciar en cierto grado o nivel, en la formación universitaria inicial.

Finalmente, la categoría del **conocimiento especializado del contenido** que según Pino-Fan, Godino & Font, (2013a, 2013b), se relaciona con el *conocimiento extra que distingue al profesor de otros profesionales que no son profesores* pero que tienen una preparación afín en matemáticas. Con este conocimiento especializado, el profesor tiene en cuenta tanto la diversidad de los significados, así como la diversidad de los objetos y procesos que conllevan dichos significados (Vásquez, 2014), es decir el profesor es conocedor del desarrollo de procesos del pensamiento matemático avanzado necesarios para la comprensión de los objetos matemáticos y lo que es más importante: para lograr esa comprensión por parte de los estudiantes, que seguramente serán futuros profesores. Para evaluar el conocimiento especializado del contenido, se tiene presente la reflexión epistémica de los estudiantes de formación matemáticas sobre los conceptos y propiedades que se ponen en juego en la solución de la situaciones problemáticas planteadas. Para esto, se diseñaron y reformularon distintas situaciones-problemáticas que buscaban dar respuesta a preguntas como: ¿Qué conceptos o propiedades matemáticas usó para dar solución al problema planteado? que, de acuerdo con Godino (2009), los estudiantes para responder a este tipo de pregunta, tendrán que identificar los distintos conceptos o propiedades involucradas en la solución de la situación problemática planteada.

A partir del análisis a las categorías de la faceta epistémica del CDM se determinaron una serie de indicadores para evaluar el CDM a través de prácticas matemáticas (algebraicas) propuestas para la activación de las configuraciones epistémicas de los estudiantes de formación matemática. Un problema en la Educación básica y media (secundaria) en el contexto Colombiano se relaciona con los concursos docentes realizados por el Ministerio de Educación Nacional, donde se vinculan a profesionales en diversas áreas según pruebas establecidas. Se plantea la hipótesis que estos profesionales han desarrollado un CCC y CAC que les permite acceder como docentes al Sistema Educativo Colombiano y que el mismo sistema considera ciertos conocimientos como básicos y necesarios para el desarrollo del CEC necesario para la enseñanza. De igual forma, en el ámbito universitario se puede plantear la misma hipótesis, ya que los estudiantes ingresan como docentes de las escuelas de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas y por tanto se espera que estos estudiantes tengan unos conocimientos básicos que les permitan ir adquiriendo la experiencia necesaria (CEC) para la labor de la enseñanza universitaria.

En esta dirección, es importante contar con instrumentos que permitan evaluar la dimensión epistémica del CDM para determinar el nivel que se ha potenciado en los estudiantes respecto al CCC y al CAC como conocimientos básicos para el desarrollo del CEC, necesario para la enseñanza.

5.4.2. Análisis de la dimensión epistémica del CDM de los estudiantes de formación matemática

Según el análisis a las prácticas matemáticas efectuadas por los estudiantes de formación matemática (2 grupos de Licenciados y 1 grupo de Matemáticos) respecto al objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes tienen *grandes dificultades* en relación con el **Conocimiento Común del Contenido**, a excepción del conocimiento de prácticas matemáticas para solucionar las situaciones problemáticas planteadas en los siguientes subítems: conocimiento que se considera como **conocimiento común básico** de los estudiantes de formación matemática: **Subítem 1a), 10b), 10d).**

En esta categoría del Conocimiento Común del Contenido se considera que en general los estudiantes presentan *debilidades* en los conocimientos del objeto matemático, estas **debilidades o dificultades** se relacionan con un bajo nivel de dominio. Según el índice de dificultad de las preguntas, se evidencian estas dificultades: en especial con los conocimientos relacionados con los subítems 2d), 4a), 5b), 8b) y 9b) donde el porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde al 0 por ciento, identificándose como índices de mayor grado de dificultad para los estudiantes.

Bajo la misma perspectiva, del análisis a las prácticas matemáticas de los estudiantes de formación matemática con el objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes presentan al igual que con el Conocimiento Común del Contenido, dificultades (índice de dificulta alto de los conocimientos relacionados con el subítem) en relación con el **Conocimiento Ampliado del Contenido** respecto al objeto Grupo, a excepción del conocimiento Ampliado de los siguientes subítems: conocimiento que se considera como **conocimiento ampliado básico** de los estudiantes de formación matemática: **Subítem 1b), 1c), 1d), 10d).**

En la categoría del Conocimiento Ampliado del Contenido se considera, que en general los estudiantes presentan *grandes debilidades* relacionadas con un *nivel de dominio muy bajo o deficiente* respecto al índice de dificultad del subítem según la escala establecida para el índice, donde 0 índica el mayor grado de dificultad y 1 el mayor grado de facilidad y el conocimiento básico se relaciona con un índice de dificultad entre el (25% y el 75%). En especial en los subítems 2a), 2b), 2d), 3c), 4a), 4b), 4c), 4d), 5b), 8c), 9d) y 11c) presentaron grandes dificultades, hecho que se evidencia del porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde a un 0 por ciento, ya que no desarrollaron ninguna práctica matemática.

De igual forma, de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de formación matemática (2 grupos de Licenciatura y 1 grupo de Matemáticas) respecto al objeto Grupo, se considera que en general los estudiantes presentan *grandes dificultades* en relación con el **Conocimiento Especializado del Contenido,** a excepción del **conocimiento especializado básico** de los subítems: **Subítem 1a, 1b), 1c), 1d), 10b).** En esta categoría del Conocimiento Especializado del Contenido se considera que la mayoría de los estudiantes presentan **debilidades o dificultades** relacionadas con un bajo nivel de dominio o un dominio deficiente del subítem según el índice de dificultad: en especial de los subítems 4a), 4b), 4c), 4d), 8c), 9d), 11c), 11d) donde el porcentaje de respuestas correctas y parcialmente correctas corresponde a un 0 por ciento, ya que no desarrollaron ninguna práctica matemática (mayor índice de dificultad del subítem).

Se establece que los tres grupos de estudiantes, presentaron dificultades en relación con el CCC, CAC y por tanto del CEC; ya que presentan un conocimiento bajo en la mayoría de los subítems que permitieron evaluar las categorías del conocimiento didácticomatemático. En general el grupo de licenciatura G1 presenta el más bajo nivel de dominio del conocimiento didáctico-matemático (respecto al índice de dificultad de los subítems), en la dimensión epistémica de este conocimiento y en relación con el objeto Grupo (programa de licenciatura nocturno) en orden ascendente continúa el grupo de licenciatura G2 (programa diurno) y finalmente, se encuentra, el grupo de matemáticas así, al igual que en la prueba piloto este grupo presenta el mayor nivel de desempeño del conocimiento, respecto al objeto Grupo según el índice de dificultad de los subítems.

Referencias

Abel, N. (1824). Mémoire sur les equations algébriques, oul' on demontres l'impossibilité de la resolution de l'aquation générales du cinquiéne degré. J. reine angew. Math. 4, 131-156, 1829. Reprinted as Ch. 25 In Abel, N. H. Oeuvres complètes, tome 1. J. Gabay, (pp. 478-507), 1992.

Aldana, E. (2011). Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la teoría "APOE" .(Tesis doctoral). Universidad de Salamanca. España.

Arias, F. (1999). *El proyecto de Investigación: Guía para su elaboración.* (3a. ed.). Caracas: Episteme.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, M., Morics, S. & Oktac, A. (1997). Development of students understanding of cosets, normality and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 241-309.

Asiala, M., Brown, A., Kleiman, J. & Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journalof Computers for Mathematical Learning, 3*(1), 13-43.

Ayres, F. & Jaisingh, R. (2005). *Theory and Problems of Abstract Algebra.*(2a. ed.). Schaum's outline series. McGraw Hill: New York.

Azcárate, C. (1996). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. En Bishop, A., Clements, A., Keitel, CH., Kilpatric, J. & Laborde, C. (Eds.), *International Handbook of Mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publischer.

Azcárate, C. & Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del análisis matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 135-149.

Ball, D. (2000). Bridging practices. Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator.* 14-22.

Ball, D., Lewis, J. & Thames, M. (2008). Making mathematics work in school. *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph 14, A Study of Teaching: Multiple Lenses, Multiple Views.

Ball, D., Lubienski, S., & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4a. ed.). New York: Macmillan.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special. *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barallobres, G. (2001). Contribución en el Foro Indimat realizada el 28 de Nov 2001. http://listserv.rediris.es/archives/indimat.html.

Bedoya, E. (2002). Formación de profesores de matemáticas: Funciones, Sistemas de Representación y Calculadoras Graficadoras. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.

Bishop, E. Schizophrenia in contemporary mathematics. In Murray Rosenblatt, editor, *Errett Bishop: Reflections on Him and His Research*, vol. 39 of Conte, pages 1(32). American Mathematical Society, 1973.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Leung, F. (eds.). (2003). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brewer, J., & Hunter, A. (1989). *Multimethod research: A synthesis of styles.* Newbury Park, CA: Sage.

Brousseau G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática.* Universidad Nacional de Córdoba. Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning Binary Operations, Groups, and Subgroup. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 187 - 239.

Buendí, L., Colás, B., Hernándiez, F. (1988). *Métodos de investigación en Psicopedagogía*. McGraw-Hill, Madrid.

Caicedo, J.F. (2003). *Introducción a la Teoría de Grupo*. Publicación de la Universidad Nacional de Colombia. Santa Fé de Bogotá.

Campos, A. (2007). *Huellas en los encuentros de Geometría y Aritmética.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Cardeñoso, J., Flores, P. & Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.). Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro. (pp. 233-244). Granada, España: Universidad de Granada.

Carter, K. (1990). Teachers' knowledge and learning to teach. En R. Houston(ed.).*Handbook of Research on Teacher Education.* Nueva York: Macmillam, 291-310.

Cohen, L. Manion, L & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*. (5a. ed.). London: Routledge Falmen. Taylor & Francis Gruop.

Clandinin, J. (1986). *Classroom Practices. Teacher Images in Action.* The Palmer Press: Londres.

Chavarría, S. L. (2014). De las ecuaciones a la Teoría de Grupos, algunos obstáculos epistemológicos. Tesis de pregrado. Licenciatura en Matemáticas y Física. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Santiago de Cali. Cali.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Ed. Aique, 1997.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par unne approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Crocket, B. (1983). Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles. These de 3eme cycle, Mathématiques Grenoble: Université de Grenoble.

Dávila, R. G. (2002). El desarrollo del álgebra moderna. Parte I: El álgebra en la antigüedad. *Apuntes de Historia de las Matemáticas, 1*(3), 5-21.

Dávila, R. G. (2003a). El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra de las ecuaciones. *Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2*(1), 27-37.

Dávila, R. G. (2003b). El desarrollo del álgebra moderna. Parte III: El surgimiento del álgebra abstracta. *Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2*(3), 38-78.

D'Amore, Font & Godino. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma, XXVIII,*(2), 49-77.

De la Peña, J. A. (2011). Las revoluciones de Galois. *Miscelánea Matemática. SMM, 53,* 39-53. Recuperado de http://www.miscelaneamatematica.org/Misc53 /5304.pdf.

Descartes, R. (1596). The Geometry of René Descartes. Traslated from the French and Latin by David Eugene Smith and Murcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En, A. J. Bishop et al. (Ed.), *Mathematical Knowledge: It's Growth Throught Teaching.* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer A.P.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En: Tall, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking.*

Dubinsky, E. (1997). *On Students' Understanding of Cosets, Normality and Quotient Groups*, International Conference on Technology in College Mathematics: Chicago.

Dubinsky, E., Leron, U. (1994). *Learning Abstract Algebra with ISETL*. New York: Springer- Verlang.

Dubinsky, E., Leron, U., Dautermann, J., & Zazkis, R. (1994) On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics, 27*(3), 267-305.

Edwards, B. S., Dubinsky, E. & McDonald, M. (2005). *Advanced mathematical thinking. Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25.

Elbanz, F. (1983). Teacher thinking. A study of practical knowledge. London: Croom-Helm.

Elmore, R. (1992). Why Restructuring Alone Won't Improve Teaching. *Educational Leadership, 49* (2), 44-48.

English, L., Bartolini-busi, M., Jones, G., Lesh, R. & Tirosh, D. (2002). *Handbook of International research in mathematics education*.London: Lawrence Erlbaum Ass.

Fennema, E. & Franke, M. (1992). Teachers' knowledge and its impact In D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing.

Font, V. & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,*(69), 33-52.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Font, V., Godino, J. D. & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics,*(82), 97-124. The final publication is available at www.springerlink.com.

Font, V., Planas, N. & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

Franke, L. M. K., & Battey, D.(2007) Understanding teaching and clasroom practice in mathematics. In F.K. Lester, Jr. (Ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age.

Frege, G. (1998a). Función y concepto. En L. M. Valdés (Ed.), Ensayos de semántica y filosofía de la lógica (pp. 53-79). Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1998b). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica*(pp. 123-139). Madrid: Tecnos.

Frege, G. (1998c). Sobre sentido y referencia. En L. M. Valdés (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-111). Madrid: Tecnos.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Riedel, P.C.

Gallian, J.(2006). *Contemporary Abstract Algebra.* (8a. Ed.) USA: Brooks/cole.

Gairín, S. (2001). *Una interpretación de las fracciones egipcias desde el recto del papiro de Rhind. LLULL, 24,* 649-684.

García, M.(1992). *Como conocen los profesores la materia que enseñan. Algunas contribuciones de la investigación sobre conocimiento didáctico del contenido.* Ponencia presentada al Congreso "Las didácticas específicas en la formación del profesorado". Santiago, 6-10 de julio, 1992.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática. *Researches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática,*(20), 13-31.

Godino, J.D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Brasil: XIII CIAEM-IACME, Recife.

Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J.

Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education, 39*(1/2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, XXVII,*(2), 221-252.

Godino, J., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Researches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M. & Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

Godino, J. & Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. In B. Ubuz, . Haser & M. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (pp. 33253326). Antalya, Turkey: CERME.

Godino, J., Rivas, M. & Castro, W. (2008). *Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution.* , México: ICME 11, Topic Study Group 27, Monterrey.

Godino, J., Castro G., W., Aké, L. & Wilhelmi, M. (2012). Naturaleza del Razonamiento algebraico Elemental. *Bolema, 26*(42B), 483-511.

Gómez, P. (s.f.) *Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/394/1/GomezP05-2797

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada. España.

Grossman, P., Wilson, S. & Shulman, L. (1989). Teachers of Substance: Subject Matter Knowledge for Teaching. En M. Reynolds (Ed.). *Knowledge Base for the Beginning Teacher* (pp. 23-36). New York: Pergamon Press.

Harel, G. & Sowder, L. (2005). *Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 27-50.

Hart, L., Smith, S., Swars, S., & Smith, M. (2009). An examination of research methods in mathematics education. *Journal of Mixed Methods Research*(30), (pp. 26-41). doi:10.1177/1558689808325771.

Hart, E. (1994). Analysis of the proof writing performance of expert and novice students in elementary group theory. In E. Dubinsky & J. Kaput (Eds.), *Research Issues in Mathematics Learning: Preliminary Analyses and Results.*

Hazzan, O. (1996). On topological properties of functions. *For the Learning of Mathematics, 16*(3), 39-42.

Hazzan, O. (1999). Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(1), 71-90.

Hazzan, O. & Leron, U. (1996). Students' Use and Misuse of Mathematical Theorems: The Case of Lagrange. *For the Learning of Mathematics, 16*(1), 23-26.

Herstein, I. N. (1999). *Abstract Algebra*. (3a. Ed.). New York: Wiley.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39* (4), 372-400.

Hill, H., Ball, D., Sleep, L. & Lewis, J. (2007). Assessing Teachers' Mathematical Knowledge: What Knowledge Matters and What Evidence Counts? In F. Lester (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Education* (2a. Ed.) (pp. 111-155). Charlotte, NC: Information Age Publishi.

Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), Proc. 3rd Conf. for European *Research in Mathematics Education*. Bellaria: ERME.

Jiménez, E. A., Leguizamón, R. J. F. & Díaz, M. M. A. (2011). Propuesta de modelo pedagógico para formar licenciados en matemáticas. *Praxis & Saber* ISSN: 2216-0159. Tunja: Impresiones Y Publicaciones Uptc.

Johnson, B., & Turner, L. (2003). Data collection strategies in mixed methods research. In A. Tashakkori, and C. Teddlie (Eds.), *Handbook of mixed methods in social and behavioral research* (pp. 297-319). Thousand Oaks, CA: Sage.

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher, 33*(7), 14-26. doi:10.3102/0013189X033007014.

Kaput, J. (1987). Representation and Mathematics. In C. Janvier (Ed.) *Problems of representation in mathematics learning and problem solving.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. *In LESTER, F. (Ed.) Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Charlotte.* N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM,(2), 707-762.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Lezama, O. (2012). *Teoría de Grupos*. Material de trabajo. Universidad Nacional de Colombia. Dirección en internet: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001007.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. In J. P. da Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina, & C. Loureiro (Eds.) *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática*. Que formação? (pp. 47-82). Secção de Educação Matemática. SPCE: Lisboa, Portugal.

Llinares, S. & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learns. En Gutiérrez, A., Boero, P. (Eds.) *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future.* Ratterdam, 429-460.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras & L., Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. *Actas del XV Simposio de la SEIEM,* Ciudad Real, España. 429-438.

Mason, J. (1996) *Qualitative researching.* London: Sage Publications.

Millman, J. & Greene, J. (1989). The specification and development of test of achievement and ability. En R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement* (pp. 335-366). London: Macmillan.

Muñiz, J. (1994). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Pirámide. (2a. Ed.).

Muñoz, J. (2011). *Historias de Matemáticas, Abel y la imposibilidad de resolver la quíntica por radicales*. Vitória, Brasil: Programa GEPEMEM.

Nicholson, J. (1993). The development and understanding of the concept of quotient group. *Historia de la Mathemática,*(20), 68-88.

Novotná, J., Stehlíková, N. & Hoch, M. (2006). *Structure sense for university algebra*. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlínková, N. (Eds.), Proceedings 30*th*. Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Prague: PME (4), 24-256.

Novotná, J. & Hoch, M. (2008). How Structure Sense for algebraic Expression or Equations is related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 93-104.

Onwuegbuzie, A., & Johnson, R. (2004). *Validity issues in mixed methods research*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning,* 257-315. Charlotte, NC: Information Age Pub.

Piaget, J. & García, R. (2008). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia* (11 Ed.). Madrid: Siglo XXI editores.

Pietrásheñ, M. I, Trífonov, I. D. (2000). *Teoría de Grupos. Aplicación a la mecánica cuántica*. Malishenko, V. O., Sinche V. E., (trad.); Marín R., D. (Ed.). Editorial URSS.

Pérez, A. (s.f.). *Carl Friedrich Gauss (1777-1855). El príncipe de los matemáticos*. IES Salvador Dalí. Madrid. Recuperado de: http://platea.pntic.mec.es/ aperez4/ html/sigloxix/Carl

Philipp, R. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*(pp. 257-315). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Pino-Fan, L. (2013). Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Tesis Doctoral. Universidad de Granada: España.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, Nuevo León, México, 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educaçao Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2013a). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (segunda parte). *REVEMAT* Florianópolis (SC), Edición especial (dez), 1-47.

Pino-Fan, L., Godino, J. & Font, V. (2013b). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT, 8*(2), 1-49.

Pino-Fan, L., Font, V. & Godino, J. D. (2013). Exploring the epistemic facet of the didactic-mathematical knowledge required to teach the derivative. In Lindmeier, A.M. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 5*. Kiel, Germany: PME.

Planas, N. & Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para el análisis de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática, 12*(2).

Planas, N. & Setati, M. (2009). Bilingual students using their languages in the learning of mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 105-127.

Pochulu, M. & Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 361-394.

Ponte, J., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future,* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria,* 61-94. Barcelona: Horsori / ICE. ISBN 84-85840-65-8.

Puig, L. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (Freudenthal, H.)* (2a. Ed.) Traducción, notas e introducción de Luis Puig. México: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN. (Introducción y nota a la segunda edición. El método. Fracciones. Razón y proporcionalidad. El lenguaje algebraico).

Ramos, A. & Font, V. (2008). Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME, 11*(2), 233-265.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ICE - Horsori de la Universidad Autónoma de Barcelona.

Rico, L., Castro, E. & Romero, I. (1997). Sistemas de Representación y aprendizaje de estructuras numéricas. Departamento de didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. España.

Rivero, M. F. (1999). Grupos Cristalográficos Planos. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vi,*(1), 141-156.

Robert, A., & Schwarzenberger, R. (1991).Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer.

Rojas, N., Flores, P. & Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática,*(4), 47-64.

Rotman, J. (1995). Graduate Texts in Mathematics. *An introduction to the Theory of Groups*. (4a. Ed.). Springer Verlang.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge:

the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5.

Rowland, T., & Ruthven, K. (Eds.). (2011). *Mathematical knowledge in teaching*. London: Springer.

Salazar, C. (2009). Teorema Fundamental del Álgebra y sus diferentes demostraciones. Trabajo de grado para optar el título de Matemático. Pontificia Universidad Javeriana.

Sánchez, M. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* Universidad de Granada. Granada.

Schön, D. (1983). *The reflective Practitioner. How Professional Think in action*. London: Temple Smith.

Segovia, A. & Rico L. (2001). Unidades Didácticas. Organizadores. En E.Castro(Ed.): *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis, 83-104.

Selden, A. & Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Sciencies*

and Mathematics, III, 453-471.

Sepúlveda, O., (2014). *Conflictos semióticos de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, con los conocimientos previos: GCD, divisibilidad e inducción matemática, necesarios para la comprensión del objeto matemático Grupo*. Trabajo de ascenso en el escalafón universitario: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Tunja.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher,* 15(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Educational Review, 57,*(1), 1-22.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Silverman, J. & Thompson, P. W. (2008).Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), 499-511. http://dx.doi.org/10.1007/s10857-008-9089-5.

Simpson, A. & Stehlíková, N. (2006). Apprehending mathematical structure: A case study of coming to understand a commutative rin. *Educational Studies in Mathematics, 61*(3), 347-371.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F.K.

Stehlíková, N. (2004). *Structural understanding in advanced mathematical thinking.* Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta.

Sullivan, P. & Wood, B. (Eds.). (2008). *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development, 1*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer A. P.

Tall, D. & Vinner (1981). Concept image and concept definition m mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169. En D. Tall. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 66-81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (1998). Mixed methodology: Combining qualitative and quantitative approaches. Applied Social Research Methods Series, 46. Thousand Oaks, CA: Sage.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (Eds.). (2003). *Handbook ofmixed methods in social and behavioral research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Uribe, A. (2010). Notas sobre prospectiva univerisitaria. *Pensamiento Y Acción, 20,*(17), 13-21.

Uribe, A. & Soto, D. (2007). Historia de la Educación Latinoamericana. Un campo de formación doctoral en Rudecolombia. En *Revista Historia De La Educación Latinoamericana.* ISSN: 0122-7238 Bogotá: Buhos Editores.

Varela, F. (1988) Conocer las ciencias cognitivas: Tendencias y perspectivas. *Cartografía de las ideas actuales.* Barcelona: Gedisa

Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los Conocimientos Didáctico - Matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo.* Tesis Doctoral, Universitat de Girona, España.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática.* Madrid: Alianza editorial.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

Colombia. Resolución 02041/2016, por la cual se establecen las características específicas de calidad de los programas de Licenciatura para la obtención, renovación o modificación de registro calificado. Ministerio de Educación Nacional, 3 de febrero, Bogotá.

Colombia. Resolución 2769/2003, por la cual se definen las características específicas de calidad de los programas de pregrado en ciencias exactas y Naturales. Ministerio de Educación Nacional, 13 de noviembre, Bogotá.